

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ ИМ. А.А. БЛАГОНРАВОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Носова

Носова Наталья Юрьевна

**РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ШАРНИРНЫМИ
ПАРАЛЛЕЛОГРАММАМИ С РАЗЛИЧНЫМ
ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ**

Специальность 05.02.18–Теория механизмов и машин

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук
Хейло С.В.

Москва, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ОБЗОР МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С РАЗЛИЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ.....	9
1.1. Краткий обзор механизмов параллельной структуры от трёх до шести степеней свободы.....	9
1.2 Механизмы параллельной структуры с шарнирными параллелограммами.....	21
Выводы по главе	25
ГЛАВА 2. АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ И РАБОТОСПОСОБНОСТИ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ЧЕТЫРЬМЯ, ПЯТЬЮ И ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	27
2.1. Разработка и синтез структурных схем, определение работоспособности механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы	27
2.2. Разработка и синтез структурных схем, определение работоспособности механизма параллельной структуры с пятью степенями свободы	34
2.3. Разработка и синтез структурных схем, определение работоспособности механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы	39
Выводы по главе	42
ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С РАЗВЯЗКОЙ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ И ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ.....	43
3.1. Решение прямой и обратной задач кинематики для механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена	43
3.2. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи для механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена	47
3.3. Решение прямой задачи кинематики для сферического механизма параллельной структуры	49
3.3.1. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи для сферического механизма с тремя степенями свободы	54
3.4. Решение задачи кинематики (о положении) для сферического механизма параллельной структуры с использованием метода поворота системы координат	56
3.4.1. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи для сферического механизма.....	61
Выводы по главе	63
ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С КИНЕМАТИЧЕСКОЙ РАЗВЯЗКОЙ.....	64
4.1. Динамический анализ механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена	64
4.1.1 Анализ колебательных процессов механизма параллельной структуры	65

4.1.2	Моделирование движения поступательного механизма.....	71
4.2	Динамический анализ сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы.....	81
4.2.1	Анализ колебательных процессов механизма параллельной структуры.....	81
4.2.2	Моделирование движения сферического механизма.....	86
	Выводы по главе.....	102
ГЛАВА 5. РАЗРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ЧЕТЫРЬМЯ СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ.....		103
5.1.	Описание конструкции действующей модели.....	103
5.2.	Исследование функциональных возможностей действующей модели механизма с четырьмя степенями свободы.....	107
5.3.	Исследование и моделирование рабочей зона механизма с четырьмя степенями свободы.....	110
	Выводы по главе.....	116
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ		117
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....		119
ПРИЛОЖЕНИЯ.....		131
СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.....		150

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации

Создание новых механизмов параллельной структуры является одним из направлений развития современных робототехнических систем в процессе автоматизации конкурентоспособных промышленных предприятий машиностроительной, пищевой, текстильной, космической и других отраслей; производстве медицинских приборов и устройств оборонного назначения. Промышленные робототехнические системы освобождают человека от тяжёлого, утомительного и однообразного ручного труда, позволяют заменить его в опасной и вредной для здоровья окружающей среде, а также в труднодоступных местах.

Использование свойства механизмов параллельной структуры воспринимать каждой кинематической цепью механизма только часть общей нагрузки позволяет создавать конструкции более высокой жёсткости с подвижными звеньями, но относительно небольшой массы; с лучшими динамическими характеристиками, повышенной точностью позиционирования по сравнению с механизмами последовательной структуры. Однако, механизмы параллельной структуры имеют и недостатки: ограниченность рабочей зоны (пространства); наличие сингулярностей (особых положений) в области рабочего пространства; трудности проведения параметрического синтеза механизмов.

Еще одной важной особенностью механизмов параллельной структуры являются их сложные взаимосвязанные кинематические характеристики, когда поступательное движение кинематически связано с вращательным движением и наоборот. Поэтому математические модели для решения задач кинематики и динамики таких механизмов отличаются сложностью, что затрудняет их управление, планирование траекторий движений и позиционирование рабочего органа (выходного звена). Для преодоления указанных сложностей упрощают и разделяют законы управления механизмом. Это позволяет добиться синхронизации приводов, и улучшить динамические характеристики манипуляционных механизмов.

Кинематическая развязка положения и ориентации выходного звена (платформы или рабочего органа) упрощает решение кинематических и динамических задач, а также алгоритмы управления этими устройствами. Решение подобной задачи в основном сводится к уменьшению числа промежуточных звеньев механизма, что, с одной стороны, положительно сказывается на жёсткости механизма. С другой стороны, в механизмах с полной или частичной кинематической развязкой предъявляются повышенные требования к приводам, так как каждый привод в таких механизмах отвечает за одну степень свободы выходного звена, что увеличивает нагрузку на них. Тем не менее, важным преимуществом механизмов с кинематической

развязкой являются их простые кинематические зависимости между входными и выходными координатами, упрощающие их динамический анализ и синтез.

Поэтому синтез новых пространственных механизмов параллельной структуры, обладающих развязкой движений, когда одни приводы управляют положением выходной платформы, а другие управляют её ориентацией, является актуальной задачей.

Объектом исследования являются пространственные механизмы параллельной структуры с шарнирными параллелограммами с различным числом степеней свободы.

Цель работы

Разработка и исследование пространственных механизмов параллельной структуры с шарнирными параллелограммами с различным числом степеней свободы, обладающих свойствами кинематической и динамической развязки за счёт наличия шарнирных параллелограммов в каждой кинематической цепи.

Задачи научного исследования

1. Выполнить структурный синтез и анализ новых механизмов параллельной структуры с шарнирными параллелограммами с четырьмя, пятью и шестью степенями свободы.
2. Решить задачи кинематики исследуемых объектов.
3. Выявить динамические свойства механизмов.
4. Экспериментально проверить работоспособность механизма параллельной структуры на натурной модели и определить рабочую зону механизма.

Научная новизна исследования

1. Разработан ряд механизмов параллельной структуры, основанных на развитии схемы типа «Orthoglide» с возможностью одновременной передачи шарнирным параллелограммом поступательных и вращательных движений.
2. Представлена методика структурного, кинематического и динамического анализа разработанного ряда механизмов.
3. Апробирован алгоритм управления разработанным механизмом с шестью степенями свободы с кинематической развязкой, основанный на минимизации ошибок по положению, скорости и ускорению.
4. Изготовлена конструкция натурного макета разработанной схемы механизма с четырьмя степенями свободы для исследования его рабочей зоны и особых положений. На практике показана возможность передачи шарнирным параллелограммом вращательных и поступательных движений.

Теоретическая значимость работы

Теоретическая значимость работы состоит в разработке методик структурного анализа и синтеза, кинематического и динамического анализа механизмов параллельной структуры с кинематической развязкой, разработке алгоритма определения рабочей зоны и управления такими механизмами.

Практическая значимость работы

Практическая значимость работы заключается в том, что синтезированы новые схемы манипуляционных механизмов параллельной структуры с четырьмя, пятью и шестью степенями свободы с кинематической развязкой добавлением в исходную схему механизма «Orthoglide» дополнительных вращательных движений. Данные механизмы могут быть использованы на предприятиях машиностроения, пищевой, лёгкой и других отраслей промышленности на транспортных и технологических операциях, где необходимо обеспечить положение и ориентацию выходного звена (или исполнительного органа), а также в медицинских устройствах, тренажёрах и инструментах.

Методы исследования

Теоретические исследования проводились с использованием методов теории механизмов и машин, теоретической механики, теории винтового исчисления, дифференциального и матричного исчисления, компьютерного моделирования.

Положения, выносимые на защиту:

1. Развитие схемы типа «Orthoglide» с целью получения дополнительных вращательных движений выходного звена.
2. Методики решения задач о положениях и скоростях для разработанного механизма с шестью степенями свободы с получением кинематических характеристик механизма.
3. Методики решения задач динамики для сферических и поступательно-направляющих механизмов, являющихся частью механизма с шестью степенями свободы.
4. Конструкция натурной модели для исследования наличия особых положений.

Достоверность результатов обусловлена строгостью математических выкладок при использовании корректных допущений, а также сопоставлением теоретических и практических результатов.

Реализация результатов работы

Результаты работы могут быть использованы на различных предприятиях машиностроительной, пищевой, текстильной и других отраслях; в научно-исследовательских и

расчётно-конструкторских отделах предприятий, организаций и вузов, занимающихся созданием современной робототехники для автоматизации широкого круга технических операций.

Апробация работы

Основные результаты доложены на следующих научно-технических конференциях:

- 65-я межвузовская научно-техническая конференция молодых ученых и студентов «Студенты и молодые ученые КГТУ производству, Кострома, КГТУ, 2013 г.;
- Межвузовская научно-техническая конференция аспирантов и студентов «Молодые учёные – развитию текстильной и лёгкой промышленности» (ПОИСК-2013), Иваново, 2013;
- Международная научно-техническая конференция «Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности» (Инновации-2013), Москва, 2013 г.;
- Международная научная конференция «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения, посвященная 75-летию Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН», Москва, 2013 г.;
- Международная научно-техническая конференция «Новое в технике и технологии текстильной и лёгкой промышленности», Витебск, 2013 г.;
- 2-й международный симпозиум «Современные проблемы создания и производства механических передач», Москва, 2013 г.;
- 66-я межвузовская научно-техническая конференция молодых учёных и студентов "Студенты и молодые учёные КГТУ производству", Кострома, 2014 г.;
- Международная научно-техническая конференция «Новое в технике и технологии текстильной и лёгкой промышленности», Витебск, 2014 г.;
- Международная научно-техническая конференция «Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности» (Инновации-2014), Москва, 2014 г.;
- 3rd IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics (MEDER 2015), Aalborg, Denmark, 2015 г.;
- 14th International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science World Congress(IFToMM 2015), Taipei, Taiwan, 2015;
- Международная научно-техническая конференция «Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности» (Инновации-2015), Москва, 2015;
- 4-й международный симпозиум «Современные проблемы создания и производства механических передач», Москва, 2018 г.;
- Международная конференция «Intelligent Technologies in Robotics».г. Москва, 2019 г.

Публикации

По результатам диссертации опубликована 21 научная работа, в том числе 5 статей в журналах из списка ВАК, 7 публикаций, входящие в базы Scopus и Web of Science, 2 главы в монографиях с соавторами, 2 патента РФ на изобретения и 1 патент РФ на полезную модель.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, основных результатов и выводов, списка литературы, трёх приложений, списка публикаций по теме диссертации. И включает: 106 рисунков; 154 источник использованной литературы; 3 приложения; общий объём диссертации – 152 страницы.

ГЛАВА 1. ОБЗОР МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С РАЗЛИЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В данной главе рассматривается краткое развитие механизмов параллельной структуры, основные типы, их конструктивные особенности и области применения. В частности упоминается о первых механизмах параллельной структуры, прорывных механизмах для своего времени, которые и до сих пор являются востребованными в современной жизни и в процессе автоматизации конкурентоспособных промышленных предприятий различных отраслей (машиностроительной, пищевой, текстильной, космической и других), производстве медицинских приборов и устройств оборонного назначения. Об основных положительных особенностях и недостатках таких механизмах.

1.1. Краткий обзор механизмов параллельной структуры от трёх до шести степеней свободы

Механизмы параллельной структуры в терминологии теории механизмов и машин определены как манипуляторы, управляющие движением выходного звена посредством, как минимум, двух кинематических цепей, идущих от основания к выходному звену. Исследования механизмов как параллельной, так и последовательной структуры строятся на общих методах теории механизмов и машин, теоретической механики, теории управления. Данные исследования были отражены в трудах таких российских учёных, как Чебышев П.Л., Артоболевский И.И. [3, 4], Диментберг Ф.М. [15, 16], Добровольский В.В. [17, 18], Фролов К.В. [47], Болотник Н.А., Бессонов А.П., Левитский Н.И., Колисков А.Ш., Крайнев А.Ф. [10], Глазунов В.А., Хейло С.В. [12, 48, 49], Крейнин Г.В. [22, 23, 106], Тывес Л.И. [45, 46], Саламандра Б.И., Корендяев А.И. [20, 21], Юшенко А.С., Зенкевич С.Л. [19], Крутько П.Д. [24], Воробьёв Е.И., Саяпин С.Н. и других. Также значительный вклад в развитие механизмов параллельной структуры внесли такие зарубежные исследователи, как Хант К. (Hunt K.H.), Мерле Ж.П. (Merlet J.P.) [114], Инноченти С. (Innocenti C.), Паренти-Кастелли В. (Parenti-Castelli V.) [68, 98], Анджелес Х. (Angeles J.), Госселен К. (Gosselin C.) [58, 93], Конг Х. (Kong X.) [104, 105, 145], Венгер Ф. (Wenger Ph.), Шабля Д. (Chablat D.) [71, 72, 149, 150], Аралелян В. (Arakelian V.) [59, 60, 65,], Чекарелли М. (Ceccarelli M.) [69], Гогу Г. (Gogu G.) [90], Крейг Дж. (Craig J.J.) [76], Такеда Ё. (Takeda Y.) [140] и многие другие.

Вопросы создания первых механизмов параллельной структуры (МПС) и времени их появления затрагивали не малое количество авторов [10, 62, 76, 90, 114]. Согласно некоторым из них, история МПС началась в 1928 году, когда Джеймс Гвиннетт (Gwinnett J.E.) подал заявку на патент о создании платформы движения для индустрии развлечений, в котором

представлено устройство, схожее по своей структуре со сферическим механизмом параллельной структуры [97].

Спустя десятилетия, в 1942 г., Поллард (Pollard W. L.W) изобрёл робот для автоматического распыления краски и подал на него патент (рисунок 1.1) [129]. Данное изобретение имеет пять степеней свободы – три вращательных степени свободы и две поступательных, и состоит из трёх кинематических цепей. Каждая кинематическая цепь механизма состоит из трёх звеньев. Три двигателя вращательного перемещения расположены на основании и поворачивают первые три звена. Те, в свою очередь, передают вращение на вторые звенья через карданный шарнир. Вторые звенья соединены с третьими сферическими шарнирами. Выходное звено соединено с третьими звеньями карданными шарнирами. Два линейных привода расположены на основании. Они передают движение на выходное звено гибкими вращательными стержнями. Три вращательных привода определяют положение выходного звена, два линейных привода контролируют его ориентацию.

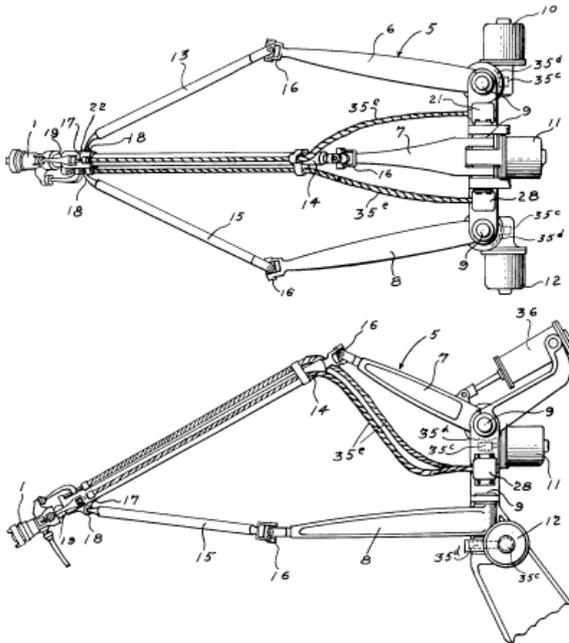


Рисунок 1.1. Первый пространственный промышленный робот параллельной структуры [129].

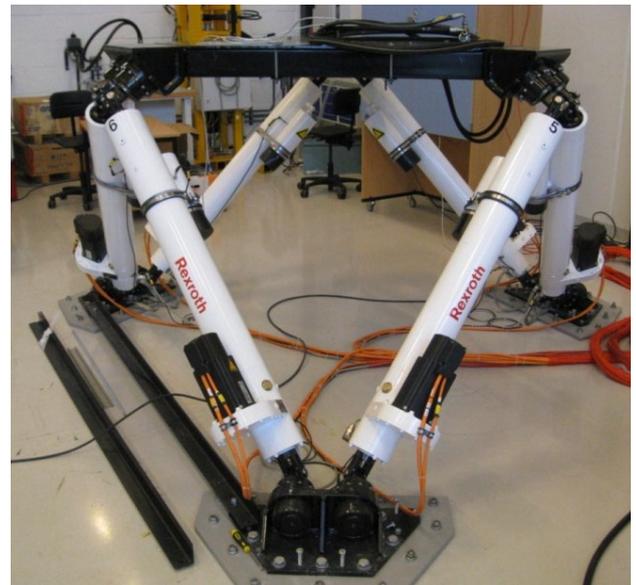


Рисунок 1.2. Платформа Стюарта [141].

Спустя несколько лет, в 1947 г., Гоф (Gough .V.E.) разработал новый робот параллельной структуры для решения проблем с аэродинамическими нагрузками [95]. Впоследствии, в 1965 г., Стюард (Stewart D.) доработал и описал манипулятор с шестью степенями свободы в качестве имитатора полета [138]. Данный робот и его модификации являются одними из самых востребованных в мире [77, 78, 81, 96, 109].

Платформа Стюарта состоит из неподвижного основания и подвижной (выходной) платформы, которые соединены между собой шестью телескопическими звеньями изменяемой

длины и крепятся посредством шаровых шарниров. Три степени свободы этого робота отвечают за перемещение выходной (подвижной) платформы, три других степени за её ориентацию в пространстве. Осуществляется это путем изменения длин указанных звеньев (рисунок 1.2).

Платформа Гофа-Стюарта успешно применяется во фрезерных станках [139, 142], в поддерживающих устройствах для хирургических операций [135, 147], в симуляторах полёта и подводных роботах [84, 133, 134, 141].

Очередной скачок в развитии роботов рассматриваемых типов произошёл с момента создания робота DELTA, предложенный проф. Реймондом Клавелем (Clavel R.) в 1986 году (рисунок 1.3) [74, 75, 118-120]. Несмотря на то, что все двигатели (2) этого манипулятора вращательные, выходная платформа (6) не меняет свою ориентацию и всегда остается параллельной основанию (1), совершая при этом только возвратно-поступательные движения. Устойчивость платформы (6) обеспечивают три шарнирных параллелограмма (3), входящие в каждую кинематическую цепь. За счёт телескопического звена (4), который соединён с подвижной платформой (6) и неподвижным основанием (1) двумя карданными шарнирами и расположен вдоль центральной оси механизма, выходное звено механизма (7) получает независимое вращение от привода (5), расположенного на неподвижном основании (1). Учитывая дополнительное вращение от привода (5), робот DELTA имеет четыре степени свободы. Поступательное движение платформы (6) является независимым и никак не влияет на вращательное движение выходного звена (7) робота, следовательно, имеет место кинематическая развязка движений. За счёт малых масс звеньев робот DELTA имеет высокое быстродействие. Ряд аналогичных устройств был разработан под руководством М. Карригато и В. Паренти-Кастелли (Carricato M., Parenti-Castelli V.) [68].

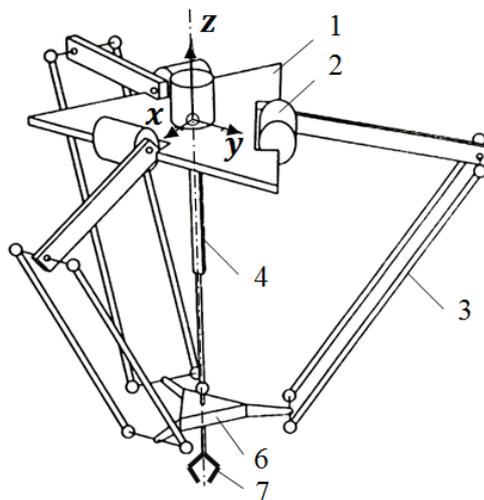


Рисунок 1.3. Робот-манипулятор DELTA [74].

Большой интерес к созданию и использованию МПС связан с их положительными свойствами по сравнению с механизмами последовательной структуры. Вследствие того, что каждая кинематическая цепь механизма воспринимает только часть общей нагрузки, появляется возможность создавать механические конструкции с более высокой жёсткостью, с подвижными звеньями относительно небольшой массы, с лучшими динамическими характеристиками повышать точность позиционирования и грузоподъёмность. Возможность располагать приводы на неподвижном основании уменьшает влияние сил инерции на движении звеньев механизма.

Однако, наряду со всеми преимуществами, МПС имеют недостатки. Это небольшое рабочее пространство, по сравнению с механизмами последовательной структуры; особые положения (сингулярности) в рабочем пространстве; трудности проведения параметрического синтеза механизмов; нелинейность связей между их кинематикой и динамикой.

Обзор литературы показывает, что большое количество механизмов имеют сложные, взаимосвязанные кинематические характеристики, когда поступательное движение кинематически связано с вращательным движением и наоборот. Поэтому кинематические и динамические модели механизма сложны как для анализа, так и для решения задач управления, планирования и позиционирования рабочего органа. Для преодоления указанных сложностей упрощают и разделяют законы управления механизмом. Это позволяет улучшить динамические характеристики манипуляторов, поскольку исключает необходимость синхронизировать различные исполнительные механизмы. Известно два принципа разделения законов управления МПС: 1) кинематическая развязка положения и ориентации выходного звена; 2) кинетическая развязка перемещений приводов и движений выходного звена.

Возможность выявления и реализации кинематической развязки между положением и ориентацией выходного звена (платформы) при решении задач кинематики для МПС весьма полезна, поскольку позволяет упростить вывод и решение уравнений, а так же активизировать алгоритмы управления. Решение подобной задачи в основном сводится к упрощению геометрии (числа промежуточных звеньев) механизма, с одной стороны, положительно сказывается на жёсткости механизма. С другой стороны, в механизмах с полной или частичной кинематической развязкой предъявляются повышенные требования к приводам, поскольку в каждый привод отвечает за одну степень свободы выходного звена, что увеличивает нагрузку на них. Тем не менее, важным преимуществом механизмов с кинематической развязкой являются их простые кинематические зависимости между входными и выходными координатами, упрощающие их динамический анализ.

Некоторые роботы с кинематической развязкой были предложены как иностранными учёными: Инносенти (Innocenti C.) [98], Бернером (Bernier D.) [61], Забалсой (Zabalza I.) [153],

Такедой (Takeda Y.) [140], Бриотом (Briot S.) [64, 65] и др., так и российскими. Комплекс исследовательских работ, в результате которых предложено большое количество изобретений, связанных с использованием двигательных и измерительных устройств параллельной структуры, в том числе механизмов с кинематической развязкой был выполнен Колисковым А.Ш., Крайневым А.Ф., Глазуновым В.А. и их учениками [10]. Теоретической основой этих разработок, а также анализа и синтеза этого класса пространственных механизмов, явилась общая теория винтов Диментберга Ф.М. [15, 85, 131, 132]. Корендяевым А.И., Саламандрой Б.Л., Тывесом Л.И. и др. изложены основы построения исполнительных механизмов роботов на основе математического анализа базовых схем робототехники, рассмотрены вопросы кинематики, динамики, управления и энергетических соотношений [20, 21, 45, 46].

Механизмы параллельной структуры с кинематической развязкой можно построить, объединяя несколько механизмов в один (например, сферические манипуляторы и МПС с линейными приводами), либо в много платформенные схемы, либо в интегрированные более сложные конструкции. Некоторые механизмы последнего типа основаны на принципе, так называемых, «6–4 полностью параллельных манипуляторах» («6–4 fully parallel manipulator», предложенных Паренти-Кастелли и Инноченти (рисунок 1.4) [98]. В то время как другие механизмы того же типа формируются путем объединения частей кинематических цепей поступательных манипуляторов с частями кинематических цепей сферических манипуляторов в более громоздкие кинематические цепи, которые содержат более одного привода. Представленные в работе [79] манипуляторы параллельной структуры с кинематической развязкой рассматриваются как промежуточная версия механизмов между двумя последними, в которой все приводы находятся на основании или рядом с основанием в упрощенной схеме с тремя кинематическими цепями (рисунок 1.5) [80, 140]. Такое преобразование позволяет сохранить лёгкость подвижных масс вместе с хорошими динамическими характеристиками, и уменьшить ограничения рабочего пространства благодаря исключению кинематических элементов.

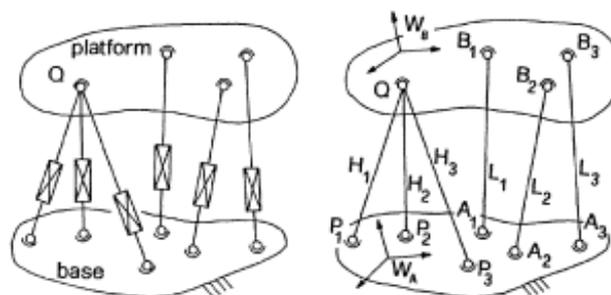


Рисунок 1.4. Схемы 6–4 параллельных манипуляторов [98].

В работе [107] представлен робот параллельной структуры с шестью степенями свободы, использующий набор из двух структур робота Delta (рисунок 1.6). Предложен эффективный

метод установления явных взаимосвязей между координатами выходного звена (рабочего органа) с активными и пассивными переменными звеньями кинематической цепи. Моделирование системы позволило проверить согласованность расчётов и показать рабочее пространство в зависимости от механических ограничений переменных пассивных звеньев. Предложен подход для изучения влияния малых зазоров пассивного звена на точность положения и вращения рабочего органа.

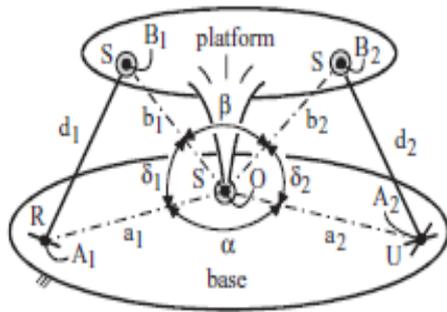


Рисунок 1.5. Схема манипулятора, предложенная Р. Ди Грегорио [80].

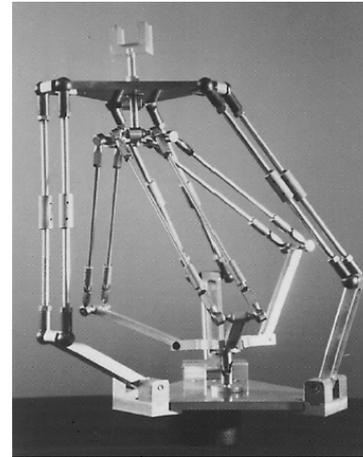


Рисунок 1.6. Манипулятор, состоящий из двух структур DELTA-робота [107].

Миановский К. (Mianowski K.) в своей работе [117] представил прототип нового робота параллельной структуры POLMAN-3x2 с шестью степенями свободы, предназначенного для выполнения быстрых операций. В конструкции манипулятора были применены специальные механизмы передачи движения, обеспечивающие динамическую развязку. Объединив в своей работе идею пространственного параллелограмма, предложенного Р. Клавелем, идею специальной формы подвижной платформы, аналогичную той, что предложил Джакет (Jacket P.) [100], и, используя параллелограммы для передачи вращения от двигателей, расположенных на основании, к промежуточным звеньям, он получил очень интересную кинематическую схему параллельного манипулятора (рисунок 1.7). Робот POLMAN 3x2 состоит из трёх идентичных кинематических цепей, которые расположены в осях декартовой системы координат x , y , z . Каждая кинематическая цепь имеет две активные и шесть пассивных степени свободы. Робот состоит из установленных на основании трёх приводных механизмов в виде пяти стержневых шарнирных параллелограммов с двумя степенями свободы. Подвижная платформа соединена сферическими шарнирами с приводными механизмами тремя шарнирными параллелограммами, аналогичными тем, что используются в роботе DELTA. Положение выходного звена регулируется вращением стержней (1), (2) и (3), при этом ориентация обеспечивается за счёт вращения стержней (4), (5) и (6), что позволяет получать линейные

перемещения подвижной платформы (прикрепленной к выходному звену манипулятора) независимо от движения шарниров.

В дальнейшем Миановский К. продолжил работу над роботом POLMAN-3x2, но заменил три вращательных привода на три линейных, расположенных на основании и перемещающихся по типичной рейке (рисунок 1.8) [116]. Вторые же три вращательных привода расположены соосно линейным приводам. Для передачи вращения он использовал карданный вал в каждой кинематической цепи с крюковыми соединениями (шарнир Гука) на концах. Каждый вал крепится к приводному механизму, имеющему две степени свободы (поступательную и вращательную). Подвижная платформа выполнена в виде сферического треугольника. Внутренние оси крюковых соединений на концах стержней параллельны друг другу, а внешние оси перпендикулярны внутренним осям. Это свойство можно использовать для изменения ориентации рабочего инструмента.

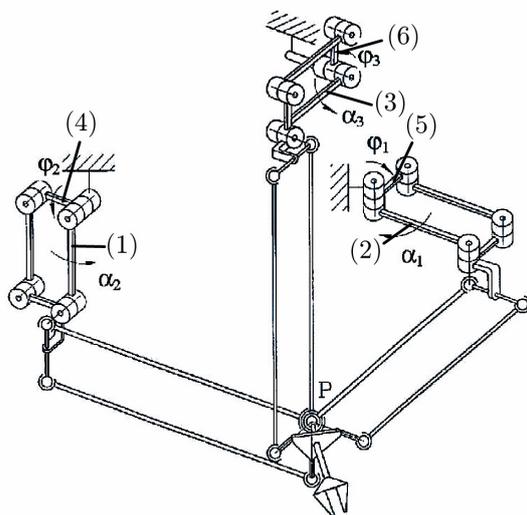


Рисунок 1.7. Схема манипулятора POLMAN 3x2 с шарнирными параллелограммами [117].

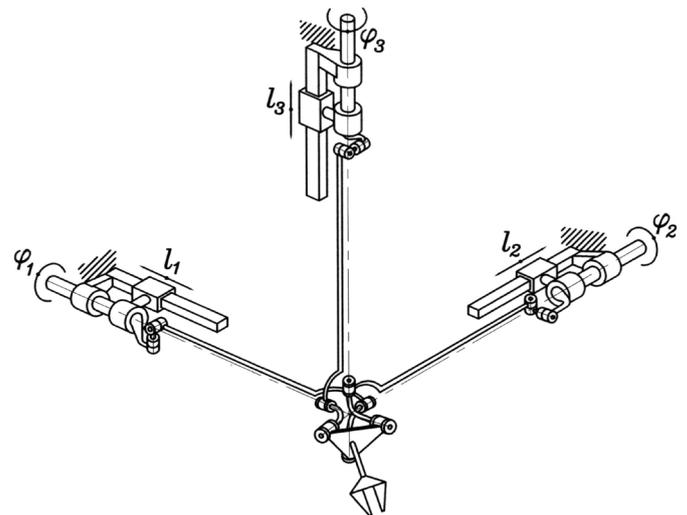


Рисунок 1.8. Схема манипулятора POLMAN 3x2 с карданными валами [116].

В работе [152] Яме Е., Морено Х., Салтарен Р. (Yime E., Moreno H., Saltaren R.) представили новый робот параллельной структуры с шестью степенями свободы и с кинематикой развязкой (рисунок 1.9). Три кинематических цепи контролируют положение одной точки подвижной платформы, а остальные цепи контролируют ориентацию подвижной платформы. Данный робот кинематически эквивалентен схеме, предложенной Инноченти (Innocenti C.) [98]. Одной из трудностей для создания указанного робота являлась разработка конструкции тройного сферического шарнира (механизма). Конструкция сферического шарнира основана на использовании центрального механизма вращательных шарниров с общей осью вращения. Звенья соединены с механизмом посредством соединительного звена с двумя вращательными шарнирами, которые пересекаются в центральной точке механизма. Наличие центрального

сферического механизма между тремя внутренними кинематическим цепям позволяет получить кинематическую развязку: внутренние три цепи управляют положением платформы, в то время как внешние кинематические цепи управляет её ориентацией.

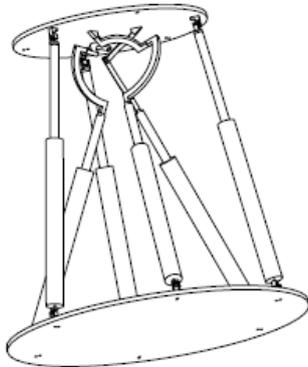


Рисунок 1.9. Манипулятор с тройным сферическим шарниром [152].

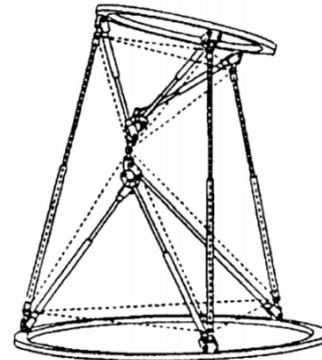


Рисунок 1.10. Модель робота параллельной структуры с избыточным числом связей [154].

Ранее были проведены работы по проектированию механизмов с тройными сферическими шарнирами [63, 98, 103, 136, 154]. Использование сферических шарниров и механизмов в МПС выгодно с точки зрения возможности размещения нескольких звеньев вокруг одной точки вращения. Зачастую, это упрощает кинематику механизма (например, для платформы Гофа-Стюарта) и улучшает его функциональность.

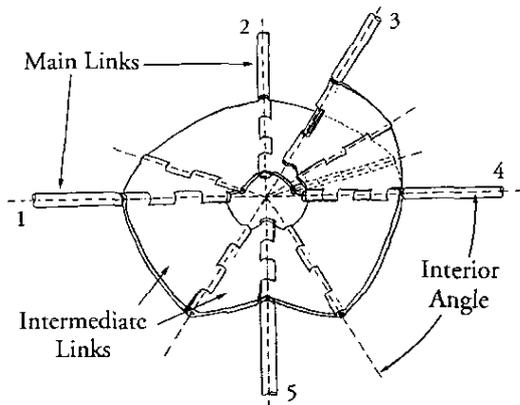


Рисунок 1.11. Схема сферического шарнирного механизма с пятью степенями свободы [63].

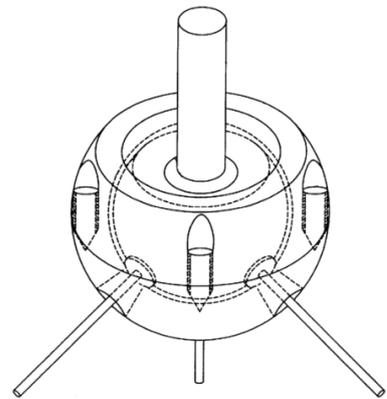


Рисунок 1.12. Сферический шарнир для соединения более трёх звеньев [136].

Боссчер и Эберт-Упхофф (Bosscherand P., Elbert-Upholf I.) представили механизм, предназначенный для обеспечения возможности соединения нескольких звеньев в один сферический шарнирный механизм (рисунок 1.11) [63]. Этот механизм обеспечивает связь между основными звеньями, соединенными друг с другом через ряд из двух или более промежуточных звеньев. Основные и промежуточные звенья соединены между собой вращательными шарнирами, где все оси шарниров пересекаются в одной точке. Это расположение производит сферическое движение каждого звена в механизме вокруг этой точки

пересечения. Кроме того, сферический шарнирный механизм позволяет соединениям звеньев образовывать замкнутую кинематическую цепь. За счёт включения замкнутых кинематических цепей жёсткость механизма может быть значительно повышена.

Зангане и Анжелес (Zanganeh K E., Angeles J.) представили робот параллельной структуры с избыточным числом связей, где шесть звеньев соединяются в центре механизма с помощью сферического шарнира и шести шарнирных скоб [154]. Сонг и Ким (Song S., Kim W.) представили сферический шарнир для соединения трёх и более звеньев в одной точке [136].

В работе [140] Такеда др. (Takeda Y.) представили исследование разработки механизма с шестью степенями свободы, схожего со структурой робота Инноченти (рисунок 1.13, а). Анализ движения и проектирование выполнялся путём разделения ориентации и положения выходного звена. Они представили тройной сферический шарнир, состоящий из небольшой платформы, которая соединена с каждым основным звеном двумя промежуточными звеньями с вращающимися шарнирами, оси которых ортогональны (рисунок 1.13, б). Платформа также содержит сферический шарнир, шар которого соединен с мобильной платформой робота.

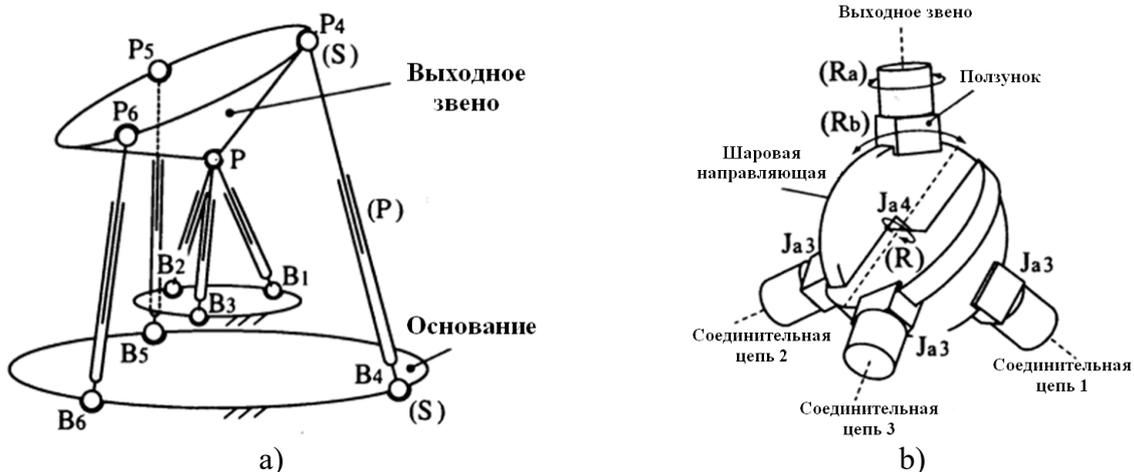


Рисунок 1.13. Механизм с шестью степенями свободы с кинематической развязкой положения и ориентации выходного звена:

а) общий вид механизма; б) схема сферического шарнира [140].

В работе [101] Джин, Чен и Ян (Jin Y., Chen I.-M., Yang G.) предложили новый манипулятор параллельной структуры с шестью степенями свободы, состоящий из трёх кинематических цепей с избирательным управлением (рисунок 1.14). Рабочий орган манипулятора может производить, в зависимости от типов исполнительного механизма (вращательного или поступательного): вращательное (сферическое) движение, используя три вращательных привода и передавая три степени свободы; используя поступательные приводы, обеспечивать три степени свободы поступательного движения; три степени свободы гибридного движения; включение всех приводов обеспечивает шесть степеней свободы, т.е. полное пространственное движение. Архитектура манипулятора полностью разделяет перемещение и вращение рабочего

органа для индивидуального управления. Синтез структуры параллельного манипулятора с избирательным управлением достигается использованием его геометрии. Анализ особенностей показывает, что параллельным манипулятором с избирательным управлением представляет собой изотропный поступательный механизм, у которого все двигатели находятся в режиме поступательного движения. Из-за развязанной структуры движения метод декомпозиции применяется как для анализа смещения, так и для оптимизации размеров.

В работе [67], на основе теории винтов и принципа движения кинематической цепи независимым двигателем, предложена методика структурного синтеза механизмов с полной кинематической развязкой с четырьмя степенями свободы, обеспечивающих три вращательных и одно поступательное движение (3R1T, где R – вращательное движение, T – поступательное движение) (рисунок 1.15).

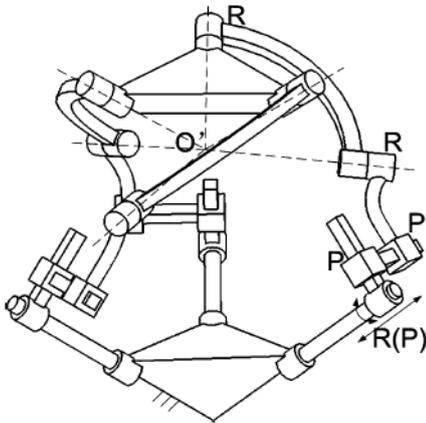


Рисунок 1.14. манипулятор параллельный структуры с избирательным управлением с шестью степенями свободы [101].

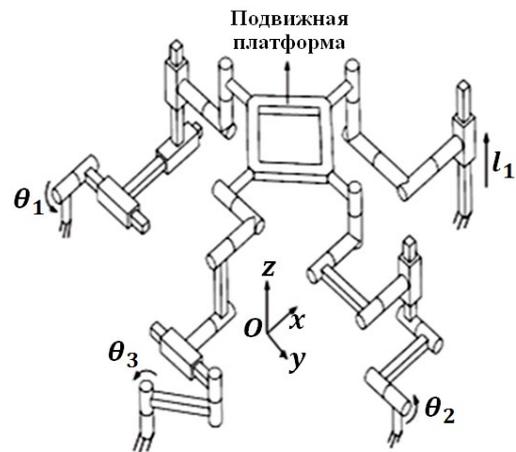


Рисунок 1.15. 3R1T механизм параллельной структуры с полной кинематической развязкой [67].

Учёными из Франции Вигеном Аракелян и Себастьяном Брио (Briot S., Arakelian V.) [64, 65] было разработано и представлено новое семейство манипуляторов параллельной структуры – PAMINSA (**Parallel Manipulators of the I.N.S.A.**, Франция) (рисунок 1.16). В своей работе они пытались разделить перемещения в горизонтальной плоскости от перемещений вдоль/вокруг других направлений. Для этих целей они используют свойства пантографа. Данный манипулятор имеет 4 степени свободы: три вращательных привода обеспечивают поступательное движение подвижной платформы, один линейный привод отвечает за вращательную степень свободы.

Близким аналогом робота PAMINSA является манипулятор с четырьмя степенями свободы, однако механизм пантографа в полученном решении не требуется [13, 54] (рисунок 1.17). Это упростило конструкцию и сделало её более эффективной и надёжной в работе.

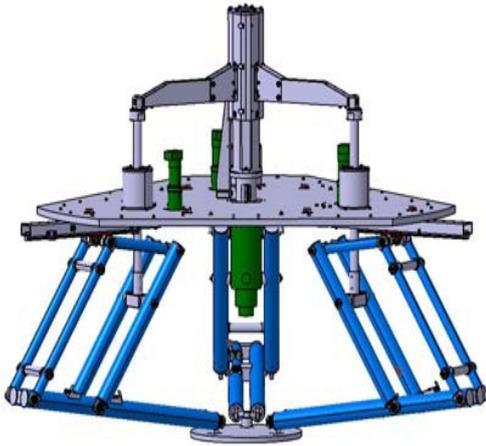


Рисунок 1.16. Манипулятор PAMINSA с четырьмя степенями свободы [65].

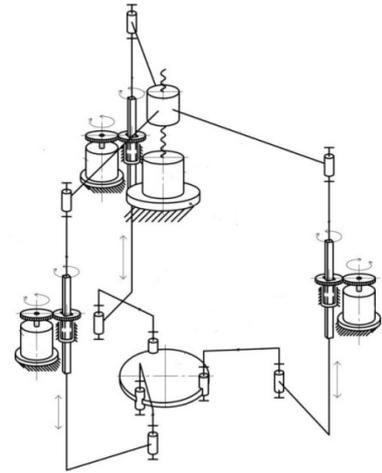


Рисунок 1.17. Манипулятор аналог с четырьмя степенями свободы [13].

В Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте машиноведения им. А.А. Благонравова Российской Академии Наук (ИМАШ РАН) также занимались вопросами исследования механизмов параллельной структуры, в том числе и исследованием механизмов с кинематической развязкой. В частности Глазуновым В. А., Тывесом Л. И., Данилиным П.О. и др. был разработан МПС с шестью степенями свободы на основе универсальных шарниров с дополнительными ограничениями (рисунок 1.18) [9, 143].

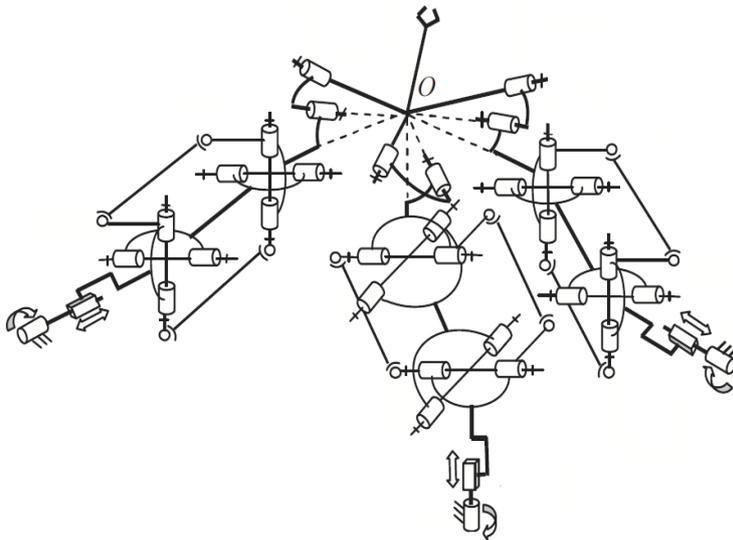


Рисунок 1.18 МПС на основе универсальных шарниров [143].

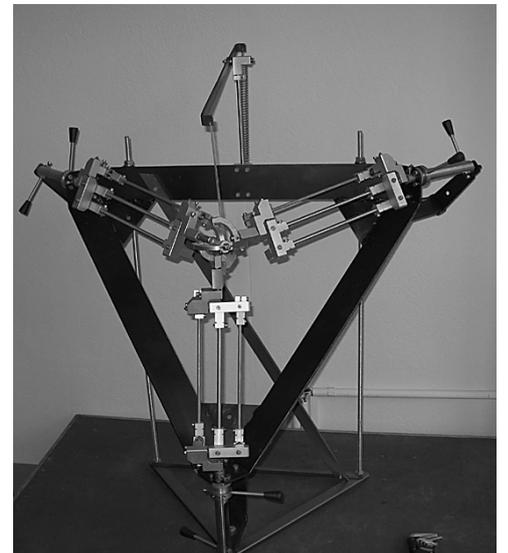


Рисунок 1.19 МСП с шестью степенями свободы на основе разработанной схемы [14].

Каждая кинематическая цепь механизма состоит из одного вращающегося привода, расположенного на основании, одного линейного привода, двух призматических кинематических пар, представленных в виде двух U-образных шарниров (где U – шарнир Гука) с дополнительными ограничениями, и двух пассивных пар вращения. С помощью теории винтов был произведен синтез данного механизма, анализ особых положений. Так же показано,

что данный механизм имеет свойства кинематической развязки, где вращающиеся исполнительные механизмы отвечают за ориентацию выходного звена, в то время как линейные исполнительные механизмы отвечают за его положение.

В дальнейшем был изготовлен натурный образец МПС с шестью степенями свободы на основе универсальных шарниров (рисунок 1.19) [14], на котором было показано наличие кинематической развязки.

На рисунке 1.20 представлен механизм параллельной структуры с шестью степенями свободы с кинематической развязкой, который состоит из трёх кинематических цепей [85]. Каждая кинематическая цепь содержит: расположенный на основании двигатель вращательного перемещения; двигатель поступательного перемещения; два шарнирных параллелограмма, представляющие собой две поступательные кинематические пары; две промежуточные вращательные кинематические пары. Оси всех промежуточных вращательных кинематических пар пересекаются в точке O . С помощью теории винтов и основанного на группе замкнутых винтов подхода показаны возможные повороты выходного звена и ограничения, накладываемые кинематическими цепями, без вывода кинематических уравнений.

В работе [11, 53] представлен механизм с шестью степенями свободы с кинематической развязкой, разработанный в ИМАШ РАН. В данном механизме в каждой кинематической цепи вращение на выходное звено осуществляется через последовательно установленную систему зубчатых колёс (передат), которые расположены перпендикулярно оси двигателя вращательного перемещения. Две кинематические цепи содержат дугообразные направляющие, которые отвечают за положение выходного звена. В третьей кинематической цепи расположены два карданных шарнира, которые передают вращение на рабочий орган, и отвечают за его ориентацию (рисунок 1.21).

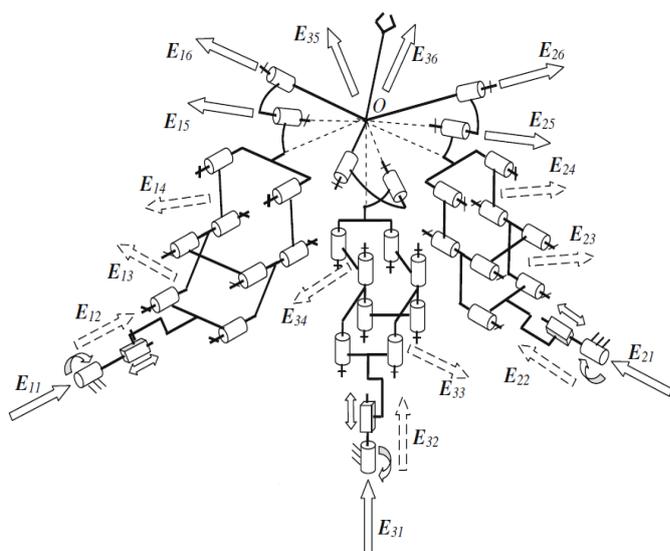


Рисунок 1.20. Механизм с шестью степенями свободы с кинематической развязкой [85].

