

Накопление повреждений и деформирование волокнистых композитов

01, январь 2014

DOI: 10.7463/0114.0687557

Думанский А. М.

УДК 539.4+620.22

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

ИМАШ РАН

alduman@rambler.ru

Введение

Высокие удельные значения характеристик жесткости и прочности, сопротивление усталости и демпфирующие свойства волокнистых композитов обуславливают их ведущую роль при проектировании ответственных элементов аэрокосмической техники. Для обеспечения эксплуатационных характеристик и их надежности необходима разработка структурно-феноменологических моделей адекватно описывающих фундаментальные закономерности их механического поведения. При оценке долговечности и ресурса изделий из волокнистых композитов важность феноменологической оценки структурного состояния материала конструкции несомненна. Оценкой исчерпания ресурса материала в конструкции может служить уменьшение его жесткости, которое связывают с уровнем накопленных повреждений. Для волокнистых слоистых композитов, являющихся структурно неоднородными материалами, обладающих заметной анизотропией свойств и имеющих различные типы разрушения, оценка накопленных повреждений должна представлять векторную или тензорную величину. В соответствии с [1], в механике материалов известны два типа критериев макроскопического разрушения твердых тел. Первый тип критериев описывает разрушение тел, обладающих, линейными или нелинейными склерономными, т.е. не зависящими от времени свойствами. Второй тип критериев отражает реономность механических свойств твердых тел, для которых необходимо задание вида или времени нагружения. Второй тип критериев позволяет объяснить разрушение, происходящее вследствие многократных воздействий нагрузки. Для адекватного отражения происходящих в структуре материала процессов вследствие внешних механических воздействий необходим совместный учет, как мгновенно накапливаемых повреждений, так и повреждений развивающихся во времени. Один из вариантов определения мгновенной поврежденности рассмотрен в [2].

1. Накопление повреждений

Связь между напряжениями и деформациями с учетом накопленных повреждений ω может быть записана в следующем виде:

$$\sigma = E_0(1 - \omega)\varepsilon, \quad (1)$$

где E_0 — начальный модуль упругости. Уровень накопленных повреждений характеризует уменьшение площади поперечного сечения материала. В соответствии с выражением (1) изменение модуля упругости составит $\Delta E = E_0\omega$ и оценка уровня накопленных повреждений будет равна $\omega = \frac{E_0 - E}{E_0}$. При наличии реономных свойств начальный модуль упругости отличается от вводимого в теории упругости. По смыслу он равен модулю, который имеет место при мгновенном приложении нагрузки [3], а на практике определяется на основе соответствия результатам испытаний. Процесс накопления повреждений может быть описан с помощью соотношений дифференциального или интегрального типа. При рассмотрении уравнения дифференциального типа предполагается, что уровень повреждений изменяется от нуля в начальный момент времени до единицы в момент разрушения. Можно рассмотреть другой подход, основанный на достижении напряжениями, рассчитанными на нетто сечение, некоторого критического значения, которое приведет к катастрофическому разрушению длительность которого значительно меньше по сравнению с временем нахождения под нагрузкой. Исходя из вышеописанного, можно сформулировать условие предельного состояния заключающегося в том, что разрушение произойдет в момент достижения реальными напряжениями значения имеющего смысл прочности бездефектного материала. Аналитически это условие может быть записано в следующем виде

$$\frac{\sigma}{1 - \omega(t)} = \sigma_0,$$

где σ_0 — константа материала, которой приписывается смысл прочности бездефектного материала. Одним из критериев разрушения, позволяющих наряду с учетом вклада накопленных повреждений от напряжений, меняющихся во времени и их мгновенного (текущего) значения, является критерий силового типа, предложенный в [4]

$$\sigma(t) + M^*\sigma = \sigma_0, \quad (2)$$

где $M^*\sigma = \int_0^t M(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau$ — оператор наследственного типа, ядро которого определяет кинетику накопления повреждений. Выражение связи между уровнем накопленных повреждений и наследственным оператором $M^*\sigma$ имеет следующий вид:

$$\omega = \frac{M^*\sigma}{\sigma + M^*\sigma}. \quad (3)$$

Из выражения (3) видно, что независимо от выбора ядра уровень накопленных повреждений всегда меньше единицы. Для вычисления уровня накопленных повреждений удобно