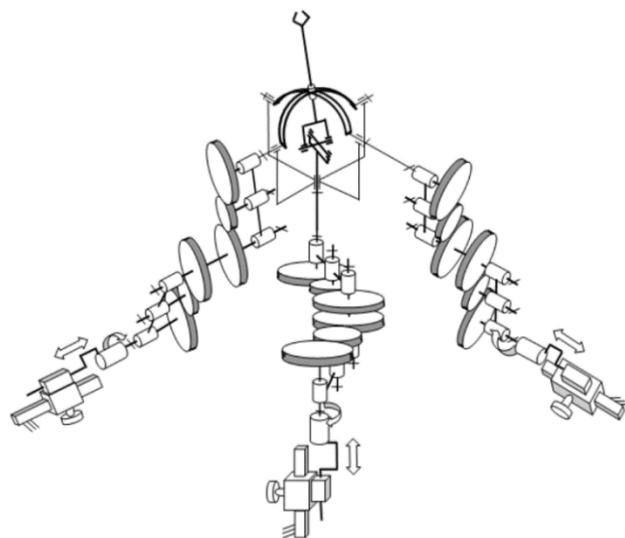


Рисунок 1.21. Механизм с зубчатыми передачами [53].

1.2 Механизмы параллельной структуры с шарнирными параллелограммами

Использование шарнирного параллелограмма в конструкции МПС позволяет выходному звену оставаться в фиксированном положении по отношению к входному звену. Пожалуй, самый известный манипуляционный механизм, содержащий в своей конструкции шарнирные параллелограммы, является манипулятор DELTA, описанный выше (рисунок 1.3).

На базе робота DELTA компанией Сама было разработано погрузочное устройство Triaflex (рисунок 1.22) [66, 144], которое включает в себя от четырёх до двенадцати DELTA-роботов. Поскольку один DELTA-робот может работать со скоростью до 120 циклов в минуту, то за счёт одновременного захвата нескольких продуктов при помощи системы «мультизахвата» робот может обрабатывать до 300 единиц продукции в минуту. А система Triaflex в свою очередь обеспечивает динамическую синхронизацию конвейерной ленты для захвата и перекладки продукции со скоростью до 110 метров в минуту. Это также позволяет отдельные единицы продукции помещать во вторичную упаковку для завёртывания.

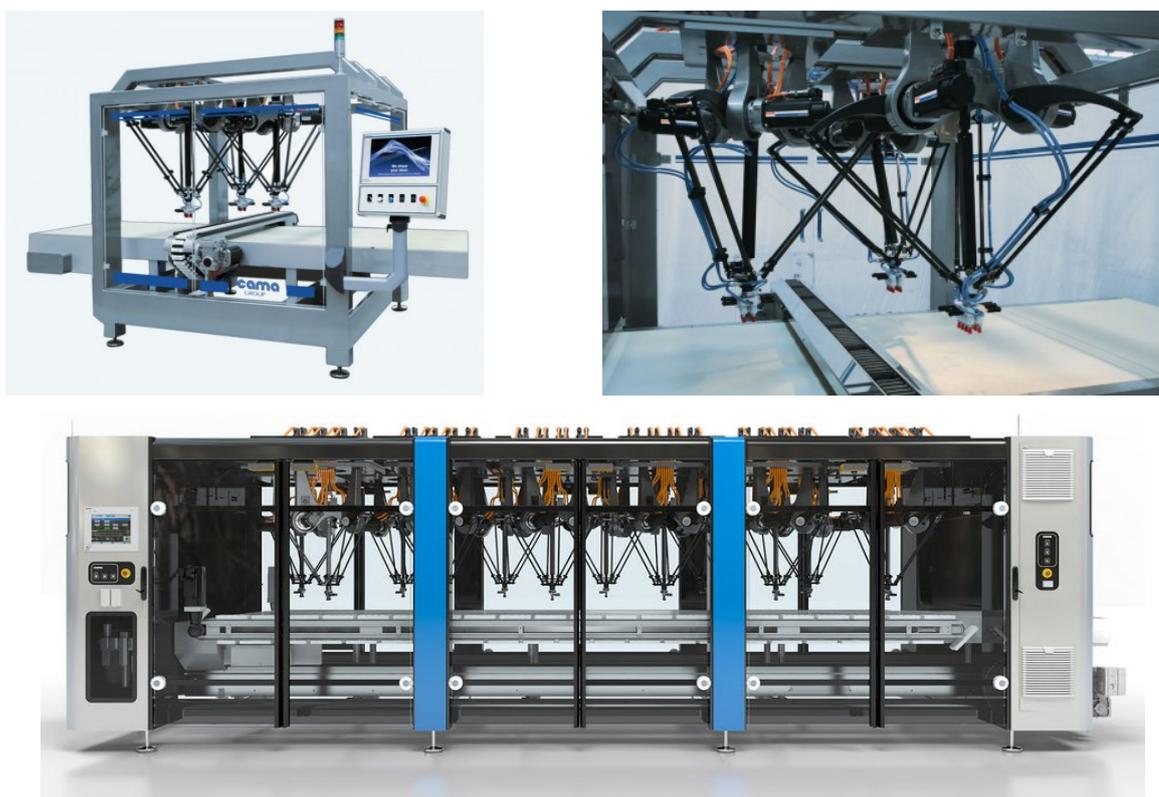


Рисунок 1.22. Погрузочное устройство Triaflex, состоящее из DELTA-роботов [65].

Уникальность данного погрузочного устройства от Сама, в отличие от других, состоит в том, что используется единый контроллер движения Indra Motion MLC от компании Rexroth для всего устройства Triaflex, а не управляется каждым роботом по отдельности со своим контроллером. Также в Triaflex возможно подключение четвёртого робота и двух дополнительных осей конвейера без негативного влияния на работу линии. Применение одного

контроллера позволяет избежать необходимости создания многоканальных интерфейсов между устройствами управления отдельными роботами. Данные интерфейсы необходимы для обеспечения передачи информации с системы камеры и координации роботов для предотвращения столкновений.

На основе манипулятора DELTA были разработаны новые близкие по структуре механизмы (рисунок 1.23, 1.24) [99, 121, 137]. Отличие данных схем манипуляторов от DELTA состоит в конструкции параллелограммов в кинематических цепях.



Рисунок 1.23. FlexPicker от ABB [99].

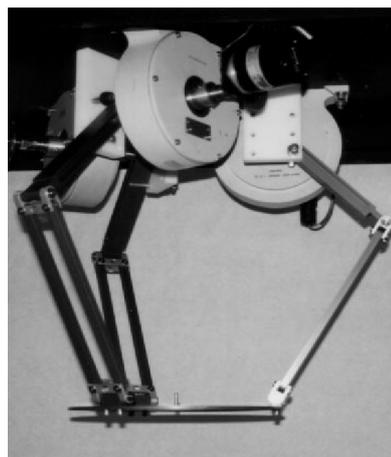


Рисунок 1.24. Манипуляторы с тремя поступательными степенями свободы [137].

Авторами Ли, Вангом и др. (Liu X.-J., Wang J., Gao F., Wang L.-P.) был предложен пространственный параллельный манипулятор с тремя степенями свободы, состоящий из трёх кинематических цепей, в одной из которых имеется шарнирный параллелограмм (рисунок 1.25) [111]. Подвижная платформа имеет три степени свободы: две поступательных и одну вращательную по отношению к неподвижному основанию. В этой конструкции наличие шарнирного параллелограмма гарантирует желаемую степень свободы на выходной платформе, для робота DELTA, например, ограничить вращение платформы.

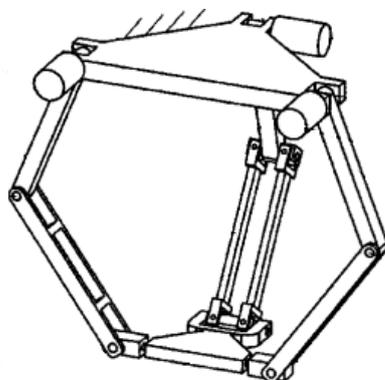


Рисунок 1.25. Пространственный параллельный манипулятор с тремя степенями свободы [111].

В дальнейшем они развили эту тему и в работе [112] рассматривается уже целое семейство МПС с тремя степенями свободы. Новизна его состоит в том, чтобы хотя бы одна кинематическая цепь содержала плоский шарнирный параллелограмм, при этом каждый разработанный манипулятор имеет высокую вращательную способность. А наличие хотя бы одного шарнирного параллелограмма в одной из кинематических цепей позволяет выходному звену не менять ориентации по отношению к основанию.

Пьеро Ф. и Компань О. (Pierrot F., Company O.) предложили целое семейство МПС с четырьмя степенями свободы и назвали его Н4 [128]. Их решение заключается в создании полностью параллельного механизма без пассивной кинематической цепи, способного обеспечить высокую производительность с точки зрения скорости и ускорения. Манипулятор Н4 имеет три поступательные степени свободы и одну вращательную вокруг своей оси. Манипулятор Н4 полезен для высокоскоростной обработки в робототехнике и фрезерования в станкостроительной промышленности.

В работе [110, 151] авторы проводят кинематический анализ манипулятора Н4, рассматривают различные варианты компоновки его структуры, методы синтеза при проектировании, решаются прямые и обратные задачи кинематики, анализ особых положений с использованием линейной геометрии и теории винтов (рисунок 1.26).



Рисунок 1.26 Симметричный манипулятор Н4 с призматическими и вращательными соединениями [151].

Венгером Ф. и Шабля Д. (Wenger P., Chablat D.) был создан робот Orthoglide, относящийся к семейству трёх осевых поступательных МПС с переменными шаговыми точками и фиксированной длиной стоек [148] (рисунок 1.27). Данный механизм имеет три идентичные кинематические цепи PRPaR цепи (где P, R и Pa – призматический исполнительный механизм, вращательная кинематическая пара и шарнирный параллелограмм, соответственно). Эти соединения могут приводиться в действие с помощью линейных приводов или приводов с шарико-винтовой передачей. Выходное звено соединено с призматическим исполнительным механизмом через набор из трёх параллелограммов, поэтому он может двигаться только

поступательно. Данный механизм имеет симметричную структуру и достаточно простую кинематическую цепь, где все соединения имеют одну степень свободы. За счёт своей простой конструкции данный механизм не имеет особых положений.

На основе робота Orthoglide за счёт добавления карданных валов в два шарнирных параллелограмма в две кинематические цепи французские учёные создали механизм с пятью степенями свободы [72] (рисунок 1.28).

В схему были добавлены кинематические пары, обеспечивающие вращение рабочего органа. Однако это потребовало введение передаточных элементов (валов), что снизило жёсткость конструкции.

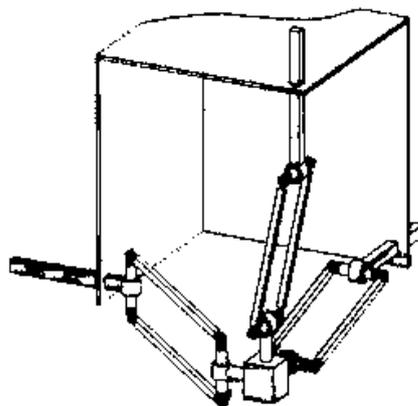


Рисунок 1.27. Схема робота Orthoglide с тремя степенями свободы [149].

Выходное звено разработанного механизма с пятью степенями свободы организовано в виде сферического запястья с двумя степенями свободы, полученного из механизма с тремя степенями свободы «Agile eye» авторов Госселена и Хамеля (Gosselin C. , Hamel J.F.) [94]. Тем не менее, французскими учёными было спроектировано сферическое запястье с двумя степенями свободы с высокой жёсткостью [73]. Данное запястье состоит из пяти звеньев, соединенных посредством вращательных шарниров. При этом приводятся в действие два вращательных шарнира, соединенные с основанием. Оси вращательных шарниров пересекаются (рисунок 1.29).

Наиболее важным преимуществом МПС с кинематической развязкой являются их очень простые кинематические зависимости между входными и выходными координатами, и, как следствие, упрощение их кинематического и динамического анализа и синтеза. Кинематическая развязка между положением и ориентацией выходного звена (платформы или рабочего органа) упрощает алгоритмы управления этими устройствами, зачастую, за счёт уменьшения числа промежуточных звеньев механизма, что положительно сказывается на жёсткости механизма и его грузоподъёмности.

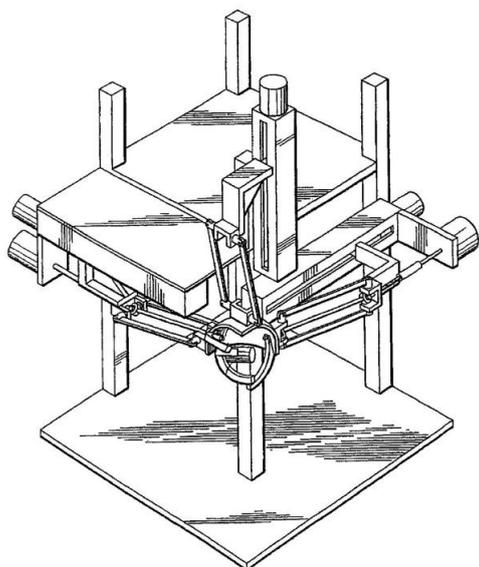


Рисунок 1.28. Манипулятор Orthoglide с пятью степенями свободы [72].

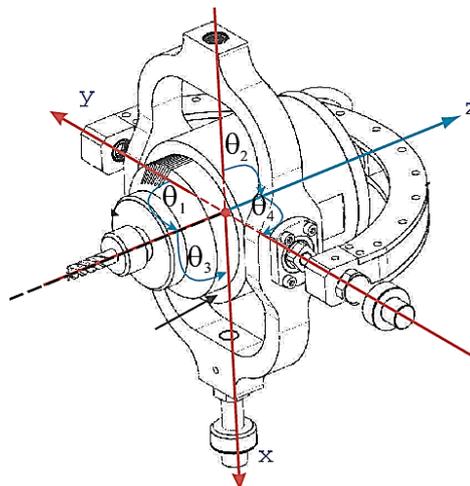


Рисунок 1.29. Сферическое запястье с двумя степенями свободы [73].

Несмотря на указанные выше преимущества МПС имеют свои недостатки. За счёт замкнутых кинематических цепей увеличивается жёсткость конструкции и повышается грузоподъёмность относительно собственного веса, но при этом уменьшается рабочая зона механизма. В механизмах с полной или частичной кинематической развязкой предъявляются повышенные требования к приводам, так как каждый привод в таких механизмах отвечает за одну степень свободы выходного звена, что увеличивает нагрузку на них. Попытка упростить законы управления МПС и сохранить их основные преимущества (одно из которых – воспринимать каждой кинематической цепью только часть общей нагрузки), приводящая к созданию более жёстких механизмов (роботов), является сложной задачей.

Наличие особых положений (сингулярностей) может привести либо к потере степени свободы, либо теряется управляемость выходных звеном. Для обхода особых положений или отдельных точек зоны необходимо разрабатывать специальные алгоритмы, прописанные в общем алгоритме управления системой. Либо использование дополнительных приводов, что ведёт к усложнению конструкции и, следовательно, к усложнению системы управления данным механизмом.

Но с другой стороны при всех своих недостатках интерес к механизмам параллельной структуры не ослабевает и в общемировом масштабе является одним из перспективных направлений для исследований, о чём можно судить по результатам на конференциях и симпозиумах по робототехнике.

Выводы по главе

1. Анализ состояния и использования робототехнических устройств показал, что в последнее время все более интенсивно развиваются манипуляторы (механизмы) параллельной

структуры. Большой интерес к МПС вызван их положительными свойствами, такими как: более высокая жёсткость конструкции; более высокая точность позиционирования и грузоподъёмность, меньшая инерционность в динамике [122].

2. Особо выделяются механизмы с кинематической развязкой, которые характеризуются относительно простыми кинематическими связями между входными и выходными координатами, что исключает необходимость синхронизировать исполнительные механизмы [29].

3. Введение кинематической развязки между положением и ориентацией выходного звена упрощает вывод и решение уравнений, а также способствует активизации системы управления.

4. Имеющиеся недостатки механизмов параллельной структуры, такие как небольшое рабочее пространство; наличие особых положений в близости от рабочего пространства, сложность параметрического синтеза и нелинейные соотношения между кинематикой и динамикой преодолеваются выбором объектов с соответствующими техническими условиями, выбором алгоритма управления, обеспечивающего обход особых положений, введением комплексных элементов, состоящих из группы звеньев.

ГЛАВА 2. АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ И РАБОТОСПОСОБНОСТИ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ЧЕТЫРЬМЯ, ПЯТЬЮ И ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Из числа механизмов параллельной структуры, рассмотренных в главе 1, в качестве прототипа был выделен робот Orthoglide [149], относящийся к семейству поступательных МПС с переменными шаговыми точками и фиксированной длиной стоек. В каждой кинематической цепи располагается двигатель поступательного перемещения, который передаёт перемещение выходного звена только по одной координате декартовой системы. Данный механизм обладает свойством кинематической развязки, т.е. одно движение (перемещение) выходного звена обеспечивается за счёт только одного входного звена или группы звеньев кинематической цепи. Развитием робота Orthoglide является увеличение степеней его подвижности добавлением карданных валов в кинематические цепи [72], что снизило жёсткость конструкции.

В данной главе приводятся результаты дальнейшего развития робота Orthoglide с тремя степенями свободы в целях повышения его жёсткости. Для этой цели в исходную схему была введена дополнительная вращательная кинематическая пара, которая позволила двигателю поступательного перемещения выполнять с помощью шарнирного параллелограмма также вращательное движение. Это привело к увеличению функциональных возможностей механизмов. Для разработанных схем выполняется структурный анализ и синтез. Методом винтового исчисления [15, 27, 85, 131, 132] показана возможность передачи шарнирным параллелограммом вращательного движения.

Для решения поставленных задач было предложено допущение, что в цепи, содержащей двигатель поступательного перемещения, шарнирный параллелограмм рассматривается как одноподвижная поступательная кинематическая пара, а в двух цепях, не имеющих двигателей вращательного перемещения, шарнирные параллелограммы заменяются карданными шарнирами. В данной главе последовательно рассматриваются задачи определения числа степеней подвижности механизмов с четырьмя, пятью и шестью степенями подвижности.

2.1. Разработка и синтез структурных схем, определение работоспособности механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы

Рассмотрим механизм параллельной структуры с четырьмя степенями свободы, являющийся развитием робота Orthoglide (рисунок 2.1). Данный механизм работает на перемещение исполнительного блока, состоящего из подвижной платформы (выходного звена) (2), а также на поворот рабочего инструмента (3), установленного на ней, за счёт трёх кинематических цепей, расположенных ортогонально вдоль осей x, y, z . Каждая кинематическая цепь содержит

двигатель поступательного перемещения (4, 4', 4'') и шарнирный параллелограмм (7), обеспечивающей выходной платформе всегда оставаться параллельной основанию. Наличие в одной из кинематических цепей двигателя вращательного перемещения (11) и вращательной кинематической пары (12) позволяет менять ориентацию рабочего инструмента (3). Вращение на рабочий орган передается той же кинематической цепью, что обеспечивает и поступательное [34].

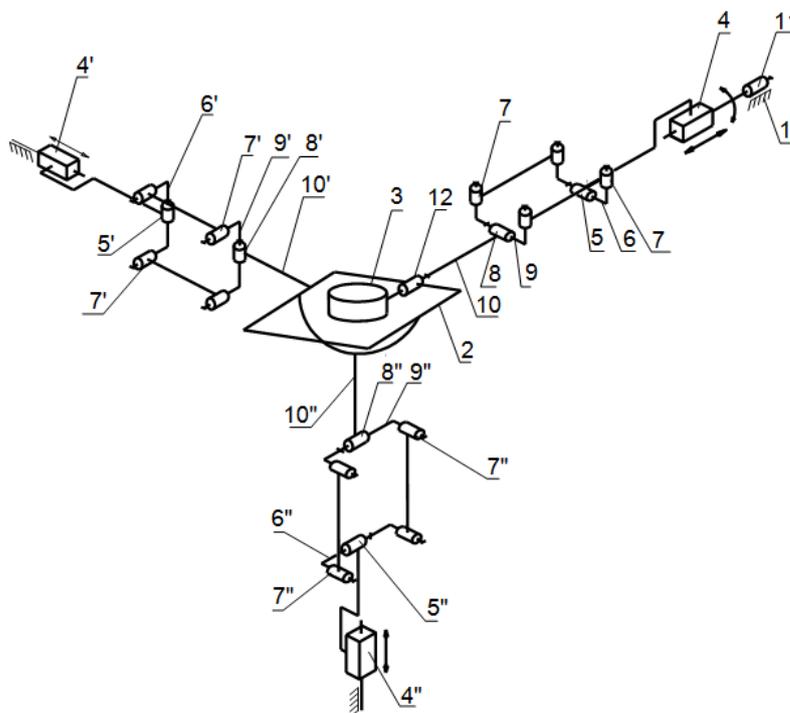


Рисунок 2.1. Структурная схема механизма с четырьмя степенями свободы.

Рассмотрим более подробно структуру полученного пространственного механизма параллельной структуры, что необходимо для его дальнейшего анализа и синтеза (рисунок 2.1). Механизм включает основание (1), выходное звено (2), рабочий орган (3), кинематически связанный с выходным звеном механизма, и три кинематические цепи. Каждая кинематическая цепь содержит двигатель поступательного перемещения (4, 4', 4''), начальную вращательную кинематическую пару (5, 5', 5''), шарнирный параллелограмм, состоящий из начального (6, 6', 6'') и конечного звена (9, 9', 9''), конечную вращательную кинематическую пару (8, 8', 8''), вращательные кинематические пары шарнирного параллелограмма (7, 7', 7''), конечное звено кинематической цепи (10, 10', 10''). В одной из кинематических цепей расположен двигатель вращательного перемещения (11). Выходная вращательная кинематическая пара (12) сопрягает конечное звено (10) кинематической цепи с выходным звеном механизма (2), и жёстко связана с рабочим органом (3). Конечные звенья двух других кинематических цепей (10', 10'') жёстко связаны с выходным звеном механизма (2). Так как звено (10) жёстко связано с рабочим органом (3), а звенья (10', 10'') – с выходным звеном

механизма (2), то звенья (10) и (3) можно принимать за одно звено, также как и звенья (10', 10'') и (2) [34, 36].

В механизмах параллельной структуры (МПС), содержащих шарнирные параллелограммы, из-за наличия избыточных кинематических пар и звеньев получаются отрицательные значения степеней подвижности. Для решения этой проблемы было принято допущение, что в конечном случае в цепи, содержащей двигатель вращательного перемещения (11), шарнирный параллелограмм рассматриваем как одноподвижную поступательную кинематическую пару, а в двух цепях, не имеющих двигателей вращательного перемещения, шарнирные параллелограммы заменяем карданными шарнирами.

Определим число степеней подвижности полученного механизма без учёта принятого допущения (рисунок 2.1).

Воспользуемся формулой А.П. Малышева для определения числа степеней свободы рассматриваемого механизма параллельной структуры, применяемой относительно пространственных механизмов [34, с. 36]:

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 - 4 \cdot p_4, \quad (2.1)$$

где n – число звеньев; p_5 – число пар пятого класса (одноподвижных пар); p_4 – число пар четвертого класса (двухподвижных пар).

В рассматриваемом механизме число звеньев (n) равно девятнадцати, число одноподвижных пар (p_5) соответствует двадцати трём [34]. Подставив полученные значения числа звеньев (n) и одноподвижных кинематических пар (p_5) в (2.1), имеем:

$$W = 6 \cdot (19 - 1) - 5 \cdot 23 = -7.$$

Данный результат не является верным, так как не учитываются шарнирные параллелограммы.

Примем, что число степеней свободы шарнирного параллелограмма по формуле П.Л. Чебышева равно единице, тогда:

$$W = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_5 - p_4, \quad (2.2)$$

где n – число звеньев; p_5 – число пар пятого класса (одноподвижных пар); p_4 – число пар четвертого класса (двухподвижных пар). По формуле (2.2) имеем:

$$W = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 4 = 1.$$

Шарнирный параллелограмм, будучи плоским механизмом, имеет одну степень свободы, и может рассматриваться как одноподвижная поступательная кинематическая пара.

Принимаем во внимание те же звенья, что были и ранее, исключив промежуточных звеньев параллелограмма. Двенадцать вращательных кинематических пар трёх параллелограммов заменяются тремя поступательными кинематическими парами. По формуле (2.1) получаем:

$$W = 6 \cdot (13 - 1) - 5 \cdot 14 = 2.$$

Данный результат так же не является верным.

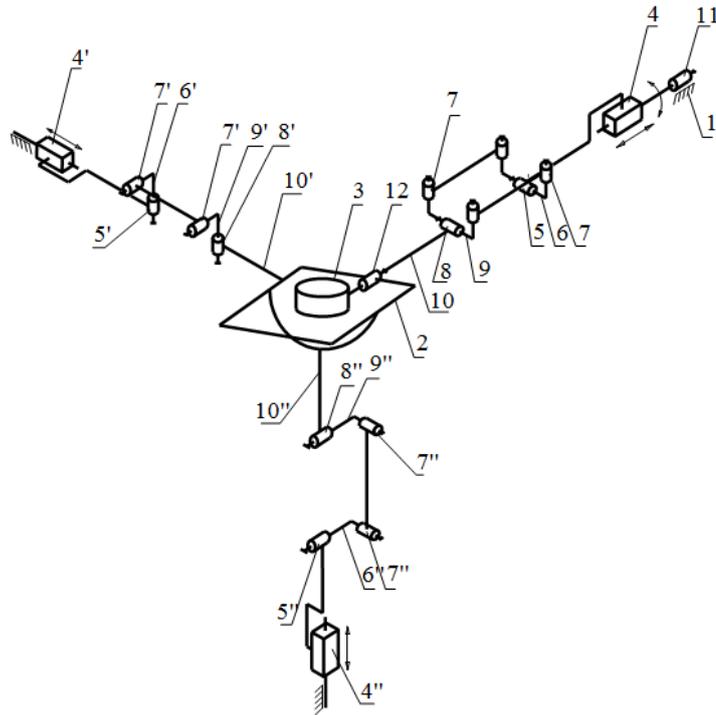


Рисунок 2.2. Структурная схема механизма с четырьмя степенями свободы с заменой шарнирных параллелограммов карданным шарниром.

В двух кинематических цепях, не содержащих двигатель вращательного перемещения (11), шарнирные параллелограммы заменим карданным шарниром. В третьей кинематической цепи, содержащей двигатель вращательного перемещения (11), шарнирный параллелограмм будем принимать как поступательную кинематическую пару (рисунок 2.2).

В таком случае число (n) звеньев в механизме равно пятнадцати, число одноподвижных пар (p_5) равно шестнадцати.

Подставив полученные значения звеньев и одноподвижных кинематических пар в (2.1), имеем число степеней свободы механизма, равное четырём, что является верным:

$$W = 6 \cdot (15 - 1) - 5 \cdot 16 = 4.$$

Для определения работоспособности рассматриваемого механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы воспользуемся методом винтов, который позволяет выявить возможные особые положения (сингулярности) и неуправляемую подвижность в механизме.

Рассмотрим плюккерovy координаты ортов осей кинематических пар. Каждой кинематической паре ставится в соответствие орт её оси, и составляется матрица плюккерovyх координат этих ортов. Соответствующее построение приведено на рисунке 2.3 [39].

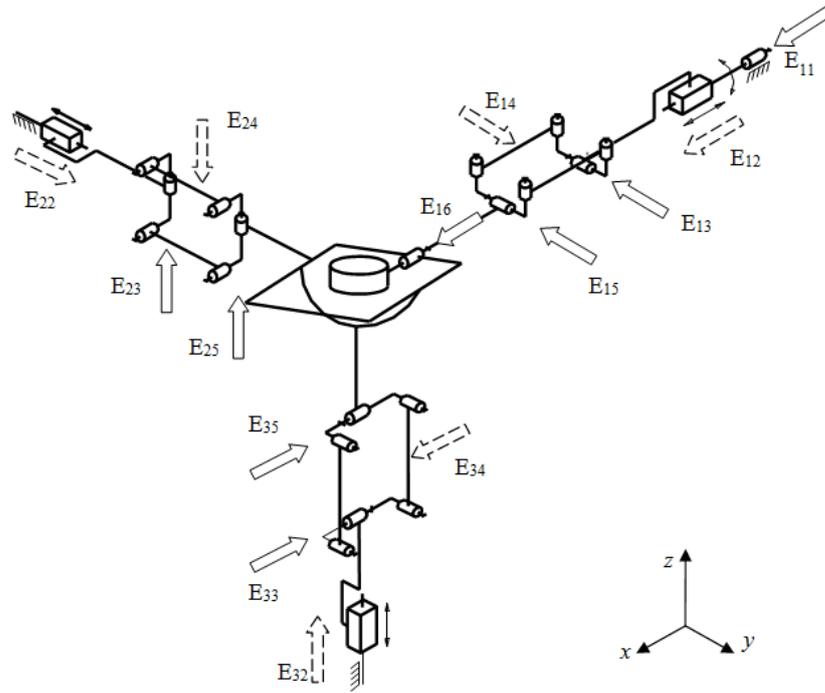


Рисунок 2.3. Структурная схема механизма с четырьмя степенями свободы.

Рассмотрим плюккеровы координаты единичных винтов осей кинематических пар механизма в исходном положении (рисунок 2.3). Единичные винты, характеризующие положения осей кинематических пар, имеют координаты:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}_{11}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \mathbf{E}_{12}(0, 0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{E}_{13}(0, -1, 0, 0, 0, e_{13z}^\circ), \\
 & \mathbf{E}_{14}(0, 0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{E}_{15}(0, -1, 0, 0, 0, e_{15z}^\circ), \mathbf{E}_{16}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
 & \mathbf{E}_{22}(0, 0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{E}_{23}(0, 0, 1, e_{23x}^\circ, 0, 0), \mathbf{E}_{24}(0, 0, 0, 0, 0, -1), \mathbf{E}_{25}(0, 0, 1, e_{25x}^\circ, 0, 0), \\
 & \mathbf{E}_{32}(0, 0, 0, 0, 0, 1), \mathbf{E}_{33}(-1, 0, 0, 0, e_{33y}^\circ, 0), \mathbf{E}_{34}(0, 0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{E}_{35}(-1, 0, 0, 0, e_{35y}^\circ, 0).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим первую кинематическую цепь. Так как единичные винты \mathbf{E}_{11} и \mathbf{E}_{16} лежат на одной оси, то единичный винт \mathbf{E}_{16} в расчёт не берём. Условия взаимности плюккерых координат единичных и силовых винтов запишем в виде пяти уравнений, из которых получим один силовой винт:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{11x}^\circ + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{11y}^\circ + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{11z}^\circ + \mathbf{r}_x^\circ \cdot \mathbf{e}_{11x} + \mathbf{r}_y^\circ \cdot \mathbf{e}_{11y} + \mathbf{r}_z^\circ \cdot \mathbf{e}_{11z} = 0, \\
 & \mathbf{r}_x \cdot 0 + \mathbf{r}_y \cdot 0 + \mathbf{r}_z \cdot 0 + \mathbf{r}_x^\circ \cdot 1 + \mathbf{r}_y^\circ \cdot 0 + \mathbf{r}_z^\circ \cdot 0 = 0, \\
 & \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{12x}^\circ + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{12y}^\circ + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{12z}^\circ + \mathbf{r}_x^\circ \cdot \mathbf{e}_{12x} + \mathbf{r}_y^\circ \cdot \mathbf{e}_{12y} + \mathbf{r}_z^\circ \cdot \mathbf{e}_{12z} = 0, \\
 & \mathbf{r}_x \cdot 1 + \mathbf{r}_y \cdot 0 + \mathbf{r}_z \cdot 0 + \mathbf{r}_x^\circ \cdot 0 + \mathbf{r}_y^\circ \cdot 0 + \mathbf{r}_z^\circ \cdot 0 = 0, \\
 & \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{13x}^\circ + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{13y}^\circ + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{13z}^\circ + \mathbf{r}_x^\circ \cdot \mathbf{e}_{13x} + \mathbf{r}_y^\circ \cdot \mathbf{e}_{13y} + \mathbf{r}_z^\circ \cdot \mathbf{e}_{13z} = 0, \\
 & \mathbf{r}_x \cdot 0 + \mathbf{r}_y \cdot 0 + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{13z}^\circ + \mathbf{r}_x^\circ \cdot 0 + \mathbf{r}_y^\circ \cdot (-1) + \mathbf{r}_z^\circ \cdot 0 = 0, \\
 & \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{14x}^\circ + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{14y}^\circ + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{14z}^\circ + \mathbf{r}_x^\circ \cdot \mathbf{e}_{14x} + \mathbf{r}_y^\circ \cdot \mathbf{e}_{14y} + \mathbf{r}_z^\circ \cdot \mathbf{e}_{14z} = 0, \\
 & \mathbf{r}_x \cdot 0 + \mathbf{r}_y \cdot 1 + \mathbf{r}_z \cdot 0 + \mathbf{r}_x^\circ \cdot 0 + \mathbf{r}_y^\circ \cdot 0 + \mathbf{r}_z^\circ \cdot 0 = 0, \\
 & \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{15x}^\circ + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{15y}^\circ + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{15z}^\circ + \mathbf{r}_x^\circ \cdot \mathbf{e}_{15x} + \mathbf{r}_y^\circ \cdot \mathbf{e}_{15y} + \mathbf{r}_z^\circ \cdot \mathbf{e}_{15z} = 0, \\
 & \mathbf{r}_x \cdot 0 + \mathbf{r}_y \cdot 0 + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{15z}^\circ + \mathbf{r}_x^\circ \cdot 0 + \mathbf{r}_y^\circ \cdot (-1) + \mathbf{r}_z^\circ \cdot 0 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{e}_{ijx}, \mathbf{e}_{ijy}, \mathbf{e}_{ijz}, \mathbf{e}_{ijx}^{\circ}, \mathbf{e}_{ijy}^{\circ}, \mathbf{e}_{ijz}^{\circ}$ – векторная и моментная части единичного винта, соответственно (где $i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи; $j = 1, 2, 3$ – номер кинематической пары); $\mathbf{r}_{ijx}, \mathbf{r}_{ijy}, \mathbf{r}_{ijz}, \mathbf{r}_{ijx}^{\circ}, \mathbf{r}_{ijy}^{\circ}, \mathbf{r}_{ijz}^{\circ}$ – векторная и моментная часть силового винта, соответственно (где $i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи; $j = 1, 2, 3$ – номер кинематической пары).

Из системы уравнений (2.3) получаем один силовой винт с координатами $\mathbf{R}_1(0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Рассмотрим вторую кинематическую цепь. Имеем четыре единичных винта. Условия взаимности плюккеровых координат единичных и силовых винтов можно записать в виде четырёх уравнений, из которых необходимо найти два неизвестных и получим, в данном случае, два силовых винта:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{22x}^{\circ} + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{22y}^{\circ} + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{22z}^{\circ} + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{22x} + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{22y} + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{22z} &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot 0 + \mathbf{r}_y \cdot 1 + \mathbf{r}_z \cdot 0 + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot 0 &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{23x}^{\circ} + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{23y}^{\circ} + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{23z}^{\circ} + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{23x} + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{23y} + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{23z} &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{23x}^{\circ} + \mathbf{r}_y \cdot 0 + \mathbf{r}_z \cdot 0 + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot 1 &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{24x}^{\circ} + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{24y}^{\circ} + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{24z}^{\circ} + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{24x} + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{24y} + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{24z} &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot 0 + \mathbf{r}_y \cdot 0 + \mathbf{r}_z \cdot (-1) + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot 0 &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{25x}^{\circ} + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{25y}^{\circ} + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{25z}^{\circ} + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{25x} + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{25y} + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{25z} &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{25x}^{\circ} + \mathbf{r}_y \cdot 0 + \mathbf{r}_z \cdot 0 + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot 1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из системы уравнений (2.4) получаем два силовых винта с координатами $\mathbf{R}_2(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{R}_3(0, 0, 0, 0, 1, 0)$.

Рассмотрим третью кинематическую цепь. Имеем четыре единичных винта. Условия взаимности плюккеровых координат единичных и силовых винтов можно записать в виде четырёх уравнений, из которых необходимо найти два неизвестных и получим, в данном случае, два силовых винта:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{32x}^{\circ} + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{32y}^{\circ} + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{32z}^{\circ} + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{32x} + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{32y} + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{32z} &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot 0 + \mathbf{r}_y \cdot 0 + \mathbf{r}_z \cdot 1 + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot 0 &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{33x}^{\circ} + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{33y}^{\circ} + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{33z}^{\circ} + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{33x} + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{33y} + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{33z} &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot 0 + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{33y}^{\circ} + \mathbf{r}_z \cdot 0 + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot (-1) + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot 0 &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{34x}^{\circ} + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{34y}^{\circ} + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{34z}^{\circ} + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{34x} + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{34y} + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{34z} &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot 1 + \mathbf{r}_y \cdot 0 + \mathbf{r}_z \cdot 0 + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot 0 &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{e}_{35x}^{\circ} + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{35y}^{\circ} + \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{e}_{35z}^{\circ} + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{35x} + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{35y} + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot \mathbf{e}_{35z} &= 0, \\
 \mathbf{r}_x \cdot 0 + \mathbf{r}_y \cdot \mathbf{e}_{35y}^{\circ} + \mathbf{r}_z \cdot 0 + \mathbf{r}_x^{\circ} \cdot (-1) + \mathbf{r}_y^{\circ} \cdot 0 + \mathbf{r}_z^{\circ} \cdot 0 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из системы уравнений (2.5) получаем два силовых винта с координатами $\mathbf{R}_4(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{R}_5(0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Координаты силовых винтов можно представить в виде соответствующей матрицы $(R)5 \times 6$:

$$(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы следует, что имеют место лишь три независимых силовых винта. Это винты бесконечно большого параметра (моменты), ограничивающие вращения.

Рассмотрим отдельно первую кинематическую цепь, причём сместим её относительно оси координат и найдём для данной цепи плюккеры координаты (рисунок 2.4).

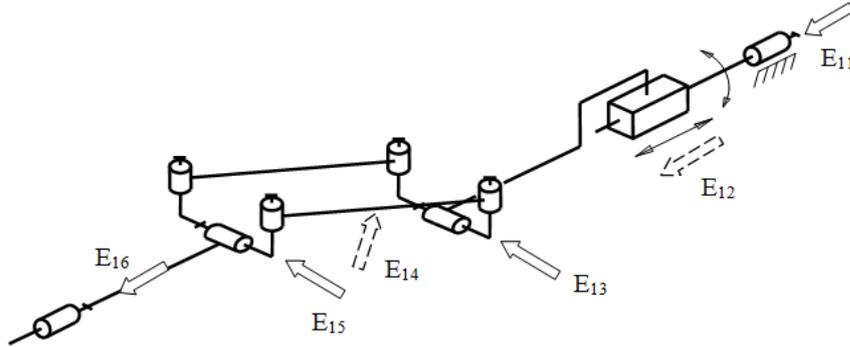


Рисунок 2.4. Первая кинематическая цепь механизма с четырьмя степенями свободы.

Рассмотрим плюккеры координаты единичных винтов осей кинематических пар механизма (рисунок 2.4). Единичные винты, характеризующие положения осей кинематических пар, имеют координаты:

$$\mathbf{E}_{11}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \mathbf{E}_{12}(0, 0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{E}_{13}(0, -1, 0, 0, 0, e_{13z}^0), \\ \mathbf{E}_{14}(0, 0, 0, e_{14x}^0, e_{14y}^0, 0), \mathbf{E}_{15}(0, -1, 0, 0, 0, e_{15z}^0), \mathbf{E}_{16}(1, 0, 0, 0, 0, e_{16z}^0).$$

Составим матрицу из полученных координат единичных винтов:

$$(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e_{13z}^0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{14x}^0 & e_{14y}^0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e_{15z}^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{16z}^0 \end{pmatrix}.$$

Уберём из полученной матрицы один столбец, в котором получили нули:

$$(E)' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{13z}^0 \\ 0 & 0 & e_{14x}^0 & e_{14y}^0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{15z}^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & e_{16z}^0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем матрицы размера 5×5 , вычеркивая по одной строке:

$$(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{13z}^0 \\ 0 & 0 & e_{14x}^0 & e_{14y}^0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{15z}^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & e_{16z}^0 \end{pmatrix}; (E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{13z}^0 \\ 0 & 0 & e_{14x}^0 & e_{14y}^0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{15z}^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & e_{16z}^0 \end{pmatrix}; (E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{14x}^0 & e_{14y}^0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{15z}^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & e_{16z}^0 \end{pmatrix}$$

$$;$$

$$(E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{13z}^0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{15z}^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & e_{16z}^0 \end{pmatrix}; (E_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{13z}^0 \\ 0 & 0 & e_{14x}^0 & e_{14y}^0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e_{15z}^0 \end{pmatrix}.$$

Проанализируем эти матрицы с точки зрения возможности внутренней подвижности в данной цепи. Можно показать, что частичная цепь, включающая четыре кинематических пары (за исключением поступательного привода), имеет подвижность.

Рассматриваем матрицу (E_2) , пытаясь выразить последнюю строку через четыре первых строки. Задача сведется к системе линейных уравнений относительно скалярных множителей. Очевидно, что множитель при третьей строке этой матрицы должен быть равен нулю. Получим систему трёх уравнений относительно трех неизвестных. Запишем эту систему:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + 0 + 0 + 0 &= 1, \\ 0 + b \cdot (-1) + 0 + c \cdot (-1) &= 0, \\ 0 + b \cdot e_{13z}^0 + 0 + c \cdot e_{15z}^0 &= e_{16z}^0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решив систему (2.6), и выразив третье уравнение через второе уравнение, найдём неизвестное c :

$$a = 1; \quad b = -c, \quad c = \frac{e_{16z}^0}{e_{15z}^0 - e_{13z}^0}.$$

Указанные коэффициенты выражают скорости в соответствующих кинематических парах. В данной цепи имеется внутренняя подвижность, что свидетельствует о возможности передачи вращения с вращательного привода на вращательную кинематическую пару, сопряженную с выходным звеном.

2.2. Разработка и синтез структурных схем, определение работоспособности механизма параллельной структуры с пятью степенями свободы

Рассмотрим механизм с пятью степенями свободы, добавив к исходной схеме механизма Orthoglide два двигателя вращательного перемещения и дополнительные выходные

вращательные кинематические пары, сопрягающие конечные звенья соответствующих кинематических цепей с выходным звеном механизма.

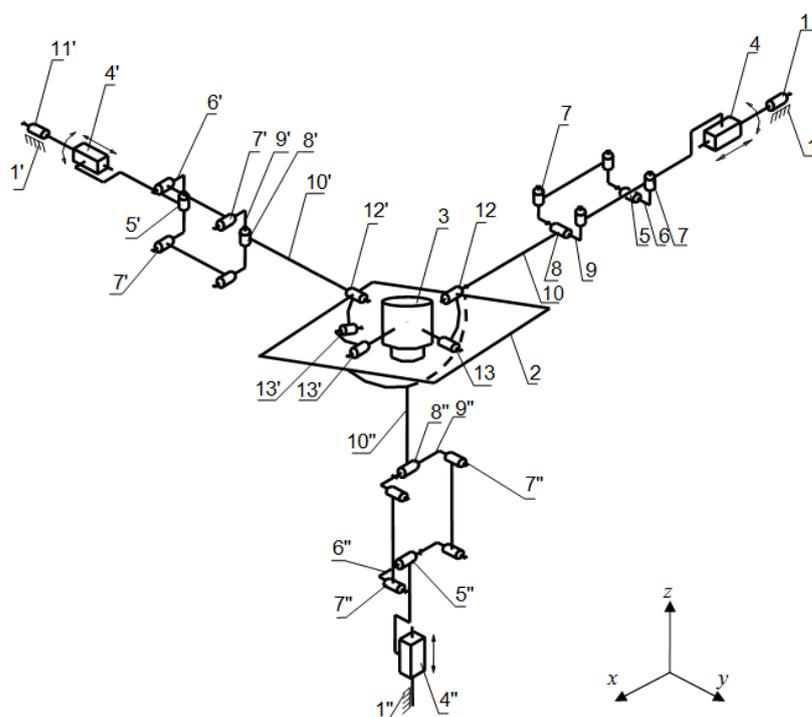


Рисунок 2.5. Структурная схема механизма с пятью степенями свободы.

Пространственный механизм (рисунок 2.5) состоит из трёх кинематических цепей и включает те же звенья и кинематические пары, что и механизм с четырьмя степенями. Отличие от последнего состоит в том, что вторую кинематическую цепь дополнительно снабжаем двигателем вращательного перемещения (11'), а также выходной вращательной кинематической парой (12'). Конечные звенья (10, 10') двух кинематических цепей сопряжены с выходным звеном механизма (2) посредством выходных вращательных кинематических пар (12, 12'), а с рабочим органом (3) посредством промежуточных вращательных кинематических пар (13, 13'). Оси выходных (12, 12') и промежуточных (13, 13') вращательных кинематических пар расположены с пересечением в одной точке, а конечное звено (10'') третьей кинематической цепи жёстко связано с выходным звеном (2) механизма [35].

Для определения числа степеней свободы рассматриваемого механизма воспользуемся формулой А.П. Малышева для пространственных механизмов (2.1).

Число (n) звеньев в механизме равно 21, число неподвижных пар (p_5) равно 25. Подставляя полученные значения в (2.1), получаем [34]:

$$W = 6 \cdot (21 - 1) - 5 \cdot 25 = -5.$$

Данный результат не является верным, так как не учитываются шарнирные параллелограммы. Как и в случае механизма с четырьмя степенями свободы, число степеней свободы шарнирного параллелограмма равно единице по формуле (2.2), следовательно, имеет

одну степень свободы, и мы можем его рассматривать как одноподвижную поступательную кинематическую пару. Двенадцать вращательных кинематических пар трёх параллелограммов заменяются тремя поступательными кинематическими парами. Принимая во внимание звенья и одноподвижные кинематические пары, что были ранее с учётом замены шарнирных параллелограммов, согласно (2.1) получаем следующее значение числа степеней свободы:

$$W = 6 \cdot (15 - 1) - 5 \cdot 16 = 4.$$

Данный результат так же не является верным.

Заменяем в кинематической цепи, не содержащей двигатель вращательного перемещения, шарнирный параллелограмм карданным шарниром, а в двух других кинематических цепях, содержащих двигатели вращательного перемещения, шарнирные параллелограммы будем принимать как поступательные кинематические пары (рисунок 2.6). В общем сложности в полученном механизме имеем 16 звеньев и 17 одноподвижных кинематических пар. Согласно (2.1) имеем:

$$W = 6 \cdot (16 - 1) - 5 \cdot 17 = 5.$$

Число степеней свободы равно пяти. Данный результат является верным.

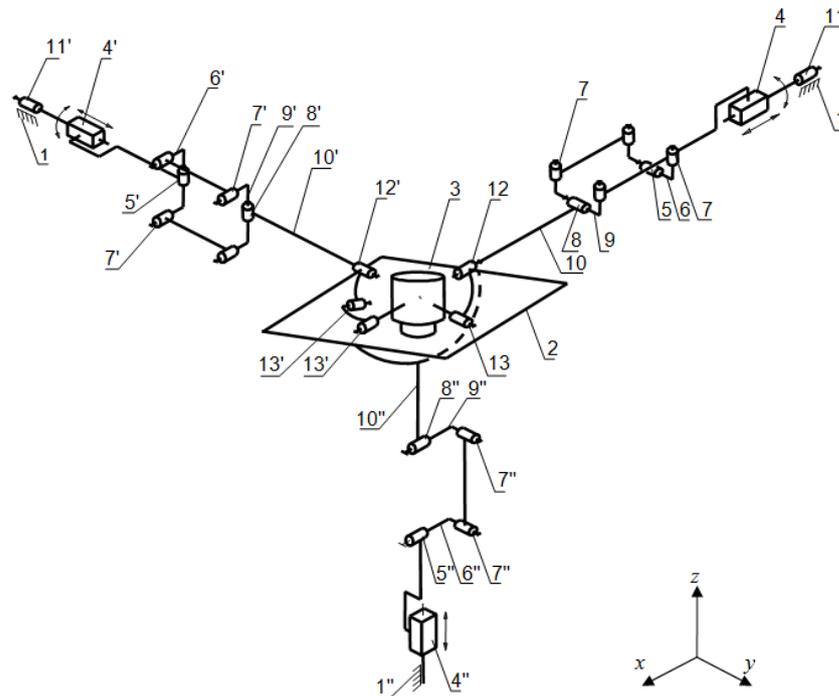


Рисунок 2.6. Структурная схема механизма с пятью степенями свободы с карданным шарниром.

Для определения работоспособности рассматриваемого механизма с пятью степенями свободы воспользуемся методом винтового исчисления, рассмотрев плюккерovy координаты ортов осей кинематических пар.

Каждой кинематической паре ставится в соответствие орт её оси, и составляется матрица плюккерovyх координат этих ортов. Соответствующее построение приведено на рисунке 2.7.

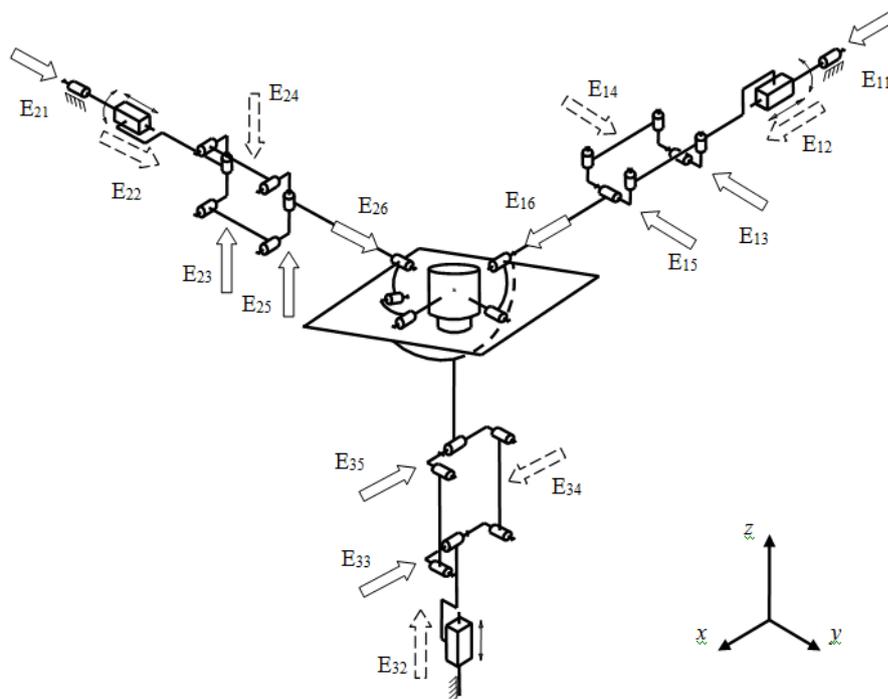


Рисунок 2.7. Структурная схема механизма с пятью степенями свободы.

Рассмотрим плюккерovy координаты единичных винтов осей кинематических пар механизма, который находится в исходном положении (рисунок 2.7). Единичные винты, характеризующие положения осей кинематических пар, имеют координаты [39]:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}_{11}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \mathbf{E}_{12}(0, 0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{E}_{13}(0, -1, 0, 0, 0, e_{13z}^{\circ}), \\
 & \mathbf{E}_{14}(0, 0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{E}_{15}(0, -1, 0, 0, 0, e_{15z}^{\circ}), \mathbf{E}_{16}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
 & \mathbf{E}_{21}(0, 1, 0, 0, 0, 0), \mathbf{E}_{22}(0, 0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{E}_{23}(0, 0, 1, e_{23x}^{\circ}, 0, 0), \\
 & \mathbf{E}_{24}(0, 0, 0, 0, 0, -1), \mathbf{E}_{25}(0, 0, 1, e_{25x}^{\circ}, 0, 0), \mathbf{E}_{26}(0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
 & \mathbf{E}_{32}(0, 0, 0, 0, 0, 1), \mathbf{E}_{33}(-1, 0, 0, 0, e_{33y}^{\circ}, 0), \mathbf{E}_{34}(0, 0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{E}_{35}(-1, 0, 0, 0, e_{35y}^{\circ}, 0).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим первую кинематическую цепь. Как и в случае для механизма с четырьмя степенями свободы, получаем те же условия взаимности плюккерovyх координат единичных и силовых винтов в виде пяти уравнений (2.3), из которых получаем один силовой винт с координатами $\mathbf{R}_1(0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Рассмотрим вторую кинематическую цепь. Единичные винты \mathbf{E}_{21} и \mathbf{E}_{26} лежат на одной оси, поэтому единичный винт \mathbf{E}_{26} в расчёт не берём. В таком случае имеем пять единичных винтов. Условия взаимности плюккерovyх координат единичных и силовых винтов можно записать в виде пяти уравнений, из которых необходимо найти одно неизвестное и, следовательно, получить один силовой винт. Используя тот же принцип составления уравнений, что и для механизма с четырьмя степенями свободы (2.3), получаем силовой винт с координатами $\mathbf{R}_2(0, 0, 0, 1, 0, 0)$.

Рассмотрим третью кинематическую цепь. Получаем два силовых винта с координатами $\mathbf{R}_3(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{R}_4(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, которые совпадают с винтами, полученными при анализе механизма с четырьмя степенями свободы.

Координаты силовых винтов можно представить в виде соответствующей матрицы $(R)_{4 \times 5}$:

$$(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы следует, что имеют место лишь три независимых силовых винта. Это винты бесконечно большого параметра (моменты), ограничивающие вращение.

Рассмотрим отдельно первую кинематическую цепь, сместив её относительно оси координат, и найдём для данной цепи плюккеровы координаты. Можно заметить, что данная кинематическая цепь в точности повторяет кинематическую цепь механизма с четырьмя степенями свободы (рисунок 2.4), и, следовательно, имеем координаты:

$$\mathbf{E}_{11}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \mathbf{E}_{12}(0, 0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{E}_{13}(0, -1, 0, 0, 0, e_{13z}^0), \\ \mathbf{E}_{14}(0, 0, 0, e_{14x}^0, e_{14y}^0, 0), \mathbf{E}_{15}(0, -1, 0, 0, 0, e_{15z}^0), \mathbf{E}_{16}(1, 0, 0, 0, 0, e_{16z}^0).$$

Имеем матрицу из найденных координат единичных винтов и получаем следующие коэффициенты для определения скоростей в кинематических парах:

$$(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e_{13z}^0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{14x}^0 & e_{14y}^0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e_{15z}^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{16z}^0 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} a &= 1, \\ b &= -c, \\ c &= \frac{e_{16z}^0}{e_{15z}^0 - e_{13z}^0}. \end{aligned}$$

В данной цепи имеется внутренняя подвижность, что свидетельствует о возможности передачи вращения с вращательного привода на вращательную кинематическую пару, сопряженную с выходным звеном.

В двух кинематических цепях имеет место внутренняя подвижность – передача вращения от вращательного привода к конечной вращательной кинематической паре. Из выше сказанного можно заключить, что частичный механизм, расположенной между выходным звеном (2) и конечным звеном (рабочим инструментом (3)), должен обладать двумя степенями свободы. Убедимся в этом.

По формуле В. В. Добровольского имеем:

$$W = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_5, \quad (2.8)$$

$$W = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 5 = 2.$$

Следовательно, этот частичный сферический механизм имеет две степени свободы. Таким образом, выходное звено может перемещаться по трём координатам и имеет три поступательные степени свободы, а конечное звено (рабочий орган) относительно выходного звена имеет две вращательные степени свободы.

2.3. Разработка и синтез структурных схем, определение работоспособности механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы

Добавив к исходной схеме механизма Orthoglide три двигателя вращательного движения в три кинематические цепи, получим механизм с шестью степенями свободы.

Пространственный механизм (рисунок 2.8) включает в себя все те же структурные элементы, что и механизм с пятью степенями свободы. Третью кинематическую цепь дополнительно снабжаем двигателем вращательного перемещения (11''), выходной вращательной кинематической парой (12'') и двумя дополнительными промежуточными вращательными кинематическими парами (13''). Оси выходных (12, 12', 12'') и промежуточных (13, 13', 13'') вращательных кинематических пар расположены с пересечением в одной точке [34, с. 39].

По формуле А.П. Малышева для пространственных механизмов определим число степеней свободы данного рассматриваемого механизма (2.1).

Число звеньев (n) в механизме равно 23, число одноподвижных пар (p_5) равно 27.

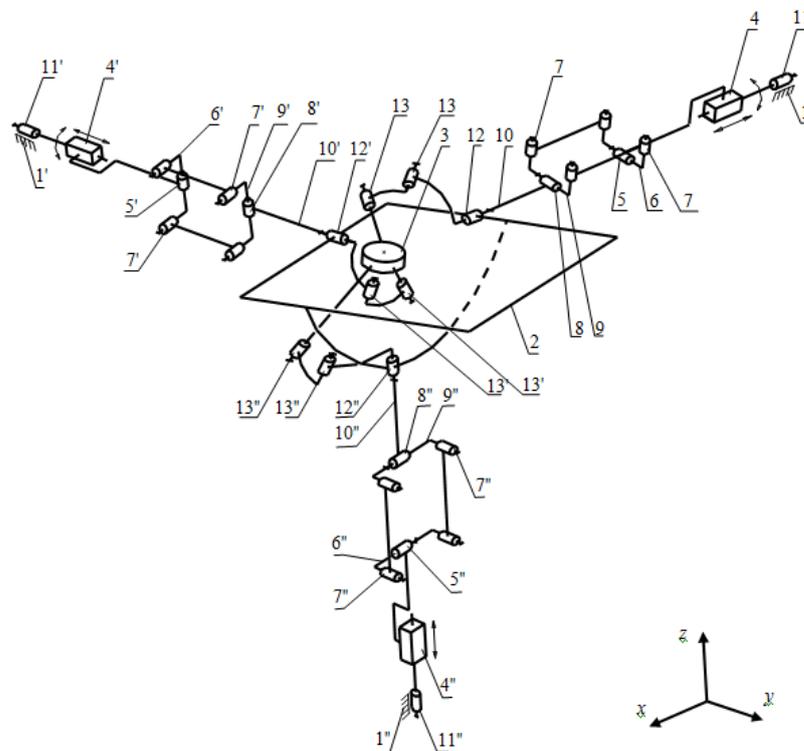


Рисунок 2.8. Структурная схема механизма с шестью степенями свободы.

Подставив полученные значения в (2.1), имеем:

$$W = 6 \cdot (23 - 1) - 5 \cdot 27 = -3.$$

Данный результат не является верным, так как не учитываются шарнирные параллелограммы. Число степеней свободы шарнирного параллелограмма по формуле (2.2) равно единице, следовательно, рассматриваем его как одноподвижную поступательную кинематическую пару. Подсчитаем число степеней свободы при этом условии. Во внимание принимаются те же звенья, что были и ранее за исключением промежуточных звеньев параллелограмма. Двенадцать вращательных кинематических пар трёх параллелограммов заменяются тремя поступательными кинематическими парами. При этом получаем:

$$W = 6 \cdot (17 - 1) - 5 \cdot 18 = 6.$$

Данный результат является верным.

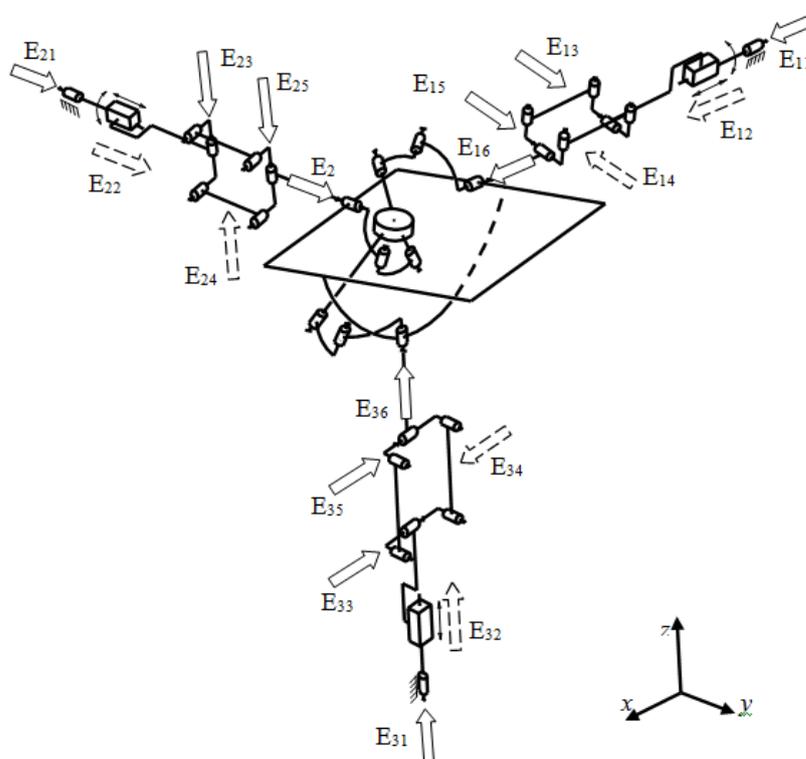


Рисунок 2.9. Структурная схема механизма с шестью степенями свободы.

Для определения работоспособности рассматриваемого механизма с шестью степенями свободы воспользуемся методом винтов, рассмотрев плюккеровы координаты ортов осей кинематических пар.

Каждой кинематической паре поставим в соответствие орт её оси и составим матрицу плюккеровых координат этих ортов. Соответствующее построение приведено на рисунке 2.9. Единичные винты, характеризующие положения осей кинематических пар, имеют координаты [39]:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_{11}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \mathbf{E}_{12}(0, 0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{E}_{13}(0, -1, 0, 0, 0, 0, e_{13z}^{\circ}), \\
& \mathbf{E}_{14}(0, 0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{E}_{15}(0, -1, 0, 0, 0, 0, e_{15z}^{\circ}), \mathbf{E}_{16}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& \mathbf{E}_{21}(0, 1, 0, 0, 0, 0), \mathbf{E}_{22}(0, 0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{E}_{23}(0, 0, 1, e_{23x}^{\circ}, 0, 0), \\
& \mathbf{E}_{24}(0, 0, 0, 0, 0, 1), \mathbf{E}_{25}(0, 0, -1, e_{25x}^{\circ}, 0, 0), \mathbf{E}_{26}(0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
& \mathbf{E}_{31}(0, 0, 1, 0, 0, 0), \mathbf{E}_{32}(0, 0, 0, 0, 0, 1), \mathbf{E}_{33}(-1, 0, 0, 0, 0, e_{33y}^{\circ}), \\
& \mathbf{E}_{34}(0, 0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{E}_{35}(-1, 0, 0, 0, 0, e_{35y}^{\circ}), \mathbf{E}_{16}(0, 0, 1, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

В первой кинематической цепи имеем силовой винт с координатами $\mathbf{R}_1(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, во второй кинематической цепи – $\mathbf{R}_2(0, 0, 0, 1, 0, 0)$. Процесс нахождения силовых винтов \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 описан выше для механизмов с четырьмя и пятью степенями свободы.

Рассмотрим третью кинематическую цепь. Единичные винты \mathbf{E}_{31} и \mathbf{E}_{36} лежат на одной оси, поэтому единичный винт \mathbf{E}_{36} в расчёт не берём. В таком случае имеем пять единичных винтов. Условия взаимности плюккеровых координат единичных и силовых винтов можно записать в виде пяти уравнений, из которых необходимо найти одно неизвестное и, следовательно, получить один силовой винт координатами – $\mathbf{R}_3(0, 0, 0, 0, 1, 0)$.

Координаты силовых винтов можно представить в виде соответствующей матрицы $(R)_{3 \times 6}$:

$$(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы следует, что имеют место лишь три независимых силовых винта. Это винты бесконечно большого параметра (моменты), ограничивающие вращения.

Для механизма с шестью степенями свободы отдельно рассмотрим первую кинематическую цепь, сместив её относительно оси координат, для нахождения плюккеровых координат. Данная кинематическая цепь в точности повторяет кинематическую цепь механизмов с четырьмя и пятью степенями свободы (рисунок 2.4). Следовательно, она будет иметь координаты:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_{11}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \mathbf{E}_{12}(0, 0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{E}_{13}(0, -1, 0, 0, 0, 0, e_{13z}^{\circ}), \\
& \mathbf{E}_{14}(0, 0, 0, e_{14x}^{\circ}, e_{14y}^{\circ}, 0), \mathbf{E}_{15}(0, -1, 0, 0, 0, 0, e_{15z}^{\circ}), \mathbf{E}_{16}(1, 0, 0, 0, 0, 0, e_{16z}^{\circ}).
\end{aligned}$$

Получаем матрицу из найденных координат единичных винтов, откуда находим коэффициенты:

$$(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e_{13z}^{\circ} \\ 0 & 0 & 0 & e_{14x}^{\circ} & e_{14y}^{\circ} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e_{15z}^{\circ} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{16z}^{\circ} \end{pmatrix}; \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 1, \\ b &= -c, \\ c &= \frac{e_{16z}^{\circ}}{e_{15z}^{\circ} - e_{13z}^{\circ}}. \end{aligned}$$

Указанные коэффициенты выражают скорости в соответствующих кинематических парах. В третьей цепи имеется внутренняя подвижность, что свидетельствует о возможности передачи вращения с двигателя вращательного перемещения на вращательную кинематическую пару, сопряженную с выходным звеном.

В трёх кинематических цепях имеет место внутренняя подвижность – передача вращения двигателем вращательного перемещения к конечной вращательной кинематической паре. Таким образом, частичный механизм, расположенной между выходным звеном и конечным звеном, должен обладать тремя степенями свободы. Убедимся в этом, применив формулу В.В. Добровольского (2.8):

$$W = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 6 = 3.$$

Полученный частичный сферический механизм имеет три степени свободы. Следовательно, выходное звено (платформа) может перемещаться по трём координатам и имеет три поступательные степени свободы, а конечное звено (рабочий инструмент) относительно выходного звена имеет три вращательные степени свободы, что свидетельствует о наличии в данном механизме кинематической развязки между поступательными и вращательными движениями [34, 124].

Выводы по главе

1. Выбор МПС Orthoglide в качестве объекта исследований определяется его особенностью – изоморфизмом структуры. Состоящий из трёх идентичных кинематических цепей, данный механизм также обладает кинематической развязкой – одним движением (перемещением) входного звена (или группы звеньев) кинематической цепи обеспечивается только одно движение выходного звена. За счёт своей конструкции робот Orthoglide не имеет особых положений, в том числе и в рабочей зоне.
2. При синтезе рассматриваемых механизмов с четырьмя, пятью и шестью степенями свободы с шарнирными параллелограммами серьёзную проблему представляет определение их числа степеней подвижностей [34, 124].
3. Проблема решена принятием допущения, что в цепи, содержащей двигатель поступательного движения, шарнирный параллелограмм рассматриваем как одноподвижную поступательную кинематическую пару, а в двух цепях, не имеющих двигателей вращательного перемещения, шарнирные параллелограммы заменяем карданными шарнирами.
4. Полученные результаты использованы далее при разработке структурного ряда МПС повышенной жёсткости [34-37, 39].

ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С РАЗВЯЗКОЙ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ И ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

В данной главе рассматривается важнейшая для анализа, синтеза и управления задача о положениях, которая заключается в определении взаимосвязи между обобщенными и абсолютными координатами. Рассмотренный в главе 2 механизм с шестью степенями свободы имеет кинематическую развязку по положению и ориентации выходного звена, следовательно, его можно условно разделить на два механизма – поступательный механизм параллельной структуры с тремя степенями свободы и сферический механизм с тремя степенями свободы. Анализ данных механизмов можно производить независимо друг от друга.

Определение положений поступательного механизма с тремя степенями свободы и с шарнирными параллелограммами связано с необходимостью учитывать условие параллельности и неизменности их длин звеньев. Для облегчения решения этой задачи исходный механизм заменялся упрощенным [31]. Отличие последнего состояло в том, что шарнирный параллелограмм представлялся неподвижной поступательной кинематической парой. В результате решения системы уравнений были составлены уравнения связи между входными (обобщенными) и выходными (абсолютными) координатами при решении прямой и обратной задач кинематики. С использованием сферической системы координат и в углах поворота, при переходе из подвижной системы координат в неподвижную, решены задачи о положениях для сферического механизма с тремя степенями свободы с выводом соответствующих уравнений связи между углами поворота в приводных вращательных шарнирах и углами поворота выходного звена [87].

Для определения скоростей поступательного и сферического механизмов используется аналитический метод, основанный на изучении свойств матрицы Якоби.

3.1. Решение прямой и обратной задач кинематики для механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена

В данном параграфе на примере механизма с шестью степенями свободы, соответствующее описание которого приведено в главе 2, рассматривается решение прямой и обратной задач кинематики для той части механизма, которая определяет поступательное перемещение выходного звена.

Рассмотрим решение **обратной задачи кинематики** (о положении) механизма параллельной структуры с двигателями поступательного перемещения, расположенными по осям декартовой системы координат x, y, z .

Поступательные движения обусловлены тем, что в каждой цепи имеется шарнирный параллелограмм, две вращательные кинематические пары и двигатель поступательного перемещения. Для анализа схем типа Orthoglide (рисунок 3.1) может быть использован механизм «пирамида» (рисунок 3.2), который получается из исходного таким образом, что все кинематические цепи мысленно сдвигаются к центру выходного звена. Обобщенными (входными) координатами являются отрезки, характеризующие положения точек B_1, B_2, B_3 . Абсолютными (выходными) координатами выходного звена являются координаты точки A [31].

Целью обратной задачи кинематики является поиск переменных положения входных звеньев ($x_{B_1}, y_{B_2}, z_{B_3}$) по известным координатам рабочей точки манипулятора (x_A, y_A, z_A). Обратная задача кинематики в общем случае может иметь несколько решений, соответствующих одному положению инструмента.

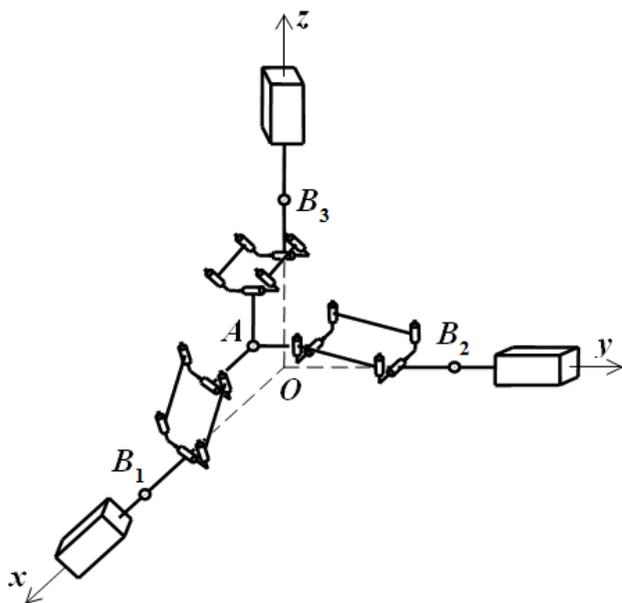


Рисунок 3.1. Поступательный механизм параллельной структуры с тремя степенями свободы.

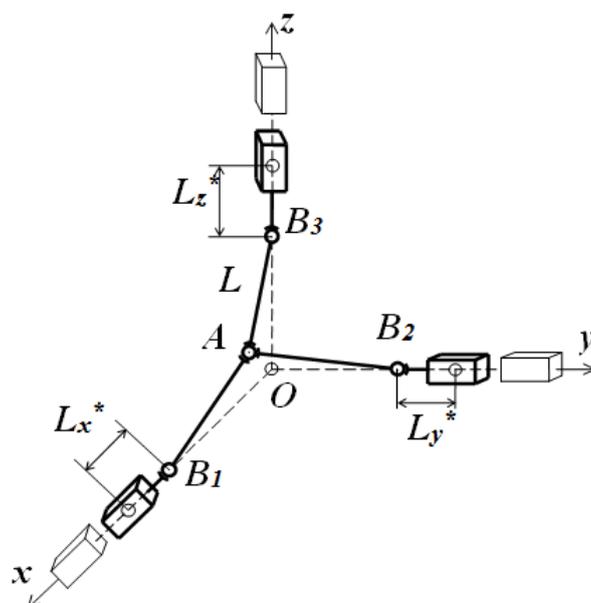


Рисунок 3.2. Механизм «пирамида» – расчетная схема механизма с тремя степенями свободы.

В системе координат x, y, z расположена точка A , положение которой не совпадает с началом системы координат точкой O . Необходимо определить координаты $x_{B_1}, y_{B_2}, z_{B_3}$, т.е. на какое расстояние L_x^*, L_y^*, L_z^* переместятся входные звенья механизма.

Точка A имеет координаты (x_A, y_A, z_A) . Чтобы узнать на какое расстояние переместились входные звенья механизма относительно начала координат, запишем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
(x_A - x_{B1})^2 + (y_A - y_{B1})^2 + (z_A - z_{B1})^2 &= L^2; \\
(x_A - x_{B2})^2 + (y_A - y_{B2})^2 + (z_A - z_{B2})^2 &= L^2; \\
(x_A - x_{B3})^2 + (y_A - y_{B3})^2 + (z_A - z_{B3})^2 &= L^2.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

В системе уравнений (3.1) L есть длина промежуточного звена каждой цепи. Координаты $y_{B1}^2, z_{B1}^2, x_{B2}^2, z_{B2}^2, x_{B3}^2$ и y_{B3}^2 обратятся в ноль, поскольку соответствующие входные звенья расположены вдоль координатных осей. Получаем выражения:

$$\begin{aligned}
(x_A - x_{B1})^2 + y_A^2 + z_A^2 &= L^2; \\
x_A^2 + (y_A - y_{B2})^2 + z_A^2 &= L^2; \\
x_A^2 + y_A^2 + (z_A - z_{B3})^2 &= L^2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из полученных трёх уравнений необходимо найти три неизвестных, а именно x_{B1}, y_{B2}, z_{B3} , причём эти уравнения не независимы.

Для определения x_{B1}, y_{B2}, z_{B3} используем первое, второе и третье уравнения, соответственно, раскрывая скобки и получая соответствующие решения уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned}
x_A^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} + x_{B1}^2 + y_A^2 + z_A^2 = L^2 &\rightarrow A \cdot x_{B1}^2 + B \cdot x_{B1} + C = 0 \rightarrow x_{B1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \\
B = -2 \cdot x_A \\
C = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
y_{B2} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \\
B &= -2 \cdot y_A \\
C &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
z_{B3} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \\
B &= -2 \cdot z_A \\
C &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Для проверки полученных уравнений зададим значения координат точки $A (x_A, y_A, z_A)$, где $x_A = 0,2, y_A = 0,15, z_A = 0,1$. Длина звена $L = 0,3$ м.

Определим координаты точек x_{B11} и x_{B12} , подставляя значения в (3.3) и получаем следующие решения:

$$x_{B11} = -0,039; \quad x_{B12} = 0,439.$$

Координаты точек y_{B21} и y_{B22} определим, подставляя их в выражение (3.4):

$$y_{B21} = -0,050; \quad y_{B22} = 0,350.$$

И координаты точек z_{B31} и z_{B32} определим, подставляя их в выражение (3.5):

$$z_{B31} = -0,066; \quad z_{B32} = 0,266.$$

Таким образом, получили координаты $(x_{B11}, y_{B21}, z_{B31})$, равные, соответственно, $(-0,039; -0,050; -0,066)$ и координаты $(x_{B12}, y_{B22}, z_{B32})$, равные $(0,439; 0,350; 0,266)$, соответственно. Такие координаты будут иметь звенья, если рабочая точка механизма (x_A, y_A, z_A) , будет располагаться в координатах $(0,2; 0,15; 0,1)$, соответственно при длине звена равном $L = 0,3$ м.

Для решения **прямой задачи кинематики** значения положений входных звеньев (x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}) , считаются известными, а целью является нахождение положения рабочей точки инструмента (x_A, y_A, z_A) . Эта задача допускает несколько решений, соответствующих различным положениям инструмента.

Для нахождения координат точки $A(x_A, y_A, z_A)$ воспользуемся системой уравнений (3.1), описанной выше. Координаты $y_{B1}^2, z_{B1}^2, x_{B2}^2, z_{B2}^2, x_{B3}^2$ и y_{B3}^2 обратятся в ноль, при этом получаем выражения, соответствующие системе уравнений (3.2).

Из полученных трёх уравнений необходимо найти три неизвестных – x_A, y_A, z_A , причем эти уравнения зависимы. Раскрывая скобки во всех трёх уравнениях системы (3.2), получаем следующую систему выражений:

$$\begin{aligned} x_A^2 - 2x_A x_{B1} + x_{B1}^2 + y_A^2 + z_A^2 &= L^2; \\ x_A^2 + y_A^2 - 2y_A y_{B2} + y_{B2}^2 + z_A^2 &= L^2; \\ x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 2z_A z_{B3} + z_{B3}^2 &= L^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для выражения y_A через x_A используем первые два уравнения, вычитая из первого уравнения второе и получим:

$$\begin{aligned} x_{B1}^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} - y_{B2}^2 + 2 \cdot y_A \cdot y_{B2} &= 0, \\ 2 \cdot y_A \cdot y_{B2} &= y_{B2}^2 - x_{B1}^2 + 2 \cdot x_A \cdot x_{B1}, \\ y_A &= \frac{y_{B2}^2 - x_{B1}^2}{2 \cdot y_{B2}} + \frac{2 \cdot x_A \cdot x_{B1}}{2 \cdot y_{B2}}, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{y_{B2}^2 - x_{B1}^2}{2 \cdot y_{B2}}, \\ b &= \frac{2 \cdot x_{B1}}{2 \cdot y_{B2}} = \frac{x_{B1}}{y_{B2}}, \\ y_A &= a + b \cdot x_A. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для нахождения z_A через x_A используем первое и третье уравнения:

$$\begin{aligned} x_{B1}^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} - z_{B3}^2 + 2 \cdot z_A \cdot z_{B3} &= 0, \\ 2 \cdot z_A \cdot z_{B3} &= z_{B3}^2 - x_{B1}^2 + 2 \cdot x_A \cdot x_{B1}, \\ z_A &= \frac{z_{B3}^2 - x_{B1}^2}{2 \cdot z_{B3}} + \frac{2 \cdot x_A \cdot x_{B1}}{2 \cdot z_{B3}}, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} c &= \frac{z_{B3}^2 - x_{B1}^2}{2 \cdot z_{B3}}, \\ d &= \frac{2 \cdot x_{B1}}{2 \cdot z_{B3}} = \frac{x_{B1}}{z_{B3}}, \\ z_A &= c + d \cdot x_A. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для определения x_A подставим в первое уравнение найденные выше y_A и z_A .

$$\begin{aligned} x_A^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} + x_{B1}^2 + y_A^2 + z_A^2 &= L^2, \\ x_A^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} + x_{B1}^2 + (a + b \cdot x_A)^2 + (c + d \cdot x_A)^2 &= L^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \cdot x_A^2 + B \cdot x_A + C = 0, & & A = 1 + b^2 + d^2, \\
 x_A = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}, & \rightarrow & B = -2 \cdot x_{B1} + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot c \cdot d, \\
 & & C = x_{B1}^2 + a^2 + c^2 - L^2.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для проверки полученных уравнений зададим координаты точек положения входных звеньев (x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}) , где $x_{B1} = 0,2$, $y_{B2} = 0,15$, $z_{B3} = 0,1$. Длина звена $L = 0,3$ м. Необходимо определить координаты положения рабочей точки инструмента $A(x_A, y_A, z_A)$.

Определим координаты точек u_{A1} и u_{A2} , подставляя заданные параметры в (3.7):

$$a := -0,058; \quad b = 1,333; \quad y_A = 0,058 + 1,333x_A.$$

Определим координаты точек z_{A1} и z_{A2} , подставляя заданные параметры в (3.8):

$$c := -0,15; \quad d = 2,0; \quad z_A = -0,15 + 2,0x_A.$$

Определим координаты точек x_{A1} и x_{A2} , подставляя заданные параметры в (3.9):

$$\begin{aligned}
 A := 6,778; & \quad B = -1,156; & \quad C = -0,024. \\
 x_{A1} = -0,019; & & \quad x_{A2} = 0,189.
 \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения x_{A1} и x_{A2} в уравнения для определения y_{A1} , y_{A2} , z_{A1} и z_{A2} получим решения:

$$\begin{aligned}
 y_{A1} = -0,083; & & y_{A2} = 0,194; \\
 z_{A1} = -0,188; & & z_{A2} = 0,229.
 \end{aligned}$$

Получили координаты положения рабочей точки инструмента $A(x_{A1}; y_{A1}; z_{A1})$ равные, соответственно, $(-0,019; -0,083; -0,188)$ и координаты $(x_{A2}; y_{A2}; z_{A2})$, равные $(0,189; 0,194; 0,229)$, соответственно. Такие координаты будет иметь рабочая точка инструмента A , если положения входных звеньев (x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}) будет располагаться в координатах $(0,2; 0,15; 0,1)$, соответственно при длине звена равном $L = 0,3$ м.

3.2. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи для механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена

Решим задачу о скоростях для поступательного механизма параллельной структуры. Решение задачи о скоростях необходимо для определения взаимосвязи между координатами выходного звена и координатами входных звеньев (т.е. взаимосвязи между обобщенными координатами и абсолютными), и описывается функцией положения. Метод, который будет использоваться для решения задачи о скоростях, разработан Анджелесом Х. и Госсленом К., и применим только к «полностью параллельным» механизмам (механизмы, где число кинематических цепей в механизме равно числу его степеней свободы, или к механизмам с взаимно независимыми (не входящими в одно уравнение связи) перемещениями в активных

парах) [25, 69, 91]. То есть допускается (подразумевается), что в каждой кинематической цепи имеется только одна приводная (входная) кинематическая пара (звено), что позволяет обеспечить независимость перемещений в этих входных звеньях друг от друга. Функция положения механизма в неявном виде выражается уравнением:

$$F(x_A, y_A, z_A, x_{B1}, y_{B2}, x_{B3}) = 0. \quad (3.10)$$

Для рассматриваемого поступательного механизма параллельной структуры с тремя кинематическими цепями (рисунок 3.1) функцию положения (3.10) распишем и представим в виде системы из трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases} F_1 = (x_A - x_{B1})^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2 = 0 \\ F_2 = x_A^2 + (y_A - y_{B2})^2 + z_A^2 - L^2 = 0 \\ F_3 = x_A^2 + y_A^2 + (z_A - z_{B3})^2 - L^2 = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Используя метод Анджелеса-Госслена [91], основанный на изучении свойств матрицы Якоби, решим задачу о скоростях. В общем виде, уравнение, описывающее используемый метод, имеет вид:

$$A \cdot V = (-B) \cdot V_{i1} \quad (3.12)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_A} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z_A} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_A} & \frac{\partial F_2}{\partial y_A} & \frac{\partial F_2}{\partial z_A} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_A} & \frac{\partial F_3}{\partial y_A} & \frac{\partial F_3}{\partial z_A} \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{B1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial y_{B2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial z_{B3}} \end{pmatrix}; V_{i1} = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix},$$

где A – матрица частных производных от неявной функции по абсолютным координатам x_A, y_A, z_A ; B – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам x_{B1}, y_{B2}, z_{B3} ; V – вектор скорости выходного звена; V_{i1} – вектор скоростей во входных звеньях (входные скорости).

Уравнение (3.12) перепишем в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_A} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z_A} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_A} & \frac{\partial F_2}{\partial y_A} & \frac{\partial F_2}{\partial z_A} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_A} & \frac{\partial F_3}{\partial y_A} & \frac{\partial F_3}{\partial z_A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{B1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial y_{B2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial z_{B3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

Продифференцировав уравнение связи (3.11) для рассматриваемого поступательного механизма параллельной структуры, получим следующие выражения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_A} = 2x_A - 2x_{B1}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_A} = 2y_A; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z_A} = 2z_A; \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_{B1}} = -2x_A + 2x_{B1};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_A} = 2x_A; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_A} = 2y_A - 2y_{B2}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z_A} = 2z_A; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_{B2}} = -2y_A + 2y_{B2};$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_A} = 2x_A; \quad \frac{\partial F_3}{\partial y_A} = 2y_A; \quad \frac{\partial F_3}{\partial z_A} = 2z_A - 2z_{B3}; \quad \frac{\partial F_3}{\partial z_{B3}} = -2z_A + 2z_{B3}.$$

В общем виде система уравнений (3.13) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2x_A - 2x_{B1} & 2y_A & 2z_A \\ 2x_A & 2y_A - 2y_{B2} & 2z_A \\ 2x_A & 2y_A & 2z_A - 2z_{B3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2x_A - 2x_{B1} & 0 & 0 \\ 0 & 2y_A - 2y_{B2} & 0 \\ 0 & 0 & 2z_A - 2z_{B3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix}.$$

Решим обратную задачу о скоростях. Зададим скорости выходного звена: $V_{11} = 0,5$ м/с, $V_{21} = 1,0$ м/с, $V_{31} = 2,0$ м/с, положение выходного звена в точке $A(0,2; 0,13; 0,1)$, $L = 0,3$ м. Подставив заданные значения в (3.13), получим систему:

$$\begin{pmatrix} 0,502 & 0,26 & 0,20 \\ 0,40 & 0,40 & 0,20 \\ 0,40 & 0,26 & 0,364 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0,502 & 0 & 0 \\ 0 & -0,40 & 0 \\ 0 & 0 & 0,364 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,0 \\ 2,0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Найдем из системы уравнений (3.14) неизвестные V_x , V_y , V_z , приведя уравнения к линейному виду:

$$\begin{aligned} 0,502 \cdot V_x + 0,26 \cdot V_y + 0,200 \cdot V_z &= 0,251, \\ 0,400 \cdot V_x - 0,40 \cdot V_y + 0,200 \cdot V_z &= 0,040, \\ 0,400 \cdot V_x + 0,26 \cdot V_y + 0,364 \cdot V_z &= 0,073. \end{aligned}$$

Значения скоростей в приводных вращательных шарнирах (входные скорости) равны $V_x = 1,053$ м/с, $V_y = -0,738$ м/с, $V_z = -0,431$ м/с.

Для рассматриваемого поступательного механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы была найдена взаимосвязь между координатами выходного звена и координатами входных звеньев. Решены прямая и обратная задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи (методом Анджелеса-Госслена) [31, 123].

3.3. Решение прямой задачи кинематики для сферического механизма параллельной структуры

Рассмотрим сферическую часть синтезированного в прошлой главе механизма с шестью степенями свободы (рисунок 3.3), состоящего из трёх кинематических цепей с пересекающимися осями под углом 90° . Каждое входное звено сопряжено с двигателем вращательного перемещения. Выходное звено представляет собой две пересекающиеся полусферы и инструмент, вращающийся вокруг трех осей x , y , z с пересечением в точке O [28, с.70].

Абсолютными (выходными) координатами являются углы поворота платформы: α , β , γ – повороты вокруг осей x , y , z , соответственно. Обобщенными (входными) координатами

являются углы поворота входных звеньев первой, второй и третьей кинематических цепей φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} , соответственно.

Для определения скоростей и особых положений сферического механизма необходимо решить задачу о положениях, т.е. найти взаимосвязь между входными и выходными координатами. Проведём расчёт аналитическим методом.

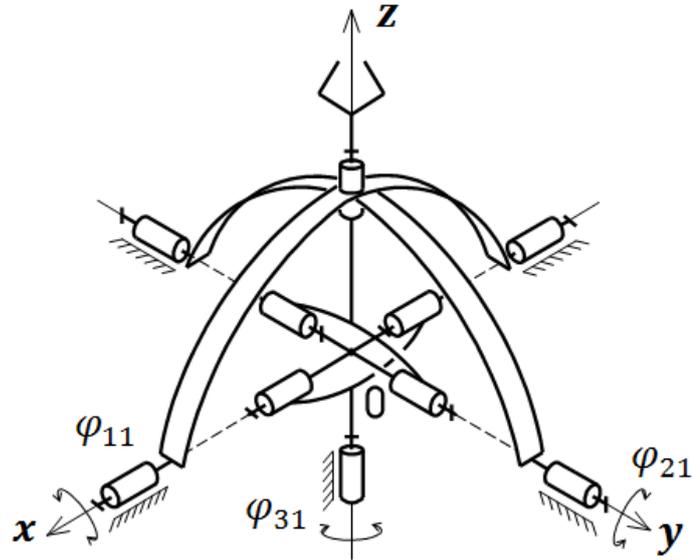


Рисунок 3.3. Сферическая часть механизма с шестью степенями свободы.

Расчётная схема.

Входные (приводные) звенья осуществляют поворот в следующей последовательности: вокруг осей Ox , Oy , Oz . Соответствующие этому матрицы поворота B_1 , B_2 , B_3 имеют вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{pmatrix}; B_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{21} & 0 \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

где φ_{11} – угол поворота первого (входного) звена по оси Ox ; φ_{21} – угол поворота второго звена по оси Oy ; φ_{31} – угол поворота третьего звена по оси Oz .

Выходное звено выполняет последовательный поворот вокруг осей Ox и Oy , вращение вокруг оси Oz не рассматриваем, т.к. поворот по оси Oz влияет на ориентацию инструмента, а не на его положение (рисунок 3.4).

При нулевом положении углов φ_{11} и φ_{21} выходное звено расположено по оси Oz на расстоянии ρ , равное константе.

После поворота на угол φ_{11} вокруг оси Ox мы получаем значение выходного звена в неподвижной системе координат, т.е. значение точки $Mx = (a \ b \ c)$, равно:

$$Mx = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi_{11} \\ \cos \varphi_{11} \end{pmatrix}.$$

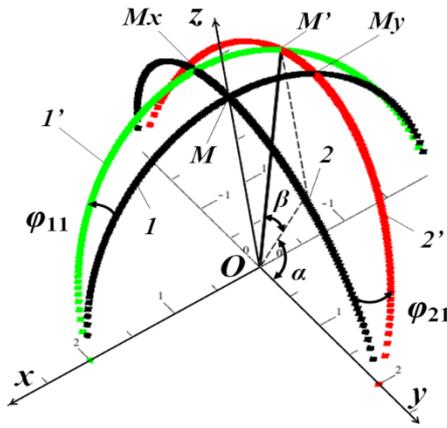


Рисунок 3.4. Нахождение положения выходного звена.

После поворота на угол φ_{21} вокруг оси Oy мы получаем значение выходного звена в неподвижной системе, т.е. значение точки $My = (d e f)$, равное:

$$My = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{21} \\ 0 \\ \cos \varphi_{21} \end{pmatrix}.$$

При повороте входных звена на углы φ_{11} и φ_{21} местоположение вектора OM' (выходного звена) определяется из пересечения двух полуокружностей 1' и 2' (см. рисунок 3.4).

Выпишем уравнения для определения положения выходного звена (точки M'), что является решением прямой задачи кинематики.

Точка M' лежит на сфере, центром которой является точка O :

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = \rho^2. \quad (3.15)$$

Уравнение плоскости, в которой лежит дуга 1, проходящая через ось Ox , запишем следующим образом:

$$y_M + c \cdot z = 0.$$

Подставим значение точки $Mx = (0, \sin \varphi_{11}, \cos \varphi_{11})$, которая лежит на полудуге 1' в полученное уравнение плоскости:

$$-\sin \varphi_{11} + c \cdot \cos \varphi_{11} = 0,$$

$$c = \tan \varphi_{11},$$

$$y_M + \tan \varphi_{11} \cdot z = 0. \quad (3.16)$$

Уравнение плоскости, в которой лежит дуга 2, проходящая через ось Oy , запишем следующим образом:

$$x_M + d \cdot z = 0.$$

Подставим значение точки $My = (\sin \varphi_{21}, 0, \cos \varphi_{21})$, которая лежит на полудуге 2' в полученное уравнение плоскости:

$$\sin \varphi_{21} + d \cdot \cos \varphi_{21} = 0,$$

$$d = -\tan \varphi_{21},$$

$$x_M - \tan \varphi_{21} \cdot z = 0. \quad (3.17)$$

Запишем систему уравнений определения положения точки M' :

$$\begin{cases} x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = \rho^2 \\ y_M + \tan \varphi_{11} \cdot z_M = 0 \\ x_M - \tan \varphi_{21} \cdot z_M = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Подставляя в первое уравнение системы (3.18) уравнения 2 и 3 получим координаты точки z :

$$z_M^2 \cdot (\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1) = \rho^2,$$

$$z_M = \pm \frac{\rho}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}}. \quad (3.19)$$

Таким образом, выражая z и подставляя её в уравнения (3.16) и (3.17), получим координаты x и y , что является решением прямой задачи кинематики.

$$z_M = \frac{\rho}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}},$$

$$x_M = \tan \varphi_{21} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}}, \quad (3.20)$$

$$y_M = -\tan \varphi_{11} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}}.$$

Запишем решение прямой задачи кинематики (3.20) в сферической системе координат через два угла α , β и длину вектора ρ (рисунок 3.5). Для этого заменим в полученной нами системе (3.20) x_M , y_M , z_M на следующие выражения:

$$x_M = \rho \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha,$$

$$y_M = \rho \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$z_M = \rho \cdot \sin \beta. \quad (3.21)$$

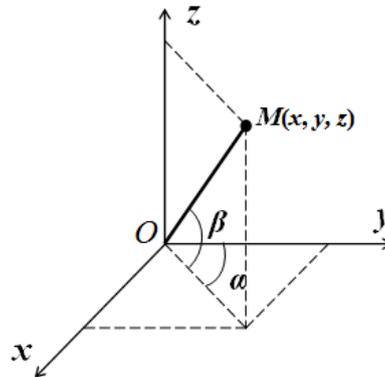


Рисунок 3.5. Определение положения точки M в сферической системе координат.

Получим:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha + \tan \varphi_{11} \cdot \left(\frac{\rho}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right) &= 0, \\ \rho \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - \tan \varphi_{21} \cdot \left(\frac{\rho}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right) &= 0, \\ \rho \cdot \sin \beta - \left(\frac{\rho}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В виду того, что $\rho = const$, сократим полученные выражения на ρ :

$$\begin{aligned} \cos \beta \cdot \sin \alpha + \tan \varphi_{11} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right) &= 0, \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta - \tan \varphi_{21} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right) &= 0, \\ \sin \beta - \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из системы уравнений (3.21) можно найти выходные параметры звена OM' в сферической системе координат, т.е. получить решение прямой задачи кинематики в углах α и β через углы φ_{11} и φ_{21} .

Из уравнения 3 системы (3.21) найдём значение угла β :

$$\beta = \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right). \quad (3.24)$$

Подставляя полученное значение β в уравнение 1 системы (3.21), найдем значение угла α :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{-\tan \varphi_{11} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right)}{\cos \beta} \right). \quad (3.25)$$

Таким образом, получили решение прямой задачи кинематики в углах α и β . Уравнение связи для рассматриваемого сферического механизма можно представить следующей системой уравнений в общем виде:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \varphi_{11}, \varphi_{21}) &= 0, \\ \begin{cases} F(\alpha, \beta, \varphi_{11}, \varphi_{21}) = 0, \\ F(\alpha, \beta, \varphi_{11}, \varphi_{21}) = 0. \end{cases} & \end{aligned} \quad (3.26)$$

Подставляя в уравнения связей (3.26) уравнения из системы (3.22), получим систему уравнений, описывающую взаимосвязь между входными и выходными координатами:

$$\begin{cases} F_1 = \cos \beta \cdot \sin \alpha + \tan \varphi_{11} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right), \\ F_2 = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \tan \varphi_{21} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right), \\ F_3 = \sin \beta - \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right). \end{cases} \quad (3.27)$$

Уравнением 3 из системы (3.27) мы пренебрегаем, т.к. оно будет функционально зависимо от двух предыдущих. Используя полученную систему уравнений (3.27), можно переходить к решению задачи о скоростях.

3.3.1. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи для сферического механизма с тремя степенями свободы

Решим задачу о скоростях для сферического механизма с целью определения взаимосвязи между координатами (углами поворота) выходного звена и координатами (углами поворота) входных звеньев (т.е. взаимосвязи между обобщенными координатами и абсолютными), и описывается функцией положения (3.27), решение которой проводилось выше.

Для решения задачи о скоростях воспользуемся методом, который основан на изучении свойств матрицы Якоби:

$$C \cdot V = (-D) \cdot \omega_1, \quad (3.28)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{21}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{11}} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \end{pmatrix},$$

где C – матрица частных производных от неявной функции по абсолютным координатам α , β ; D – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам φ_{11} и φ_{21} ; V – скорости изменения углов ориентации выходного звена, определяющиеся углами α , β ; ω_1 – обобщенные скорости во вращательных шарнирах (входные скорости – углы поворота).

Согласно системе уравнений (3.28) найдем частные производные от неявной функции между обобщенными и абсолютными координатами, составив две матрицы. Продифференцировав уравнения из системы (3.27), получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_{11}} \cdot \left(\cos \beta \cdot \sin \alpha + \tan \varphi_{11} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right) \right) = \\ &= \frac{1 + \tan^2 \varphi_{11}}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} - \frac{\tan^2 \varphi_{11} \cdot (1 + \tan^2 \varphi_{11})}{(\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1)^{3/2}}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{21}} = - \frac{\tan \varphi_{11} \cdot \tan \varphi_{21} \cdot (1 + \tan^2 \varphi_{21})}{(\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = \cos \alpha \cdot \cos \beta; \quad \frac{\partial F_1}{\partial \beta} = -\sin \beta \cdot \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{11}} = \frac{\partial}{\partial \varphi_{11}} \cdot \left(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \tan \varphi_{21} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right) \right) = \frac{\tan \varphi_{21} \cdot \tan \varphi_{11} \cdot (1 + \tan^2 \varphi_{11})}{(\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} = - \frac{1 + \tan^2 \varphi_{21}}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} + \frac{\tan^2 \varphi_{21} \cdot (1 + \tan^2 \varphi_{21})}{(\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = -\cos \beta \cdot \sin \alpha; \quad \frac{\partial F_2}{\partial \beta} = -\cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Перепишем систему (3.28) в виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{21}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{11}} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

Решим прямую задачу о скоростях. Зададим следующие углы поворота φ_{11} и φ_{21} , равные, соответственно, $0,3 \text{ рад}$ и $0,5 \text{ рад}$. Угловые скорости $\dot{\varphi}_{11}$ и $\dot{\varphi}_{21}$ равны $0,01 \text{ рад/сек}$ и $0,02 \text{ рад/сек}$.

Подставляя полученные продифференцированные выражения в (3.29), а также значения углов α и β (3.24, 3.25) получим следующие решение системы:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0,262 & -0,737 \\ -0,463 & 0,417 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,864 & -0,133 \\ 0,112 & -0,864 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,02 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,021 \\ 0,016 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, определили скорости изменения углов ориентации выходного звена $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$, равные, при заданных начальных условиях, $-0,021 \text{ рад/сек}$ и $0,016 \text{ рад/сек}$, соответственно.