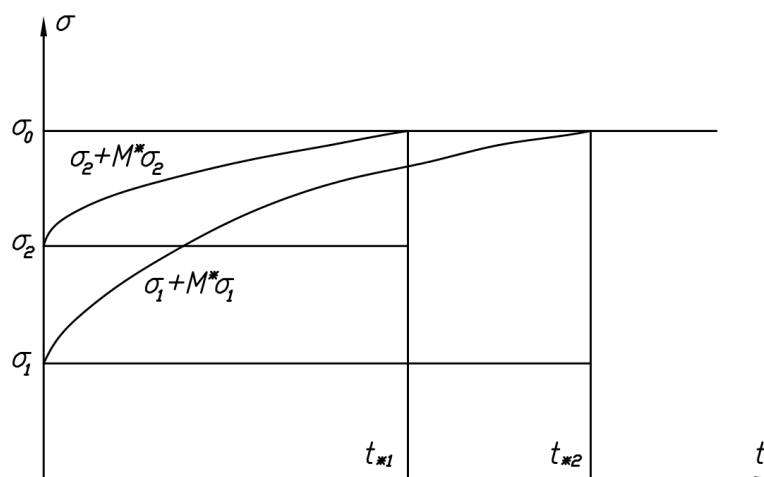


Рис. 1. Модель накопления повреждений

пользоваться получаемым из (3) следующим выражением

$$\omega(t) = 1 - \frac{\sigma(t)}{\sigma(t) + M^*\sigma}$$

В соответствии с критерием разрушения (2) процесс накопления повреждений может быть иллюстрирован (рис. 1). Критическое значение меры повреждений будет зависеть от уровня приложенного напряжения и составит $\omega_* = 1 - \frac{\sigma_*}{\sigma_0}$, где σ_* — значение напряжения в момент разрушения. Анализ связи уровня накопленных повреждений и длительной прочности ряда волокнистых материалов на полимерной основе проведен в [5]. Отметим, что с помощью ядра наследственного оператора можно учесть влияние последовательности приложения нагрузки и получать выражения для долговечности при различных режимах нагружения. В частности, можно осуществлять прогнозирование характеристик длительного разрушения при одних режимах нагружения, по параметрам, определяемым при других режимах нагружения. При длительном статическом нагружении для оператора с ядром Абеля $I_\alpha(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$, $-1 < \alpha < 0$ и $\Gamma(1+\alpha)$ — гамма-функция, $M(t) = mI_\alpha(t)$, критерий (3) принимает следующий вид:

рис.1

$$\sigma_* = \frac{\sigma_0}{1 + \frac{m}{\Gamma(2+\alpha)} t_*^{1+\alpha}}$$

Пример прогнозирования характеристик сопротивления усталости углепластика по результатам испытаний на длительное статическое нагружение приведен в [6]. На основании критерия (2) с ядром Абеля получено выражение для оценки предела ограниченной выносливости углепластика

$$\sigma_R = \frac{\sigma_0}{1 + \frac{m}{2} \left(\frac{N}{2\pi f} \right) (C_1 + C_2 R)}$$

где $C_{1,2} = \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \mp (1,5\alpha + 0,5)$; f — частота нагружения; N — число циклов до разрушения; R — коэффициент асимметрии цикла нагружения. Метод расчета и прогнозирования ани-

зотропии характеристик сопротивления усталости однонаправленного углепластика, основанный на векторном представлении повреждений, описываемых наследственными операторами, предложен в [7].