**3.4. Решение задачи кинематики (о положении) для
сферического механизма параллельной структуры
с использованием метода поворота системы координат**

Для решение прямой и обратной задач о скоростях в большинстве случаев бывает удобно получать решение задачи в углах поворота при переходе подвижной системы координат в неподвижную. Для этого используются различные методы поворота системы координат. Наиболее часто используемые системы поворота: традиционная – вокруг осей x , y , z последовательно; в углах Эйлера (поворот на угол собственного вращения, угол нутации и прецессии; в углах Эйлера-Крылова [10, 104]. Для рассматриваемого сферического механизма (рисунок 3.6) решим обратную задачу о положении и скоростях, используя традиционную систему поворота вокруг осей $Oxyz$.

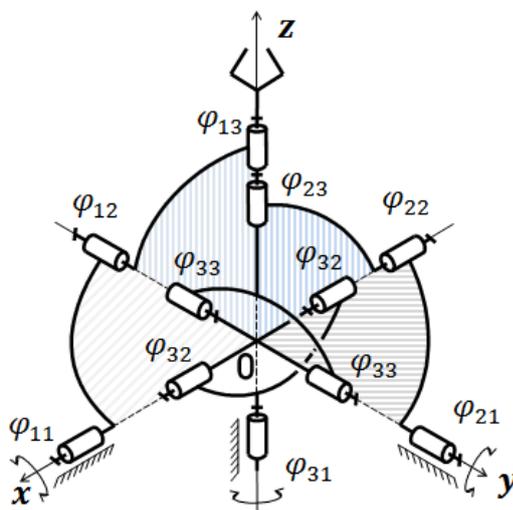


Рисунок 3.6. Сферическая часть механизма с шестью степенями свободы.

Расчётная схема.

Сферический механизм состоит из трёх кинематических цепей с пересекающимися осями под углом 90° . Каждое входное звено сопряжено с двигателем вращательного перемещения. Выходное звено представляет собой две пересекающиеся полусферы и инструмент, вращающийся вокруг трёх осей x , y , z с пересечением в точке O [28].

Для нахождения положения выходного звена в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ воспользуемся последовательным поворотом вокруг осей $Oxyz$ в неподвижной системе координат на углы α , β , γ . Абсолютными (выходными) координатами являются углы поворота выходного звена – α , β , γ . Обобщенными (входными) координатами являются углы поворота приводных вращательных шарниров – φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} , соответственно, первой, второй и третьей кинематических цепей.

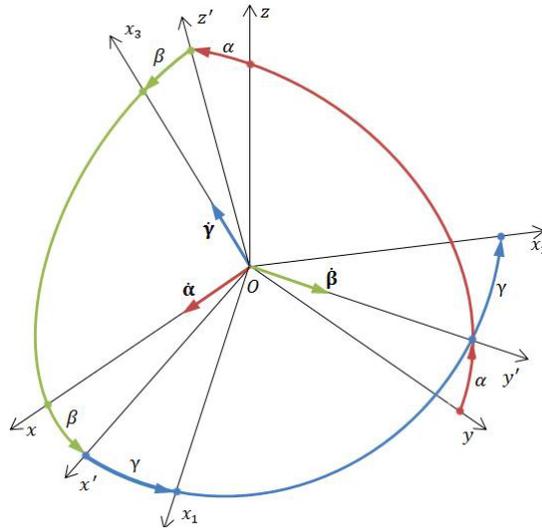


Рисунок 3.7. Последовательный переход из подвижной системы координат в неподвижную.

Для определения скоростей сферического механизма необходимо решить задачу о положении, т.е. найти взаимосвязь между входными (скоростями в приводных вращательных шарнирах) и выходными (скоростями выходного звена) координатами. Проведём расчёт аналитическим методом.

Повороты через углы α , β , γ позволяют мысленно совместить неподвижную систему координат ($Oxyz$) с подвижной ($Ox_1x_2x_3$), совершая первый поворот вокруг оси Ox на угол α . Второй поворот на угол β вокруг оси Oy' . И третий поворот вокруг оси Ox_3 на угол γ (рисунок 3.7).

Поворот выходного звена вокруг осей Ox , Oy , Oz при переходе из подвижной системы координат в неподвижную запишем в виде матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общая матрица перехода выходного звена от подвижной системы координат к неподвижной системе, будет иметь вид:

$$A = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1; \quad (3.30)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \beta \cdot \cos \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \gamma & \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \gamma & \cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \cdot \sin \alpha & \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Входное звено первой кинематической цепи осуществляет поворот в следующей последовательности: вокруг осей x , y , z . Соответствующие этому матрицы поворота B'_1 , B'_2 , B'_3 имеют вид:

$$B'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{ij} & -\sin \varphi_{ij} \\ 0 & \sin \varphi_{ij} & \cos \varphi_{ij} \end{pmatrix}; B'_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{ij} & 0 & \sin \varphi_{ij} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{ij} & 0 & \cos \varphi_{ij} \end{pmatrix}; B'_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{ij} & -\sin \varphi_{ij} & 0 \\ \sin \varphi_{ij} & \cos \varphi_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где φ_{ij} – угол поворота первого (входного) звена; φ_{ij} – угол поворота второго звена; φ_{ij} – угол поворота третьего звена ($i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи; j – номер кинематической пары).

Матрицу перехода входного звена из подвижной системы координат в неподвижную систему координат можно представить как:

$$B' = B'_1 \cdot B'_2 \cdot B'_3;$$

$$B' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{13} & -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{13} & \sin \varphi_{12} \\ \cos \varphi_{13} \cdot \sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} - \cos \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{13} & -\sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{13} - \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{13} & -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11} \\ -\cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{13} \cdot \sin \varphi_{12} - \sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{13} & \cos \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{13} - \cos \varphi_{13} \cdot \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{12} \end{pmatrix}.$$

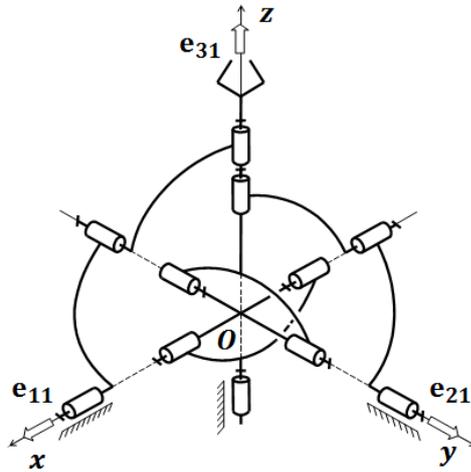


Рисунок 3.8. Сферический механизм.

Единичный вектор кинематической пары первой кинематической цепи, сопряженной с выходным звеном механизма, имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (рисунок 3.8). Подставляя в уравнение

связи между входными и выходными координатами $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ найденные значения

матриц A и B' , получим выражение:

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{12} \\ -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11} \\ \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{12} \end{pmatrix}.$$

Из полученного выражения можно выразить угол φ_{11} через α , β и γ :

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha = -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11},$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{12},$$

$$\frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = -\frac{\sin \varphi_{11}}{\cos \varphi_{11}},$$

$$\frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \tan \varphi_{11} = 0. \quad (3.31)$$

Матрицу перехода входного звена второй кинематической цепи из подвижной системы координат в неподвижную систему можно представить как:

$$B'' = B'_2 \cdot B'_1 \cdot B'_3;$$

$$B'' = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{23} + \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{23} & \cos \varphi_{23} \cdot \sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} - \cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{23} + \cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21} \\ \cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{22} \cdot \cos \varphi_{23} & -\sin \varphi_{22} \\ \cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{23} - \cos \varphi_{23} \cdot \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{23} \cdot \sin \varphi_{22} + \sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{22} \end{pmatrix}.$$

Единичный вектор \mathbf{e} оси кинематической пары второй кинематической цепи, сопряженной с выходным звеном механизма, имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подставим в уравнение связи между

входными и выходными координатами $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B'' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ найденные значения матриц A и B'' ,

и получим выражение:

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21} \\ -\sin \varphi_{22} \\ \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{22} \end{pmatrix}.$$

Из полученного выражения можно выразить угол φ_{21} через α , β и γ :

$$\sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta = \cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21},$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{22},$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin \varphi_{21}}{\cos \varphi_{21}},$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \tan \varphi_{21} = 0. \quad (3.32)$$

Матрицу перехода третьей кинематической цепи из подвижной системы координат в неподвижную систему можно представить как:

$$B''' = B'_3 \cdot B'_1 \cdot B'_2;$$

$$B''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{33} - \sin \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{33} & -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{33} + \cos \varphi_{33} \cdot \sin \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} \\ \cos \varphi_{33} \cdot \sin \varphi_{31} + \cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{33} & \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} & \sin \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{33} - \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{33} \cdot \sin \varphi_{32} \\ -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{33} & \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} \cdot \cos \varphi_{33} \end{pmatrix}.$$

Единичный вектор оси кинематической пары третьей кинематической цепи, сопряженной с

выходным звеном, имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подставив в уравнение связи $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B''' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

найденные значения матриц A и B''' , получим выражение:

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \gamma \\ \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} \\ \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{32} \end{pmatrix}.$$

Из полученного выражения можно выразить угол φ_{31} через α , β и γ :

$$\cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \gamma = -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31},$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32},$$

$$\frac{\cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} = -\frac{\sin \varphi_{31}}{\cos \varphi_{31}},$$

$$\frac{\cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} + \tan \varphi_{31} = 0. \quad (3.33)$$

Функция положения сферического механизма, описывающая взаимосвязь между углами поворота в приводных вращательных шарнирах и углами поворота выходного звена, в неявном виде выражается уравнением:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}) = 0. \quad (3.34)$$

Для рассматриваемого сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы (рисунок 3.6) функцию положения (3.34) распишем и представим в виде системы из трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases} F(\alpha, \beta, \varphi_{11}, \varphi_{21}) = 0, \\ F(\alpha, \beta, \varphi_{11}, \varphi_{21}) = 0, \\ F(\alpha, \beta, \varphi_{11}, \varphi_{21}) = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Углы φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} , выраженные через углы α , β , γ в уравнениях (3.31 – 3.33), подставим в уравнения связи (3.35) и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} F_1 = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \tan \varphi_{11}, \\ F_2 = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \tan \varphi_{21}, \\ F_3 = \frac{\cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} + \tan \varphi_{31}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Используя полученную систему уравнений (3.36), перейдем к решению задачи о скоростях [87].

3.4.1. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи для сферического механизма

Решение задачи о скоростях необходимо для определения взаимосвязи между координатами (углами поворота) выходного звена и координатами (углами поворота) входных звеньев (т.е. взаимосвязи между обобщенными координатами и абсолютными), и описывается функцией положения (3.36), решение которой проводилось выше.

Для решения задачи о скоростях воспользуемся методом, основанном на изучении свойств матрицы Якоби (метод Анджелеса-Госслена) [51, 89, 91]. В общем виде имеем:

$$C \cdot V = (-D) \cdot \omega_1; \quad (3.37)$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}; \omega_1 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

где C – матрица частных производных от неявной функции по абсолютным (выходным) координатам α, β, γ ; D – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным (выходным) координатам $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}$; V – скорости изменения углов ориентации выходного звена, определяющиеся углами α, β, γ ; ω_1 – обобщенные скорости в приводных вращательных шарнирах (входные скорости – углы поворота).

Для решения задачи о скоростях выбранным методом найдём частные производные от неявной функции между обобщёнными и абсолютными координатами, продифференцировав уравнения связи (3.36) и составив из них две матрицы C и D (3.37):

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \tan \varphi_{11} \right) = \frac{2 \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2}{\cos \alpha^2 \cdot \cos \beta};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta} = \sin \gamma - \frac{\sin \beta \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta)}{\cos \beta^2 \cdot \cos \alpha};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta \cdot \sin \alpha};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} = \operatorname{tg} \varphi_{11}^2 + 1.$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \tan \varphi_{21} \right) = \frac{\sin \gamma}{\cos \beta \cdot \cos \alpha^2};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta} = \cos \gamma + \frac{\sin \beta \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta)}{\cos \beta^2 \cdot \cos \alpha};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} = \frac{\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta \cdot \cos \alpha};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} = -\operatorname{tg} \varphi_{21}^2 - 1.$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \alpha \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} + \tan \varphi_{31} \right) = \frac{\sin \beta}{(\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma)^2};$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \beta} = \frac{\cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha} + \frac{\sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)}{(\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)^2};$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \gamma} = -\frac{(\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)^2}{(\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)^2} - 1;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} = \operatorname{tg} \varphi_{31}^2 + 1.$$

Перепишем систему (3.38) в виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Решим обратную задачу о скоростях. Зададим такие углы поворота выходного звена α , β , γ и такие угловые скорости выходного звена $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, чтобы изменения положения по углу φ_{31} и угловой скорости по $\dot{\varphi}_{31}$ не было. За положение выходного звена отвечает только две кинематические цепи, расположенные по осям координат Ox и Oy , и, следовательно, два угла φ_{11} и φ_{21} . Третья кинематическая цепь, расположенная вдоль оси Oz отвечает за ориентацию выходного звена, так как в её структуре имеется карданный шарнир, который не совершает поворот всего механизма по оси Oz .

При таком условии углы поворота выходного звена α , β , γ равны, соответственно: $0,5000 \text{ рад}$; $0,2000 \text{ рад}$ и $0,1081 \text{ рад}$; угловые скорости выходного звена $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ равны $0,0500 \text{ рад/сек}$; $0,0200 \text{ рад/сек}$ и $0,0233 \text{ рад/сек}$. Необходимо определить обобщенные скорости в приводных вращательных шарнирах $\dot{\varphi}_{11}$, $\dot{\varphi}_{21}$, $\dot{\varphi}_{31}$.

Подставляя значения углов и скоростей в частные производные от неявной функции между обобщёнными и абсолютными координатами (3.39), найдём значение угловых скоростей в приводных вращательных шарнирах (входные скорости):

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1,2833 & 0 & 0 \\ 0 & -1,0685 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1,3171 & -0,0001 & 0,2616 \\ 0,1429 & 1,0472 & 0,5323 \\ 0,2549 & 0,5292 & -1,0000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0500 \\ 0,0200 \\ 0,0233 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0465 \\ 0,0379 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решив обратную задачу о скоростях, нашли значение угловых скоростей в приводных вращательных шарнирах $\dot{\varphi}_{11}$, $\dot{\varphi}_{21}$ и $\dot{\varphi}_{31}$, равных, соответственно, $0,0465 \text{ рад/сек}$; $0,0379 \text{ рад/сек}$ и 0 . Значение обобщённых координат (углов поворота) φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} при заданных углах поворота выходного звена будут равны: $\varphi_{11} = 0,0498 \text{ рад}$; $\varphi_{21} = 0,0205 \text{ рад}$; $\varphi_{31} = 0,0098 \text{ рад}$ [87].

Выводы по главе

1. Решены обратная и прямая задачи о положениях для механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена и выведены уравнения связи между скоростями в приводных вращательных шарнирах и скоростями выходного звена, что позволило решить задачу о скоростях методом дифференцирования уравнений связи [31, 123].

2. Для сферического механизма параллельной структуры также решены прямая и обратная задачи о положениях. Используя сферическую систему координат, были аналитически определены выходные параметры выходного звена (углы α и β) и составлены уравнения связи входных и выходных координат. Задача о скоростях решена методом дифференцирования уравнений связи.

3. Для сферического механизма с использованием метода поворота системы координат составлены уравнения связи между углами поворота в приводных вращательных шарнирах и углами ориентации выходного звена. А так же решена обратная задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи [28, 87].

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С КИНЕМАТИЧЕСКОЙ РАЗВЯЗКОЙ

Динамический анализ механизмов представляет собой гораздо более широкую проблему, чем кинематический анализ [32, 33]. Это обусловлено необходимостью для выбранного закона управления (движения) определить движущие силы и моменты, действующие на механизм, во время движения всех тел в механизме; подобрать параметры обратных связей, характеристики двигателей, и т.д. Для осуществления любого простого или сложного движения, необходимо совместное действие всех приводов системы. Анализ динамических свойств механизмов параллельной структуры относительно мало изучен, и ограничивается в основном решением обратных задач динамики, когда по требуемому закону движения выходного звена определяются усилия в приводах [19, 24, 43]. В широком смысле к динамическому анализу можно отнести исследование поведения системы (механизма) в поле действия приложенной к нему силы (нагрузки) [12, 48, 82, 83, 92, 109].

В работах [49, 50, 86, 108, 113, 137] рассматривались плоские, поступательные и сферические механизмы с тремя степенями свободы, где динамика движения механизма моделировалась при разных законах требуемого движения выходного звена. В работах [1, 6, 19, 24, 50, 76] использовались различные алгоритмы управления, один из которых основан на минимизации интегральной ошибки по координате, скорости или ускорению. На основе различных численных экспериментов установлено, что данный алгоритм эффективен для механизмов параллельной структуры.

В данной главе решается задача динамического анализа для рассматриваемого механизма с шестью степенями свободы, отдельно для поступательной части и для сферической. В частности проводится анализ собственных колебаний системы на основе уравнений Лагранжа II рода. Полученные результаты используются далее для решения задачи управления, основанного на минимизации ошибки по положению.

4.1. Динамический анализ механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена

Проведём динамический анализ поступательного механизма с тремя степенями свободы, который является частью механизма с шестью степенями свободы, рассмотренного в предыдущих главах [32, 33].

4.1.1 Анализ колебательных процессов механизма параллельной структуры

Теоретической основой большей части исследований колебаний голономных (консервативных) систем с конечным числом степеней свободы служат уравнения Лагранжа II рода в обобщенных координатах [5, 7, 8, 38, 41].

Изучение колебаний сплошных упругих систем, как систем с бесконечным числом степеней свободы, связано с большими затруднениями. Поэтому с технической точки зрения целесообразно построение упрощенных схем устройств (механизмов) путем замены сложной конструкции механизма более простой, для которых необходимо выполнить вибрационные расчёты. Для поступательной части рассматриваемого механизма с шестью степенями свободы, соответствующее описание которого приведено в главе 2 (рисунок 2.10), для проведения расчётов по определению собственных частот механизма был использован приведенный (эквивалентный приведенной) схеме механизм «пирамида» с тремя степенями свободы (рисунок 3.2).

Считаем, что на систему наложены идеальные связи, т.е. уравнения не содержат реакций связей, и входящие в них величины, определяющие движение системы (обобщенные координаты и их производные по времени), непосредственно связаны с заданными (обобщенными) силами. В соответствии с числом независимых обобщенных координат системы уравнения Лагранжа II рода в обобщенных координатах имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

где T – кинетическая энергия системы; q_k – обобщенные координаты, число которых равно числу n -степеней свободы системы ($k = 1, 2, 3$); \dot{q}_k – обобщенные скорости; Q_k – обобщенные силы.

Обобщенные силы Q_k определяем исходя, что элементарная работа δA всех действующих активных сил равна:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}.$$

Для рассматриваемой механической системы, находящейся под действием консервативных сил, каждая обобщенная сила будет определяться как частная производная от потенциальной энергии системы по соответствующей обобщенной координате, взятая с обратным знаком:

$$Q_k = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}.$$

Уравнения Лагранжа II рода в обобщенных координатах для консервативной системы имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \quad (4.2)$$

где $\Pi(\mathbf{q})$ – потенциальная энергия системы.

При малых колебаниях системы около положения устойчивого равновесия ($q_k = 0$, где $k = 1, 2, 3$) кинетическая энергия T системы может быть представлена положительно-определённой квадратичной формой от обобщённых скоростей [5]:

$$2T = \sum_{i,k}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (4.3)$$

где a_{ik} – инерционный коэффициент ($i, k = 1, 2, 3$), кг; $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ – производные по t от координат x_i, y_i, z_i : $\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}$, $\dot{y}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t}$, $\dot{z}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_i}{\partial t}$, где $i = k = 1, 2, 3$.

Потенциальная энергия Π консервативной системы, совершающей малые колебания около положения устойчивого равновесия ($q_k = 0$, где $k = 1, 2, 3$), определяется по формуле:

$$2\Pi = \sum_{i,k}^n c_{ik} q_i q_k, \quad (4.4)$$

где c_{ik} – упругий коэффициент (приведенный коэффициент жёсткости); q_k – обобщённая координата ($i, k = 1, 2, 3$).

Величины q_k в силу устойчивости системы малы, поэтому запишем уравнение Лагранжа в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \quad \rightarrow \quad L = T - \Pi; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_k; \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n c_{ik} q_k; \\ L = T - \Pi &\rightarrow \sum_{k=1}^n (a_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) можно рассматривать, как уравнение движение. Получившуюся линейную систему уравнений (4.5) можно записать в матричном виде для механизма с тремя степенями свободы, расположенного в главных осях:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{a}\ddot{\vec{\mathbf{q}}} + \mathbf{c}\vec{\mathbf{q}} = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где матрица \mathbf{a} – матрица коэффициентов инерции; \mathbf{c} – матрица коэффициентов жёсткости; $\vec{\mathbf{q}}$ – матрица-столбец (вектор) обобщённых координат (\mathbf{q}),

или

$$\ddot{\mathbf{q}} + k^2 \mathbf{q} = 0, \quad k^2 = \frac{c}{a}. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) представляет собой дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления, решение которого в общем виде имеет вид [5, 8, 41]:

$$\mathbf{q} = A \sin(kt + \alpha), \quad (4.8)$$

где A – амплитуда свободных колебаний; $(kt + \alpha)$ – фаза колебаний, $k = \sqrt{c/a}$ – круговая (угловая) частота свободных колебаний или собственная частота ($\tau = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{a/c}$ – период колебаний); α – начальная фаза колебаний.

Рассмотрим механизм поступательной структуры с тремя степенями свободы, состоящий из трёх кинематических цепей, расположенных в осях $Oxyz$ декартовой системы координат. Каждая кинематическая цепь содержит двигатель поступательного перемещения, шарнирный параллелограмм. Наличие двигателя и параллелограмма обеспечивает одну степень подвижности в каждой кинематической цепи. Пространственный шарнирный параллелограмм позволяет выходному звену (платформе) оставаться в фиксированном положении по отношению к входному звену и рассматривается, как одноподвижная кинематическая пара в соответствующей кинематической цепи (рисунок 4.1(a)) [38].

В качестве обобщённых координат механизма примем перемещение приводов в точках B_1 , B_2 , B_3 ($q_1 = x_{B_1}$, $q_2 = y_{B_2}$, $q_3 = z_{B_3}$) вдоль главных осей Ox , Oy , Oz , которые однозначно определяют положение точки A , т.е. положение выходного звена с массой m_B . Звенья механизма считаем однородными и абсолютно упругими, длины звеньев AB_1 , AB_2 , AB_3 равны L , массой звеньев пренебрегаем.

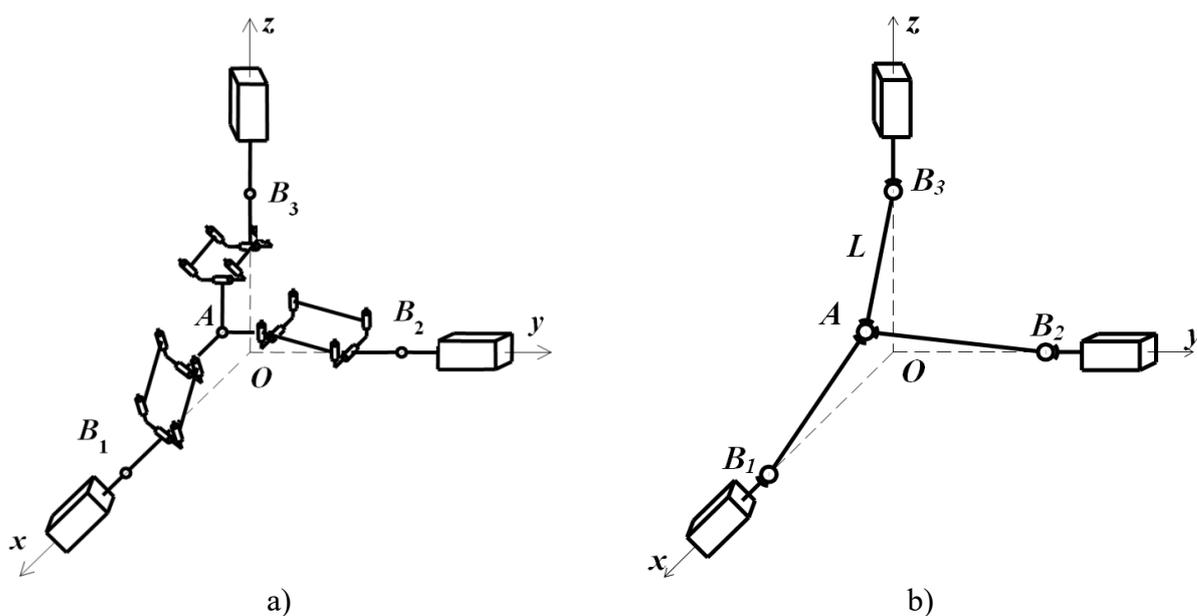


Рисунок 4.1. а) механизм поступательной структуры с тремя степенями свободы;

б) расчётная схема механизма с тремя степенями свободы.

Уравнения Лагранжа для рассматриваемого механизма (рисунок 4.1 (b)) имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial T}{\partial q_3} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_3}.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Данный механизм можно рассматривать как одну точку в пространстве n измерений (n – число степеней свободы системы, $n = 3$) [7, 8, 57]. Выходное звено механизма заменим одной материальной точкой, так как при поступательном движении каждая точка системы имеет одинаковую скорость, равную скорости центра масс. Массу выходного звена m_B можно рассматривать как массу всей системы.

Кинетическую энергию T системы в главных (нормальных) координатах можно записать в виде:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),\tag{4.10}$$

где $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – скорости звеньев в абсолютной системе координат.

Матрица коэффициентов инерции a_{ik} будет равна:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} = m.$$

Потенциальная энергия системы Π в положении равновесия имеет минимум, т.е. система находится в устойчивом положении, при этом коэффициенты жёсткости должны удовлетворять критерию Сильвестра – c_{ik} должны быть больше нуля ($i, k = 1, 2, 3$):

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{c}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)\tag{4.11}$$

Согласно уравнению (4.6) запишем систему дифференциальных уравнений малых свободных колебаний консервативной системы для механизма с тремя степенями свободы:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 = 0; \\ a_{21}\ddot{q}_1 + c_{21}q_1 = 0; \\ a_{31}\ddot{q}_1 + c_{31}q_1 = 0. \end{cases}\tag{4.12}$$

Частные решения системы (4.12) будем искать в виде:

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha); \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha); \quad q_3 = A_3 \sin(kt + \alpha).\tag{4.13}$$

где A_1, A_2, A_3, k, α – неизвестные постоянные ($i = 1, 2, 3$).

Подставив (4.13) в систему уравнений (4.12) и сократив на $\sin(kt + \alpha)$, получим систему трёх однородных линейных уравнений для определения амплитуд A_1, A_2, A_3 :

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}k^2)\mathbf{A} = \mathbf{0},\tag{4.14}$$

или

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}k^2)A_1 + a_{12}k^2A_2 + a_{13}k^2A_3 = 0; \\ a_{21}k^2A_1 + (c_{22} - a_{22}k^2)A_2 + a_{23}k^2A_3 = 0; \\ a_{31}k^2A_1 + a_{32}k^2A_2 + (c_{33} - a_{33}k^2)A_3 = 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

где \mathbf{A} – в данном случае вектор амплитуд ($\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$).

При $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ система имеет нулевое решение, соответствующее равновесию системы. При $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, A_3 \neq 0$ система отлична от нуля, и должно удовлетворяться условие $\det(\mathbf{c} - \mathbf{a}k^2) = 0$.

$$\Delta(k)^2 = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & a_{12}k^2 & a_{13}k^2 \\ a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 & a_{23}k^2 \\ a_{31}k^2 & a_{32}k^2 & c_{33} - a_{33}k^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.16)$$

где $\Delta(k)^2$ – частотный определитель.

В данном расчёте удобнее будет воспользоваться приёмом, умножив уравнение (4.14) слева на обратную матрицу \mathbf{a}^{-1} :

$$(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{c} - \mathbf{E}k^2)\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (4.17)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица.

В главе 3 для поступательного механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы (рисунок 3.1) получили функцию положения (3.10), описывающую взаимосвязь между скоростями во входных звеньях и скоростями выходного звена, и получим:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = (-\mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы частных производных, полученные в главе 3, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – скорости звеньев в абсолютной системе координат.

Систему уравнений абсолютных скоростей получим из уравнения (4.18), умножив левую и правую части уравнения на матрицу \mathbf{A}^{-1} , обратную матрице \mathbf{A} . После упрощения имеем:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (-\mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Рассмотрим положения механизма с координатами выходного звена в точке $A(0,2; 0,13; 0,1)$, длина звеньев $L = 0,3$ м, масса выходного звена $m_b = 0,5$ кг. Значения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} для выбранного положения выходного звена равны:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,502 & 0,26 & 0,20 \\ 0,40 & 0,40 & 0,20 \\ 0,40 & 0,26 & 0,364 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0,502 & 0 & 0 \\ 0 & -0,40 & 0 \\ 0 & 0 & 0,364 \end{pmatrix}.$$

Произведение обратной матрицы \mathbf{A}^{-1} на матрицу $(-\mathbf{B})$ равно:

$$A^{-1} \cdot (-B) = \begin{pmatrix} 2,506 & -0,909 & -0,543 \\ -1,756 & 2,192 & -0,397 \\ -1,500 & -0,568 & 1,881 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Подставляя значения из (4.20) в (4.19), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{q}_1 \cdot 2,506 - \dot{q}_2 \cdot 0,909 - \dot{q}_3 \cdot 0,543; \\ \dot{y} &= -\dot{q}_1 \cdot 1,756 + \dot{q}_2 \cdot 2,192 - \dot{q}_3 \cdot 0,397; \\ \dot{z} &= -\dot{q}_1 \cdot 1,500 - \dot{q}_2 \cdot 0,568 + \dot{q}_3 \cdot 1,881. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Подставим в уравнение кинетической энергии T системы (4.9) полученные значения абсолютных скоростей (4.20):

$$T = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot ((\dot{q}_1 \cdot 2,506 - \dot{q}_2 \cdot 0,909 - \dot{q}_3 \cdot 0,543)^2 + (-\dot{q}_1 \cdot 1,756 + \dot{q}_2 \cdot 2,192 - \dot{q}_3 \cdot 0,397)^2 + (-\dot{q}_1 \cdot 1,500 - \dot{q}_2 \cdot 0,568 + \dot{q}_3 \cdot 1,881)^2), \quad (4.22)$$

Взяв частные производные $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ ($i = 1,2,3$) от кинетической энергии T (4.22) и продифференцировав их по времени t , получаем следующие выражения:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 5,806 \cdot \dot{q}_1 - 2,637 \cdot \dot{q}_2 - 1,743 \cdot \dot{q}_3; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = -2,637 \cdot \dot{q}_1 + 2,977 \cdot \dot{q}_2 - 0,723 \cdot \dot{q}_3; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = -1,743 \cdot \dot{q}_1 - 0,727 \cdot \dot{q}_2 + 1,996 \cdot \dot{q}_3, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 5,806 \cdot \ddot{q}_1 - 2,637 \cdot \ddot{q}_2 - 1,743 \cdot \ddot{q}_3; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = -2,637 \cdot \ddot{q}_1 + 2,977 \cdot \ddot{q}_2 - 0,723 \cdot \ddot{q}_3; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = -1,743 \cdot \ddot{q}_1 - 0,727 \cdot \ddot{q}_2 + 1,996 \cdot \ddot{q}_3. \end{cases} \quad (4.23)$$

Частные производные от потенциальной энергии Π (4.11) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -c_{11} \cdot q_1; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -c_{22} \cdot q_2; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = -c_{33} \cdot q_3. \end{cases} \quad (4.24)$$

Подставляя в (4.7) полученные выражения при $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ (4.23) и $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ (4.24), получаем следующую систему из трёх уравнений:

$$\begin{aligned} 5,806 \cdot \ddot{q}_1 - 2,637 \cdot \ddot{q}_2 - 1,743 \cdot \ddot{q}_3 &= -c_{11} \cdot q_1; \\ -2,637 \cdot \ddot{q}_1 + 2,977 \cdot \ddot{q}_2 - 0,723 \cdot \ddot{q}_3 &= -c_{22} \cdot q_2; \\ -1,743 \cdot \ddot{q}_1 - 0,727 \cdot \ddot{q}_2 + 1,996 \cdot \ddot{q}_3 &= -c_{33} \cdot q_3, \end{aligned} \quad (4.25)$$

Для решения системы уравнений (4.24) необходимо найти вторые производные от частных решений обобщённых координат (4.13):

$$\ddot{q}_1 = -A_1 k^2 \sin(kt + \alpha); \quad \ddot{q}_2 = -A_2 k^2 \sin(kt + \alpha); \quad \ddot{q}_3 = -A_3 k^2 \sin(kt + \alpha). \quad (4.26)$$

Подставляя в (4.25) частные решения обобщённых координат (4.13) и их вторые производные (4.25), согласно (4.16), получаем систему уравнений для определения амплитуд A, B, C :

$$\begin{cases} (c_{11} - 5,806k^2)A_1 - 2,637k^2 \cdot A_2 - 1,743k^2 \cdot A_3 = 0; \\ -2,637k^2 \cdot A_1 + (c_{22} - 2,977k^2)A_2 - 0,723k^2 \cdot A_3 = 0; \\ -1,743k^2 \cdot A_1 - 0,727k^2 \cdot A_2 + (c_{33} - 1,996k^2)A_3 = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Зададим жёсткость (коэффициенты упругости) звеньев $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1000 \text{ Н/м}$.

Подставляя значение жёсткости звеньев в (4.27) найдем частотный определитель Δk :

$$\Delta(k)^2 = \begin{vmatrix} 1000 - 5,806k^2 & -2,637k^2 & -1,743k^2 \\ -2,637k^2 & 1000 - 2,977k^2 & -0,723k^2 \\ -1,743k^2 & 0,727k^2 & 1000 - 1,996k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.28)$$

Раскрывая определитель (4.28), получаем уравнение частот:

$$10 \cdot 10^8 - 1,078 \cdot 10^7 \cdot k^2 + 26662,58 \cdot k^4 - 18,77 \cdot k^6 = 0. \quad (4.29)$$

Решение уравнения (4.29) даёт следующие шесть значений собственных частот:

$$k_1 = \pm 11 \text{ рад/сек}; \quad k_2 = \pm 23 \text{ рад/сек}; \quad k_3 = \pm 27 \text{ рад/сек}.$$

Период колебаний составляет:

$$\tau = 0,5475 \text{ сек}; \quad \tau_2 = 0,2701 \text{ сек}; \quad \tau_3 = 0,2298 \text{ сек}.$$

Частота колебаний соответствует:

$$v_1 = 1,826 \text{ Гц}, \quad v_2 = 3,702 \text{ Гц}, \quad v_3 = 4,351 \text{ Гц}.$$

Имея значения собственных круговых частот, можно записать три частных линейно независимых решений уравнения (4.28) – главные колебания системы:

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) + A_3 \sin(k_3 t + \alpha_3); \\ q_2 = A_2 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) + A_2 \sin(k_3 t + \alpha_3); \\ q_3 = A_3 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_3 \sin(k_2 t + \alpha_2) + A_3 \sin(k_3 t + \alpha_3), \end{cases} \quad (4.29)$$

Для механизма поступательной структуры были определены собственные круговые частоты при положении выходного звена механизма в точке A с координатами $(0,2; 0,13; 0,1)$ [38]. Полученные результаты используем в моделировании движения поступательного механизма по заданному закону движения.

4.1.2 Моделирование движения поступательного механизма

Проведём численное моделирование движения поступательного механизма параллельной структуры с тремя степенями свобода на основе принципа Д'Аламбера-Лагранжа, рассмотренного в предыдущих главах [32, 33] и используя полученные выше результаты.

Но перед этим рассмотрим и составим уравнения равновесия (статики) механизма под действием приложенных к нему сил и моментов, что позволит перейти к уравнениям движения как к уравнениям кинестатики.

Для рассматриваемого механизма трёх кинематических цепях первой кинематической парой является поступательная пара. Имеем уравнения равновесия в виде:

$$\sum_{i=1}^n F_{vi} + R_o + P_i = 0, \quad (4.30)$$

где F_{vi} – главный вектор внешних сил действующих на звено и приложенный в его центре масс; R_o – реакция опоры; P_i – сила, развиваемая приводом в осях кинематических пар ($i = 1,2,3$).

Считая, что все кинематические связи идеальные и силы трения в них отсутствуют, то силы, развиваемые приводом первой кинематической пары первой кинематической цепи можно найти, проецируя уравнение (4.30) на направление её оси, т.е. оси Ox [19]:

$$\sum_{i=1}^n F_{vi} + \mu_1 = 0, \quad (4.31)$$

где $\mu_1 = x_0^T P_1$ – сила, развиваемая приводом первой поступательной кинематической пары и удерживающая механизм в равновесии под действием внешних сил; x_0 – заданный единичный вектор-орт.

Главный вектор сил инерции F_{ni} , приложенный в его центре масс в неподвижной системе координат можно найти как:

$$F_{ni} = -m_i a_i, \quad (4.32)$$

где m_i – масса звена; a_i – абсолютное ускорение центра масс ($i = 1,2,3$).

Уравнение кинестатики будет иметь вид:

$$\sum_{j=i=1}^n (F_{vj} + F_{ni}) + \mu_i = 0, \quad (4.33)$$

где F_{ni} – главный вектор сил инерции i -го звена в неподвижной системе координат; F_{vi} – главный вектор внешних сил, действующих на звено; μ_i – управляющая сила, развиваемая приводом соответствующей степени подвижности механизма.

При решении обратной задачи динамики предполагаются известными функции $q_i(t), t \in [0, T]$, описывающие движение механизма. Необходимо определить управляющие силы μ_i [19, 24, 43, 50, 76]:

$$\mu_{i-1} = x_{i-2}^T [-F_{vi-1} + P_i] - x_{i-2}^T F_{ni-1}. \quad (4.34)$$

Составим общее уравнение динамики, используя принцип возможных перемещений [44, 57] в записи через обобщённые координаты. В качестве независимых обобщённых координат взяты координаты точек, значение которых однозначно определяют положения всех точек системы. Для рассматриваемого механизма (рисунок 4.1 (b)) обобщёнными координатами q_1, q_2, q_3 являются перемещение приводов в точках B_1, B_2, B_3 вдоль осей Ox, Oy, Oz , которые однозначно определяют положение точки A , т.е. положение выходного звена.

Задавая элементарные приращения входным координатам $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$, считая, что имеем систему с идеальными связями, получаем следующее общее уравнение динамики в общем виде:

$$\sum_{i=1}^n \left(m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} - F_{Bi} \right) \delta r_i = 0, \quad \delta r_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad r = x, y, z; \quad i = k = 1, 2, 3,$$

или с учётом (4.4) имеем:

$$\sum \left[(m a_x - P_{xi}) \frac{\partial r_x}{\partial q_k} \delta q_k + (m a_y - P_{yi}) \frac{\partial r_y}{\partial q_k} \delta q_k + (m a_z - P_{zi}) \frac{\partial r_z}{\partial q_k} \delta q_k \right] + \mu_i = 0, \quad (4.35)$$

где m – масса выходного звена; P_{xi}, P_{yi}, P_{zi} – проекции активных сил на неподвижные оси координат; a_x, a_y, a_z – ускорения выходного звена ($a_k = \ddot{x} \cdot \mathbf{i} + \ddot{y} \cdot \mathbf{j} + \ddot{z} \cdot \mathbf{k}$, $k = x, y, z$); $\frac{\partial r_x}{\partial q_k}, \frac{\partial r_y}{\partial q_k}, \frac{\partial r_z}{\partial q_k}$ – бесконечно малые приращения обобщенных координат системы $\frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \cdot \mathbf{k}$ ($i = k = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи).

$$\begin{aligned} -m_1 \ddot{q}_1 \delta q_1 &= P_{x1} \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + P_{y1} \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + P_{z1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1, \\ -m_2 \ddot{q}_2 \delta q_2 &= P_{x2} \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + P_{y2} \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + P_{z2} \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2, \\ -m_3 \ddot{q}_3 \delta q_3 &= P_{x3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \delta q_3 + P_{y3} \frac{\partial y}{\partial q_3} \delta q_3 + P_{z3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \delta q_3, \end{aligned}$$

где m – масса выходного звена; m_1, m_2, m_3 – масса входных звеньев; P_{xi}, P_{yi}, P_{zi} – проекции сил инерции на оси координат $Oxyz$.

Поскольку механизм расположен в главных осях координат, то имеем только проекции сил, действие которых направлено вдоль соответствующих осей x, y, z , проекции сил $P_{y1} = P_{z1} = P_{x2} = P_{z2} = P_{x3} = P_{y3} = 0$.

Силы P_{xi}, P_{yi}, P_{zi} , развиваемые приводом в осях кинематических пар пропорциональны его жёсткости, и будут иметь вид:

$$\begin{cases} P_{x1} = -c_{11} \cdot q_1; \\ P_{y2} = -c_{22} \cdot q_2; \\ P_{z3} = -c_{33} \cdot q_3. \end{cases}$$

Вектор управляющих сил найдем, используя формулу:

$$\mu = m[\ddot{\mathbf{q}}_T + \gamma_1(\dot{\mathbf{q}}_T - \dot{\mathbf{q}}) + \gamma_0(\mathbf{q}_T - \mathbf{q})] - \mathbf{P}_{ri}, \quad (4.36)$$

где γ_1, γ_2 – коэффициенты обратных связей ($i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи, $r = x, y, z$).

Управляющие силы найдем через законы движения выходного звена:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 - P_{x1} \delta q_1, \\
\mu_2 &= m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 - P_{y1} \delta q_2, \\
\mu_3 &= m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_3} \delta q_3 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_3} \delta q_3 + m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_3} \delta q_3 - P_{z1} \delta q_3,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

где $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ есть законы движения механизма (выходного звена) во всех точках траектории:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \ddot{x}_T + \gamma_1(\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0(x_T - x), \\
\ddot{y} &= \ddot{y}_T + \gamma_1(\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0(y_T - y), \\
\ddot{z} &= \ddot{z}_T + \gamma_1(\dot{z}_T - \dot{z}) + \gamma_0(z_T - z),
\end{aligned} \tag{4.38}$$

где $x_T, \dot{x}_T, \ddot{x}_T$ – заданный (требуемый) закон движения выходного звена, соответствующий заданному управляющему сигналу q_i ($i = 1, 2, 3$):

$$x_T(t) = A_1 \sin(k_1 t + \alpha); \quad y_T(t) = A_2 \sin(k_2 t + \alpha); \quad z_T(t) = A_3 \sin(k_3 t + \alpha). \tag{4.39}$$

На вход каждого привода подаётся управляющий сигнал $q_i(t)$, Выходом системы являются векторы перемещений и ориентации выходного звена (полезной нагрузки) механизма в рабочем пространстве, связанные с $q_i(t)$ полученными кинематическими соотношениями, которые необходимо определить. Предполагается, что задан алгоритм управления механизмом параллельной структуры, который должен сводить к минимуму рассогласование (ошибку) по ускорению, скорости и положению между заданным законом движения и полученным реальным движением выходного звена [24]. По заданному закону движения вычисляются управляющие силы μ_i . Используемый подход ранее применялся для поступательного механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы, с каждой кинематической цепи которого расположено по два шарнирных параллелограмма [32, 50]. Расчёт по определению перемещений и скоростей выходного звена приведён в приложении 1.

Для определения коэффициентов $\frac{\partial x}{\partial q_k}, \frac{\partial y}{\partial q_k}, \frac{\partial z}{\partial q_k}$ необходимо рассмотреть уравнения связей, записанные в виде неявных функций от координат системы $F_i(x, y, z, q_i) = 0$, где $i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи.

Переменная q_k в данных функциях представлена как функция переменных x, y, z . Систему уравнений, связывающую скорости входных и выходных звеньев, получаем дифференцированием полученных неявных функций по переменным x, y, z [32, с. 16]:

$$\frac{\partial F_k}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F_k}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F_k}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F_k}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0,$$

где $k = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи.

Формулы для определения искоемых переменных коэффициентов получаем из выше приведённых полученных выражений:

$$\frac{\partial x}{\partial q_k} = -\frac{\partial F_k}{\partial q_k} / \frac{\partial F_k}{\partial x}; \quad \frac{\partial y}{\partial q_k} = -\frac{\partial F_k}{\partial q_k} / \frac{\partial F_k}{\partial y}; \quad \frac{\partial z}{\partial q_k} = -\frac{\partial F_k}{\partial q_k} / \frac{\partial F_k}{\partial z}, \quad (4.40)$$

где $k = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи.

Уравнения связи для расчётной схемы механизма поступательной структуры с тремя степенями свободы (рисунок 4.1 (b)) представляют собой систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} F_1 = (x_A - q_1)^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2 = 0, \\ F_2 = x_A^2 + (y_A - q_2)^2 + z_A^2 - L^2 = 0, \\ F_3 = x_A^2 + y_A^2 + (z_A - q_3)^2 - L^2 = 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

Используя метод Анджелеса-Госслена [91], основанный на изучении свойств матрицы Якоби, запишем в общем виде уравнение для решения задачи о скоростях, решение которой приведено в главе 3:

$$A \cdot V = (-B) \cdot V_{i1}, \quad (4.42)$$

$$A = J(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_A} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z_A} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_A} & \frac{\partial F_2}{\partial y_A} & \frac{\partial F_2}{\partial z_A} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_A} & \frac{\partial F_3}{\partial y_A} & \frac{\partial F_3}{\partial z_A} \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}; \quad B = J(B) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{B1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial y_{B2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial z_{B3}} \end{pmatrix}; \quad V_{i1} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix},$$

где A – матрица частных производных от неявной функции по абсолютным координатам x_A, y_A, z_A ; B – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам x_{B1}, y_{B2}, z_{B3} ; V – вектор скорости выходного звена; V_{i1} – вектор скоростей во входных звеньях (входные скорости).

Дифференцируя первый раз (4.41) по t , получим систему, связывающую скорость выходного звена и скорости входных звеньев (4.42). На примере первого уравнения имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{dF_1}{dt} \right) &= 2 \left(\frac{d}{dt} x - \frac{d}{dt} q_1 \right)^2 + 2(x - q_1) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} x - \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_1 \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} y \right)^2 + 2x \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} z \right)^2 + \\ &+ 2x \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} z \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} q_i \right)^2 + 2x \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} q_i \right) = 0 \end{aligned}$$

Записав систему уравнений (4.42) в виде функции от времени, получим следующую систему:

$$J(A)(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = -J(B)(t) \begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Задав значения координат (положения выходного звена) для точки A (0,2; 0,13; 0,1), длина звена $L = 0,3$ м.

Находя значения частных производных в обобщённых координатах и подставляя полученные значения в (4.42), получаем следующие уравнения [31, 32]:

$$\begin{pmatrix} 2x_A - 2q_1 & 2y_A & 2z_A \\ 2x_A & 2y_A - 2q_2 & 2z_A \\ 2x_A & 2y_A & 2z_A - 2q_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2x_A - 2q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2y_A - 2q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2z_A - 2q_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}.$$

В общем уравнения динамики (4.1) входят значения ускорений входных и выходных звеньев. Для дальнейшего решения задачи динамики необходимо выразить ускорения входных звеньев через ускорения выходных. Дифференцируя уравнения (4.41) второй раз по t , получаем уравнения, связывающие ускорения входных и выходных звеньев. Данное выражение позволяет определить искомые ускорения и его можно записать в матричной форме:

$$J(A) \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + \frac{dJ(A)}{dt} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = - \left[J(B) \cdot \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} + \frac{dJ(B)}{dt} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \right] \quad (4.44)$$

Получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} 2(\dot{x} - \dot{q}_1)^2 + 2(x - q_1)(\ddot{x} - \ddot{q}_1) + 2\dot{y}^2 + 2y \cdot \ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z \cdot \ddot{z} &= 0, \\ 2\dot{x}^2 + 2x \cdot \ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2(\dot{y} \cdot \dot{q}_2)^2 + 2(y - q_2)(\ddot{y} - \ddot{q}_2) + 2\dot{z}^2 + 2z \cdot \ddot{z} &= 0, \\ 2\dot{x}^2 + 2x \cdot \ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y \cdot \ddot{y} + 2(\dot{z} - \dot{q}_3)^2 + 2(z - q_3)(\ddot{z} - \ddot{q}_3) &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \ddot{x} - \frac{(2y \cdot \dot{y} + 2z \cdot \dot{z})^2}{4 \cdot (L^2 - y^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\dot{y}^2 + 2\dot{z}^2 + 2y \cdot \ddot{y} + 2z \cdot \ddot{z}}{2 \cdot \sqrt{L^2 - y^2 - z^2}}, \\ \ddot{q}_2 &= \ddot{y} - \frac{(2x \cdot \dot{x} + 2z \cdot \dot{z})^2}{4 \cdot (L^2 - x^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\dot{x}^2 + 2\dot{z}^2 + 2x \cdot \ddot{x} + 2z \cdot \ddot{z}}{2 \cdot \sqrt{L^2 - x^2 - z^2}}, \\ \ddot{q}_3 &= \ddot{z} - \frac{(2x \cdot \dot{x} + 2y \cdot \dot{y})^2}{4 \cdot (L^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + 2x \cdot \ddot{x} + 2y \cdot \ddot{y}}{2 \cdot \sqrt{L^2 - x^2 - y^2}}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

где $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3$ – выражены из системы уравнений (4.41) и продифференцированы.

Считаем, что внешние моменты и силы отсутствуют, необходимо определить усилия в приводах, которые бы обеспечивали отработку заданного закона управления. Закон изменения ошибки соответствует движению колебательного звена, при котором обеспечивается устойчивость и минимизация ошибки по положению, скорости и ускорению, соответственно [19, 24, 43, 50, 76]. Входящие в уравнения (4.41) абсолютные скорости выражаются из уравнения скоростей через обобщенные скорости.

Зададим следующие начальные условия:

1. Положение механизма в начальном положении: $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0$.
2. Собственные круговые частоты: $k_1 = 11 \text{ рад/сек}; k_2 = 23 \text{ рад/сек}; k_3 = 27 \text{ рад/сек}$.

3. Постоянные времени τ_i , характеризующую длительность протекания переходного процесса, $\tau_i = 2\pi/k_i$ сек.

4. Время переходного процесса t_i зависит от постоянной времени τ_i и коэффициента затухания собственных колебаний ζ предпочтительного режима для автоматических систем, и составляет $t_i \approx 3\tau_i/\zeta$.

5. Коэффициент затухания собственных колебаний ζ предпочтительного режима для автоматических систем составляет $\zeta = \gamma_{1i}/2\sqrt{\gamma_{0i}}$.

1. Коэффициенты обратных связей также зависят от выбранной постоянной времени τ_i ,

$$\gamma_{0i} = \frac{1}{\tau_i^2}, \gamma_{1i} = \frac{\sqrt{2}}{\tau_i}.$$

2. Масса выходного звена равна $m_b = 0,5$ кг, длина звеньев равна $L = 0,3$ м.

Дифференциальные уравнения ошибки принимают вид [31]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_T + 2,583(\dot{x}_T - \dot{x}) + 3,336(x_T - x), \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_T + 5,236(\dot{y}_T - \dot{y}) + 13,707(y_T - y), \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_T + 6,154(\dot{z}_T - \dot{z}) + 18,937(z_T - z). \end{aligned}$$

а) При принятых начальных условиях в результате расчёта были получены графики изменения ошибок по различным координатам (рисунок 4.2). Для наглядности на рисунке 4.3 представлены графики требуемого закона движения $x_T(t)$, фактического закона $x(t)$ и абсолютной ошибки $\Delta(t)$, где $\Delta x(t) = x_T(t) - x(t)$.

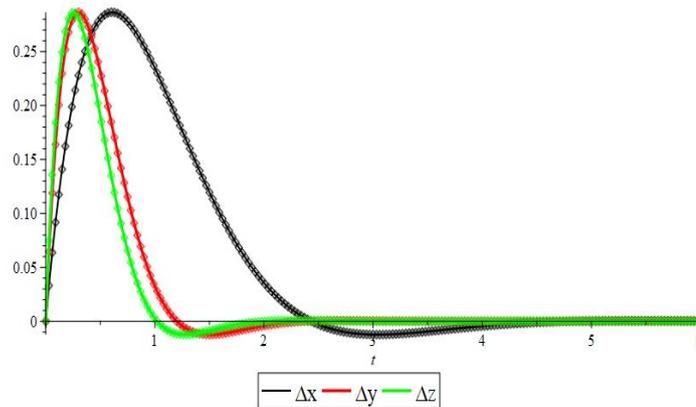


Рисунок 4.2. График изменения ошибки по координате.

Анализируя графики на рисунках 4.2 – 4.7 можно заключить, что при принятых начальных условиях и приложении к динамической системе внешнего воздействия в виде синусоиды система принимает установившиеся значения в пределах установленного переходного процесса. Ошибка в рассогласовании заданного и фактического движения при этом стремится к нулю [32].

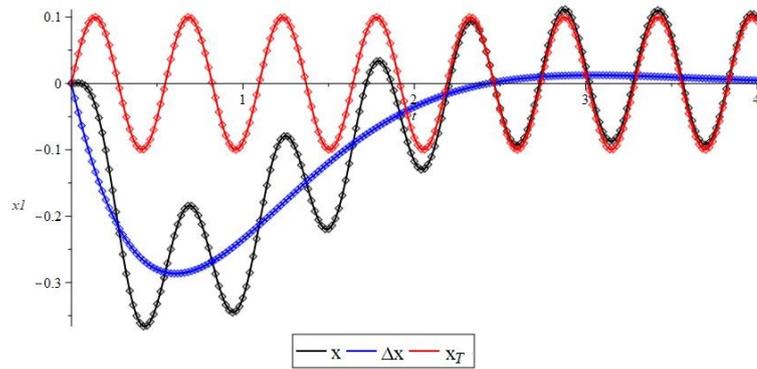


Рисунок 4.3. График изменения ошибки по положению – $\Delta x(t)$, задаваемая траектория – $x_T(t)$, фактической траектория движения – $x(t)$ при управлении механизмом с обратной связью.

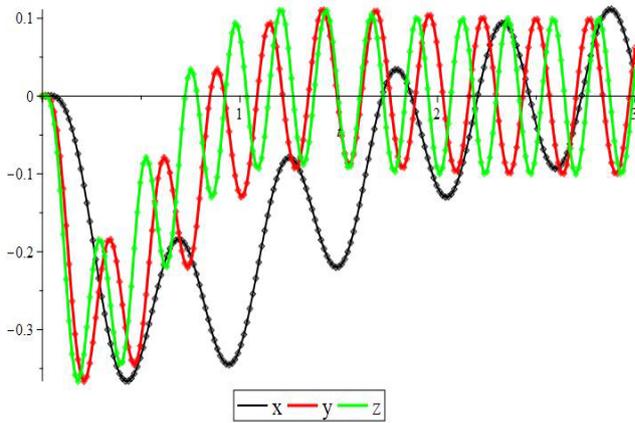


Рисунок 4.4. График движения выходного звена.

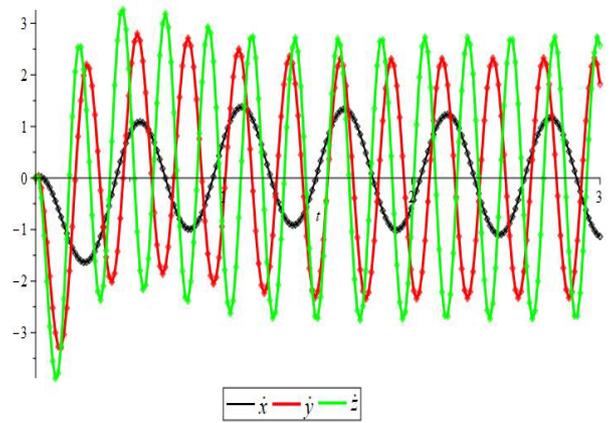


Рисунок 4.5. График скоростей выходного звена.

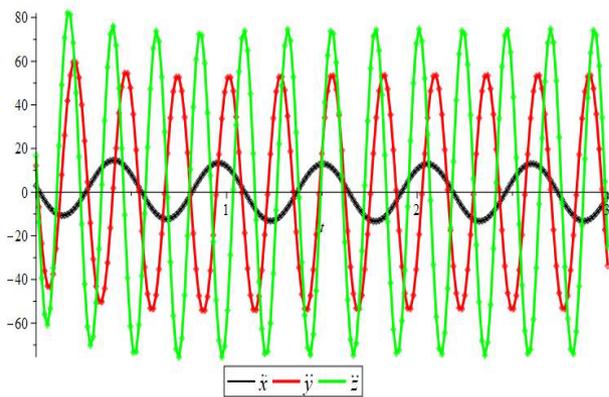


Рисунок 4.6. График ускорений выходного звена.

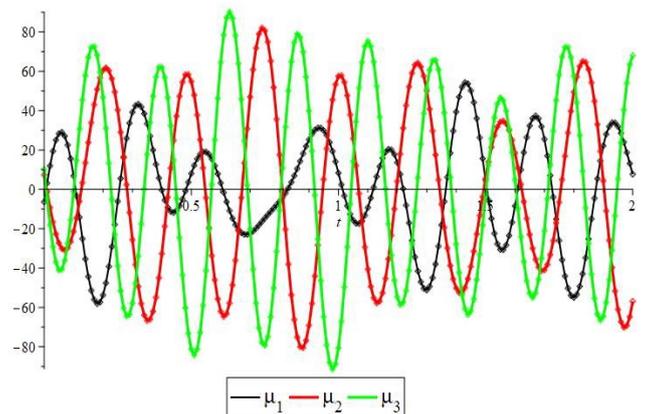


Рисунок 4.7. График управляющих сил μ_i .

б) Рассмотрим случай при следующих начальных условиях: $x(0) = 0,25$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Значение собственных круговых частот и коэффициенты обратных связей остаются неизменными. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.8 и 4.9 [33].

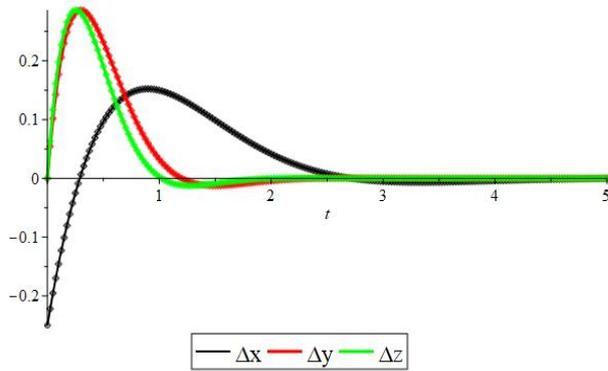


Рисунок 4.8. График изменения ошибки по координате.

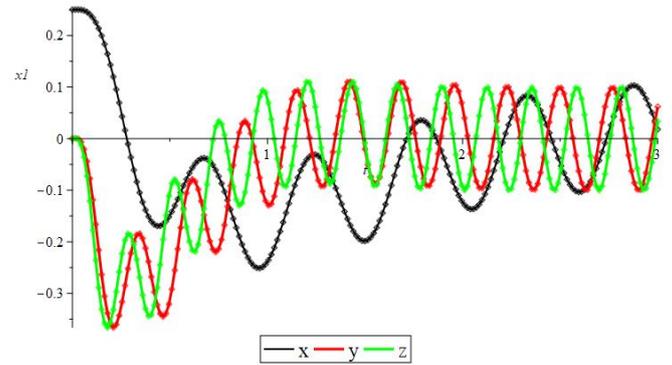


Рисунок 4.9. График движения выходного звена.

Анализ графиков на рисунках 4.8 и 4.9 показывает, что при принятых начальных условиях, значительно не соответствующих предписанному закону, незначительно увеличилась ошибка по положению для координаты x . В дальнейшем процесс стабилизировался.

с) Рассмотрим случай, когда в 10 раз увеличена собственная частота колебаний: $k_1 = 110$ рад/сек; $k_2 = 230$ рад/сек; $k_3 = 270$ рад/сек при неизменных начальных условиях: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.10, 4.11, 4.12 [33].

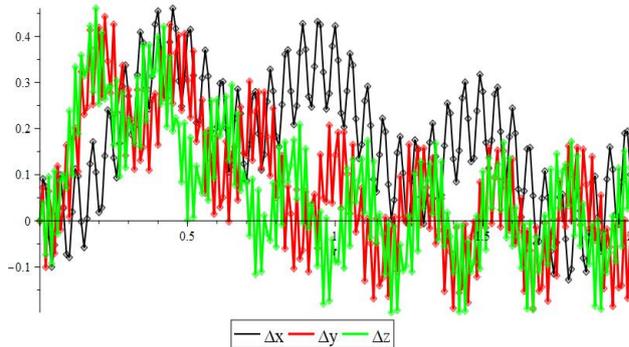


Рисунок 4.10. График изменения ошибки по координате.

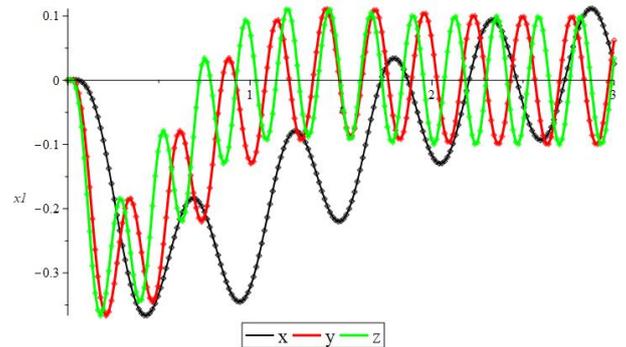


Рисунок 4.11. График движения выходного звена.

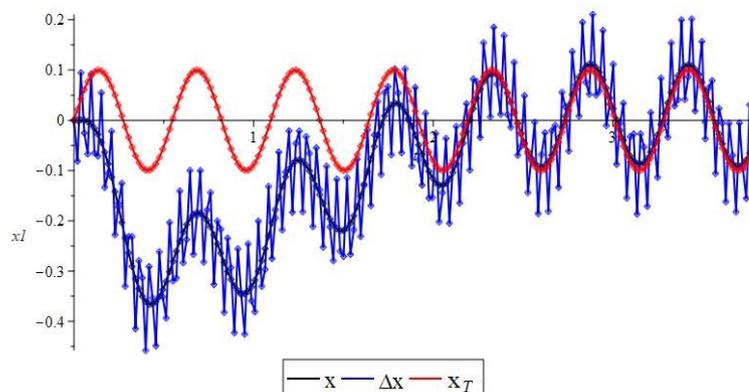


Рисунок 4.12. График изменения ошибки по положению – $\Delta x(t)$, задаваемая траектория – $x_T(t)$, фактической траектории движения – $x(t)$ при управлении механизмом с обратной связью.

Анализ графиков на рисунках 4.10 – 4.12 показывает, что при увеличении угловой частоты увеличилась ошибка по положению.

d) Рассмотрим случай, когда в 10 раз увеличены коэффициенты обратных связей γ_0, γ_1 , при начальных условиях: $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0$, и значениях круговых частот $k_1 = 11 \text{ рад/сек}$, $k_2 = 23 \text{ рад/сек}$, $k_3 = 27 \text{ рад/сек}$. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.13 – 4.15 [33].

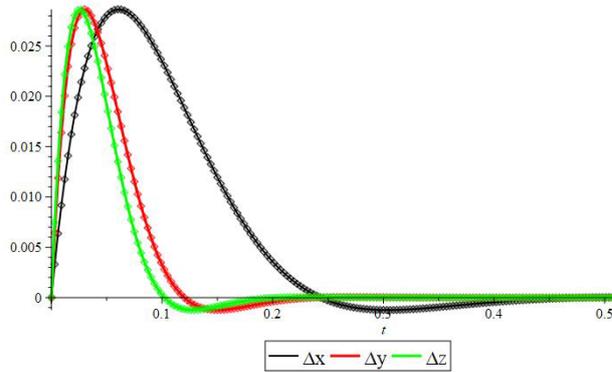


Рисунок 4.13. График изменения ошибки по координате.

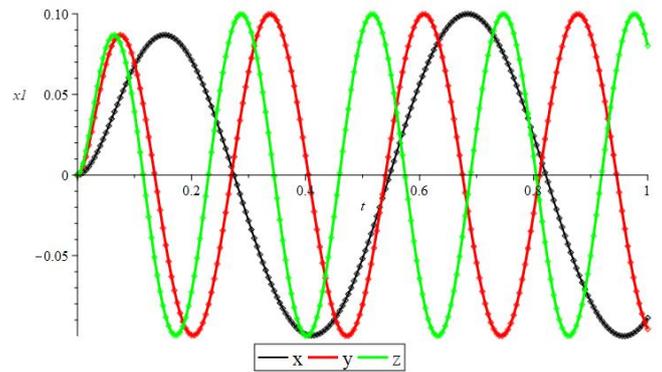


Рисунок 4.14. График движения выходного звена.

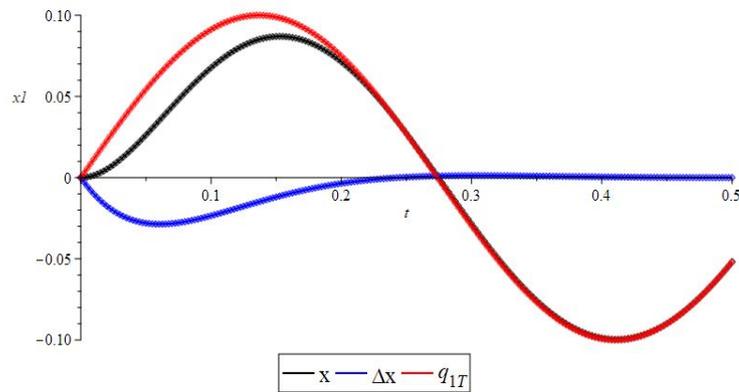


Рисунок 4.15. График изменения ошибки по положению – $\Delta x(t)$, задаваемая траектория $-x_T(t)$, фактической траектория движения – $x(t)$ при управлении механизмом с обратной связью.

Анализ графиков на рисунках 4.13 – 4.15 показывает, что при увеличении коэффициентов обратных связей ошибка по положению принимает установившиеся значения в пределах установленного переходного процесса. Рассогласование в заданном и текущем движении выходного звена появляется на начальном этапе движения (время переходного процесса равно 0,3 сек), затем процесс стабилизируется, и ошибка в движении стремится к нулю [33].

Для поступательного механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы, являющегося частью механизма с шестью степенями свободы, рассмотренного в предыдущих главах, была составлена динамическая модель для решения прямой и обратной задач динамики [30, 32, 33, 88]. На основе задач динамики был отработан заданный алгоритм управления,

минимизирующий ошибки по ускорению, скорости и положению [30, 88 125]. Для анализа работоспособности поступательного механизма и оценки пригодности используемого алгоритма, рассматривались различные начальные условия движения выходного звена, различные коэффициенты обратных связей γ_0, γ_1 , а также различные значения собственных круговых частот k_i движения по траектории, при этом ошибка движения по заданному закону имела приемлемые значения и по истечении времени переходного процесса стремилась к нулю.

4.2 Динамический анализ сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы

Проведём динамический анализ сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы, который является частью механизма с шестью степенями свободы, рассмотренного в предыдущих главах [32, 33].

4.2.1 Анализ колебательных процессов механизма параллельной структуры

Рассмотрим сферическую часть синтезированного в главе 2 механизма с шестью степенями свободы (рисунок 4.16), состоящего из трёх кинематических цепей с пересекающимися осями под углом 90° . Каждое входное звено сопряжено с двигателем вращательного перемещения. Выходное звено представляет собой две пересекающиеся полусферы и инструмент, вращающийся вокруг трех осей x, y, z с пересечением в точке O [28].

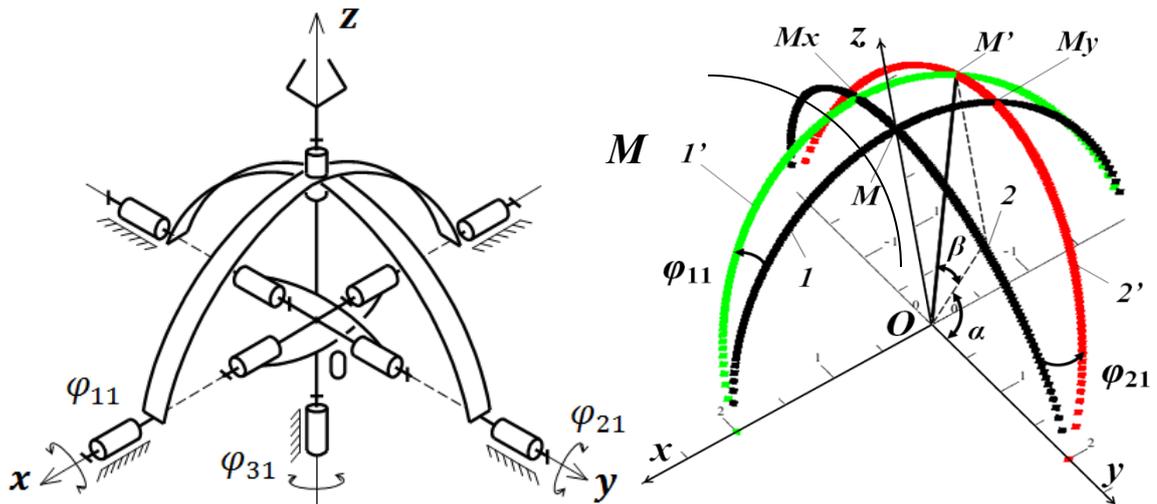


Рисунок 4.16. Схема сферического механизма.

Абсолютными (выходными) координатами являются углы поворота выходного звена: α, β, γ – повороты вокруг осей x, y, z , соответственно. Обобщенными (входными) координатами являются углы поворота входных звеньев – $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}$, соответственно, первой, второй и третьей кинематических цепей.

Для рассматриваемого сферического механизма положение полусфер задаётся углами φ_{11} , φ_{21} , которые однозначно определяют положение точки M , т.е. положение выходного звена с массой m_B . Угол φ_{31} отвечает за ориентацию рабочего инструмента. Звенья механизма и полусферы считаем однородными и упругими, длина звена OM равна l , длины полусфер (дуг) равны πl . Выходному звену механизма поставим в соответствие подвижную систему координат $O\eta\lambda\mu$, оси которой расположены по главным центральным осям инерции этого звена. При нулевых значениях углов ориентации выходного звена ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) направления осей $O\eta$, $O\lambda$, $O\mu$ совпадают с направлениями осей Ox , Oy , Oz , соответственно.

За обобщенные координаты принимает угла поворота входных звеньев $q_1 = \varphi_{11}$, $q_2 = \varphi_{21}$, $q_3 = \varphi_{31}$.

Уравнения для определения кинетической и потенциальной энергии используем те же, что и для поступательного механизма с тремя степенями свободы, рассмотренного выше, т.е. они являются квадратичными функциями обобщённых скоростей (4.3) и координат (4.4), соответственно.

При сферическом движении тела кинетическая энергия тела равна:

$$T = \frac{1}{2} J_{\omega} \omega^2,$$

где J_{ω} – момент инерции относительно мгновенной оси вращения; ω – абсолютная угловая скорость тела.

Для рассматриваемого сферического механизма главные оси инерции совпадают с координатными осями Ox , Oy , Oz , тогда кинетическую энергию T системы можно записать в виде:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2), \quad (4.46)$$

где J_x , J_y , J_z – осевые моменты инерции; ω_x , ω_y , ω_z – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\vec{\omega}$ на оси координат Ox , Oy , Oz , связанные с движущимся телом.

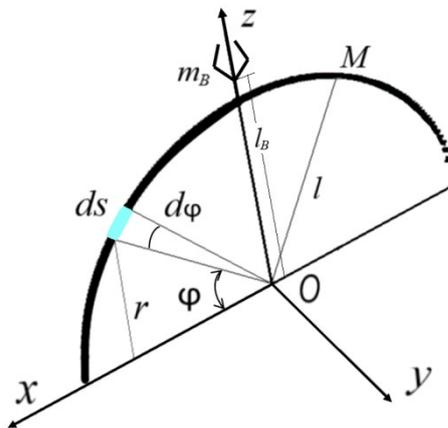


Рисунок 4.17. Схема для определения моментов инерции.

Считаем, что звено, расположенное вдоль оси Oz и определяемое углом φ_{31} , представляет собой однородный упругий стержень. Тогда момент инерции относительно оси Oz будет равен:

$$J_z = \frac{m_B R^2}{2}, \quad (4.47)$$

где R – радиус цилиндра, m_B – масса выходного звена.

Момент инерции осей Ox и Oy находим следующим образом (рисунок 4.17).

Запишем формулу для определения момента инерции в общем виде:

$$J_i = \sum_i m_i r_i^2,$$

где m_i – масса частицы тела; r_i – расстояние от частицы тела до оси вращения.

Единичный элемент массы обозначим dm равный γds , где γ является массой единицы длины дуги. При малых значениях ds стремится к $l d\varphi$. Расстояние от дуги до оси вращения Ox равно $r = l \sin \varphi$. Подставим значения:

$$J_x = \sum_n \gamma (l \sin \varphi_i)^2,$$

$$J_x = \gamma l^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi_i d\varphi = \gamma l^3 \frac{\pi}{2}.$$

Длина полудуги равна πl . Следовательно, $\pi l \cdot \gamma = m_d$, где m_d – масса дуги. Момент инерции относительно оси Ox .

$$J_x = \frac{m_d l^2}{2}.$$

С учётом момента инерции, создаваемого рабочим инструментом с массой m_B , момент инерции относительно оси Ox будет равен.

$$J_x = \frac{m_d l^2}{2} + \frac{m_B l_B^2 \omega_x^2}{2}, \quad (4.48)$$

где l_B – расстояние от рабочего инструмента до осей вращения Ox и Oy .

Момент инерции относительно оси Oy будет рассчитываться так же, как и для оси Ox , и будет равен:

$$J_y = \frac{m_d l^2}{2} + \frac{m_B l_B^2 \omega_y^2}{2} \quad (4.49)$$

С учётом выше сказанного кинетическая энергия механизма будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{m_d l^2}{2} + \frac{m_B l_B^2}{2} \right) \omega_x^2 + \left(\frac{m_d l^2}{2} + \frac{m_B l_B^2}{2} \right) \omega_y^2 + \frac{m_B R^2}{2} \omega_z^2 \right), \quad (4.50)$$

Потенциальная энергия системы Π будет иметь вид:

$$П = \frac{1}{2} \mathbf{c}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \quad (4.51)$$

Для сферического механизма используются те же математические выкладки, что и для поступательного механизма (4.12 – 4.16).

В главе 3 для сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы (рисунок 3.1) получили функцию положения (3.36), описывающую взаимосвязь между скоростями во входных звеньях и скоростями выходного звена, и получили:

$$C \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = (-D) \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

где C и D – матрицы частных производных.

Систему уравнений абсолютных скоростей получим из уравнения (4.52), умножив левую и правую части уравнения на матрицу C^{-1} , обратную матрице C . После упрощения получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot (-D) \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

Рассмотрим положения сферического механизма, в котором углы поворота выходного звена α , β , γ равны, соответственно: $0,010 \text{ рад}$; $0,013 \text{ рад}$ и $0,012 \text{ рад}$; масса полусфер $m_d = 0,05 \text{ кг}$, масса выходного звена $m_b = 0,5 \text{ кг}$, длина звена $OM \ l = 0,1 \text{ м}$, длина звена до рабочего инструмента $l_b = 0,115 \text{ м}$, радиус однородного стержня $R = 0,005 \text{ м}$. Значения матриц C и D для выбранного положения выходного звена равны:

$$C = \begin{pmatrix} -1,0001 & 0,0187 & 0,0131 \\ 0,0120 & 1,0001 & 0,0098 \\ 0,0130 & 0,0100 & -1,0001 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1,0001 & 0 & 0 \\ 0 & -1,0002 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0001 \end{pmatrix}.$$

Произведение обратной матрицы C^{-1} на матрицу $(-D)$ равно:

$$C^{-1} \cdot (-D) = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,0120 & 0,0130 \\ -0,0121 & 0,9998 & -0,0100 \\ 0,0129 & 0,0102 & 1,0001 \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Подставляя значения из (4.54) в (4.53), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{q}_1 \cdot 1,0000 + \dot{q}_2 \cdot 0,0120 + \dot{q}_3 \cdot 0,0130; \\ \dot{\beta} &= -\dot{q}_1 \cdot 0,0121 + \dot{q}_2 \cdot 0,9998 - \dot{q}_3 \cdot 0,0100; \\ \dot{\gamma} &= \dot{q}_1 \cdot 0,0129 + \dot{q}_2 \cdot 0,0102 + \dot{q}_3 \cdot 1,0001. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Уравнение кинетической энергии T системы (4.50) с учётом полученных значений абсолютных скоростей (4.55), будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2} [0,00042 \cdot (\dot{q}_1 \cdot 1,0030 + \dot{q}_2 \cdot 0,0870 + \dot{q}_3 \cdot 0,1612)^2 + 0,00042 \cdot (-\dot{q}_1 \cdot 0,2103 + \dot{q}_2 \cdot 0,7858 - \dot{q}_3 \cdot 0,4343)^2 + 0,0025 \cdot (\dot{q}_1 \cdot 0,1444 + \dot{q}_2 \cdot 0,4380 + \dot{q}_3 \cdot 0,8112)^2], \quad (4.56)$$

Взяв частные производные $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ ($i = 1,2,3$) от кинетической энергии T (4.56) и продифференцировав их по времени t , получаем следующие выражения:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 2,086 \cdot 10^{-4} \cdot \ddot{q}_1 + 1,377 \cdot 10^{-7} \cdot \ddot{q}_2 + 1,883 \cdot 10^{-5} \cdot \ddot{q}_3; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = 1,377 \cdot 10^{-7} \cdot \ddot{q}_1 + 2,084 \cdot 10^{-4} \cdot \ddot{q}_2 + 1,064 \cdot 10^{-5} \cdot \ddot{q}_3; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = 1,883 \cdot 10^{-5} \cdot \ddot{q}_1 + 1,064 \cdot 10^{-5} \cdot \ddot{q}_2 + 1,250 \cdot 10^{-3} \cdot \ddot{q}_3, \end{cases} \quad (4.57)$$

Подставляя в (4.7) полученные выражения при $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$ (4.57) и $\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}$ (4.51), а также найденные вторые производные от частных решений обобщённых координат (4.13), задавая упругость звеньев $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1000 \text{ Н/м}$, получаем систему уравнений для определения амплитуд A, B, C согласно (4.15). Подставляя полученное значение в (4.16), находим частотный определитель $\Delta(k)^2$:

$$\Delta(k)^2 = \begin{vmatrix} 1000 - 2,086 \cdot 10^{-4} \cdot k^2 & 1,377 \cdot 10^{-7} \cdot k^2 & 1,883 \cdot 10^{-5} \cdot k^2 \\ 1,377 \cdot 10^{-7} \cdot k^2 & 1000 - 2,084 \cdot 10^{-4} \cdot k^2 & 1,064 \cdot 10^{-5} \cdot k^2 \\ 1,883 \cdot 10^{-5} \cdot k^2 & 1,064 \cdot 10^{-5} \cdot k^2 & 1000 - 1,250 \cdot 10^{-3} \cdot k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.58)$$

$$10 \cdot 10^6 - 1667 \cdot k^2 + 5,54 \cdot 10^{-4} \cdot k^4 - 199 \cdot 10^{-11} \cdot k^6 = 0. \quad (4.59)$$

Решение уравнения (4.59) даёт следующие шесть значений собственных круговых частот:

$$k_1 = \pm 894 \text{ рад/сек}; \quad k_2 = \pm 2189 \text{ рад/сек}; \quad k_3 = \pm 2192 \text{ рад/сек}.$$

Период колебаний составляет:

$$\tau = 0,00703 \text{ сек}; \quad \tau_2 = 0,00287 \text{ сек}; \quad \tau_3 = 0,00286 \text{ сек}.$$

Частота колебаний соответствует:

$$\nu_1 = 142,31 \text{ Гц}, \quad \nu_2 = 348,46 \text{ Гц}, \quad \nu_3 = 349,02 \text{ Гц}.$$

Имея значения собственных частот, можно записать три частных линейно независимых решений уравнения (4.59) – главные колебания системы:

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) + A_3 \sin(k_3 t + \alpha_3); \\ q_2 = A_2 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) + A_2 \sin(k_3 t + \alpha_3); \\ q_3 = A_3 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_3 \sin(k_2 t + \alpha_2) + A_3 \sin(k_3 t + \alpha_3), \end{cases} \quad (4.60)$$

Для сферического механизма были определены собственные круговые частоты при положении выходного звена механизма в точке A с координатами $(0,010; 0,013; 0,012)$. Полученные результаты используем в моделировании движения сферического механизма по заданному закону движения.

4.2.2 Моделирование движения сферического механизма

Проведём численное моделирование движения сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свобода на основе принципа Д'Аламбера-Лагранжа, рассмотренного в предыдущих главах [30, 31, 32, 40, 88, 126] и используя полученные выше результаты.

Механизм состоит из трёх кинематических цепей, расположенных в осях x , y , z декартовой системы координат. Входное звено в каждой кинематической цепи соединено с двигателем вращательного перемещения. Выходное звено вращается вокруг осей x , y , z , пересекающихся в точке O . Движение выходного звена (рабочего органа) обеспечивается за счёт управляющего сигнала, подающегося на вход привода в каждой кинематической цепи. Абсолютными (выходными) координатами являются углы поворота выходного звена α , β , γ . Обобщенными (входными) координатами являются углы поворота приводных вращательных шарниров первой, второй и третьей кинематических цепей – φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} , соответственно.

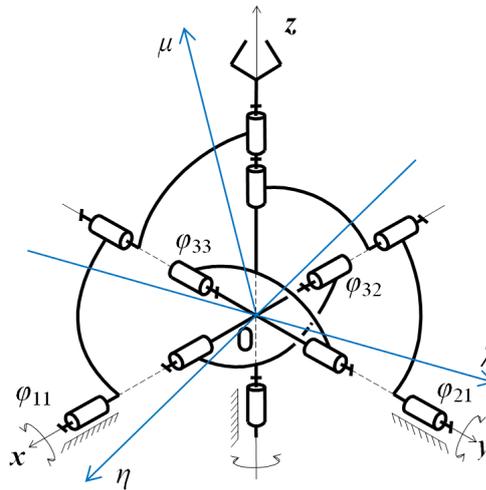


Рисунок 4.18. Расчётная схема сферического манипулятора.

Элементарная работы момента силы M при повороте тела на угол $d\varphi$ равна:

$$\delta A = (\mathbf{M}_i \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}),$$

Уравнение вращательного движения тела в общем виде имеет вид:

$$\sum_i M_i = J_i \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt};$$

Сферическое движение тела (выходного звена) вокруг центра масс представляет собой движение выходного звена по отношению к подвижной системе координат $O\eta\lambda\mu$, и определяется дифференциальными уравнениями движения тела вокруг неподвижной точки в проекциях на главные оси инерции или динамическими уравнениями Эйлера в общем виде:

$$\begin{aligned}
M_\eta &= J_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\lambda \cdot \omega_\mu \cdot (J_\mu - J_\lambda) \\
M_\lambda &= J_\lambda \frac{d\omega_\lambda}{dt} + \omega_\mu \cdot \omega_\eta \cdot (J_\eta - J_\mu), \\
M_\mu &= J_\mu \frac{d\omega_\mu}{dt} + \omega_\eta \cdot \omega_\lambda \cdot (J_\lambda - J_\eta),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

где J_η, J_λ, J_μ – главные моменты инерции тела относительно главных центральных осей инерции η, λ, μ , соответственно; M_η, M_λ, M_μ – проекции главного момента внешних сил, приложенных к телу, относительно осей подвижной системы координат η, λ, μ (в общем случае являются функциями $t, \alpha, \beta, \gamma, \omega_\eta, \omega_\lambda, \omega_\mu$); $\omega_\eta, \omega_\lambda, \omega_\mu$ – проекции вектора угловой скорости выходного звена на оси η, λ, μ ; $\frac{d\omega_i}{dt} = \varepsilon_i$ – проекции углового ускорения выходного звена на подвижные оси ($i = \eta, \lambda, \mu$), т.е. $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$.

Для рассматриваемого сферического механизма в качестве обобщённых координат приняты углы поворота в приводных вращательных шарнирах $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}$ вдоль осей Ox, Oy, Oz , которые однозначно определяют положение выходного звена.

Главный момент всех внешних сил $M_O(M_\eta, M_\lambda, M_\mu)$ системы (выходного звена) относительно центра O будет равен:

$$M_O = -\frac{dK_O}{dt},$$

где K_O – кинетический момент системы относительно центра O : $\dot{K}_O = J_O \dot{\omega} + \omega \times J_O \omega$, где J_O – тензор инерции относительно точки O (центра масс); $\omega (\omega_\eta, \omega_\lambda, \omega_\mu)^T$ – вектор угловой скорости; $\dot{\omega} (\dot{\omega}_\eta, \dot{\omega}_\lambda, \dot{\omega}_\mu)^T$ – вектор углового ускорения (первое слагаемое представляет собой относительную скорость вектора K_O , а второе слагаемое – переносная скорость вектора K_O , обусловленная вращением связанного с телом базиса). Поскольку оси подвижной системы координат совпадают с главными осями инерции, то тензор инерции J_O будет иметь диагональный вид и включать только осевые моменты инерции (J_η, J_λ, J_μ), центробежные (недиагональные) моменты инерции будут равны нулю.

Рассмотрим и составим уравнения равновесия (статики) механизма под действием приложенных к нему сил и моментов, что позволит перейти к уравнениям движения, как к уравнениям кинетостатики.

Используя принцип Д'Аламбера и рассматривая систему (звенья), как находящуюся в равновесии, запишем следующее условие:

$$\sum (M_{vi} + \mathbf{p}_0 \times F_{vi}) + M_{ni} + Q_i = 0, \tag{4.62}$$

где M_{Bi} – главный момент внешних сил, приложенный к i -му звену; M_{ii} – главный момент сил инерции i -го звена ($M_\phi = J_i \cdot \varepsilon_i$ – предполагается, что главный вектор сил инерции приложен к центру масс; Q_r – момент, развиваемый приводом первой кинематической пары; ρ_0 – радиус-вектор центра масс i -го звена относительно центра O неподвижной системы координат, связанной с основанием механизма ($i = 1, 2, 3, r = x, y, z$).

Считая, что все кинематические связи идеальные и силы трения в них отсутствуют, то силы, развиваемые приводом первой кинематической пары первой кинематической цепи можно найти, проецируя уравнение (4.62) на направление её оси, т.е. оси Ox [19]:

$$\sum_{i=1}^n M_{Bi} + \mu_1 = 0, \quad (4.63)$$

где $\mu_1 = x_0^T Q_x$ – сила, развиваемая приводом первой вращательной кинематической пары и удерживающая механизм в равновесии под действием внешних сил; x_0 – заданный единичный вектор-орт.

Управляющие силы μ_i для сферического механизма (рисунок 4.18) найдем через законы движения выходного звена:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= J_x \ddot{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{11}} \delta \varphi_{11} + J_y \ddot{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_{11}} \delta \varphi_{11} + J_z \ddot{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_{11}} \delta \varphi_{11} - M_x \delta \varphi_1, \\ \mu_2 &= J_\eta \ddot{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{21}} \delta \varphi_{21} + J_\lambda \ddot{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_{21}} \delta \varphi_{21} + J_\mu \ddot{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_{21}} \delta \varphi_{21} - M_y \delta \varphi_{21}, \\ \mu_3 &= J_\eta \ddot{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{31}} \delta \varphi_{31} + J_\lambda \ddot{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_{31}} \delta \varphi_{31} + J_\mu \ddot{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_{31}} \delta \varphi_{31} - M_z \delta \varphi_{31}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

где M_x, M_y, M_z – проекции активных моментов (сил) на неподвижные оси координат; $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$ – ускорения выходного звена; $\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{ij}}, \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_{ij}}, \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_{ij}}$ – бесконечно малые приращения обобщенных координат системы ($i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи, $j = 1, 2, 3$ – номер кинематической пары);

Законы движения механизма (выходного звена) во всех точках траектории подчиняются уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}_T + \gamma_1(\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + \gamma_0(\alpha_T - \alpha), \\ \ddot{\beta} &= \ddot{\beta}_T + \gamma_1(\dot{\beta}_T - \dot{\beta}) + \gamma_0(\beta_T - \beta), \\ \ddot{\gamma} &= \ddot{\gamma}_T + \gamma_1(\dot{\gamma}_T - \dot{\gamma}) + \gamma_0(\gamma_T - \gamma), \end{aligned} \quad (4.65)$$

где $\alpha_T, \beta_T, \gamma_T$ – заданный (требуемый) закон движения выходного звена, соответствующий заданному управляющему сигналу q_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\alpha_T(t) = A_1 \sin(k_1 t + \alpha); \quad \beta_T(t) = A_2 \sin(k_2 t + \alpha); \quad \gamma_T(t) = A_3 \sin(k_3 t + \alpha). \quad (4.66)$$

Поскольку механизм расположен в главных осях координат, то имеем только проекции сил, действие которых направлено вдоль соответствующих осей x , y , z , проекции моментов $M_{y1} = M_{z1} = M_{x2} = M_{z2} = M_{x3} = M_{y3} = 0$.

Моменты M_{xi} , M_{yi} , M_{zi} , развиваемые приводом в осях вращательных кинематических пар пропорциональны его жёсткости, и будут иметь вид:

$$\begin{cases} M_{x1} = -c_{11} \cdot q_1; \\ M_{y2} = -c_{22} \cdot q_2; \\ M_{z3} = -c_{33} \cdot q_3. \end{cases}$$

На вход каждого привода подаётся управляющий сигнал $q_i(t)$, Выходом системы являются векторы перемещений и ориентации выходного звена (полезной нагрузки) механизма в рабочем пространстве, связанные с $q_i(t)$ полученными кинематическими соотношениями, которые необходимо определить. Предполагается, что задан алгоритм управления механизмом параллельной структуры, который должен сводить к минимуму рассогласование (ошибку) по ускорению, скорости и положению между заданным законом управления и реальным движением выходного звена [24]. По заданному закону движения вычисляются управляющие силы μ_i . Расчёт по определению перемещений и скоростей выходного звена приведён в приложении 2.

Для определения коэффициентов $\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{ij}}$, $\frac{\partial \beta}{\partial \varphi_{ii}}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_{ij}}$ можно рассмотреть уравнения взаимосвязи между входными и выходными координатами, записанные в виде неявных функций от координат системы $F_i(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{i1}) = 0$ ($i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи), как это было сделано для поступательного механизма. Или же воспользоваться решением задачи о скоростях методом винтов [10, 15].

Для решения данной задачи необходимо определить силовые и кинематические винты [15]. Силовой винт \mathbf{R}_i с координатами $(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_{ij}^\circ, \mathbf{r}_{ij}^\circ, \mathbf{r}_{ij}^\circ)$ взаимен двум ортам осей \mathbf{e}_{i2} и \mathbf{e}_{i3} не приводных пар (где $i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи, j – оси координат в неподвижной системе координат Ox, Oy, Oz), где $\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_{ij}$ – проекции векторной части винта, $\mathbf{r}_{ij}^\circ, \mathbf{r}_{ij}^\circ, \mathbf{r}_{ij}^\circ$ – проекции моментной части винта. Винт \mathbf{R}_i уравновешен совокупностью винтов, т.е. реакциями в парах, соответствующих ортам \mathbf{e}_{i2} и \mathbf{e}_{i3} . Из плюккеровых координат найденных силовых винтов \mathbf{R}_i можно составить матрицу, описывающую ограничения перемещения (вращения) выходного звена:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1x} & \mathbf{r}_{1y} & \mathbf{r}_{1z} & \mathbf{r}_{1x}^\circ & \mathbf{r}_{1y}^\circ & \mathbf{r}_{1z}^\circ \\ \mathbf{r}_{2x} & \mathbf{r}_{2y} & \mathbf{r}_{2z} & \mathbf{r}_{2x}^\circ & \mathbf{r}_{2y}^\circ & \mathbf{r}_{2z}^\circ \\ \mathbf{r}_{3x} & \mathbf{r}_{3y} & \mathbf{r}_{3z} & \mathbf{r}_{3x}^\circ & \mathbf{r}_{3y}^\circ & \mathbf{r}_{3z}^\circ \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

Кинематический винт \mathbf{U}_i характеризует перемещение тела, и имеет координаты $(\mathbf{u}_{ijx}, \mathbf{u}_{ijy}, \mathbf{u}_{ijz}, \mathbf{u}_{ijx}^\circ, \mathbf{u}_{ijy}^\circ, \mathbf{u}_{ijz}^\circ)$, где $\mathbf{u}_{ijx}, \mathbf{u}_{ijy}, \mathbf{u}_{ijz}$ – проекции векторной части винта, $\mathbf{u}_{ijx}^\circ, \mathbf{u}_{ijy}^\circ, \mathbf{u}_{ijz}^\circ$ – проекции моментной части винта ($i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи, $j = 1, 2, 3$ – номер соответствующей кинематической пары). Кинематический винт \mathbf{U}_i равен сумме кинематических винтов звеньев цепи $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{i1} + \mathbf{U}_{i2} + \mathbf{U}_{i3}$, где $\mathbf{U}_{i1}, \mathbf{U}_{i2}, \mathbf{U}_{i3}$ – кинематические винты в первой, второй и третьей парах i -го звена.

Группу кинематических винтов для каждой кинематической цепи можно представить в виде матрицы, в которой построчно записываются плюккеровы координаты винта. Число строк матрицы зависит от числа кинематических пар в отдельно взятой кинематической цепи. Для рассматриваемого сферического механизма можно составить три таких матрицы, состоящих из трёх строк:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{i1x} & \mathbf{u}_{i1y} & \mathbf{u}_{i1z} & \mathbf{u}_{i1x}^\circ & \mathbf{u}_{i1y}^\circ & \mathbf{u}_{i1z}^\circ \\ \mathbf{u}_{i2x} & \mathbf{u}_{i2y} & \mathbf{u}_{i2z} & \mathbf{u}_{i2x}^\circ & \mathbf{u}_{i2y}^\circ & \mathbf{u}_{i2z}^\circ \\ \mathbf{u}_{i3x} & \mathbf{u}_{i3y} & \mathbf{u}_{i3z} & \mathbf{u}_{i3x}^\circ & \mathbf{u}_{i3y}^\circ & \mathbf{u}_{i3z}^\circ \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Моментная часть скалярного произведения двух винтов есть сумма скалярных произведений вектора первого винта на момент второго относительно некоторой точки и произведение вектора второго винта на момент первого относительно той же точки, и называется относительным моментом. Поскольку силовой винт \mathbf{R}_i взаимен с кинематическими винтами $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$, то их относительный момент равен нулю [15, 30, 40, 88]:

$$\text{mom}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_{i1}) = \text{mom}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_{i2}) = \text{mom}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_{i3}) = 0 \rightarrow \text{mom}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_i) = \text{mom}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_{i1})$$

Для того чтобы решить задачу о скоростях методом винтов, необходимо рассмотреть следующее условие для каждой кинематической цепи:

$$\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_{ij} \cdot \dot{q}_i = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{R}_i, \quad (4.69)$$

где $\mathbf{\Omega}(\omega_\eta, \omega_\lambda, \omega_\mu, V_\eta, V_\lambda, V_\mu)$ – плюккеровы координаты винта, характеризующие угловые и линейные скорости выходного звена вдоль осей координат (в рассматриваемом механизме поступательное перемещение отсутствует, следовательно, $V_\eta = V_\lambda = V_\mu = 0$); \dot{q}_i – угловая скорость, сообщаемая приводной вращательной паре кинематической цепи ($i = 1, 2, 3$ – номер кинематической пары).

Уравнение (4.69) для рассматриваемого сферического механизма примет вид:

$$\begin{aligned} \omega_{11} \cdot (\mathbf{u}_{1x}\mathbf{r}_{1x}^\circ + \mathbf{u}_{1y}\mathbf{r}_{1y}^\circ + \mathbf{u}_{1z}\mathbf{r}_{1z}^\circ) &= \omega_\eta\mathbf{r}_{1\eta}^\circ + \omega_\lambda\mathbf{r}_{1\lambda}^\circ + \omega_\mu\mathbf{r}_{1\mu}^\circ, \\ \omega_{21} \cdot (\mathbf{u}_{2x}\mathbf{r}_{2x}^\circ + \mathbf{u}_{2y}\mathbf{r}_{2y}^\circ + \mathbf{u}_{2z}\mathbf{r}_{2z}^\circ) &= \omega_\eta\mathbf{r}_{2\eta}^\circ + \omega_\lambda\mathbf{r}_{2\lambda}^\circ + \omega_\mu\mathbf{r}_{2\mu}^\circ, \\ \omega_{31} \cdot (\mathbf{u}_{3x}\mathbf{r}_{3x}^\circ + \mathbf{u}_{3y}\mathbf{r}_{3y}^\circ + \mathbf{u}_{3z}\mathbf{r}_{3z}^\circ) &= \omega_\eta\mathbf{r}_{3\eta}^\circ + \omega_\lambda\mathbf{r}_{3\lambda}^\circ + \omega_\mu\mathbf{r}_{3\mu}^\circ, \end{aligned} \quad (4.70)$$

где левая часть выражения отвечает за плюккеровы координаты силовых и кинематических винтов в приводных вращательных шарнирах, правая часть – отвечает за плюккеровы координаты силовых и кинематических винтов выходного звена.

Решение обратной задачи о скоростях находится из системы (4.70), относительно координат $\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31}$, решение прямой задачи – относительно координат $\omega_\eta, \omega_\lambda, \omega_\mu$.

Для определения плюккеровых координат силовых винтов \mathbf{R}_j выходного звена с координатами $(\mathbf{r}_{i\eta}, \mathbf{r}_{i\lambda}, \mathbf{r}_{i\mu}, \mathbf{r}_{i\eta}^\circ, \mathbf{r}_{i\lambda}^\circ, \mathbf{r}_{i\mu}^\circ)$ в подвижной системе координат $O\eta\lambda\beta$ запишем координаты единичных векторов \mathbf{e}_{i2} и \mathbf{e}_{i3} в неподвижной системе (где $\mathbf{r}_{i\eta}, \mathbf{r}_{i\lambda}, \mathbf{r}_{i\mu}$ – проекции векторной части силового винта, $\mathbf{r}_{i\eta}^\circ, \mathbf{r}_{i\lambda}^\circ, \mathbf{r}_{i\mu}^\circ$ – проекции моментной части винта; $i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи).