2. Деформирование композитов

Удобство и эффективность наследственного подхода заключается в том, что критерий (2) связан с определяющим соотношением данного материала и описывает часть деформации при заданном режиме нагружения, связанной с накопленными повреждениями. В общем случае деформация материала представляет собой сумму мгновенной (упругой или неупругой) деформации, вязкой - полностью обратимой и деформации, вызванной накоплением повреждений. Связь критерия разрушения (2) с определяющим соотношением представляется логичной в связи с фактом, что разрушение есть финальная стадия процесса деформирования материала.

В общем случае с учетом влияния мгновенно накопленных деформаций определяющее соотношение, связанное с критерием разрушения (2), приобретает следующий вид [4]:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t [L(t - \tau) + M(t - \tau)] \sigma(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где $\varphi(\varepsilon)$ — функция мгновенного деформирования, позволяющая описывать нелинейные свойства; ядра $L(t)$, $M(t)$ описывают процессы вязкого течения и накопления повреждений соответственно. Существенным допущением, упрощающим расчет, является условие подобия ядер операторов, описывающих накопление повреждений и вязкое течение. Отметим, что выражение (4) представляет собой нелинейное уравнение Работнова [3] и позволяет учитывать физическую нелинейность материала, не связанную с его реологическими свойствами. Влияние физической нелинейности и реологии на деформирование углепластиков рассмотрено в работах [8, 9, 10]. Основной причиной нелинейного поведения и зависимости деформации от времени однонаправленного слоя являются соответствующие свойства при сдвиге в плоскости слоя. Определяющее соотношение наследственного типа для описания реологических свойств слоя при сдвиге принимает следующий вид [8]:

$$\gamma_{12} = \frac{1}{g_{66}^0} (1 + K^*) \tau_{12}, \quad (5)$$

где g_{66}^0 — компонента матрицы жесткости, являющаяся модулем сдвига слоя; ядро оператора K^* в соответствии с (4) является суммой ядер описывающих вязкое течение и накопление повреждений. Выражение (5) может быть обращено с помощью соотношения алгебры резольвентных операторов [3]:

$$\tau_{12} = g_{66}^0 (1 - R^*) \gamma_{12},$$

где R^* — оператор резольвентный по отношению к оператору K^* .

Нелинейное определяющее соотношение подобное (5) может быть обобщено следующим образом [3]:

$$\varphi(\gamma_{12}) = (1 + K^*)\tau_{12}. \quad (6)$$

Обращение (6) приводит к выражению следующего вида: $\tau_{12} = (1 - R^*)\varphi(\gamma_{12})$. При описании физически нелинейных свойств могут быть использованы аналитические аппроксимации кривых напряжение-деформация. Одной из зависимостей при сдвиге в плоскости слоя может служить кусочно-линейная аппроксимация

$$\varphi(\gamma_{12}) = g_{66}^0 \gamma_{12} - \Delta g_{66}^{(1)} (\gamma_{12} - \gamma_{12}^{(1)}) H(\gamma_{12} - \gamma_{12}^{(1)}) - \Delta g_{66}^{(2)} (\gamma_{12} - \gamma_{12}^{(2)}) H(\gamma_{12} - \gamma_{12}^{(2)}) - \dots, \quad (7)$$

где $\Delta g_{66}^{(i)}$ представляет собой скачок производной по кривой деформирования при достижении деформацией значения $\gamma_{12}^{(i)}$.

В соответствии с (7) выражение для модуля сдвига может быть представлено в следующем виде: $g_{66} = g_{66}^0 - f$, где $f = \Delta g_{66}^{(1)} H(\gamma_{12} - \gamma_{12}^{(1)}) - \Delta g_{66}^{(2)} H(\gamma_{12} - \gamma_{12}^{(2)}) - \dots$ — функция, описывающая уменьшение модуля сдвига слоя. Подставляя полученное выражение для модуля сдвига в плоскости слоя в выражение для матрицы жесткости слоя получим