Координаты единичных векторов второй (\mathbf{e}_{12}) и третьей (\mathbf{e}_{13}) кинематических пар первой кинематической цепи, соответственно, $\mathbf{e}_{12}(x_{12}, y_{12}, z_{12})$ и $\mathbf{e}_{13}(x_{13}, y_{13}, z_{13})$, в неподвижной системе координат имеют следующие значения:

(x_{12}, y_{12}, z_{12}) – координаты единичного вектора второй кинематической пары, равные произведению матрицы, описывающей поворот входного звена вокруг оси Ox , на координаты второй пары в начальном положении:

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \varphi_{11} \\ -\sin \varphi_{11} \end{pmatrix};$$

(x_{13}, y_{13}, z_{13}) – координаты единичного вектора оси третьей кинематической пары, равные произведению матрицы A на координаты третьей пары в начальном положении:

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{pmatrix},$$

где A – матрица поворота, описывающая переход выходного звена из подвижной системы координат в неподвижную (глава 3).

Координаты единичных векторов второй (\mathbf{e}_{22}) и третьей (\mathbf{e}_{23}) кинематических пар второй кинематической цепи, соответственно, $\mathbf{e}_{22}(x_{22}, y_{22}, z_{22})$ и $\mathbf{e}_{23}(x_{23}, y_{23}, z_{23})$, в неподвижной системе координат равны:

$$\begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_{21} \\ 0 \\ \sin \varphi_{21} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{23} \\ y_{23} \\ z_{23} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Координаты единичных векторов второй (\mathbf{e}_{32}) и третьей (\mathbf{e}_{33}) кинематических пар третьей кинематической цепи, соответственно, $\mathbf{e}_{32}(x_{32}, y_{32}, z_{32})$ и $\mathbf{e}_{33}(x_{33}, y_{33}, z_{33})$, в неподвижной системе координат равны:

$$\begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} & 0 \\ \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} \\ \sin \varphi_{31} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{33} \\ y_{33} \\ z_{33} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \\ \cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Координаты единичных векторов $\mathbf{e}_{i\eta}$, $\mathbf{e}_{i\lambda}$, $\mathbf{e}_{i\mu}$ ($i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи; $j = 1, 2, 3$ – номер кинематической пары) вторых кинематических пар первой, второй и третьей кинематических цепей в подвижной системе координат определяются матрицей A^{-1} , обратной матрице A :

$$\begin{pmatrix} e_{\eta 12} \\ e_{\lambda 12} \\ e_{\mu 12} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \beta \cdot \sin \varphi_{11} - \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{11} \\ -\cos \varphi_{11} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{11} - \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{11} \\ \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{11} - \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi_{11} - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi_{11} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e_{\eta 22} \\ e_{\lambda 22} \\ e_{\mu 22} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \beta \cdot \sin \varphi_{21} - \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{21} \\ \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_{21} + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{21} - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{21} \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi_{21} - \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{21} - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi_{21} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e_{\eta 32} \\ e_{\lambda 32} \\ e_{\mu 32} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\gamma - \varphi_{31}) \cdot \cos \beta \\ \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi_{31} - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_{31} + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{31} + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{31} \\ \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{31} - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{31} + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi_{31} + \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \varphi_{31} \end{pmatrix}.$$

Координаты единичных векторов третьих кинематических пар первой, второй и третьей кинематических цепей в подвижной системе координат определяются координатами единичного вектора оси третьей пары в её начальном положении:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\eta 13} \\ \mathbf{e}_{\lambda 13} \\ \mathbf{e}_{\mu 13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\eta 23} \\ \mathbf{e}_{\lambda 23} \\ \mathbf{e}_{\mu 23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\eta 33} \\ \mathbf{e}_{\lambda 33} \\ \mathbf{e}_{\mu 33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Координаты моментной части силового винта $\mathbf{r}_1^{\circ}(\mathbf{r}_{1\eta}^{\circ}, \mathbf{r}_{1\lambda}^{\circ}, \mathbf{r}_{1\mu}^{\circ})$ первой кинематической цепи можно рассчитать как:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^\circ &= \mathbf{e}_{12} \cdot \mathbf{e}_{13} = \begin{bmatrix} \eta & \lambda & \lambda \\ \mathbf{e}_{\eta 12} & \mathbf{e}_{\lambda 12} & \mathbf{e}_{\mu 12} \\ \mathbf{e}_{\eta 13} & \mathbf{e}_{\lambda 13} & \mathbf{e}_{\mu 13} \end{bmatrix} = \\ &= \eta \cdot (\mathbf{e}_{\lambda 12} \mathbf{e}_{\mu 13} - \mathbf{e}_{\mu 12} \mathbf{e}_{\lambda 13}) - \lambda \cdot (\mathbf{e}_{\eta 12} \mathbf{e}_{\mu 13} - \mathbf{e}_{\mu 12} \mathbf{e}_{\eta 13}) + \mu \cdot (\mathbf{e}_{\eta 12} \mathbf{e}_{\lambda 13} - \mathbf{e}_{\lambda 12} \mathbf{e}_{\eta 13}); \\ \mathbf{r}_{2\eta}^\circ &= -(\cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_{11} + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{11} + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{11}); \\ \mathbf{r}_{1\lambda}^\circ &= -(\sin \beta \cdot \sin \varphi_{11} - \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{11}); \quad \mathbf{r}_{1\mu}^\circ = 0. \end{aligned}$$

Координаты моментных частей $(\mathbf{r}_{2\eta}^\circ, \mathbf{r}_{2\lambda}^\circ, \mathbf{r}_{2\mu}^\circ)$ и $(\mathbf{r}_{3\eta}^\circ, \mathbf{r}_{3\lambda}^\circ, \mathbf{r}_{3\mu}^\circ)$ силовых винтов \mathbf{r}_2° и \mathbf{r}_3° второй и третьей кинематических цепей, соответственно, рассчитаем как:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2^\circ &= \mathbf{e}_{22} \cdot \mathbf{e}_{23} = \begin{bmatrix} \eta & \lambda & \lambda \\ \mathbf{e}_{\eta 22} & \mathbf{e}_{\lambda 22} & \mathbf{e}_{\mu 22} \\ \mathbf{e}_{\eta 23} & \mathbf{e}_{\lambda 23} & \mathbf{e}_{\mu 23} \end{bmatrix} = \\ &= \eta \cdot (\mathbf{e}_{\lambda 22} \mathbf{e}_{\mu 23} - \mathbf{e}_{\mu 22} \mathbf{e}_{\lambda 23}) - \lambda \cdot (\mathbf{e}_{\eta 22} \mathbf{e}_{\mu 23} - \mathbf{e}_{\mu 22} \mathbf{e}_{\eta 23}) + \mu \cdot (\mathbf{e}_{\eta 22} \mathbf{e}_{\lambda 23} - \mathbf{e}_{\lambda 22} \mathbf{e}_{\eta 23}); \\ \mathbf{r}_{2\eta}^\circ &= \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_{21} + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{21} - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{21}; \\ \mathbf{r}_{2\lambda}^\circ &= \sin \beta \cdot \sin \varphi_{21} + \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{21}; \quad \mathbf{r}_{2\mu}^\circ = 0. \\ \mathbf{r}_3^\circ &= \mathbf{e}_{32} \cdot \mathbf{e}_{33} = \begin{bmatrix} \eta & \lambda & \lambda \\ \mathbf{e}_{\eta 32} & \mathbf{e}_{\lambda 32} & \mathbf{e}_{\mu 32} \\ \mathbf{e}_{\eta 33} & \mathbf{e}_{\lambda 33} & \mathbf{e}_{\mu 33} \end{bmatrix} = \\ &= \eta \cdot (\mathbf{e}_{\lambda 32} \mathbf{e}_{\mu 33} - \mathbf{e}_{\mu 32} \mathbf{e}_{\lambda 33}) - \lambda \cdot (\mathbf{e}_{\eta 32} \mathbf{e}_{\mu 33} - \mathbf{e}_{\mu 32} \mathbf{e}_{\eta 33}) + \mu \cdot (\mathbf{e}_{\eta 32} \mathbf{e}_{\lambda 33} - \mathbf{e}_{\lambda 32} \mathbf{e}_{\eta 33}); \\ \mathbf{r}_{3\eta}^\circ &= -\sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{31} + \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{31} - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \\ &\quad \cdot \cos \varphi_{31} - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \varphi_{31}; \\ \mathbf{r}_{3\lambda}^\circ &= -(\cos(\gamma - \varphi_{31}) \cdot \cos \beta); \quad \mathbf{r}_{3\mu}^\circ = \cos(\gamma - \varphi_{31}) \cdot \cos \beta. \end{aligned}$$

Моментная часть плюккеровых координат силовых винтов в подвижной системе координат равна:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_{1\eta}^0 \\ r_{1\lambda}^0 \\ r_{1\mu}^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_{11} - \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{11} - \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{11} \\ -\sin \beta \cdot \sin \varphi_{11} + \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{11} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} r_{2\eta}^0 \\ r_{2\lambda}^0 \\ r_{2\mu}^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_{21} + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{21} - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{21} \\ \sin \beta \cdot \sin \varphi_{21} + \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{21} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} r_{3\eta}^0 \\ r_{3\lambda}^0 \\ r_{3\mu}^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{31} + \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{31} - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi_{31} - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \varphi_{31} \\ -(\cos(\gamma - \varphi_{31}) \cdot \cos \beta) \\ \cos(\gamma - \varphi_{31}) \cdot \cos \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Моментные части плюккеровых координат $(\mathbf{r}_{1x}^\circ, \mathbf{r}_{1y}^\circ, \mathbf{r}_{1z}^\circ)$, $(\mathbf{r}_{2x}^\circ, \mathbf{r}_{2y}^\circ, \mathbf{r}_{2z}^\circ)$ и $(\mathbf{r}_{3x}^\circ, \mathbf{r}_{3y}^\circ, \mathbf{r}_{3z}^\circ)$ силовых винтов в \mathbf{r}_1° , \mathbf{r}_2° , \mathbf{r}_3° , соответственно, в неподвижной системе координат равны

произведению матриц перехода входного звена B' , B'' , B''' на координаты единичных векторов кинематических пар соответствующих кинематических цепей, сопряженных с выходным звеном механизма (глава 3) [30, 87, 88]:

$$\begin{pmatrix} r_{1x}^0 \\ r_{1y}^0 \\ r_{1z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{12} \\ -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11} \\ \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{12} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} r_{2x}^0 \\ r_{2y}^0 \\ r_{2z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21} \\ -\sin \varphi_{22} \\ \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{22} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} r_{3x}^0 \\ r_{3y}^0 \\ r_{3z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} \\ \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} \\ -\sin \varphi_{32} \end{pmatrix}.$$

Промежуточные углы $\sin \varphi_{12}$, $\sin \varphi_{22}$, $\sin \varphi_{32}$ находятся из уравнения связи входных и выходных координат (глава 3) и равны:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{12} &= \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta; \\ \sin \varphi_{22} &= \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha; \\ \sin \varphi_{32} &= \cos \beta \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Переменные коэффициенты $\frac{d\omega_\eta}{dt}$, $\frac{d\omega_\lambda}{dt}$, $\frac{d\omega_\mu}{dt}$ из уравнения (4.61) есть проекции углового ускорения на оси в подвижной системе координат $\varepsilon_\eta = \frac{d\omega_\eta}{dt}$, $\varepsilon_\lambda = \frac{d\omega_\lambda}{dt}$, $\varepsilon_\mu = \frac{d\omega_\mu}{dt}$, и равны производным по времени t от проекций угловых скоростей на эти же оси. Поскольку сферическое движение тела в каждый момент времени может рассматриваться как вращение вокруг мгновенной оси, проходящую через неподвижную точку O , тогда общий вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (вращение) можно разложить на три составляющих вокруг осей, проходящих через эту же точку O ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}_1\omega_\eta + \mathbf{j}_1\omega_\lambda + \mathbf{k}_1\omega_\mu$) [57].

Разложим вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ выходного звена на подвижные оси координат $O\eta\lambda\mu$ и обозначим его проекции на эти оси как ω_η , ω_λ , ω_μ . Для нахождения проекций угловых скоростей ω_η , ω_λ , ω_μ , запишем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \omega_\eta = \dot{\alpha} \cdot \alpha_\eta + \dot{\beta} \cdot \beta_\eta + \dot{\gamma} \cdot \gamma_\eta, \\ \omega_\lambda = \dot{\alpha} \cdot \alpha_\lambda + \dot{\beta} \cdot \beta_\lambda + \dot{\gamma} \cdot \gamma_\lambda, \\ \omega_\mu = \dot{\alpha} \cdot \alpha_\mu + \dot{\beta} \cdot \beta_\mu + \dot{\gamma} \cdot \gamma_\mu. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \omega_\eta \\ \omega_\lambda \\ \omega_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_\eta & \beta_\eta & \gamma_\eta \\ \alpha_\lambda & \beta_\lambda & \gamma_\lambda \\ \alpha_\mu & \beta_\mu & \gamma_\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (4.72)$$

где $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ – скорости изменения углов ориентации выходного звена на подвижные оси $O\eta\lambda\mu$.

Выходное звено в подвижной системе координат имеет следующие координаты единичных векторов [30, 40, 88]:

$$\begin{pmatrix} \gamma_\eta \\ \gamma_\lambda \\ \gamma_\mu \end{pmatrix} - \text{координаты единичного вектора первой кинематической пары третьей}$$

кинематической цепи, соответствующие угловой скорости $\dot{\gamma}$ на оси в подвижной системе

$$\text{координат } O\eta\lambda\mu: \begin{pmatrix} \gamma_\eta \\ \gamma_\lambda \\ \gamma_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\begin{pmatrix} \beta_\eta \\ \beta_\lambda \\ \beta_\mu \end{pmatrix}$ – координаты единичного вектора кинематической пары, соответствующие угловой

скорости $\dot{\beta}$ на оси в подвижной системе координат $O\eta\lambda\mu$, равные произведению матрицы поворота вокруг оси $O\mu$ на координаты кинематической пары в начальном положении вокруг

оси Oy):
$$\begin{pmatrix} \beta_\eta \\ \beta_\lambda \\ \beta_\mu \end{pmatrix} = A_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix};$$

$\begin{pmatrix} \alpha_\eta \\ \alpha_\lambda \\ \alpha_\mu \end{pmatrix}$ – координаты кинематической пары, соответствующие угловой скорости $\dot{\alpha}$, равные

произведению матриц поворота выходного звена на координаты кинематической пары в

начальном положении вокруг оси Ox :
$$\begin{pmatrix} \alpha_\eta \\ \alpha_\lambda \\ \alpha_\mu \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cdot \cos \gamma \\ \cos \beta \cdot \sin \gamma \\ -\sin \beta \end{pmatrix}.$$

Подставим найденные значения в систему уравнений (4.72):

$$\begin{aligned} \omega_\eta &= \dot{\alpha}(\cos \beta \cdot \sin \gamma) + \dot{\beta}(-\sin \gamma) + \dot{\gamma} \cdot 0, \\ \omega_\lambda &= \dot{\alpha}(\cos \beta \cdot \sin \gamma) + \dot{\beta} \cos \gamma + \dot{\gamma} \cdot 0, \\ \omega_\mu &= \dot{\alpha}(-\sin \beta) + \dot{\beta} \cdot 0 + \dot{\gamma} \cdot 1. \end{aligned}$$

Выразим скорости $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ через проекции скоростей выходного звена на подвижные оси координат ω_η , ω_λ , ω_μ :

$$\begin{pmatrix} \omega_\eta \\ \omega_\lambda \\ \omega_\mu \end{pmatrix} = AA \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = AA^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \omega_\eta \\ \omega_\lambda \\ \omega_\mu \end{pmatrix},$$

где $AA = \begin{pmatrix} \cos \beta \cdot \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \cos \beta \cdot \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$, и получаем значение скоростей $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{\omega_\eta \cdot \cos \gamma + \omega_\lambda \cdot \sin \gamma}{\cos \beta}; \\ \dot{\beta} &= \omega_\lambda \cdot \cos \gamma - \omega_\eta \cdot \sin \gamma; \\ \dot{\gamma} &= \tan \beta (\omega_\eta \cdot \cos \gamma + \omega_\lambda \cdot \sin \gamma) + \omega_\mu. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Бесконечно малые приращения обобщенных координат системы $\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{i1}}$; $\frac{\partial \beta}{\partial \varphi_{i1}}$; $\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_{i1}}$ можно записать в виде:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{i1}} = -\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_{i1}} / \frac{\partial F_i}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_{i1}} = -\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_{i1}} / \frac{\partial F_i}{\partial \beta}; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_{i1}} = -\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_{i1}} / \frac{\partial F_i}{\partial \gamma}; \tag{4.74}$$

Если учесть тот факт, что $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \rightarrow \omega_\eta$; $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} \rightarrow \omega_\lambda$; $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} \rightarrow \omega_\mu$; $\dot{\varphi}_{11} = \frac{d\varphi_{11}}{dt} \rightarrow \omega_{11}$; $\dot{\varphi}_{21} = \frac{d\varphi_{21}}{dt} \rightarrow \omega_{21}$; $\dot{\varphi}_{31} = \frac{d\varphi_{31}}{dt} \rightarrow \omega_{31}$, тогда отношение углов ориентации выходного звена от

углов поворотов приводных вращательных шарниров (уравнение (4.64)) можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{11}} = \frac{\omega_\eta}{\omega_{11}} = \frac{\mathbf{r}_{1\eta}^\circ}{\mathbf{r}_{1x}^\circ}; \quad \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_{11}} = \frac{\omega_\lambda}{\omega_{11}} = \frac{\mathbf{r}_{1\lambda}^\circ}{\mathbf{r}_{1y}^\circ}; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_{11}} = \frac{\omega_\mu}{\omega_{11}} = \frac{\mathbf{r}_{1\mu}^\circ}{\mathbf{r}_{1x}^\circ}; \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_{31}} = \frac{\omega_\eta}{\omega_{31}} = \frac{\mathbf{r}_{3\eta}^\circ}{\mathbf{r}_{3x}^\circ}; \quad \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_{31}} = \frac{\omega_\lambda}{\omega_{31}} = \frac{\mathbf{r}_{3\lambda}^\circ}{\mathbf{r}_{3y}^\circ}; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_{31}} = \frac{\omega_\mu}{\omega_{31}} = \frac{\mathbf{r}_{3\mu}^\circ}{\mathbf{r}_{3x}^\circ}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Соотношения (4.75) подставляем в общее уравнение динамики (4.64) и находим действующие силы в приводах.

Дифференцирую второй раз по t уравнения скоростей (4.73), найдем значения ускорений выходного звена в подвижной системе координат:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \frac{(-\dot{\gamma} \cdot \sin \gamma \cdot \omega_\eta + \dot{\gamma} \cdot \cos \gamma \cdot \omega_\lambda)}{\cos \beta} + \frac{(\cos \gamma \cdot \omega_\eta + \sin \gamma \cdot \omega_\lambda)}{\cos^2 \beta}; \\ \ddot{\beta} &= -\dot{\gamma} \cdot \sin \gamma \cdot \omega_\lambda - \dot{\gamma} \cdot \cos \gamma \cdot \omega_\eta; \\ \dot{\gamma} &= \dot{\beta}(1 + \tan^2 \beta)(\cos \gamma \cdot \omega_\eta + \sin \gamma \cdot \omega_\lambda) + \tan \beta (-\dot{\gamma} \cdot \sin \gamma \cdot \omega_\eta + \dot{\gamma} \cdot \cos \gamma \cdot \omega_\lambda). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Для реализации движения выходного звена по назначенной траектории используем полученные соотношения (4.76), с помощью которых определяем необходимые силы и моменты.

Считаем, что внешние моменты и силы отсутствуют, необходимо определить усилия в приводах, которые бы обеспечивали отработку заданного закона управления. Заданный закон движения соответствует движению колебательного звена, при котором обеспечивается устойчивость и сведение к минимуму рассогласования (ошибки) по положению, скорости и ускорению между заданным законом движения и реальным движением системы, соответственно [19, 24,43, 50, 76]. Для получения обобщающих результатов задавались различные начальные условия движения исполнительного (выходного) звена рассматриваемого сферического механизма, различные коэффициенты обратных связей γ_0, γ_1 , а также различные круговые частоты k_i закона движения по траектории [40].

Зададим следующие начальные условия:

6. Положение механизма в начальном положении: $\alpha(0) = 0, \beta(0) = 0, \gamma(0) = 0$.
7. Собственные круговые частоты: $k_1 = 894 \text{ рад/сек}; k_2 = 2189 \text{ рад/сек}; k_3 = 2192 \text{ рад/сек}$.
8. Постоянные времени τ_i , характеризующую длительность протекания переходного процесса, $\tau_i = 2\pi/k_i \text{ сек}$.
9. Время переходного процесса t_i зависит от постоянной времени τ_i и коэффициента затухания собственных колебаний ζ предпочтительного режима для автоматических систем, и составляет $t_i \approx 3\tau_i/\zeta$.

10. Коэффициент затухания собственных колебаний ζ предпочтительного режима для автоматических систем составляет $\zeta = \gamma_{1i}/2\sqrt{\gamma_{0i}}$.

11. Коэффициенты обратных связей также зависят от выбранной постоянной времени τ_i , $\gamma_{0i} = 1/\tau_i^2$, $\gamma_{1i} = \sqrt{2}/\tau_i$.

12. Масса выходного звена равна $m_b = 0,5$ кг, длина звеньев равна длине звеньев $l = 0,1$ м, длина звена до рабочего инструмента $l_b = 0,115$ м, радиус однородного стержня $R = 0,005$ м.

Дифференциальные уравнения ошибки принимают вид [31]:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}_T + 201,3 \cdot (\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + 20253 \cdot (\alpha_T - \alpha), \\ \ddot{\beta} &= \ddot{\beta}_T + 492,8 \cdot (\dot{\beta}_T - \dot{\beta}) + 121426 \cdot (\beta_T - \beta), \\ \ddot{\gamma} &= \ddot{\gamma}_T + 493,6 \cdot (\dot{\gamma}_T - \dot{\gamma}) + 121814 \cdot (\gamma_T - \gamma),\end{aligned}$$

а) При принятых начальных условиях в результате расчёта были получены графики изменения ошибок по различным координатам (рисунок 4.19). Для наглядности на рисунке 4.20 представлены графики требуемого закона движения $\alpha_T(t)$, фактического закона $\alpha(t)$ и абсолютной ошибки $\Delta\alpha(t)$, где $\Delta\alpha(t) = \alpha_T(t) - \alpha(t)$.

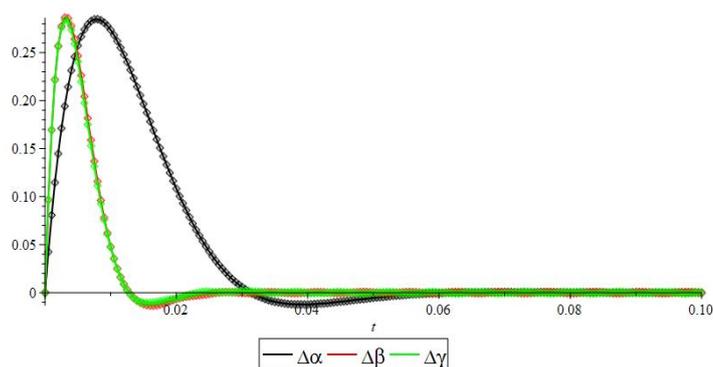


Рисунок 4.19. График изменения ошибки по координате.

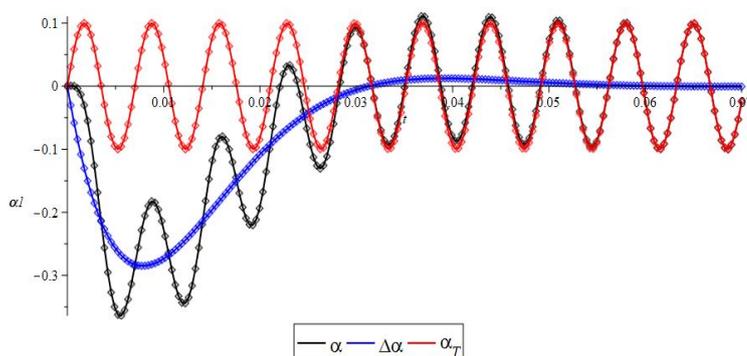


Рисунок 4.20. График рассогласования (ошибки) $\Delta(t)$ по положению между задаваемой траекторией движения $\alpha_T(t)$ и фактической траекторией $\alpha(t)$ при управлении механизмом с обратной связью.

Анализируя графики на рисунках 4.19 – 4.24 можно заключить, что при принятых начальных условиях и приложении к динамической системе внешнего воздействия в виде синусоиды

система принимает установившиеся значения в пределах установленного переходного процесса. Ошибка по рассогласованию заданного и фактического движения выходного звена в дальнейшем стремится к нулю [31].

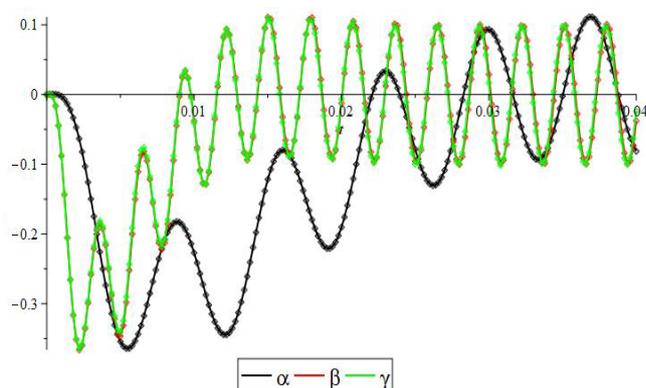


Рисунок 4.21. График движения выходного звена.

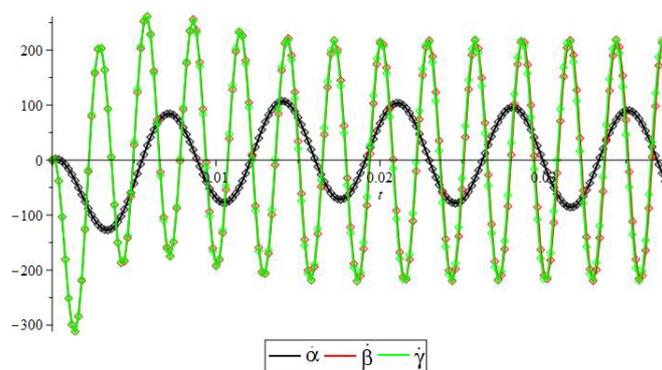


Рисунок 4.22. График скоростей выходного звена.

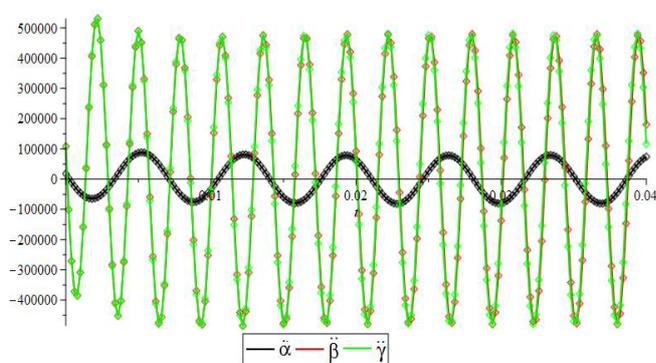


Рисунок 4.23. График ускорений выходного звена.

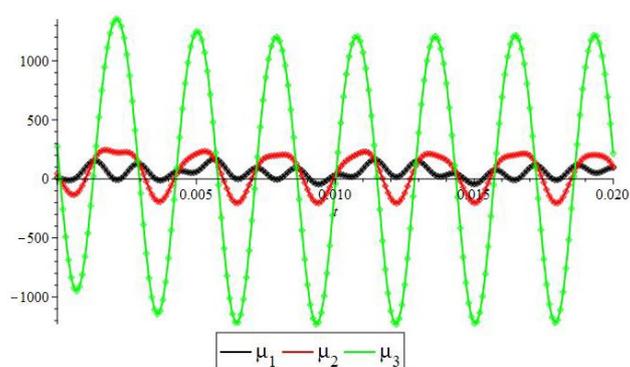


Рисунок 4.24. График управляющих сил μ_i

б) Рассмотрим случай при следующих начальных условиях: $\alpha(0) = 0,25$, $\beta(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$. Значение собственных круговых частот и коэффициенты обратных связей остаются неизменными. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.25 и 4.26 [33].

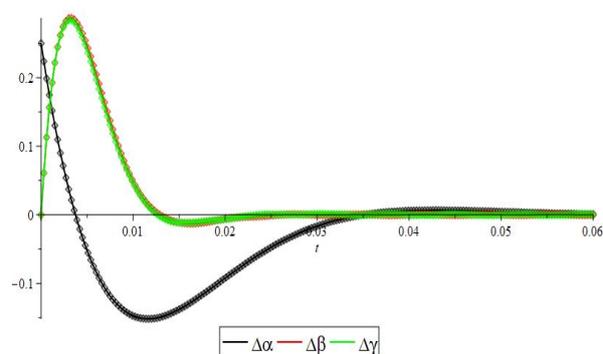


Рисунок 4.25. График изменения ошибки по координате.

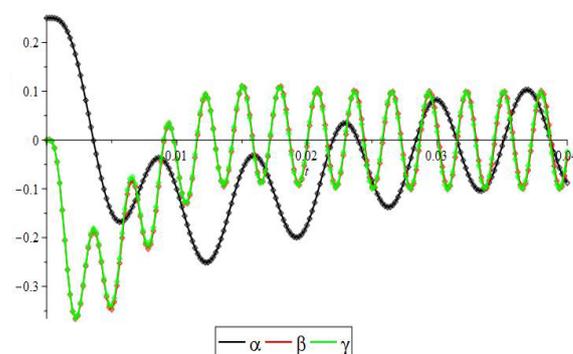


Рисунок 4.26. График движения выходного звена.

Анализ графиков на рисунках 4.25 и 4.26 показывает, что при принятых начальных условиях, не соответствующих предписанному закону, ошибка по положению для координаты α

уменьшилась по сравнению с первым случаем, для координат β и γ ошибка не изменилась. В дальнейшем процесс стабилизировался.

с) Рассмотрим случай, когда в 10 раз уменьшена собственная частота колебаний: $k_1 = 89,4 \text{ рад/сек}$; $k_2 = 218,9 \text{ рад/сек}$; $k_3 = 219,2 \text{ рад/сек}$ при неизменных начальных условиях: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.27 – 4.29 [33].

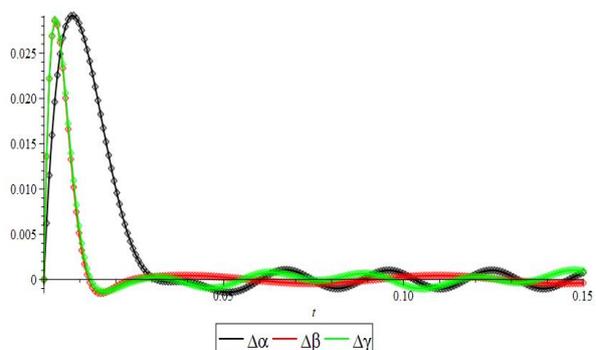


Рисунок 4.27. График изменения ошибки по координате.

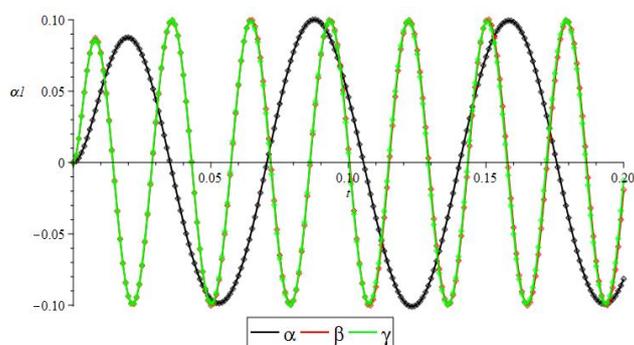


Рисунок 4.28. График движения выходного звена.

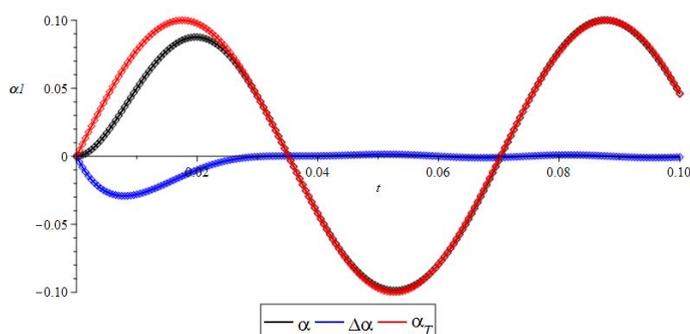


Рисунок 4.29. График рассогласования (ошибки) $\Delta(t)$ по положению между задаваемой траекторией движения $\alpha_T(t)$ и фактической траекторией $\alpha(t)$ при управлении механизмом с обратной связью.

Анализ графиков на рисунках 4.27 – 4.29 показывает, что при уменьшении круговой частоты увеличилось рассогласование (ошибка) по положению между заданным и фактическим движением выходного звена.

d) Рассмотрим случай, когда в 10 раз уменьшены коэффициенты обратных связей γ_{0i} , γ_{1i} ($\gamma_{01} = 20,13$, $\gamma_{11} = 202,53$; $\gamma_{02} = 49,28$, $\gamma_{12} = 1214,26$; $\gamma_{03} = 49,36$, $\gamma_{13} = 1218,14$) при начальных условиях: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, и значениях круговых частот $k_1 = 894 \text{ рад/сек}$; $k_2 = 2189 \text{ рад/сек}$; $k_3 = 2192 \text{ рад/сек}$. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.30 – 4.32 [31, 33, 88].

Анализ графиков на рисунках 4.30 – 4.32 показывает, что при уменьшении коэффициентов обратных связей γ_{0i} , γ_{1i} ошибка по положению значительно увеличивается. В дальнейшем процесс стабилизируется, и ошибка в движении стремится к нулю [31, 33, 88].

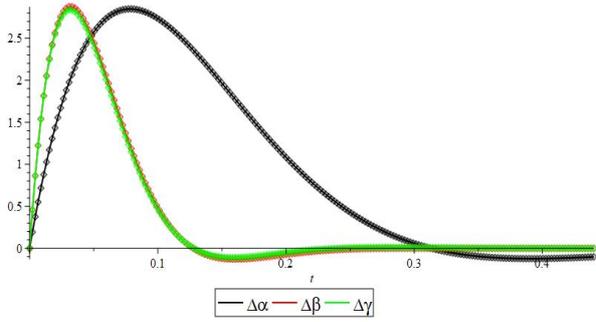


Рисунок 4.30. График изменения ошибки по координате.

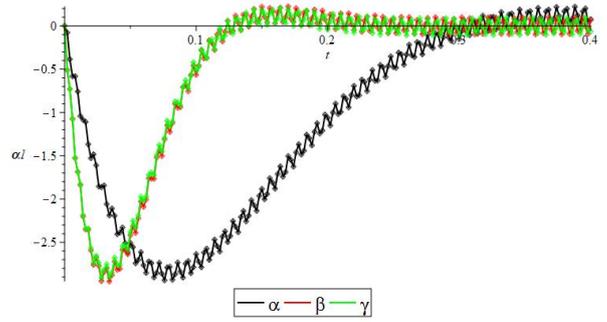


Рисунок 4.1. График движения выходного звена.

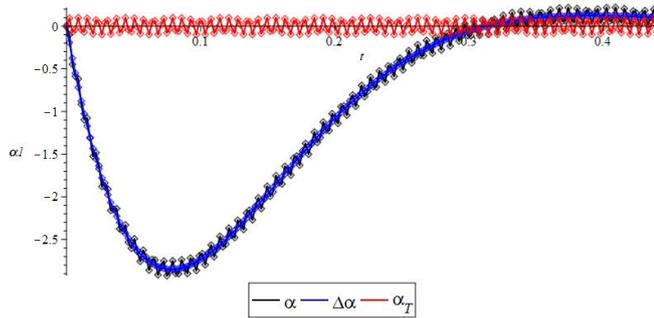


Рисунок 4.32. График рассогласования (ошибки) $\Delta(t)$ по положению между задаваемой траекторией движения $\alpha_T(t)$ и фактической траекторией $\alpha(t)$ при управлении механизмом с обратной связью.

е) Рассмотрим случай, когда в качестве начальных условий используем начальные условия поступательного механизма: значения круговых частот: $k_1 = 11 \text{ рад/сек}$; $k_2 = 23 \text{ рад/сек}$; $k_3 = 27 \text{ рад/сек}$; $\gamma_{01} = 2,583$, $\gamma_{11} =$; $\gamma_{02} = 5,236$, $\gamma_{12} = 13,707$; $\gamma_{03} = 6,154$, $\gamma_{13} = 18,937$ при положении механизма в $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.33 – 4.35.

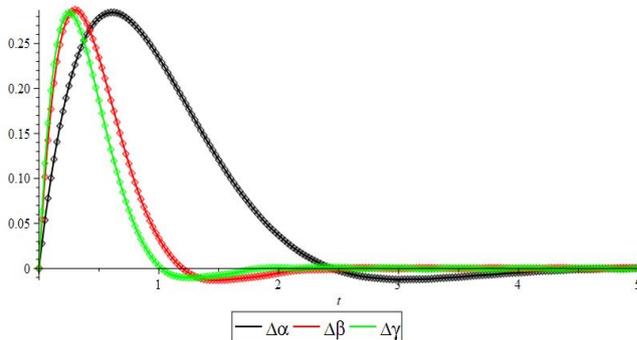


Рисунок 4.33. График изменения ошибки по координате.

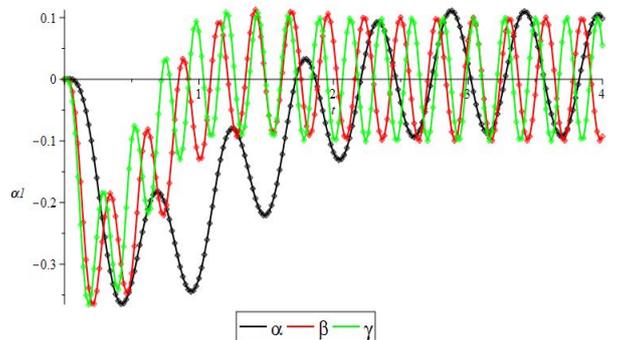


Рисунок 4.34. График движения выходного звена.

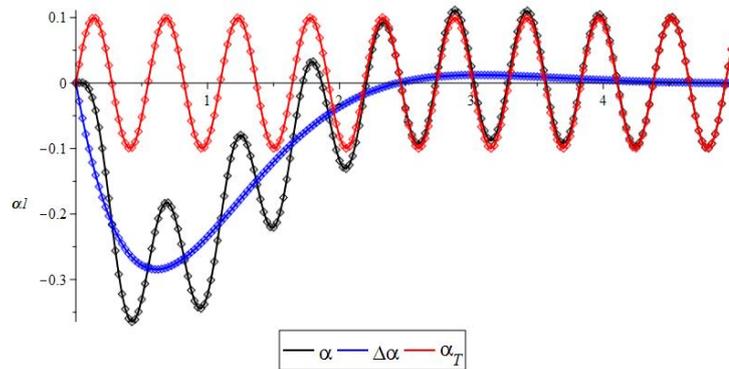


Рисунок 4.35. График рассогласования (ошибки) $\Delta(t)$ по положению между задаваемой траекторией движения $\alpha_T(t)$ и фактической траекторией $\alpha(t)$ при управлении механизмом с обратной связью.

Анализ графиков на рисунках 4.35 – 4.35 показывает, что при принятых начальных условиях сферический механизм обрабатывает заданный сигнал управления с теми же погрешностями, что и поступательный механизм. Рассогласование на начальном этапе в заданном и фактическом движении выходного звена имеет приемлемые значения, постепенно стремится к нулю.

Для рассматриваемого в данном параграфе сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы, являющегося частью механизма с шестью степенями свободы была составлена динамическая модель для решения прямой и обратной задач динамики [30, 40, 88]. На основе задач динамики был отработан алгоритм управления требуемого движения выходного звена. Для анализа работоспособности предложенного манипулятора и оценки пригодности используемого алгоритма управления, рассматривались различные начальные условия движения, различные коэффициенты обратных связей γ_{0i} , γ_{1i} , различные круговые частоты движения по траектории k_i . Ошибка движения по заданному закону имела приемлемые значения.

Кроме того, можно говорить и о динамической развязке, поскольку поступательные движения связаны с большими амплитудами перемещений и скоростей, в то время как вращательные движения не обуславливают больших динамических нагрузок. При этом вращательные движения имеют более высокие инерционные показатели, что не очень хорошо может сказаться на работе механизма, точности позиционирования и его сроке службы. Поэтому для устойчивой работы сферического механизма на этапе его конструирования нужно будет более детально определить его технические характеристики (размеры звеньев, их жёсткость и упругость, полезную нагрузку, которую он сможет переносить), чтобы в дальнейшем избежать указанных выше проблем.

Выводы по главе

1. Для исследования свойств механизма поступательной структуры с тремя степенями свободы составлена модель решения задач динамики [30, 32, 33, 88, 125]. В частности проводится определение и анализ собственных колебаний механизма на основе уравнений Лагранжа II рода [38]. На основе полученных результатов проводилось моделирование движения механизма и решение задачи управления, основанного на минимизации ошибки по положению. На основе этой модели отработан алгоритм управления заданным законом движения выходного звена. Работоспособность предложенного механизма оценивалась по его движениям при различных начальных условиях, различных коэффициентах обратных связей (γ_{0i}, γ_{1i}), а так же при различных значениях круговых частот.

2. Для исследования сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы также производился анализ собственных колебаний механизма на основе уравнений Лагранжа II рода. На основе полученных результатов проводилось моделирование движения механизма и решение задачи управления, основанного на минимизации ошибки по положению [30, 40, 88, 125, 126].

3. Показана эффективность динамической развязки. Отработка заданных движений выходным звеном для поступательной и сферической частей механизма проиллюстрирована графиками.

ГЛАВА 5. РАЗРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ЧЕТЫРЬМЯ СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ

Экспериментальная модель механизма соответствует механизму параллельной структуры с четырьмя степенями свободы, предложенному в главе 2. Данный механизм состоит из трёх кинематических цепей. Каждая кинематическая цепь содержит двигатель поступательного перемещения, шарнирный параллелограмм и конечную вращательную кинематическую пару. В одной из кинематических цепей добавлен двигатель вращательного перемещения, обуславливающий вращение выходного звена.

Приводится описание модели и результаты определения особых положений в режиме ручного управления механизмом.

5.1. Описание конструкции действующей модели

В данном параграфе представим конструкцию действующей модели конструкции с четырьмя степенями свободы с кинематической развязкой, обеспечивающей разделение поступательного движения и одного вращения. Данная экспериментальная модель содержит, как это было описано ранее, три кинематические цепи, каждая из которых содержит двигатель поступательного перемещения, шарнирный параллелограмм, а также вращательные кинематические пары, оси которых расположены перпендикулярно осям шарнирного параллелограмма (рисунок 5.1)[36].

Приведём описание разработанной конструкции механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы. Данная модель соответствует патенту на изобретение № 2534706 Российской Федерации. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы / Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В.; Заявитель и патентообладатель: ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет дизайна и технологии». Заявка № 2013132024. Приоритет изобретения 11.07.2013 г. Зарегистрировано в государственном реестре изобретений Российской Федерации 06.10.2013 г. Срок действия патента 11.07.2033 г. [36].

В одной из кинематических цепей содержится двигатель вращательного перемещения, который через шарнирный параллелограмм передаёт вращение на выходное звено. Основание выполнено в виде треугольной «звезды», а подвижная платформа в виде круглого кольца, с которым сопряжены три кинематические цепи. Для того чтобы одна кинематическая цепь не воспринимала весь вес конструкции, расположение трёх цепей выполнено в виде пирамиды.

В среднем положении весь механизм имеет симметричный вид (рисунок 5.2). Следует отметить, что в каждой из кинематических цепей могут располагаться не только двигатели поступательного перемещения, но и двигатели вращательного перемещения (рисунок 5.3).



Рисунок 5.1. Общий вид механизма с четырьмя степенями свободы.

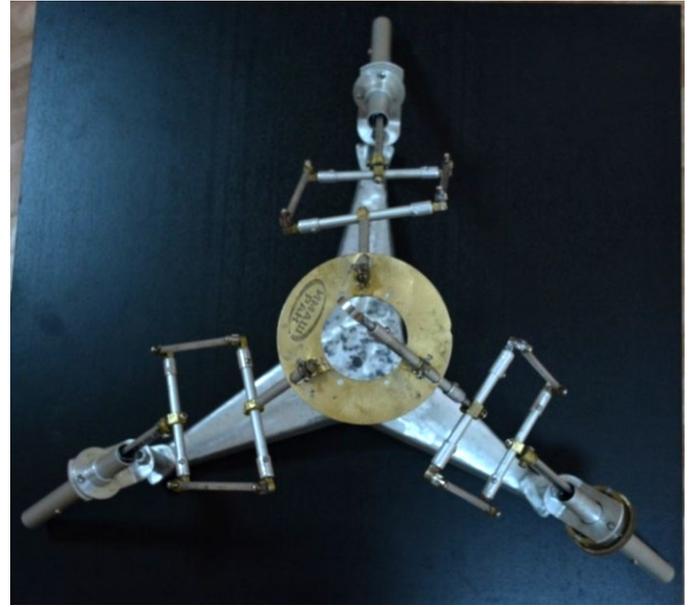


Рисунок 5.2. Общий вид механизма с четырьмя степенями свободы. Вид сверху.

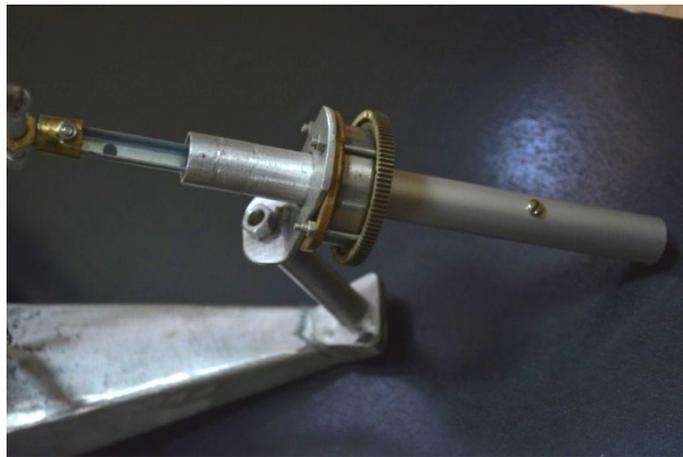


Рисунок 5.3. Кинематическая цепь механизма.

Ось двигателя вращательного перемещения должна быть расположена вдоль оси двигателя поступательного перемещения, кроме того для передачи вращения от соответствующего двигателя может быть предусмотрена зубчатая передача (рисунки 5.4., 5.5). Весь этот узел крепится к основанию посредством вертикально установленной штанги.

Подвижная платформа сопрягается с кинематическими цепями посредством стержней, связанных с подвижными параллелограммами (рисунок 5.6). При этом один из стержней связан с подвижной платформой, имеющей форму кольца, посредством вращательной кинематической пары, соосно с упомянутым стержнем. Это даёт возможность вращения рабочего органа, жёстко связанного со стержнем вокруг его оси (рисунок 5.6).



Рисунок 5.4. Зубчатая передача для передачи вращения на рабочий орган. Вид сбоку.



Рисунок 5.5. Зубчатая передача для передачи вращения на рабочий орган. Вид сверху.

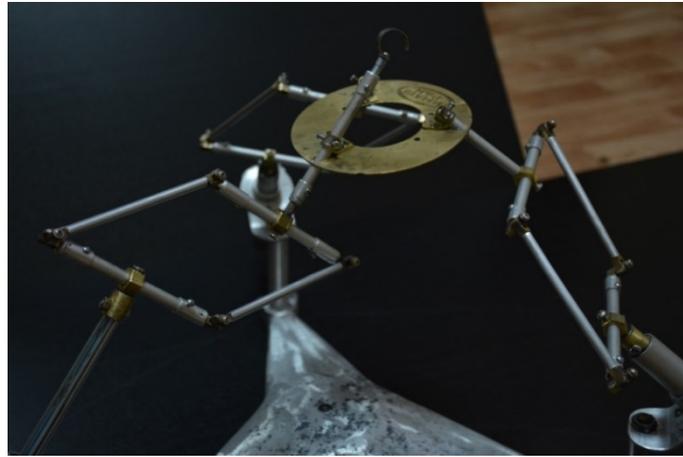


Рисунок 5.6. Механизм с четырьмя степенями свободы.

Шарнирные параллелограммы соединены со штоками двигателей поступательного перемещения через вращательные кинематические пары, оси которых перпендикулярны одновременно осям двигателей поступательного перемещения и осям кинематических пар соответствующих шарнирных параллелограммов (рисунок 5.7).



Рисунок 5.7. Механизм шарнирного параллелограмма.

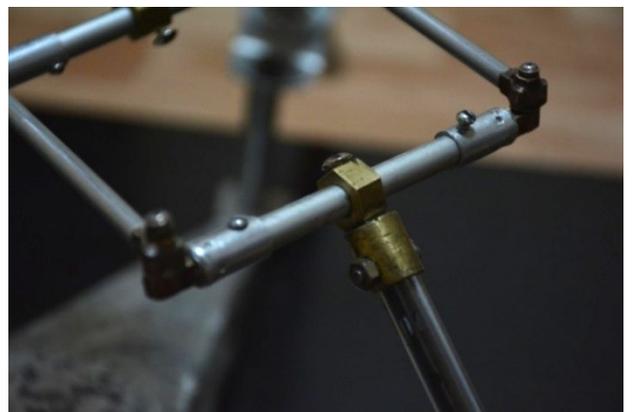


Рисунок 5.8. Шестигранный элемент крепления штоков.