$$G_{12} = G_{12}^0 - \tilde{G}f,$$

где G_{12} и G_{12}^0 — матрицы жесткости слоя в упругом и неупругом состоянии; \tilde{G} — вспомогательная матрица для оценки нелинейного деформирования слоя [9]. В соответствии с соотношениями классической теории слоистых пластин в [9] были получены матрицы жесткости и податливости, а также определяющие соотношения для слоистых пластин, позволяющие проводить учет нелинейного деформирования слоистых пластин. В общем случае получаются выражения для матриц жесткости и податливости слоистых углепластиков с разной укладкой слоев и представляющие собой произведения соответствующих упругих матриц на корректирующие матрицы, позволяющие проводить учет влияния нелинейных и реологических свойств пакета:

$$G_{xy} = G_{xy}^0 Z_{xy}, \quad S_{xy} = P_{xy} S_{xy}^0,$$

где G_{xy}^0, S_{xy}^0 — матрицы жесткости и податливости пакета при упругости, соответствующие, G_{xy}, S_{xy} — матрицы жесткости и податливости, позволяющие учитывать влияние нелинейности или реологии, Z_{xy}, P_{xy} — матрицы, характеризующие нелинейное деформирование, удовлетворяющие условию $Z_{xy} = P_{xy}^{-1}$ и имеющие следующую структуру [9]:

$$Z_{xy} = R \operatorname{diag}(1 - \lambda_i f) R^{-1}, \quad P_{xy} = R \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1 - \lambda_i f}\right) R^{-1}.$$

Определенная ранее функция f характеризует нелинейные свойства при сдвиге в плоскости слоя, а собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеризуют нелинейные свойства пакета, определяемые укладкой слоев. Используя аналитическую аппроксимацию кривой мгновенного деформирования при сдвиге в плоскости слоя в соотношении типа (6) возможно получение определяющих соотношений наследственного типа для пакета с любой укладкой слоев.

3. Заключение

Описаны методы и критерии накопления повреждений в волокнистых слоистых композитах. Предложены подходы, основанные на соотношениях теории слоистых пластин, позволяющие получать нелинейные определяющие соотношения слоистых углепластиков. Предложенные подходы могут быть использованы при расчетах, оптимизации и прогнозировании механического поведения композитных материалов и элементов из них.

Список литературы

1. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термо-вязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. Каштанов А.В., Петров Ю.В. Журнал технической физики. 2006. Т. 76, вып. 5. С. 71-75.
3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
4. Суворова Ю.В. О критерии прочности, основанном на накоплении повреждений и его приложении к композитам // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 4. С. 107–111.
5. Думанский А.М., Финогенов Г.Н. Методика оценки поврежденности полимерных волокнистых композитов при длительном статическом нагружении // Заводская лаборатория. 1993. № 4. С. 60–62.
6. Суворова Ю.В., Думанский А.М., Стрекалов В.Б., Махмутов И.М. Прогнозирование характеристик сопротивления усталости углепластиков по результатам испытаний на ползучесть и длительную прочность // Механика композитных материалов. 1986. № 4. С. 711–715.
7. Махмутов Н.А., Думанский А.М., Стрекалов В.Б. Расчетно-экспериментальное определение сопротивления усталости углепластиков и элементов конструкций из них // Заводская лаборатория. 2006. № 6. С. 41–46.
8. Dumansky A.M., Tairova L.P. The prediction of viscoelastic properties of layered composites on example of cross ply carbon reinforced plastics // World Congress on Engineering. London, UK, 2-4 July 2007. Vol. 2. P. 1346–1351.
9. Думанский А.М., Таирова Л.П., Горлач И., Алимов М.А. Расчетно-экспериментальное исследование нелинейных свойств углепластика // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 5. С. 91–97.
10. Dumansky A.M., Tairova L.P. Time-dependent behavior of carbon fibre reinforced laminates // Proceedings of the Second International Conference on advanced composite materials and technologies for aerospace applications. Wrexham, North Wales, United Kingdom, June 11-13, 2012. P. 75–79.

Damage accumulation and strain of fiber reinforced composites

01, January 2014

DOI: 10.7463/0114.0687557

Dumansky A. M.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
alduman@rambler.ru

In design of thin-walled structures of fiber reinforced composites it is necessary a reliable determination of resistance to load-bearing exposures. The model representations of damage accumulation have been described and that adequate description with the aid of hereditary type relations has been shown. The approach allowing us to perform nonlinear strain estimation has been suggested. As the initial readings the elastic properties of the layer and stress-strain curves have been used. Matrix algorithms of constitutive equations construction for unidirectional and layered composites have been elaborated. The approaches can be used in strength design of fiber reinforced materials and mechanical behavior prediction of composite materials and its members.

Publications with keywords: [long term strength](#), [fatigue resistance](#), [constitutive equation](#), [resolvent operator](#), [nonlinear strain](#)

Publications with words: [long term strength](#), [fatigue resistance](#), [constitutive equation](#), [resolvent operator](#), [nonlinear strain](#)

References

1. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti [Fundamentals of the mathematical theory of thermal viscoelasticity]. Moscow, Nauka, 1970. 280 p.
2. Kashtanov A.V., Petrov Yu.V. Energeticheskiy podkhod k opredeleniyu urovnya mgnovennoy povrezhdennosti [Energy approach to determination of the instantaneous damage level]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2006, vol. 76, no. 5, pp. 71–75. (English translation: *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 2006, vol. 51, no. 5, pp. 604–608. DOI: 10.1134/S1063784206050100)

3. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow, Nauka, 1977. 384 p.
4. Suvorova Yu.V. O kriterii prochnosti, osnovannom na nakoplenii povrezhdennostey i ego prilozhenii k kompozitam [Strength criteria based on accumulation of damages and its application to composites]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1979, no. 4, pp. 107–111.
5. Dumanskiy A.M., Finogenov G.N. Metodika otsenki povrezhdennosti polimernykh voloknistykh kompozitov pri dlitel'nom staticheskom nagruzhenii [Assessment methodology of damage of polymeric fibrous composites with long-term static loading]. *Zavodskaya laboratoriya*, 1993, no. 4, pp. 60–62.
6. Suvorova Yu.V., Dumanskiy A.M., Strekalov V.B., Makhmutov I.M. Prognozirovaniye kharakteristik soprotivleniya ustalosti ugleplastikov po rezul'tatam ispytaniy na polzuchest' i dlitel'nyuyu prochnost' [Prediction of the fatigue resistance characteristics of carbon plastics on the basis of the results of creep and long-term strength tests]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1986, no. 4, pp. 711–715 (English translation: *Mechanics of Composite Materials*, 1986, vol. 22, is. 4, pp. 506–510. DOI: 10.1007/BF00692266).
7. Makhutov N.A., Dumanskiy A.M., Strekalov V.B. Raschetno-eksperimental'noe opredeleniye soprotivleniya ustalosti ugleplastikov i elementov konstruktsiy iz nikh [Calculating-experimental determination of carbon-plastics fatigue resistance and constructions from them]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2006, no. 6, pp. 41–46.
8. Dumansky A.M., Tairova L.P. The prediction of viscoelastic properties of layered composites on example of cross ply carbon reinforced plastics. *Proc. of World Congress on Engineering*, London, UK, 2-4 July, 2007, vol. 2, pp. 1346–1351.
9. Dumanskiy A.M., Tairova L.P., Gorlach I., Alimov M.A. Raschetno-eksperimental'noe issledovaniye nelineynykh svoystv ugleplastika [A design-experiment study of nonlinear properties of coal-plastic]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2011, no. 5, pp. 91–97 (English translation: *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2011, vol. 40, no. 5, pp. 483–488. DOI: 10.3103/S1052618811050074).
10. Dumansky A.M., Tairova L.P. Time-dependent behavior of carbon fibre reinforced laminates. *Proceedings of the Second International Conference on advanced composite materials and technologies for aerospace applications*, Wrexham, North Wales, United Kingdom, June 11-13, 2012, pp. 75-79.