Крепление штоков двигателей поступательного перемещения к упомянутым вращательным кинематическим парам осуществляется с помощью шестигранного элемента (рисунок 5.8).

Рабочий орган в данном экспериментальном устройстве выполнен в виде упругой дуги (крюка) (рисунок 5.9) Как отмечалось ранее, он сопряжен с подвижной платформой через вращательную кинематическую пару.



Рисунок 5.9. Рабочий орган в виде крюка.

Очень важным является вопрос, связанный с уравниванием сил веса подвижных частей механизма. Без подобного уравнивания приводы должны испытывать повышенные нагрузки, поэтому для различных устройств, в том числе для механизмов параллельной структуры, применяют различные способы уравнивания.



Рисунок 5.10. Уравнивание сил веса подвижных частей механизма с помощью изгибных упругих элементов.

В рассматриваемом устройстве экспериментальной модели данная техническая задача решена посредством изгибных упругих элементов (стержней), которые крепятся к началу и концу каждой кинематической цепи. Несмотря на то, что шарнирный параллелограмм может вращаться относительно оси, расположенной в плоскости самого параллелограмма, ориентация

подвижной платформы, имеющей кольцеобразную форму, остаётся неизменной относительно основания. Это даёт возможность расположить упругие уравнивающие элементы так, что они не испытывают нагрузки на кручение, а лишь уравнивают вес конструкции (рисунок 5.10).

Таким образом, в работе получена конструктивная схема действующей модели экспериментальной установки соответствующей развитию принципов робота Orthoglide.

5.2. Исследование функциональных возможностей действующей модели механизма с четырьмя степенями свободы

Рассмотрим функциональные возможности действующей модели механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы, в которой вращение на рабочий орган передаётся с помощью шарнирного параллелограмма. Представим механизм без уравнивающих элементов для того, чтобы определить крайние положения выходного звена в рабочей зоне. Исходя из конструктивных ограничений видно, что смещение подвижной платформы вдоль одной из горизонтальных осей равно радиусу самой подвижной платформы, а также предельному ходу двигателя поступательного перемещения (рисунок 5.11).



Рисунок 5.11. Крайнее положения выходного звена в рабочей зоне.

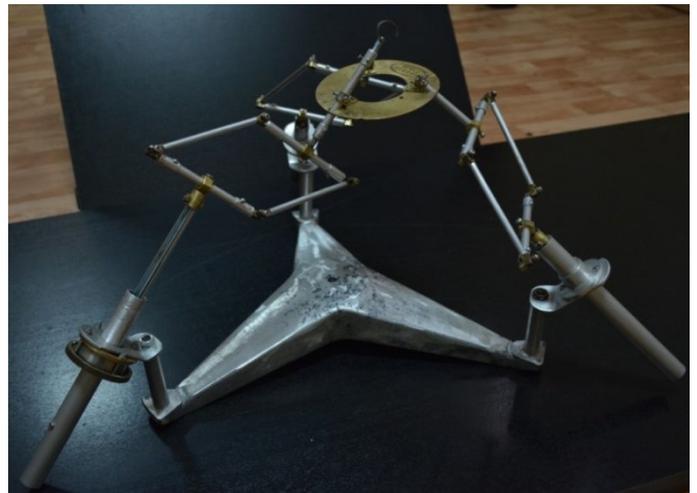


Рисунок 5.12. Крайнее положения выходного звена в рабочей зоне.

Максимальное смещение подвижной платформы вверх и при выдвигании одного из штоков приводит к одновременному смещению по горизонтальным осям координат (рисунок 5.12).

Одновременное выдвигание всех штоков двигателей поступательного перемещения может привести к подъёму подвижной платформы на расстояние, сопоставимое с предельным ходом указанных штоков (рисунок 5.13).

В том случае, если штоки всех двигателей поступательного перемещения максимально «утоплены» вниз, то подвижная платформа, не меняя своей ориентации, опускается вниз примерно на $2/3$ хода штоков, сохраняя при этом свою ориентацию (рисунок 5.14).



Рисунок 5.13. Верхнее положение подвижной платформы.



Рисунок 5.14. Нижнее положение выходной платформы.

Как отмечалось выше, одна из кинематических цепей, содержащая шарнирный параллелограмм, имеет кроме двигателя поступательного перемещения ещё и двигатель вращательного перемещения, передавая вращение на рабочий орган. При этом, как и было предсказано теорией, рабочая платформа не меняет своей ориентации, несмотря на изменение положения плоскости шарнирного параллелограмма (рисунок 5.15).



Рисунок 5.15. Особое положение механизма.



Рисунок 5.16. Особое положение механизма.

Одним из важнейших вопросов, связанных с определением функциональных особенностей манипуляционных механизмов параллельной структуры, является проблема особых положений. Для рассматриваемой экспериментальной модели с теоретической точки зрения возможно два вида особых положений. Один из них связан с потерей одной или нескольких степеней свободы – при этом в одной кинематической цепи должно произойти вырождение кинематических винтов, описывающих все движения.

Другой вид особых положений может быть связан с потерей управляемости или наличием неуправляемой подвижности. При этом должна выразиться система силовых винтов, передаваемых с кинематических цепей на подвижную платформу.

Для конкретной экспериментальной модели удаётся избежать указанных вырожденных ситуаций в силу её конструктивных особенностей. В частности, для достижения особого положения, связанного с потерей степени свободы (сингулярность первого рода) необходимо, чтобы хотя бы один шарнирный параллелограмм «сложился» так, чтобы звенья вытянулись в одну линию. В разработанной экспериментальной модели такого положения не существует. Можно, приложив внешнее усилие, лишь приблизиться к указанным положениям (рисунок 5.16).

При снятии внешней нагрузки механизм несколько отдаляется от достигнутого ранее положения, близкого к особому (рисунок 5.17).



Рисунок 5.17. Положение механизма, близкого к особому.

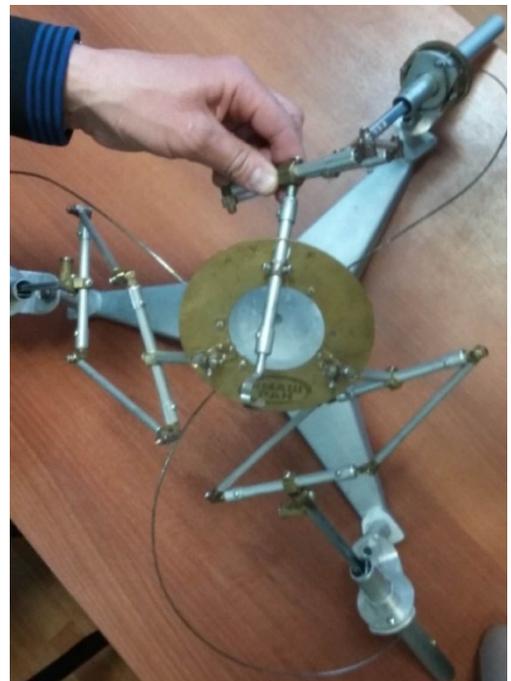


Рисунок 5.18. Положение механизма, близкого к особому.

Подобная ситуация может иметь место при рассмотрении различных кинематических цепей, при этом следует отметить, что приложение внешней нагрузки, связанной с приближением к

особым положениям, может деформировать шарнирные параллелограммы (и в плоскости изменяют свою форму – рисунки 5.16, 5.17, 5.18).

Конструктивной особенностью полученной экспериментальной модели механизма, кроме изложенного, обуславливает также отсутствие особых положений, связанных с потерей управляемости (сингулярности второго рода).

Экспериментальное исследование действующей модели механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы подтвердило теоретические выводы о том, что кинематические цепи, содержащие шарнирные параллелограммы, а также четыре вращательные кинематические пары с попарно параллельными осями, способны передавать поступательные и вращательные движения с приводов, установленных на основании.

5.3. *Исследование и моделирование рабочей зона механизма с четырьмя степенями свободы*

Одной из основных характеристик механизма является его рабочая зона – пространство, определяемое множеством точек, которые достигает рабочий инструмент выходного звена механизма при изменении входных переменных (параметров) [2, 26, 42, 52, 55, 56, 70, 93, 102, 115, 127, 130, 146, 148]. Можно создать довольно сложные механизмы как последовательной, так и параллельной структуры, но, если рабочая зона данного механизма будет небольшой, то их область применения значительно сокращается. Поэтому при создании нового механизма особое внимание уделяется такому важному фактору, как объём рабочей зоны.

Объём зоны определяется аналитически после составления уравнений кинематики механизма, что в некоторых случаях является достаточно сложной задачей, либо экспериментально. Для механизмов последовательной структуры прямая задача решается достаточно просто, а для механизмов параллельной структуры мы имеем, как правило, сложную систему нелинейных алгебраических, либо тригонометрических уравнений, которые в аналитическом виде не решаются, только численно. При этом стоит отметить, что при попадании механизма в особое положение получить численные решения также составляют трудности. При численном решении, находясь в зоне особого положения, можем попасть на вырожденный случай, когда определитель матрицы Якоби системы уравнений связи обращается в нуль. В нашем случае мы имеем механизм параллельной структуры, который включает в себя шарнирные параллелограммы. Данные механизмы имеют некоторую особенность при составлении уравнений кинематики, заключающиеся в том, что часть уравнений имеют линейный вид. Это упрощает систему уравнений связи в целом. Путём решения прямой и обратной задач о положении определим размер и форму рабочей зоны.

Построим рабочую зону механизма с четырьмя степенями свободы, описание экспериментальной модели которого представлено выше (рисунок 5.19). Данный механизм состоит из трёх кинематических цепей. Каждая цепь содержит двигатель поступательного перемещения (4, 4', 4''), шарнирный параллелограмм (7, 7', 7''), начальные вращательные кинематические пары (5, 5', 5'') и конечные вращательные кинематические пары (8, 8', 8''), оси которых расположены перпендикулярно осям шарнирного параллелограмма, что обеспечивает три поступательных степени свободы механизма (рисунок 5.20). Одна из кинематических цепей содержит двигатель вращательного перемещения (11), при этом вращение с привода на рабочий орган (3) передаётся за счёт механизма шарнирного параллелограмма (7) и вращательной кинематической пары (12), жёстко связанной с выходным звеном (подробное описание механизма см. глава 2, рисунок 2.1). Поскольку положение выходной платформы (2) определяется входными переменными, обеспечивающими три степени свободы в поступательном движении, а за ориентацию (вращение) рабочего инструмента (3) – отвечают входные переменные, обеспечивающие одну степень свободы вращательного движения, (при фиксированном положении платформы), то в дальнейших расчётах входными переменными, отвечающими за вращение (ориентацию) можно пренебречь [36].

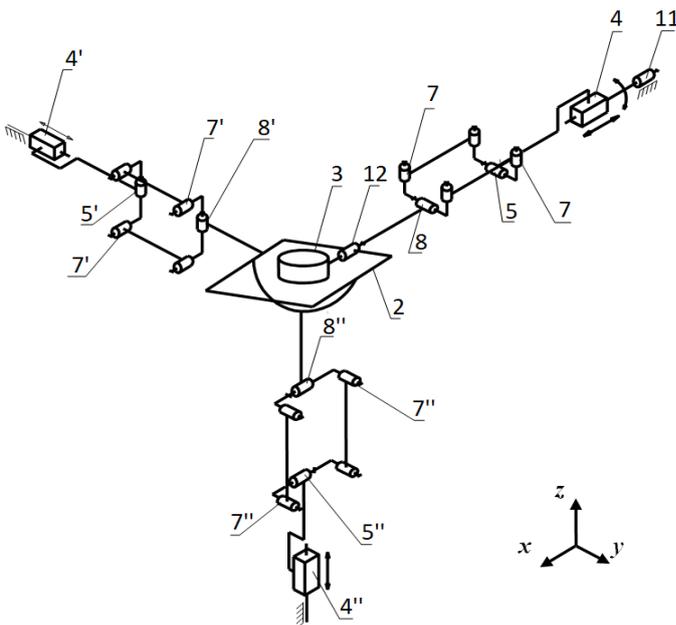


Рисунок 5.19. Структурная схема механизма с четырьмя степенями свободы.

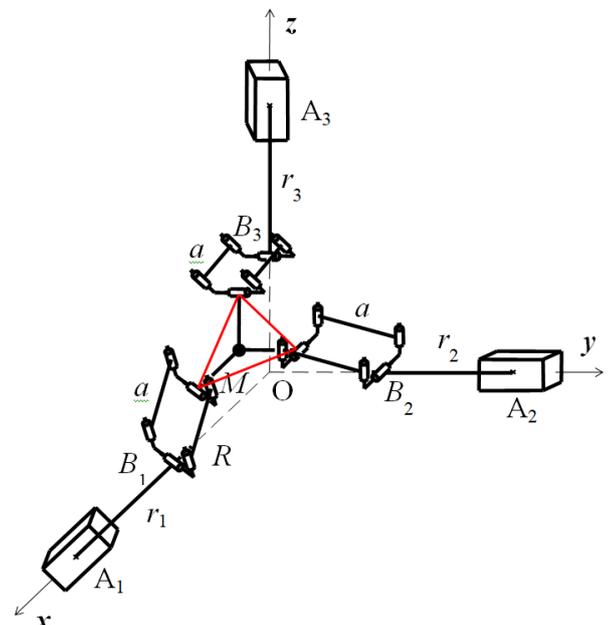


Рисунок 5.20. Поступательный механизм с тремя степенями свободы.

Прямая задача кинематики заключается в определении положения выходного звена по входным переменным (параметрам) механизма параллельной структуры с двигателями поступательного перемещения, расположенными по осям декартовой системы координат $Oxyz$ (рисунок 5.20). Поступательные движения обусловлены тем, что в каждой цепи имеется шарнирный параллелограмм, две вращательные кинематические пары и двигатель

поступательного перемещения. Расположим систему координат таким образом, что оси Ox , Oy , Oz проходят через пару точек (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) , соответственно. Оси вращения начальных вращательных кинематических пар B_1, B_2, B_3 перпендикулярны осям Ox, Oy, Oz , соответственно, и параллельны векторам:

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_x) = (0, 1, -1),$$

$$\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_y) = (-1, 0, 1),$$

$$\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_z) = (1, -1, 0).$$

Эти вектора лежат в плоскости Ozy, Oxz, Oxy , соответственно (рисунок 5.21).

Примем расстояние от точек A, B и C до O равное R . Выпишем координаты точек:

$$\begin{array}{l|l} A_1 (R, 0, 0), & B_1 (R-r_1, 0, 0), \\ A_2 (0, R, 0), & B_2 (0, R-r_2, 0), \\ A_3 (0, 0, R). & B_3 (0, 0, R-r_3). \end{array}$$

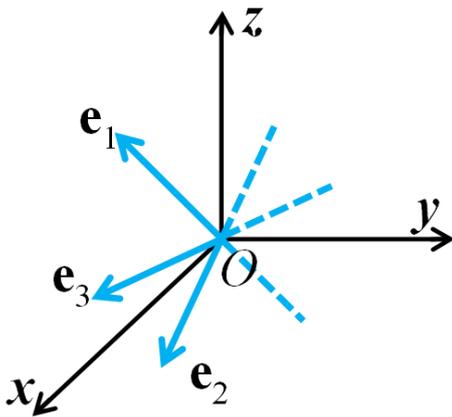


Рисунок 5.21. Оси вращения начальных вращательных кинематических пар.

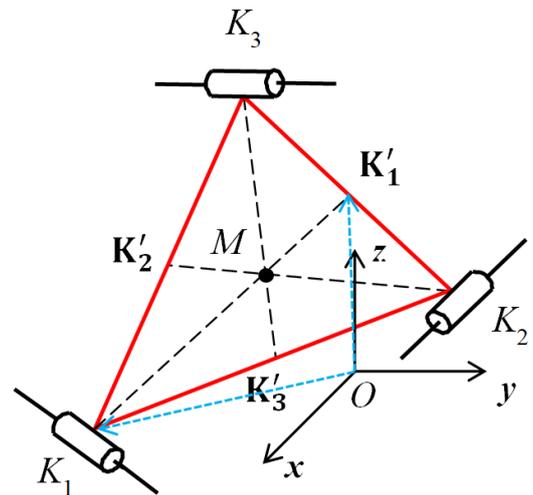


Рисунок 5.22. Определение положения точки M .

Для упрощения выражений зададим $R - r_i = P_i$, где $i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи, r_i – переменная величина. Координаты точек K_1, K_2, K_3 :

$$K_1(x_1, y_1, z_1);$$

$$K_2(x_2, y_2, z_2);$$

$$K_3(x_3, y_3, z_3).$$

Соединяем точки K_1, K_2, K_3 между собой и получаем треугольник (рисунок 5.22). Положение точки M однозначно определяется треугольником и в данном случае не рассматривается. Для записи кинематических уравнений воспользуемся алгебраическим методом, который основан

на неизменности длин звеньев. Неизменность для звеньев B_1K_1 , B_2K_2 и B_3K_3 выражается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}(P_1 - x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2 &= a^2, \\ (x_2)^2 + (P_2 - y_2)^2 + (z_2)^2 &= a^2, \\ (x_3)^2 + (y_3)^2 + (P_3 - z_3)^2 &= a^2.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Для упрощения решения ось вращения начальной кинематической пары – B_1 перпендикулярна оси Ox и лежит в плоскости Oxy . Выпишем соотношения неизменности длин K_1K_2 , K_2K_3 , K_3K_1 :

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 &= l^2, \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= l^2, \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= l^2.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Рассмотрим треугольник $K_1K_2K_3$ (рисунок 6.4). Биссектриса угла $K_3K_1K_2$ перпендикулярна оси вращения конечной вращательной кинематической паре – K_1 , а, следовательно, и оси вращения начальной кинематической паре – B_1 , либо единичному вектору \mathbf{e}_1 . Запишем это в виде трёх уравнений. Координаты точки K'_1 равны:

$$K'_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_3+x_2}{2} \\ \frac{y_3+y_2}{2} \\ \frac{z_3+z_2}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{вектор } \mathbf{K}_1\mathbf{K}'_1 \text{ равен: } \mathbf{K}_1\mathbf{K}'_1 = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_3+x_2}{2} \\ y_1 - \frac{y_3+y_2}{2} \\ z_1 - \frac{z_3+z_2}{2} \end{pmatrix};$$

Перемножая скалярно вектора \mathbf{e}_1 и $\mathbf{K}_1\mathbf{K}'_1$, получим выражение:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{K}_1\mathbf{K}'_1 = \left(y_1 - \frac{y_2+y_3}{2}\right) - \left(z_1 - \frac{z_2+z_3}{2}\right) = 0.\tag{5.3}$$

Аналогичным образом выпишем остальные уравнения и получим, соответственно:

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{K}_2\mathbf{K}'_2 = \left(x_2 - \frac{x_1+x_3}{2}\right) - \left(z_2 - \frac{z_1+z_3}{2}\right) = 0,\tag{5.4}$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{K}_3\mathbf{K}'_3 = \left(x_3 - \frac{x_1+x_2}{2}\right) - \left(y_3 - \frac{y_1+y_2}{2}\right) = 0.\tag{5.5}$$

Таким образом, мы получили дополнительно три линейных уравнения.

Выпишем общую систему, состоящую из девяти уравнений с девятью неизвестными:

$$\left\{ \begin{aligned}(P_1 - x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2 &= a^2, \\ (x_2)^2 + (P_2 - y_2)^2 + (z_2)^2 &= a^2, \\ (x_3)^2 + (y_3)^2 + (P_3 - z_3)^2 &= a^2, \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 &= l^2, \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= l^2, \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= l^2, \\ \left(y_1 - \frac{y_2+y_3}{2}\right) - \left(z_1 - \frac{z_2+z_3}{2}\right) &= 0, \\ \left(x_2 - \frac{x_1+x_3}{2}\right) - \left(z_2 - \frac{z_1+z_3}{2}\right) &= 0, \\ \left(x_3 - \frac{x_1+x_2}{2}\right) - \left(y_3 - \frac{y_1+y_2}{2}\right) &= 0.\end{aligned}\right.\tag{5.6}$$

В общем случае система уравнений (5.6) является системой 32 порядка. При приведении системы к одному уравнению получаем биквадратные уравнения, которые в общем случае понижают степень системы. В конечном случае данная система (5.6) имеет два мнимых корня и два вещественных. Два вещественных корня соответствуют двум различным сборкам конструкции (рисунок 5.23).

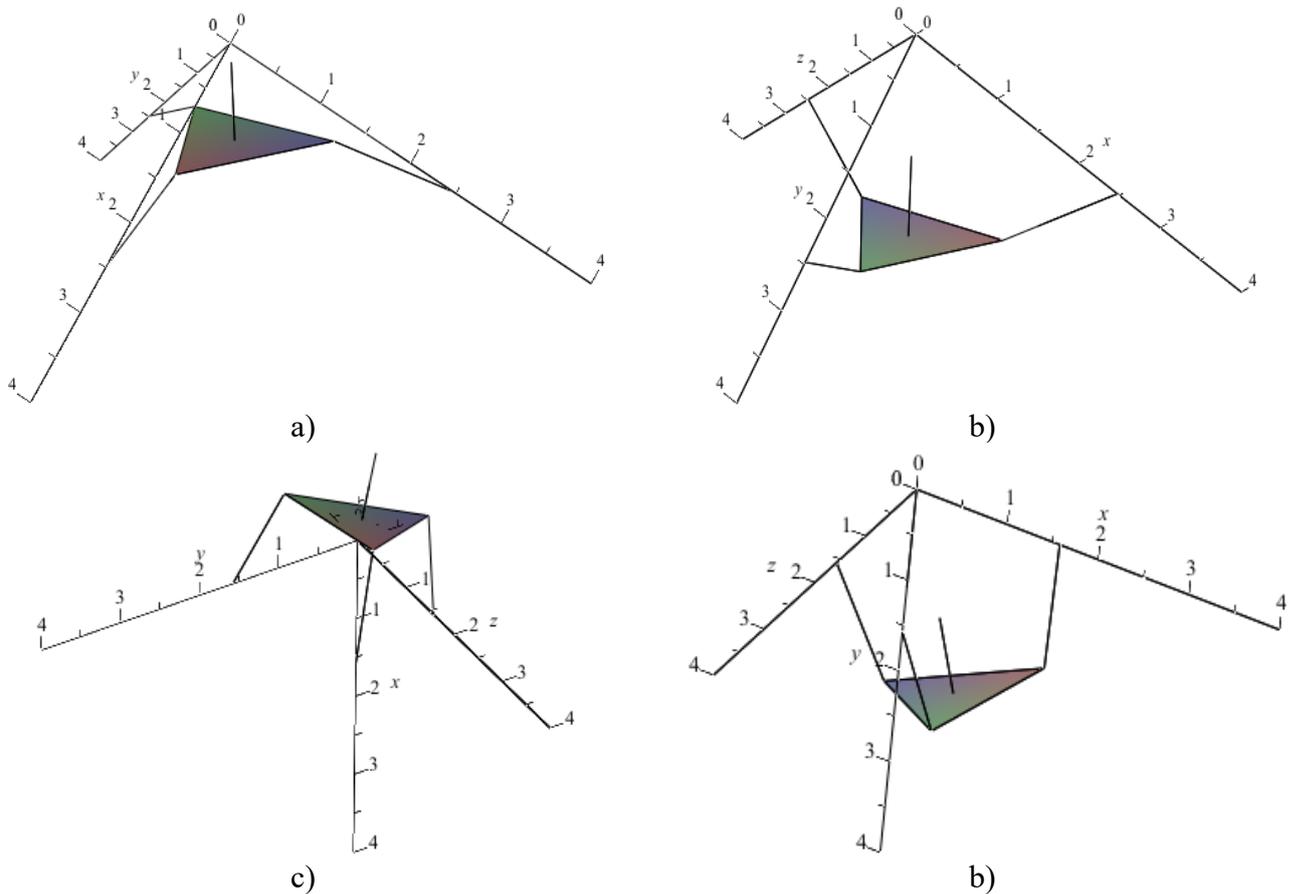


Рисунок 5.23. Две сборки механизма. Входные переменные равны нулю: а) первая сборка; б) вторая сборка. Входные переменные имеют максимальные значения: в) первая сборка; д) вторая сборка.

Выбираем первый вариант сборки.

На основании решения системы уравнений (5.6) была построена рабочая зона механизма при начальных условиях, соответствующих реальным размерам экспериментальной модели (глава 5, рисунок 5.1):

$R = 0,255 \text{ м}$ – общая длина звена;

$r_i = 0,0975 \text{ м}$ – переменная величина;

$a = 0,12$ – длина стороны шарнирного параллелограмма;

$l = 0,16 \text{ м}$ – стороны треугольника $K_1K_2 = K_2K_3 = K_3K_2$;

$k_m = 0,076 \text{ м}$ – высота рабочего инструмента от центра M треугольника $K_1K_2K_3$;

$h = 0.075$ – шаг счёта.

Моделирование работы механизма и определение рабочей зоны произведено в среде Maple 17.0, текст программы приведён в приложении 3.

Как видно на рисунке 5.24. а), б), рабочая зона механизма имеет достаточно большой объём, что даёт большие перспективы для использования исследуемой конструкции в различных областях робототехники.

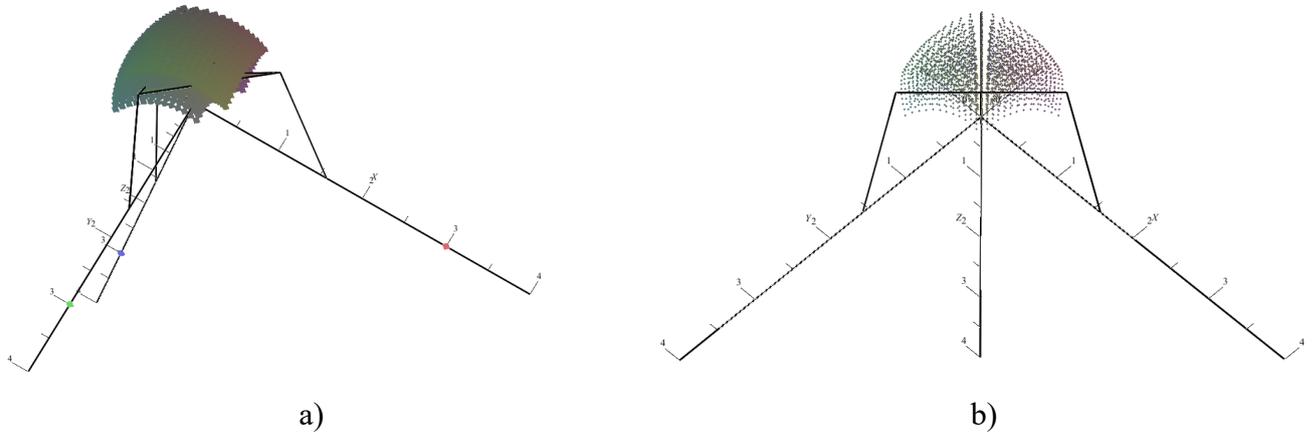


Рисунок 5.24. а), б) Вид сбоку.

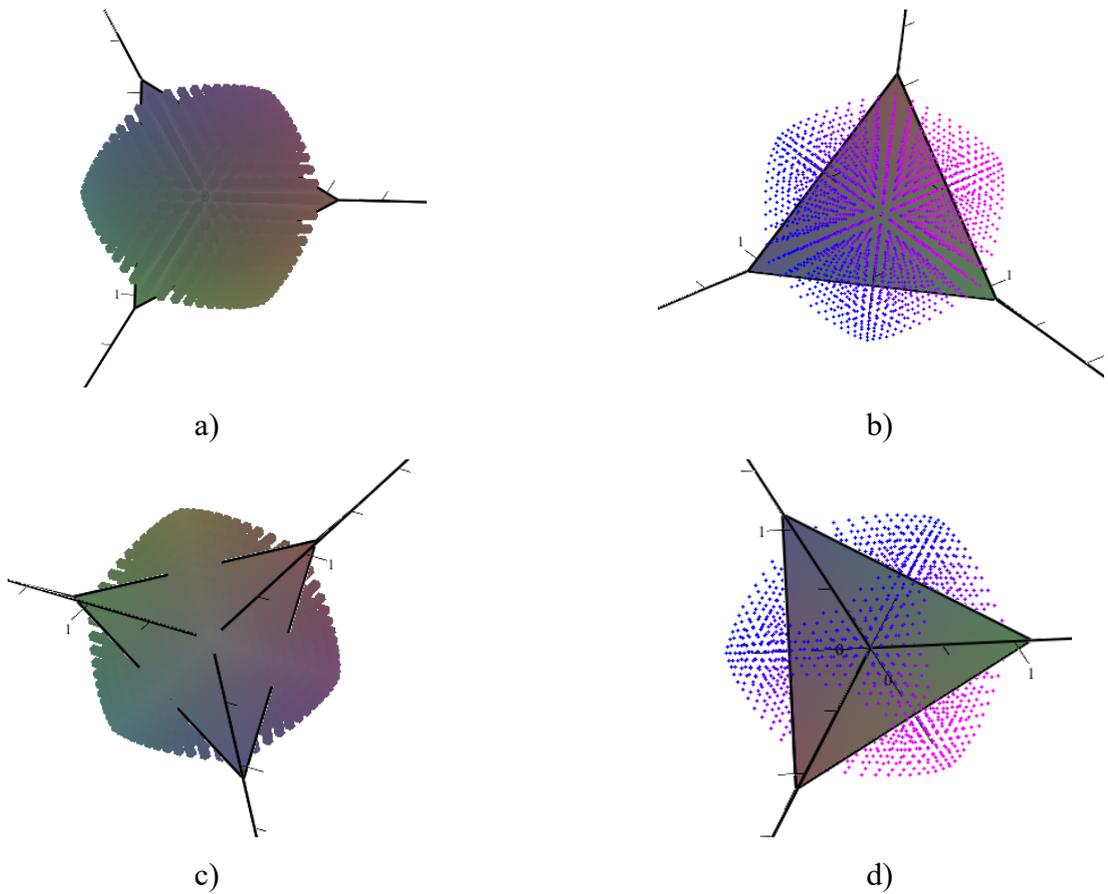


Рисунок 5.25 а), б) вид сверху; с), d) вид снизу.

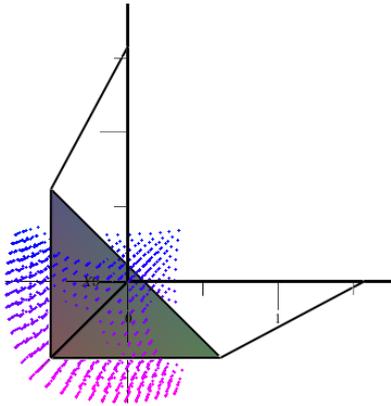


Рисунок 5.26. Вид со стороны оси Ox .

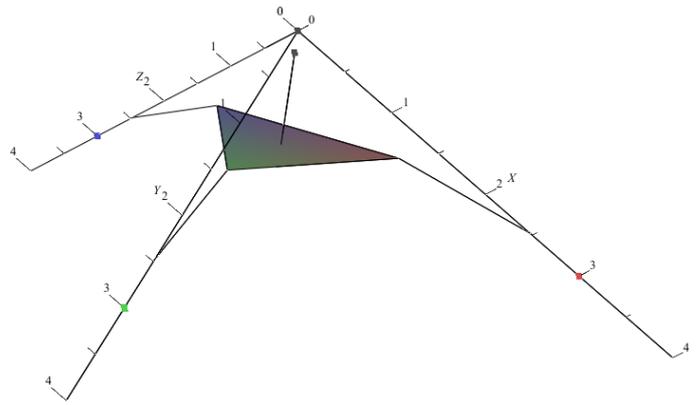


Рисунок 5.27. Первая точка построения рабочей зоны механизма.

Выводы по главе

1. Экспериментальная модель соответствует механизму, предложенному в главе 2. Он состоит из трёх кинематических цепей, содержащих двигатель поступательного перемещения, механизм шарнирного параллелограмма. В одной из кинематических цепей имеется дополнительная конечная вращательная кинематическая пара и двигатель вращательного перемещения, обуславливающие вращение выходного звена.

2. Эксперименты показали, что:

- в данной конструкции механизма особые положения отсутствуют;

- кинематические цепи, содержащие шарнирные параллелограммы способны передавать поступательные и вращательные движения.

3. Для рассматриваемого механизма с четырьмя степенями свободы экспериментально определен объём рабочей зоны механизма.

4. Наличие большой рабочей зоны позволяет рекомендовать данный механизм для использования в различных отраслях робототехники, медицине, тренажёрах и др.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В результате выполнения диссертационного исследования достигнута *поставленная цель*: разработка и исследование пространственных механизмов параллельной структуры с шарнирными параллелограммами с различным числом степеней свободы, обладающих свойствами кинематической и динамической развязки за счёт наличия шарнирных параллелограммов в каждой кинематической цепи.

По результатам исследования *опубликованы*: 21 научная статья, из которых 5 статей в журналах из перечня ВАК [31-34, 40], 7 статей, входящие в базы Scopus и Web of Science [87, 88, 122-126], 2 главы в монографиях с соавторами [30, 88], тезисы докладов на различных международных и всероссийских научно-технических конференциях (см. список публикаций по теме диссертации), 2 патента РФ на изобретения [36, 37] и 1 патент РФ на полезную модель [35].

Результаты и выводы по диссертационной работе:

1. Установлена принципиальная возможность модификации механизма типа Orthoglide для одновременной передачи шарнирным параллелограммом поступательных и вращательных движений.
2. Разработан ряд механизмов параллельной структуры с четырьмя, пятью и шестью степенями свободы, которые подтвердили возможность установки двигателей вращательного перемещения на одну ось с двигателями поступательного перемещения вместо карданных валов, как в прототипе. Данная замена позволяет упростить конструкцию и повысить её жёсткость.
3. Для разработанных схем механизмов созданы методики кинематического анализа для поступательной и для сферической частей механизма с шестью степенями свободы.
4. Созданы методики динамического анализа, с помощью которых проведены теоретические исследования и численный эксперимент с определением динамических параметров новых механизмов с кинематической развязкой.
5. Разработана конструкция и определены технические характеристики натурной модели механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы, что экспериментально подтвердило способность шарнирных параллелограммов передавать как поступательные, так и вращательные движения. Для разработанной конструкции определена рабочая зона механизма с учётом особых положений.
6. Показано, что наличие упругих изгибных элементов в конструкции разработанной натурной модели обеспечивает уравнивание собственного веса механизма, незначительно уменьшает объём рабочей зоны, но при этом исключается наличие особых положений.

7. Установлено, что разработанный механизм с шестью степенями свободы имеет кинематическую развязку по положению и ориентации выходного звена, что делает возможным условное разделение его на два простых механизма – поступательный и сферический механизм с тремя степенями свободы каждый. Анализ полученных простых механизмов можно проводить независимо друг от друга, что существенно упрощает решение задач кинематики.

8. Установлено, что разработанный механизм с шестью степенями свободы, кроме кинематической, обладает и динамической развязкой, поскольку поступательные движения связаны с большими амплитудами перемещений и скоростей, в то время как вращательные движения не обуславливают больших динамических нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов А.В. Система управления трехпорным колесно-шагающим роботом / А.В. Антонов, С.А. Воротников, Н.А. Выборнов // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии., № 2, 2016. С. 58-69.
2. Антонов А.В. Построение рабочей зоны механизма параллельной структуры для работы в агрессивных средах / А.В. Антонов, В.А Глазунов // Передача, обработка, отображение информации. Материалы 30-й Всероссийской научно-практической конференции. – 2018. – С. 24–30.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: учеб.для втузов. / И.И. Артоболевский – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.
4. Артоболевский И.И. Синтез плоских механизмов. / И.И.Артоболевский, Н.И. Левитский, С.А. Черкудинов. – М.: Физматгиз., 1959. – 1084 с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний. / И.М. Бабаков. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957. – 628 с.
6. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования. / В.А.Бесекерский , Е.П. Попов. – М.: Наука, 1975. – 768 с.
7. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 2. Динамика системы материальных точек / Н.Н. Бухгольц – 4-е изд., перраб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 332 с.
8. Вульфсон И.И. Краткий курс теории механических колебаний / И.И. Вульфсон – Библиотека ВНТР. – М.: ВНТР, 2017. – 241 с.
9. Глазунов В.А. Разработка механизмов параллельной структуры с кинематической и динамической развязкой / В.А. Глазунов, П.О. Данилин, С.В. Левин, Л.И. Тывес, К.А. Шалюхин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 2. – С. 23-32.
10. Глазунов В.А. Пространственные механизмы параллельной структуры. / В.А. Глазунов, А.Ш. Колискор, А.Ф. Крайнев. – М.: Наука, 1991. – 95 с.
11. Глазунов В.А. Пространственный механизм с шестью степенями свободы / В.А. Глазунов, С.В. Левин, К.А. Шалюхин, А.В. Духов, А.В. Козырев // Патент России на полезную модель RU № 164091, Aug 20, 2016.
12. Глазунов В.А. Некоторые актуальные проблемы развития теории механизмов и машин. / В.А. Глазунов, С.В. Хейло. – LAP LAMBERT, Academic Publishing, 2013. – 62 с.
13. Глазунов В.А. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы, полезная модель / В.А. Глазунов, М.А. Ширинкин, С.В. Палочкин С.В. // Патент России RU № 8860, 20.11.2009.

14. Данилин П.О. Групповая кинематическая развязка движений в механизмах параллельной структуры / П.О. Данилин, Л.И. Тывес, В.А. Глазунов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 3. – С. 27-36.
15. Диментбер Ф.М. Винтовое исчисление и его приложение в механике / Ф.М. Диментбер. – М.: Наука, 1965.
16. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов / Ф.М. Диментбер. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
17. Добровольский В.В. Теория сферических механизмов / В.В. Добровольский. – М.: Машгиз, 1947. – 232 с.
18. Добровольский В.В. Метод сферических изображений в теории пространственных механизмов / В.В. Добровольский // Труды семинара по ТММ. – 1947. – С. 5-37.
19. Зенкевич С.Л. Основы управления манипуляционными роботами: учеб. для вузов. – 2-е изд., исправ. и доп / под ред. С.Л. Зенкевича, А.С. Ющенко. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 480 с.: ил.
20. Корендясев А.И. Манипуляционные системы роботов. / А.И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывес – М.: Машиностроение, 1989. – 472 с.
21. Корендясев А.И. Теоретические основы робототехники. Книга 1. / А.И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывес. – М.: Наука, 2006. – 383 с.
22. Крейнин Г.В. Кинематика, динамика и точность механизмов. СПРАВОЧНИК. / Г.В. Крейнин, А.П. Бессонов, Б.И. Павлов, Е.А. Провоторова, В.И. Сергеев и др. – М.: Машиностроение, 1984. – 21 с.
23. Крейнин Г.В. Гидравлические и пневматические приводы промышленных роботов и автоматических манипуляторов / Г.В. Крейнин, И.Л. Кривц, Е.Я. Винницкий, В.И. Ивлев – М.: Машиностроение, 1993. – 299 с.
24. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
25. Ларюшкин П.А. Оценка близости к особым положениям механизмов параллельной структуры путем дифференцирования уравнений связи / П.А. Ларюшкин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. – 2019. – № 1. – С. 71-83.
26. Ларюшкин П.А. Рабочая зона манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы / П.А. Ларюшкин, С.В. Палочкин // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. – 2012. – № 3. – С. 92-96.
27. Ларюшкин П.А. Об особенностях применения винтового исчисления для оценки близости к особым положениям механизмов параллельной структуры / П.А. Ларюшкин,

Г.В. Рашоян, К.Г. Эрастова // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2017. – № 4. – С. 39-45.

28. Носова Н.Ю. Определение скоростей и особых положений сферического манипулятора / Н.Ю. Носова / Материалы 66-й межвузовской научно-технической конференции молодых ученых и студентов «Студенты и молодые ученые КГТУ – производству». – Кострома, 2014. – Т. 2. – С. 70-71.

29. Носова Н.Ю. Эволюция методов кинематической развязки механизмов параллельной структуры / Н.Ю. Носова // Сборник трудов 4-го московского международного симпозиума «Приводная техника и компоненты машин». – Москва, 2018. – С. 109-116.

30. Носова Н.Ю. Синтез, анализ и управление механизмами с тремя кинематическими цепями для аддитивных технологий / Н.Ю. Носова, В.А. Глазунов // Мир робототехники и мехатроники: Новые механизмы в современной робототехнике / под ред. В.А. Глазунова. – М.: Техносфера, 2018. – С. 89-120.

31. Носова Н.Ю. Синтез и кинематический анализ механизмов параллельной структуры с развязкой поступательных движений / Н.Ю. Носова, В.А. Глазунов, С.Ю. Мисюрин, Д.Н. Филиппов // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. – 2015. – № 2. – С. 109-113

32. Носова Н.Ю. Динамика манипулятора параллельной структуры с учётом закона управления / Н.Ю. Носова, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин // Машиностроение и инженерное образование. – 2015. – № 4. – С. 13-20.

33. Носова Н.Ю. Динамический анализ манипулятора параллельной структуры / Н.Ю. Носова, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин // Дизайн и технологии. – 2015. – № 47. – С. 83-94.

34. Носова Н.Ю. Синтез механизмов параллельной структуры с кинематической развязкой. / Н.Ю. Носова, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, А.Н. Терехова А.Н. // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2014. – № 5. – С. 34-40.

35. Носова Н.Ю. Пространственный механизм с пятью степенями свободы / Н.Ю. Носова, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, С.В. Хейло. / Патент России на полезную модель RU № 135283, Дес 10, 2013.

36. Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы // Патент России на изобретение RU № 2534706., Oct 06, 2014.

37. Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В., Комисарук Л.В. Пространственный механизм с шестью степенями свободы // Патент России на изобретение RU № 253635, Oct 28, 2014.

38. Носова Н.Ю. Анализ колебательных процессов механизма параллельной структуры на основе уравнения Даламбера–Лагранжа II рода / Н.Ю.Носова, С.В. Палочкин // Сб. Дизайн,

технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности (Инновации-2015): материалы международной научно-технической конференции. Часть 3. – Москва, 2015. – С. 12-16.

39. Носова Н.Ю. Определение работоспособности механизма параллельной структуры с пятью степенями свободы методом винтов / Н.Ю. Носова, С.В. Палочкин // Международная научно-техническая конференция «Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности» (Инновации-2014). – Москва, 2014. – Часть 2. – С. 165-168.

40. Носова Н.Ю. Динамический анализ сферической части манипулятора параллельной структуры с учетом закона управления / Н.Ю. Носова, С.В. Хейло, В.А. Глазунов, А.В. Царьков // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2018. – № 3. pp. – С. 3-11.

41. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Изд. 3-е, доп. и перераб. / Я.Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.

42. Пащенко В.Н. Построение рабочей зоны шестистепенного манипулятора параллельной структуры на базе кривошипно-шатунного механизма / В.Н. Пащенко // Интернет-журнал «Науковедение». – 2016. – Т. 8, № 3.

43. Попов Е.П. Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы / Е.П. Попов, А.Ф. Верещагин, С.П. Зенкевич. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

44. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втзов. 10-е изд., перераб. и доп. / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1986. – 416 с.

45. Тывес Л.И. Механизмы робототехники. Концепция развязок в кинематике, динамике и планировании движений / Л.И. Тывес. – Ленанд, 2018. – 208 с.

46. Тывес Л.И. Синтез нового механизма параллельной структуры 3x2 с полной групповой кинематической развязкой / Л.И. Тывес / В кн.: Мир робототехники и мехатроники. Новые механизмы в современной робототехнике. – М.: Техносфера, 2018. – С. 121-130.

47. Фролов К.В. Конструирование машин: Справочно-методическое пособие: В 2 т. Т. 1 / К.В. Фролов, А.Ф. Крайнев, Г.В. Крейнин и др. – М.: Машиностроение, 1994. – 528 с.

48. Хейло С.В. Манипуляционные механизмы параллельной структуры. Динамический анализ и управление / С.В. Хейло, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин. – М.: ФГБОУ ВПО «МГУДТ», 2014. – 87 с.

49. Хейло С.В. Манипуляционные механизмы параллельной структуры. Структурный синтез. Кинематический и силовой анализ / С.В. Хейло, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин. – М.: ФГБОУ ВПО «МГТУ им. А.Н. Косыгина», 2011. – 153 с.

50. Хейло С.В. Решение задачи управления плоским механизмом параллельной структуры / С.В. Хейло, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, А.П. Выборнов / Машиностроение и инженерное образование. – 2014. – № 3. – С. 2-7.

51. Хейло С.В. Решение задачи о скоростях и особых положениях сферического манипулятора параллельной структуры / С.В. Хейло, В.А. Глазунов, Во Динь Тунг// *Машиностроение и инженерное образование*. – 2011. – № 1. – С. 2–9.
52. Хейло С.В. Определение рабочей зоны манипуляторов параллельной структуры / С.В. Хейло, П.А. Ларюшкин/ *Справочник. Инженерный журнал с приложением*. – 2013. – № 2. – С. 27-31.
53. Шалюхин К.А. Задачи кинематического анализа и особых положений механизмов роботов параллельной структуры / К.А. Шалюхин, Г.В. Рашоян, А.К. Алешин// *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2018. – № 4. – С. 11-18.
54. Ширинкин М.А. Разработка манипуляционного механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы / М.А. Ширинкин, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин // *Технология текстильной промышленности*. – 2010. – № 1 (322). – С. 102-107.
55. Эрастова К.Г. Рабочие зоны механизмов параллельной структуры и способы определения их формы и размеров / К.Г. Эрастова, П.А. Ларюшкин// *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. – 2017. – № 8(689). – С. 78-87.
56. Эрастова К.Г. Рабочая зона и оптимальные геометрические параметры сферического манипулятора параллельной структуры / К.Г. Эрастова, П.А. Ларюшкин, В.А. Глазунов // *XXVIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов. МИКМУС-2016*. – Москва, 2017. – С. 310-313.
57. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Часть II. Динамика. / А.А. Яблонский – М.: Высшая школа, 1966. – 412 с.
58. Angeles J. The Qualitative Synthesis of Parallel Manipulators // *J. Mech. Des.*, Vol. 126, No. 4, 2004. pp. 617-624.
59. Arakelian V., Han, J.-W., Glazunov V., Parikyan, T. et al. *Dynamic Decoupling of Robot Manipulators*. – Springer, Cham, 2018.
60. Arakelian V., Xu J., Le Baron J.P. Dynamic Decoupling of Planar Serial Manipulators with Revolute Joints // *Dynamic Decoupling of Robot Manipulators. Mechanisms and Machine Science*. – 2018. – Т. 56. – С. 51-73.
61. Bernier D., Castelain J.M., Li X. A new parallel structure with 6 degrees of freedom // *Proceedings of the 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanism*. – Milan, Italy, 2005. – С. 8-12/
62. Bonev A. The true origins of parallel robots. – 2003 [Электронный ресурс]. URL: www.parallelemic.org [сайт].

63. Bosscher P., Elbert-Upholf I. A novel mechanism for implementing multiple collocated spherical joints // Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation. – Taipei, Taiwan, 2003. – C. 336–341.
64. Briot S. Analysis and Optimization of a New Family of Parallel Manipulators with Decoupled Motions. – Ph.D. Thesis, France: HAL: archives-ouvertes, 2007. – 263 c.
65. Briot S., Arakelian V., Guégan S. PAMINSA: A new family of partially decoupled parallel manipulators // Mechanism and Machine Theory. – 2009. – Т. 44, № 2. – С. 425–444.
66. CamaGroup 2019 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.camagroup.com/>
67. Cao Y., Chen H., Qin Y.E.A. Type Synthesis of Fully-decoupled Three-rotational and One-translational Parallel Mechanisms // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2016. – Т. 13, № 2. – С. 1-9.
68. Carricato M., Parenti-Castell I.V. A family of 3-DOF translational parallel manipulators // Journal of Mechanical Design. – 2003. – Т. 125, № 2. – С. 302-307/
69. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulations. – Kluwer Academic Publishers, 2004. – 324 p.
70. Chablat D., Kong X., Zhang C. Kinematics, workspace and singularity analysis of a multi-mode parallel robot // ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. –Cleveland, USA. 2017.
71. Chablat D., Kong X., Zhang C. Kinematics, Workspace, and Singularity Analysis of a Parallel Robot With Five Operation Modes // Journal of Mechanisms and Robotics. – 2018. – Т. 10, № 3. – С. 035001.
72. Chablat D., Wenger P. Device for the movement and orientation of an object in space and use thereof in rapid machining // United States Patent Application Publication No.: US 2007/006232, Mar 22, 2007.
73. Chablat D., Wenger P. A six degree-of-freedom haptic device based on the Orthoglide and a hybrid Agile Eye // Proceeding of 2006 ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. – Philadelphia, USA, 2006. – Т. 2. – С. 795-802.
74. Clavel R. Delta: a fast robot with parallel geometry // 18th International Symposium on Industrial Robot. – Lausanne, 1988. – С. 91–100.
75. Clavel R. Device for the Movement and Positioning of an Element in Space // US Patent No. 4,976,582, December 11, 1990.
76. Craig J.J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. 3rd edn. – Pearson Education International, 2005.

77. Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. Singularity-free path planning for the Stewart platform manipulator // *Mechanism and Machine Theory*. – 1998. – T. 33, № 6. – C. 711-725.
78. Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. Stewart platform manipulator: A review // *Mechanism and Machine Theory*. – 2000. – T. 35, № 1. – C. 15-40.
79. Di Gregorio R. A new decoupled parallel manipulator // *Proceedings of the 10th International Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region: RAAD 2001*. – Vienna, Austria, 2001. – C. 1-9.
80. Di Gregorio R. Kinematics analysis and singularities of novel decoupled parallel manipulators with simplified architecture // *Robotica*. – 2017. – T. 35, № 4. – C. 961–979.
81. Fichter E.F. A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction // *International Journal of Robotics Research*. – 1986. – № 2. – C. 157-181.
82. Fujimoto K. et al. Derivation and Analysis of Equations of Motion for a 6 d.o.f. Direct Drive Wrist Joint // *IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 1991. – C. 779-784.
83. Geng Z., Haynes L.S. On the Dynamic Model and Kinematic Analysis of a class of Stewart Platforms // *Robotics and Autonomous Systems*. – 1992. – T. 9. – C. 237-254.
84. Girone M., Burdea G., Bouzit M., Popescu V., Deutsch J.E. A Stewart platform-based system for ankle telerehabilitation // *Autonomous Robots*. – 2001. – T. 10, № 2. – C. 203–212.
85. Glazunov V. Design of decoupled parallel manipulators by means of the theory of screws // *Mechanism and Machine Theory*. – 2010. – T. 45, № 2. – C. 239–250.
86. Glazunov V., Laryushkin P., Kheylo S. 3-DOF Translational and Rotational Parallel Manipulators // *New Trends in Mechanism and Machine Science: Theory and Applications in Engineering*, 2013. – C. 199-207.
87. Glazunov V., Nosova N., Ceccarelli M. Kinematics of a 6 DOFs manipulator with interchangeable translation and rotation motions // *Recent Advances in Mechanism Design for Robotics: Proceedings of the 3rd IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics. Mechanism and Machine Science*. – Aalborg, Denmark, 2015. – T. 33. – C. 407-416.
88. Glazunov V., Nosova N., Kheylo S., Tsarkov A. Design and Analysis of the 6-DOF Decoupled Parallel Kinematics Mechanism // *Dynamic Decoupling of Robot Manipulators. Mechanisms and Machine Science*. / V. Arakelian (ed.). –Springer, 2018. – C. 125-170.
89. Glazunov V.A., Filippov G.S., Rashoyan G.V., Aleshin A.K., Shalyukhin K.A., Skvortsov S.A., Antonov A.V..T.A.N. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. Mechanical Science and Technology Update. // *Velocity analysis of a spherical parallel robot*. 2019. Vol. 1260. pp. 1-8.
90. Gogu G. Structural Synthesis of Parallel Robots. Part 2: Translational Topologies with Two and Three Degrees of Freedom. – Springer, 2009.

91. Gosselin C. Kinematic analysis optimization and programming of parallel robotic manipulators. – Ph.D. Thesis, Monreal: McGill University, 1985. – 235 c.
92. Gosselin C.M. Parallel Computational Algorithms for the Kinematics and Dynamics of Planar and Spatial Parallel Manipulators // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1996. – Т. 118, № 1. – С. 22-28.
93. Gosselin C.M., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains // IEEE Transactions on Robotics and Automatics. – 1990. – Т. 6, № 3. – С. 281-290.
94. Gosselin C.M., Hamel J.F. The agile eye: a high performance three-degree-of-freedom camera-orienting device // Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation. – San Diego, CA, USA, 1994. – С. 781-786.
95. Gough V.E. Contribution to Discussion of Papers on Research in Automobile Stability, Control and in Tyre Performance // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Auto Division. – 1956. – С. 392-395.
96. Griffins M., Dufy J. A Forward Displacement Analysis of a Class of a Stewart Platform // Journal of Robotics Systems. – 1989. – № 2. – С. 703-720.
97. Gwinnett J.E. Amusement devices // US Patent No. 1,789,680, January 20, 1931.
98. Innocenti C., Parenti-Castelli V. Direct kinematics of the 6-4 fully parallel manipulator with position and orientation uncoupled // Robotic Systems. – 1992. – № 10. – С. 3-10.
99. IRB 360 FlexPicker™ [Электронный ресурс] URL: <https://new.abb.com/products/robotics/ru/Industrial-robots/irb-360> (дата обращения: 20.11.2019).
100. Jacket P., Danescu G., Carvalho J., Dahan M. A spatial Fully-Parallel Manipulator // International Conference RoManSy'92. – Udine, Italy, 1992.
101. Jin Y., Chen I.M., Yang G. Kinematic design of a 6-DOF parallel manipulator with decoupled translation and rotation // IEEE Transactions on Robotics. – 2006. – Т. 22, № 3. – С. 545–551.
102. Kamada S., Laliberté T., Gosselin C. Kinematic Analysis of a 4-DOF Parallel Mechanism with Large Translational and Orientational Workspace // Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation. – 2019.
103. Kong X., Gosselin C.M. Type synthesis of input-output decoupled parallel manipulators // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. – 2004. – Т. 28, № 2A. – С. 185-196.
104. Kong X., Gosselin C.M. Type Synthesis of Parallel Mechanisms. – Springer, 2007. – 272 c.
105. Kong X., Jin Y. Type Synthesis of 3-DOF multi-mode translational/spherical parallel mechanisms with lockable joints. // Mechanism and Machine Theory. – 2016. – Т. 96, Part 2. – С. 323-333.

106. Krivits I.L., Krejnin G.V. Pneumatic actuating systems for automatic equipment. Structure and design. – CRC Press, LLC, 2006. – 345 c.
107. Lallemand J.P., Goudali A., Zegloul S. The 6-Dof 2-Delta parallel robot // *Robotica*. – 1997. – T. 15, № 4. – C. 407–416.
108. Laryushkin P., Glazunov V. A New 3-DOF Translational Parallel Manipulator: Kinematics, Dynamics and Workspace Analysis // *Romansy 19 – Robot Design, Dynamics and Control: Proceedings of the 19th CISM-IFTToMM Symposium*. – Paris, France, 2012. – C. 11-18.
109. Liu K., Lewis F., Lebret G., Taylor D. The Singularities and Dynamics of a Stewart Platform Manipulator // *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. – 1993. – T. 8, № 3. – C. 287-308.
110. Liu X.J., Wang J. Some New Parallel Mechanisms Containing the Planar Four-Bar Parallelogram // *The International Journal of Robotics Research*. – 2003. – T. 22, № 9. – C. 717-732.
111. Liu X.J., Wang J., Gao F., Wang L.P. On the analysis of a new spatial three-degrees-of-freedom parallel manipulator // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. – 2011. – T. 17, № 6. – C. 959-968.
112. Liu X.J., Wang J., Pritschow G. A new family of spatial 3-DoF fully-parallel manipulators with high rotational capability // *Mechanism and Machine Theory*. – 2005. – T. 40. – C. 475-494.
113. Ma O., Angeles J. Direct Kinematics and Dynamics of a Planar Three-DOF Parallel Manipulator // *ASME Design and Automation Conference*. – Montréal, Canada, 1989. – T. 3. – C. 313-320.
114. Merlet J.P. *Parallel Robots*. 2nd edn. – Springer, 2006.
115. Merlet J.P. Workspace-oriented methodology for designing a parallel manipulator // *Proceedings of the 1996 international conference on robotics and automation*. – 1996. – C. 3726–3731.
116. Mianowski K. Singularity analysis of parallel manipulator POLMAN 3×2 with six degrees of freedom // *12th IFTToMM World Congress*. – Besançon, France, 2007. – C. 1-6.
117. Mianowski K., Zielinska T. Parallel manipulator POLMAN with isotropic properties dedicated for fast manipulation // *Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics*. – Bangkok, Thailand, 2006. – C. 1-6 (6 pages).
118. Miller K., Clavel R. The Lagrange-Based Model of Delta-4 Robot Dynamics // *Roboter systeme*. – 1992. – T. 8, № 4. – C. 49-54.
119. Miller K. Modeling of Dynamics and Model-Based Control of DELTA Direct-Drive Parallel Robot // *Journal of Robotics and Mechatronics*. – 1995. – T. 17, № 4. – C. 344-352.
120. Miller K. On Accuracy and Computational Efficiency of DELTA Direct Drive Robot Dynamics Model // *International Symposium on Microsystems, Intelligent Materials and Robots*. – Sendai, Japan, 1995. – C. 568-571.

121. Misyurin S.Y., Kreinin G.V., Markov A.A., Sharpanova N.S. Determination of the degree of mobility and solution of the direct kinematic problem for an analogue of a Delta robot // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2016. – T. 45, № 5. – C. 403-411.
122. Nosova N.Y. A Review of the Parallel Structure Mechanisms with Kinematic Decoupling. Moscow // *Advanced Technologies in Robotics and Intelligent Systems*. – 2020. – T. 80. – C. 247-255.
123. Nosova N.Y., Glazunov V.A., Misyurin S.Y., Filippov D.N. Synthesis and the kinematic analysis of mechanisms of parallel structure with the outcome of progress // *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti*. – 2015. – № 2. – C. 109-113.
124. Nosova N.Y., Glazunov V.A., Palochkin S.V., Terekhova A.N. Synthesis of mechanisms of parallel structure with kinematic interchange // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – T. 43, № 5. – C. 378–383.
125. Nosova N.Y., Glazunov V.A., Thanh. N.M. Task of Control of Parallel Mechanism for Given Law of Motion // *14th International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science World Congress, IFToMM 2015*. – Taipei, Taiwan, 2015. – C. 159-163.
126. Nosova N.Y., Kheilo S.V., Glazunov V.A., Tsar'kov A.V. Dynamic Analysis of the Spherical Part of the Parallel Manipulator Taking into Account the Control Law // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2018. – T. 47, № 3. – C. 205-212.
127. Pashkevich A., Chablat D., Wenger P. Kinematics and workspace analysis of a three-axis parallel manipulator: the Orthoglide // *Robotica*. – 2006. – T. 24, № 1. – C. 39-49.
128. Pierrot F., Company O. H4: A new family of 4-dof parallel robots // *Proceedings of the 1999 IEEE WASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. – Atlanta, USA, 1999. – C. 508-513.
129. Pollard W.L.W. Position-controlling apparatus // *US Patent No. 2,286,571*, June 16, 1942.
130. Rashoyan G., Shalyukhin K., Antonov A., Aleshin A., Skvortsov S. Analysis of the Structure and Workspace of the Isoglide-Type Robot for Rehabilitation Tasks // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. – 2020. – T. 1126. – C. 186-194.
131. Rashoyan G.V. Structural synthesis of parallel structure robots based on the theory of screws and on concepts of reciprocity // *Technical sciences*. – 2016. – T. 12, № 4. – C. 771–776.
132. Rashoyan G.V., Shalyukhin K.A., Gaponenko E.V. Development of structural schemes of parallel structure manipulators using screw calculus // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2018. – T. 327, № 4. – C. 042090 (9 pages).
133. Saltarén R., Aracil R., Alvarez C., Yime E., Sabater J.M. Underwater parallel robot for works on submarine disasters // *Symposium on Marine Accidental oil Spills VERTIMAR-2007*. – University of Vigo, Galicia, Spain, 2007. – C. 35.

- 134.Saltaren R., Aracil R., Reinoso O., Scarano M.A. Climbing parallel robot: A computational and experimental study of its performance around structural nodes // *IEEE Transactions on Robotics*. – 2005. – Т. 21, № 6. – С. 1056–66.
- 135.Shaw D., Chen Y.S. Cutting path generation of the Stewart-platform-based milling machine using an end-mill // *International Journal of Production Research*. – 2010. – Т. 39, № 7. – С. 1367–83.
- 136.Song S.K., Kwon D.S., Kim W.S. Spherical joint for coupling three or more links together at one point // Patent US 6,568,871 B2, 2003.
- 137.Stamper R.E. A Three Degree of Freedom Parallel Manipulators with Only Translational Degrees of Freedom. – Ph.D. Thesis, University of Maryland, MD, USA, 1997. – 192 p.
- 138.Stewart D. A platform with 6 degrees of freedom // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. – 1965. – С. 371-386.
- 139.St-Onge B.M., Gosselin C.M. Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform // *International Journal of Robotics Research*. – 2000. – № 3. – С. 271-288.
- 140.Takeda Y., Kamiyama K., Maki Y., Higuchi M., Sugimoto K. Development of position-orientation decoupled spatial in-parallel actuated mechanisms with six degrees of freedom // *Journal of Robotics and Mechatronics*. – 2005. – Т. 17, № 1. – С. 59–68.
- 141.Theater Extreme Sports: Take the study of surfboard simulation platform as an example [Электронный ресурс] // flyingv: [сайт]. URL: <https://www.flyingv.cc/projects/2088> (дата обращения: 16.03.2015).
- 142.Ting Y., Chen Y.S., Jar H.C., Kang Y. Modeling and control for a Gough-Stewart platform CNC machine // *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation*. New Orleans. – 2004. – С. 535–540.
- 143.Tyves L., Glazunov V., Danilin P., Thanh N.M. Decoupled Parallel Manipulator with Universal Joints and Additional Constraints // *ROMANSY 18 Robot Design, Dynamics and Control*. CISM International Centre for Mechanical Sciences. – Vienna, 2010. – Т. 524. – С. 65-72.
- 144.UniPack.ru O.o. Один контроллер управляет тремя дельта-роботами // Отраслевой портал UniPack.ru. – 2011 [Электронный ресурс]. URL: <http://company.unipack.ru/179/publications/36755> (дата обращения: 21.09.2015).
- 145.Wang J., Kong X. A geometric approach to the static balancing of mechanisms constructed using spherical kinematic chain units // *Mechanism and machine theory*. – 2019. – Т. 140. – С. 305-320.
- 146.Wang Y., Fan S., Zhang X., Lu G., Zhao G. Kinematics and singularity analysis of a 3-RPS parallel mechanism // *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, ROBIO 2017*. – 2018. – С. 1-6.

147. Wapler M., Urban V., Weisener T., Stallkamp J., Dürr M., Hiller A. A Stewart platform for precision surgery // Transactions of the Institute of Measurement and Control. – 2003. – T. 25, № 4. – C. 329–334.

148. Wen K., Harton D., Laliberté T., Gosselin C. Kinematically redundant (6+3)-dof hybrid parallel robot with large orientational workspace and remotely operated gripper // Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation. – 2019.

149. Wenger P., Chablat D. Kinematic analysis of a new parallel machine tool: The Orthoglide // Advances in Robot Kinematics. – 2000. – C. 305–314.

150. Wenger P., Chablat D. Kinetostatic analysis and solution classification of a planar tensegrity mechanism // Robotica. – 2019. – T. 37, No. Special Issue 7. – C. 1214-1224.

151. Wu J., Yin Z. A Novel 4-DOF Parallel Manipulator H4 // Parallel Manipulators towards New Applications / Huapeng Wu (Ed.). – IntechOpen, 2008. – C. 405-448.

152. Yime E., Moreno H., Saltaren R. A novel 6 DOF parallel robot with decoupled translation and rotation // 13th World Congress in Mechanism and Machine Science. – Guanajuato, Mexico, 2011. – C. 1-6

153. Zabalza I., Ros J., Gil J., Pintor J.M., Jimenez J.M. TRI-SCOTT. A new kinematic structure for a 6-dof decoupled parallel manipulator // Proceedings of the Workshop on fundamental issues and future research directions for parallel mechanisms and manipulator. – Quebec City, Canada, 2002. – C. 12-15.

154. Zanganeh K.E., Angeles J. Instantaneous kinematics and design of a novel redundant parallel manipulator // Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation. – San Diego, CA, USA, 1994. – C. 3043–48.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Алгоритм программы для определения кинетической энергии механизма, собственных частот и отработка заданного закона управления поступательным механизмом в MAPLE 17.0

```

> restart;
> with(RealDomain) : with(LinearAlgebra) : with(linalg) :
> #===== НАЧАЛО =====
>
> #=====Дифференцирование уравнений связи=====
> F1 := (x - q1)2 + y2 + z2 - L2;
> F2 := x2 + (y - q2)2 + z2 - L2;
> F3 := x2 + y2 + (z - q3)2 - L2;
> #=====
> F1x := diff(F1, x); F1y := diff(F1, y); F1z := diff(F1, z);
      F1x := 2x - 2q1
      F1y := 2y
      F1z := 2z
      (1)
> F1q1 := diff(F1, q1); F1q11 := diff(F1q1, q1);
      F1q1 := -2x + 2q1
      F1q11 := 2
      (2)
> F2x := diff(F2, x); F2y := diff(F2, y); F2z := diff(F2, z);
      F2x := 2x
      F2y := 2y - 2q2
      F2z := 2z
      (3)
> F2q2 := diff(F2, q2); F1q22 := diff(F2q2, q2);
      F2q2 := -2y + 2q2
      F1q22 := 2
      (4)
> F3x := diff(F3, x); F3y := diff(F3, y); F3z := diff(F3, z);
      F3x := 2x
      F3y := 2y
      F3z := 2z - 2q3
      (5)
> F3q3 := diff(F3, q3); F3q33 := diff(F3q3, q3);
      F3q3 := -2z + 2q3
      F3q33 := 2
      (6)
> #=====
> C :=  $\begin{bmatrix} F1x & F1y & F1z \\ F2x & F2y & F2z \\ F3x & F3y & F3z \end{bmatrix}$ ;
      C :=  $\begin{bmatrix} 2x - 2q1 & 2y & 2z \\ 2x & 2y - 2q2 & 2z \\ 2x & 2y & 2z - 2q3 \end{bmatrix}$ 
      (7)
> D1 :=  $\begin{bmatrix} F1q1 & 0 & 0 \\ 0 & F2q2 & 0 \\ 0 & 0 & F3q3 \end{bmatrix}$ ;
      D1 :=  $\begin{bmatrix} -2x + 2q1 & 0 & 0 \\ 0 & -2y + 2q2 & 0 \\ 0 & 0 & -2z + 2q3 \end{bmatrix}$ 
      (8)

```

```

> #=====
> q1 := x - sqrt(L^2 - y^2 - z^2);
> q2 := y - sqrt(L^2 - x^2 - z^2);
> q3 := z - sqrt(L^2 - x^2 - y^2);
> #=====
> x := 0.200 : y := 0.130 : z := 0.100 : L := 0.300 : m := 0.5 :
> #=====
> q1; q2; q3;
                                     -0.0511971337
                                     -0.0700000000
                                     -0.0819340540
(9)

> C;
                                     [ 0.5023942674   0.260   0.200 ]
                                     [ 0.400   0.4000000000   0.200 ]
                                     [ 0.400   0.260   0.3638681080 ]
(10)

> D1;
                                     [ -0.5023942674   0   0 ]
                                     [ 0   -0.4000000000   0 ]
                                     [ 0   0   -0.3638681080 ]
(11)

>
> E := evalf(C^-1);
                                     [ 4.98777230839017  -2.27166043243463  -1.49291010464459 ]
E := [ -3.49486220374558   5.48139281599492  -1.09189597470814 ]
      [ -2.98582020928918  -1.41946476712059   5.16961215870546 ]
(12)

>
> Su := evalm(E & * (-D1));
                                     [ 2.50582821483169  -0.908664172973851  -0.543222375191109 ]
Su := [ -1.75579873651471   2.19255712639797  -0.397306122449868 ]
      [ -1.50005895663395  -0.567785906848234   1.88105699528195 ]
(13)

```

```

> #=====Колесательный закон движения входных звеньев=====
> Q := matrix(3, 1) :
> Q[1, 1] := XT1 : Q[2, 1] := YT1 : Q[3, 1] := ZT1 :
> Q1 := evalm(Q);
                                     [ XT1 ]
Q1 := [ YT1 ]
      [ ZT1 ]
(14)

> Su2 := (evalm(Su & * Q));
                                     [ 2.50582821483169 XT1 - 0.908664172973851 YT1 - 0.543222375191109 ZT1 ]
Su2 := [ -1.75579873651471 XT1 + 2.19255712639797 YT1 - 0.397306122449868 ZT1 ]
      [ -1.50005895663395 XT1 - 0.567785906848234 YT1 + 1.88105699528195 ZT1 ]
(15)
> #=====

```

```

> #Кинетическая энергия
> #=====
> a11 := evalf(Su[1, 1]); a12 := evalf(Su[1, 2]); a13 := evalf(Su[1, 3]);
      a11 := 2.50582821483169
      a12 := -0.908664172973851
      a13 := -0.543222375191109
(16)
> a21 := evalf(Su[2, 1]); a22 := evalf(Su[2, 2]); a23 := evalf(Su[2, 3]);
      a21 := -1.75579873651471
      a22 := 2.19255712639797
      a23 := -0.397306122449868
(17)
> a31 := evalf(Su[3, 1]); a32 := evalf(Su[3, 2]); a33 := evalf(Su[3, 3]);
      a31 := -1.50005895663395
      a32 := -0.567785906848234
      a33 := 1.88105699528195
(18)
> #=====
> T :=  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot [(xx1)^2 + (yy1)^2 + (zz1)^2]$ ;
> xx1 := Su2[1];
      xx1 := 2.50582821483169 XT1 - 0.908664172973851 YT1 - 0.543222375191109 ZT1
(19)
> yy1 := Su2[2];
      yy1 := -1.75579873651471 XT1 + 2.19255712639797 YT1 - 0.397306122449868 ZT1
(20)
> zz1 := Su2[3];
      zz1 := -1.50005895663395 XT1 - 0.567785906848234 YT1 + 1.88105699528195 ZT1
(21)
> T;
[0.2500000000 (2.50582821483169 XT1 - 0.908664172973851 YT1 - 0.543222375191109 ZT1)2
+ 0.2500000000 (-1.75579873651471 XT1 + 2.19255712639797 YT1
- 0.397306122449868 ZT1)2 + 0.2500000000 (-1.50005895663395 XT1
- 0.567785906848234 YT1 + 1.88105699528195 ZT1)2]
(22)
> T_XT1 := evalf(diff(T, XT1));
      T_XT1 := [5.80609055938548 XT1 - 2.63746650984612 YT1 - 1.74266438029318 ZT1]
(23)
> T_YT1 := evalf(diff(T, YT1));
      T_YT1 := [-2.63746650984612 XT1 + 2.97767908389012 YT1 - 0.722773655872230 ZT1]
(24)
> T_ZT1 := evalf(diff(T, ZT1));
      T_ZT1 := [-1.74266438029318 XT1 - 0.722773655872230 YT1 + 1.99565906167179 ZT1]
(25)
> #=====
> aa11 := 5.80609055938548 : aa12 := -1.74266438029318 : aa13 := -1.74266438029318 :
> aa21 := -2.63746650984612 : aa22 := 2.97767908389012 : aa23 := -0.722773655872230 :
> aa31 := -1.74266438029318 : aa32 := -0.722773655872230 : aa33 := 1.99565906167179 :
>
> #=====
> c11 := 1000 : c22 := 1000 : c33 := 1000 :
>
> #=====Частотный определитель Δk=====
> K := matrix([[c11 - aa11·k2, aa12·k2, aa13·k2], [aa21·k2, c22 - aa22·k2, aa23·k2], [aa31·k2, aa32
·k2, c33 - aa33·k2]]);

```

$$K := \begin{bmatrix} 1000 - 5.80609055938548 k^2 & -1.74266438029318 k^2 & -1.74266438029318 k^2 \\ -2.63746650984612 k^2 & 1000 - 2.9776790838901 k^2 & -0.722773655872230 k^2 \\ -1.74266438029318 k^2 & -0.722773655872230 k^2 & 1000 - 1.99565906167179 k^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

```
> det(K);
```

$$1000000000 - 1.077942870 \cdot 10^7 k^2 + 26662.58407 k^4 - 18.77085259 k^6 \quad (27)$$

```
> #=====
> KK := solve(det(K));
KK := -11.47541916, 11.47541916, -23.26243816, 23.26243816, -27.34224756, 27.34224756 \quad (28)
```

```
> #=====Собственные значения круговых частот=====
> k1 := KK[2]; k2 := KK[4]; k3 := KK[6];
k1 := 11.47541916
k2 := 23.26243816
k3 := 27.34224756 \quad (29)
```

```
> #=====Период колебаний=====
> tau1 := 2*pi/k1; tau2 := 2*pi/k2; tau3 := 2*pi/k3;
tau1 := 0.5475342748
tau2 := 0.2701000328
tau3 := 0.2297976892 \quad (30)
```

```
> #=====Частота колебаний=====
> nu1 := 1/tau1; nu2 := 1/tau2; nu3 := 1/tau3;
nu1 := 1.826369683
nu2 := 3.702332020
nu3 := 4.351653855 \quad (31)
```

```
> #=====
> XT := A1*sin(k1*t); XT1 := A1*k1*cos(k1*t); XT2 := -A1*k1^2*sin(k1*t);
> YT := A2*sin(k2*t); YT1 := A2*k2*cos(k2*t); YT2 := -A2*k2^2*sin(k2*t);
> ZT := A3*sin(k3*t); ZT1 := A3*k3*cos(k3*t); ZT2 := -A3*k3^2*sin(k3*t);
```

```
> #===== Коэффициенты обратных связей =====
> Hgx := evalf(sqrt(2)/tau1); Hglx := evalf(1/tau1^2);
Hgx := 2.582876775
Hglx := 3.335626219 \quad (32)
```

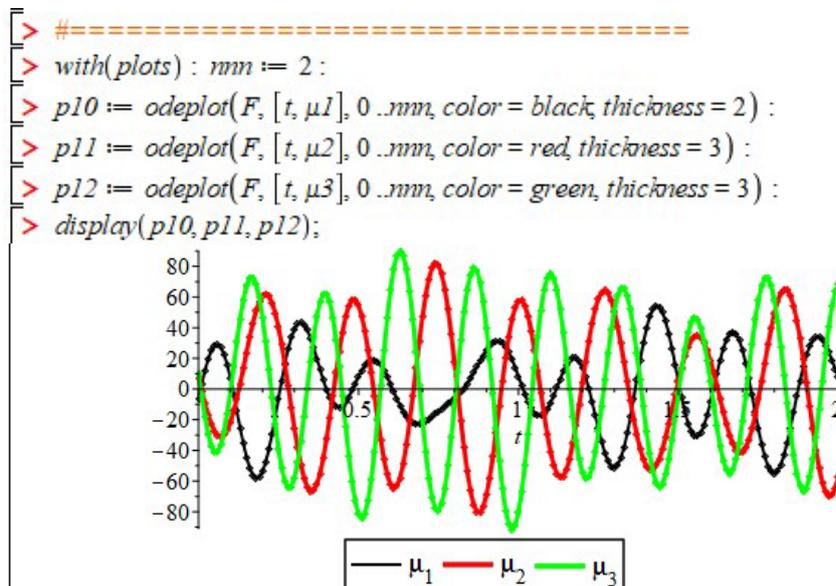
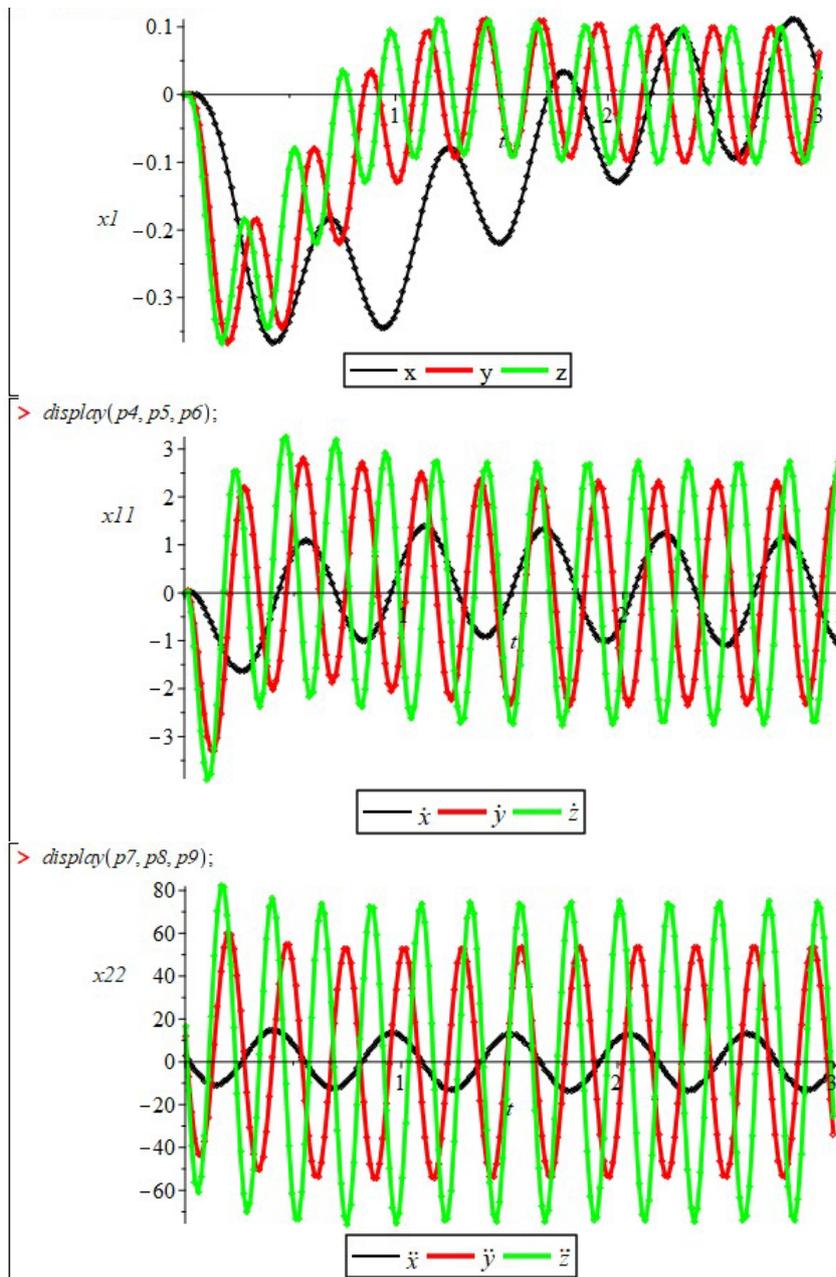
```
> Hgy := evalf(sqrt(2)/tau2); Hgly := evalf(1/tau2^2);
Hgy := 5.235888154
Hgly := 13.70726238 \quad (33)
```

```
> Hgz := evalf(sqrt(2)/tau3); Hglz := evalf(1/tau3^2);
```

```

                                Hgz := 6.154167899
                                Hglz := 18.93689127
(34)
> #=====
> f1 :=  $\frac{d}{dt} x1(t) = x11(t)$  :
> f2 :=  $\frac{d}{dt} x11(t) = x22(t)$  :
> f3 :=  $x22(t) = XT2 + Hgx \cdot (XT1 - x11(t)) + Hglx \cdot (XT - x1(t))$  :
> f4 :=  $\frac{d}{dt} y1(t) = y11(t)$  :
> f5 :=  $\frac{d}{dt} y11(t) = y22(t)$  :
> f6 :=  $y22(t) = YT2 + Hgy \cdot (YT1 - y11(t)) + Hgly \cdot (YT - y1(t))$  :
> f7 :=  $\frac{d}{dt} z1(t) = z11(t)$  :
> f8 :=  $\frac{d}{dt} z11(t) = z22(t)$  :
> f9 :=  $z22(t) = ZT2 + Hgz \cdot (ZT1 - z11(t)) + Hglz \cdot (ZT - z1(t))$  :
> #=====
> A1 := 0.1 : A2 := 0.1 : A3 := 0.1 : m := 0.5 :
> #=====
> Ax :=  $\frac{P1 \cdot F1x}{m}$  :
> Ay :=  $\frac{P2 \cdot F2x}{m}$  :
> Az :=  $\frac{P3 \cdot F3x}{m}$  :
> #===== Управляющие силы  $\mu_i$  =====
>  $\mu1 := m \cdot x22(t) \cdot Su[1, 1] + m \cdot y22(t) \cdot Su[1, 2] + m \cdot z22(t) \cdot Su[1, 3]$  :
>  $\mu2 := m \cdot x22(t) \cdot Su[2, 1] + m \cdot y22(t) \cdot Su[2, 2] + m \cdot z22(t) \cdot Su[2, 3]$  :
>  $\mu3 := m \cdot x22(t) \cdot Su[3, 1] + m \cdot y22(t) \cdot Su[3, 2] + m \cdot z22(t) \cdot Su[3, 3]$  :
> #=====
>
> fens := {x1(t), y1(t), z1(t), x11(t), y11(t), z11(t), x22(t), y22(t), z22(t)} :
> ics := x1(0) = 0, y1(0) = 0, z1(0) = 0, x11(0) = 0, y11(0) = 0, z11(0) = 0, x22(0) = 0, y22(0) = 0, z22(0)
= 0 :
> F := dsolve({f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8, f9, ics}, fens, numeric);
                                F := proc(x_rif45_dae) ... end proc
(35)
>
> with(plots) : nmn := 3 :
> p1 := odeplot(F, [t, x1(t)], 0..nmn, color = black, thickness = 2) :
> p2 := odeplot(F, [t, y1(t)], 0..nmn, color = red, thickness = 3) :
> p3 := odeplot(F, [t, z1(t)], 0..nmn, color = green, thickness = 3) :
> p4 := odeplot(F, [t, x11(t)], 0..nmn, color = black, thickness = 2) :
> p5 := odeplot(F, [t, y11(t)], 0..nmn, color = red, thickness = 3) :
> p6 := odeplot(F, [t, z11(t)], 0..nmn, color = green, thickness = 3) :
> p7 := odeplot(F, [t, x22(t)], 0..nmn, color = black, thickness = 2) :
> p8 := odeplot(F, [t, y22(t)], 0..nmn, color = red, thickness = 3) :
> p9 := odeplot(F, [t, z22(t)], 0..nmn, color = green, thickness = 3) :
> display(p1, p2, p3);

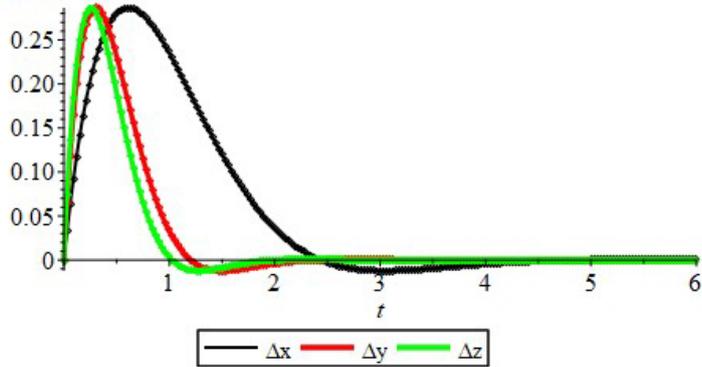
```



```

> #=====
> R1 := A1·sin(k1·t) - x1(t) :
> R2 := A2·sin(k2·t) - y1(t) :
> R3 := A3·sin(k3·t) - z1(t) :
> #=====
> with(plots) : mm := 6 :
> p16 := odeplot(F, [t, R1], 0..mm, color = black, thickness = 2) :
> p17 := odeplot(F, [t, R2], 0..mm, color = red, thickness = 3) :
> p18 := odeplot(F, [t, R3], 0..mm, color = green, thickness = 3) :
> display(p16, p17, p18);

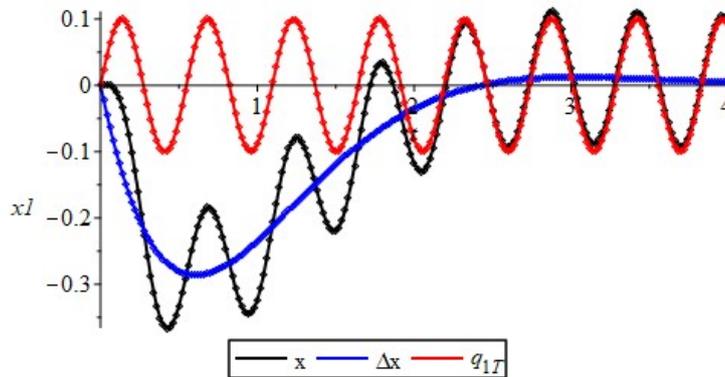
```



```

> #=====
> R11 := x1(t) - A1·sin(k1·t) :
> with(plots) : mm := 4 :
> p33 := odeplot(F, [t, x1(t)], 0..mm, color = black, thickness = 2) :
> p34 := odeplot(F, [t, R11], 0..mm, color = blue, thickness = 2) :
> p35 := odeplot(F, [t, XT], 0..mm, color = red, thickness = 2) :
> display(p33, p34, p35);

```



```

> #=====

```

Алгоритм программы для определения кинетической энергии механизма, собственных частот и обработка заданного закона управления сферическим механизмом в MAPLE 17.0

```

> restart;
> with(RealDomain) : with(LinearAlgebra) : with(linalg) :
> #===== НАЧАЛО =====
> #=====Дифференцирование уравнений связи=====
> F1 := 
$$\frac{\cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta) - \sin(\alpha) \cos(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} + \tan(\varphi11) ;$$

> F2 := 
$$\frac{\sin(\alpha) \sin(\gamma\theta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} - \tan(\varphi21) ;$$

> F3 := 
$$\frac{\sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta) - \cos(\alpha) \sin(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\gamma\theta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta)} + \tan(\varphi31) ;$$

> #=====
> F1 $\alpha$  := diff(F1,  $\alpha$ );
F1 $\alpha$  := 
$$\frac{-\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta) - \cos(\alpha) \cos(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} + \frac{(\cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta) - \sin(\alpha) \cos(\gamma\theta)) \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^2 \cos(\beta)}$$
 (1)
> F1 $\beta$  := diff(F1,  $\beta$ );
F1 $\beta$  := 
$$\sin(\gamma\theta) + \frac{(\cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta) - \sin(\alpha) \cos(\gamma\theta)) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)^2}$$
 (2)
> F1 $\gamma$  := diff(F1,  $\gamma\theta$ );
F1 $\gamma$  := 
$$\frac{\sin(\alpha) \sin(\gamma\theta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}$$
 (3)
> F1 $\varphi11$  := diff(F1,  $\varphi11$ );
F1 $\varphi11$  := 
$$1 + \tan(\varphi11)^2$$
 (4)
> F2 $\alpha$  := diff(F2,  $\alpha$ );
F2 $\alpha$  := 
$$\frac{\cos(\alpha) \sin(\gamma\theta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} + \frac{(\sin(\alpha) \sin(\gamma\theta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta)) \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^2 \cos(\beta)}$$
 (5)
>
> F2 $\beta$  := diff(F2,  $\beta$ );
F2 $\beta$  := 
$$\cos(\gamma\theta) + \frac{(\sin(\alpha) \sin(\gamma\theta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta)) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)^2}$$
 (6)
> F2 $\gamma$  := diff(F2,  $\gamma\theta$ );
F2 $\gamma$  := 
$$\frac{\sin(\alpha) \cos(\gamma\theta) - \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}$$
 (7)
> F2 $\varphi21$  := diff(F2,  $\varphi21$ );
F2 $\varphi21$  := 
$$-1 - \tan(\varphi21)^2$$
 (8)
> F3 $\alpha$  := diff(F3,  $\alpha$ );
F3 $\alpha$  := 
$$\frac{\sin(\alpha) \sin(\gamma\theta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\gamma\theta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta)}$$
 (9)
- 
$$\frac{(\sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta) - \cos(\alpha) \sin(\gamma\theta)) (\cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta) - \sin(\alpha) \cos(\gamma\theta))}{(\cos(\alpha) \cos(\gamma\theta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta))^2}$$

>
> F3 $\beta$  := diff(F3,  $\beta$ );
F3 $\beta$  := 
$$\frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\gamma\theta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta)}$$
 (10)
- 
$$\frac{(\sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta) - \cos(\alpha) \sin(\gamma\theta)) \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma\theta)}{(\cos(\alpha) \cos(\gamma\theta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta))^2}$$


```

$$\begin{aligned}
 &> F3\gamma := \text{diff}(F3, \gamma\theta); \\
 &F3\gamma := \frac{-\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta) - \cos(\alpha) \cos(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\gamma\theta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta)} - \frac{(\sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta) - \cos(\alpha) \sin(\gamma\theta))^2}{(\cos(\alpha) \cos(\gamma\theta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta))^2}
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 &> F3\varphi31 := \text{diff}(F3, \varphi31); \\
 &F3\varphi31 := 1 + \tan(\varphi31)^2
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 &> \varphi11 := -\arctan\left(\frac{\cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta) - \sin(\alpha) \cos(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}\right); \\
 &> \varphi21 := \arctan\left(\frac{\sin(\alpha) \sin(\gamma\theta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}\right); \\
 &> \varphi31 := -\arctan\left(\frac{\sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma\theta) - \cos(\alpha) \sin(\gamma\theta)}{\cos(\alpha) \cos(\gamma\theta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma\theta)}\right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \alpha := 0.01 : \beta := 0.013 : \gamma\theta := 0.012 : \\
 &> \\
 &> \\
 &>
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> C := \begin{bmatrix} F1\alpha & F1\beta & F1\gamma \\ F2\alpha & F2\beta & F2\gamma \\ F3\alpha & F3\beta & F3\gamma \end{bmatrix}; \\
 &C := \begin{bmatrix} -1.000112509 & 0.01187172690 & 0.01311980760 \\ 0.01200192620 & 1.000098568 & 0.009844453313 \\ 0.01300276562 & 0.01000089719 & -1.000140910 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 &> DI := \begin{bmatrix} F1\varphi11 & 0 & 0 \\ 0 & F2\varphi21 & 0 \\ 0 & 0 & F3\varphi31 \end{bmatrix}; \\
 &DI := \begin{bmatrix} 1.000096913 & 0 & 0 \\ 0 & -1.000172129 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000140910 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 &> C; \\
 &C := \begin{bmatrix} -1.000112509 & 0.01187172690 & 0.01311980760 \\ 0.01200192620 & 1.000098568 & 0.009844453313 \\ 0.01300276562 & 0.01000089719 & -1.000140910 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 &> DI; \\
 &DI := \begin{bmatrix} 1.000096913 & 0 & 0 \\ 0 & -1.000172129 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000140910 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 &> E := C^{-1}; \\
 &E := \begin{bmatrix} -0.999912502724529 & 0.0119995040459143 & -0.0129986994484818 \\ 0.0121264629459813 & 0.999657507035781 & 0.00999876959110044 \\ -0.0128785376894877 & 0.0101520681638169 & -0.999928122503844 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 &> Su := \text{evalm}(E \&*(-DI)); \\
 &Su := \begin{bmatrix} 1.00000940724491 & 0.0120015695085462 & 0.0130005310952211 \\ -0.0121276381578848 & 0.999829577082810 & -0.0100001785177235 \\ 0.0128797857872108 & 0.0101538156291578 & 1.00006902237559 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{19}$$

```

> #=====Колебательный закон движения входных звеньев=====
> Q := matrix(3, 1) :
> Q[1, 1] := XT1 : Q[2, 1] := YT1 : Q[3, 1] := ZT1 :
> Q1 := evalm(Q);

```

$$Q1 := \begin{bmatrix} XT1 \\ YT1 \\ ZT1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

```

> Su2 := (evalm(Su&*Q));

```

$$Su2 := \begin{bmatrix} 1.00000940724491 XT1 + 0.0120015695085462 YT1 + 0.0130005310952211 ZT1 \\ -0.0121276381578848 XT1 + 0.999829577082810 YT1 - 0.0100001785177235 ZT1 \\ 0.0128797857872108 XT1 + 0.0101538156291578 YT1 + 1.00006902237559 ZT1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

```

> #=====
> #Кинетическая энергия
> #=====
> a11 := Su[1, 1]; a12 := Su[1, 2]; a13 := Su[1, 3];

```

$$\begin{aligned} a11 &:= 1.00000940724491 \\ a12 &:= 0.0120015695085462 \\ a13 &:= 0.0130005310952211 \end{aligned} \quad (22)$$

```

> a21 := Su[2, 1]; a22 := Su[2, 2]; a23 := Su[2, 3];

```

$$\begin{aligned} a21 &:= -0.0121276381578848 \\ a22 &:= 0.999829577082810 \\ a23 &:= -0.0100001785177235 \end{aligned} \quad (23)$$

```

> a31 := Su[3, 1]; a32 := Su[3, 2]; a33 := Su[3, 3];

```

$$\begin{aligned} a31 &:= 0.0128797857872108 \\ a32 &:= 0.0101538156291578 \\ a33 &:= 1.00006902237559 \end{aligned} \quad (24)$$

```

> #=====
> T := 1/2 * 0.5 * [Jx * cx^2 + Jy * cy^2 + Jz * cz^2];
> #=====
> cx := Su2[1];

```

$$cx := 1.00000940724491 XT1 + 0.0120015695085462 YT1 + 0.0130005310952211 ZT1 \quad (25)$$

```

> cy := Su2[2];

```

$$cy := -0.0121276381578848 XT1 + 0.999829577082810 YT1 - 0.0100001785177235 ZT1 \quad (26)$$

```

> cz := Su2[3];

```

$$cz := 0.0128797857872108 XT1 + 0.0101538156291578 YT1 + 1.00006902237559 ZT1 \quad (27)$$

```

> #=====
> Jx := mB * lB^2 / 2; Jy := mB * lB^2 / 2; Jz := mB * R^2 / 2;

```

$$\begin{aligned} Jx &:= \frac{mB lB^2}{2} \\ Jy &:= \frac{mB lB^2}{2} \\ Jz &:= \frac{mB R^2}{2} \end{aligned} \quad (28)$$

```

> Jz := mB * R^2 / 2; Jx := mB * R^2 / 12; Jy := mB * R^2 / 12;

```

$$\begin{aligned} Jz &:= \frac{mB R^2}{2} \\ Jx &:= \frac{mB R^2}{12} \end{aligned}$$

$$J_y := \frac{mBR^2}{12} \quad (29)$$

> mD := 0.5 : mB := 0.5 : l := 0.1 : lB := 0.115 : R := 0.1 :
 > Jx, Jy, Jz;

$$\begin{aligned} & 0.0004166666667 \\ & 0.0004166666667 \\ & 0.002500000000 \end{aligned} \quad (30)$$

> =====

> T_XT1 := diff(T, XT1);
 $T_XT1 := [0.000208575255791082 \cdot XT1 + 1.37663521074415 \cdot 10^{-7} \cdot YT1 + 0.0000188345792976906 \cdot ZT1]$ (31)

> T_YT1 := diff(T, YT1);
 $T_YT1 := [1.37663521074415 \cdot 10^{-7} \cdot XT1 + 0.000208421212714830 \cdot YT1 + 0.0000106426356946068 \cdot ZT1]$ (32)

> T_ZT1 := diff(T, ZT1);
 $T_ZT1 := [0.0000188345792976906 \cdot XT1 + 0.0000106426356946068 \cdot YT1 + 0.00125022860718142 \cdot ZT1]$ (33)

> =====

> aa11 := 0.000208575255791082 : aa12 := 1.37663521074415 $\cdot 10^{-7}$: aa13 := 0.0000188345792976906 :

> aa21 := 1.37663521074415 $\cdot 10^{-7}$: aa22 := 0.00020842121271483 : aa23 := 0.0000106426356946068 :

> aa31 := 0.0000188345792976906 : aa32 := 0.0000106426356946068 : aa33 := 0.0012502286071814 :

> =====

> c11 := 1000 : c22 := 1000 : c33 := 1000 :

> =====Частотный определитель $\Delta \dot{k}$ =====

> K := matrix([[c11 - aa11 $\cdot k^2$, aa12 $\cdot k^2$, aa13 $\cdot k^2$], [aa21 $\cdot k^2$, c22 - aa22 $\cdot k^2$, aa23 $\cdot k^2$], [aa31 $\cdot k^2$, aa32 $\cdot k^2$, c33 - aa33 $\cdot k^2$]]);

$$K := \begin{bmatrix} 1000 - 0.000208575255791082 \cdot k^2 & 1.376635211 \cdot 10^{-7} \cdot k^2 & 0.0000188345792976906 \cdot k^2 \\ 1.376635211 \cdot 10^{-7} \cdot k^2 & 1000 - 0.00020842121271483 \cdot k^2 & 0.0000106426356946068 \cdot k^2 \\ 0.0000188345792976906 \cdot k^2 & 0.0000106426356946068 \cdot k^2 & 1000 - 0.0012502286071814 \cdot k^2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

> det(K);

$$1000000000 - 1667.225076 \cdot k^2 + 0.0005643443956 \cdot k^4 - 5.425168365 \cdot 10^{-11} \cdot k^6 \quad (35)$$

> =====

> KK := solve(det(K));
 KK := -894.1848497, 894.1848497, -2189.458353, 2189.458353, -2192.953353, 2192.953353 (36)

> =====Собственные значения круговых частот=====

> k1 := KK[2]; k2 := KK[4]; k3 := KK[6];
 $k1 := 894.1848497$
 $k2 := 2189.458353$
 $k3 := 2192.953353$ (37)

> =====Период колебаний=====

> $\tau1 := \frac{2 \cdot \pi}{k1}$; $\tau2 := \frac{2 \cdot \pi}{k2}$; $\tau3 := \frac{2 \cdot \pi}{k3}$;
 $\tau1 := 0.007026718588$
 $\tau2 := 0.002869744154$
 $\tau3 := 0.002865170524$ (38)

> =====Частота колебаний=====

> $v1 := \frac{1}{\tau1}$; $v2 := \frac{1}{\tau2}$; $v3 := \frac{1}{\tau3}$;
 $v1 := 142.3139389$
 $v2 := 348.4631195$
 $v3 := 349.0193661$ (39)

> ===== Управляющий сигнал q_1 =====

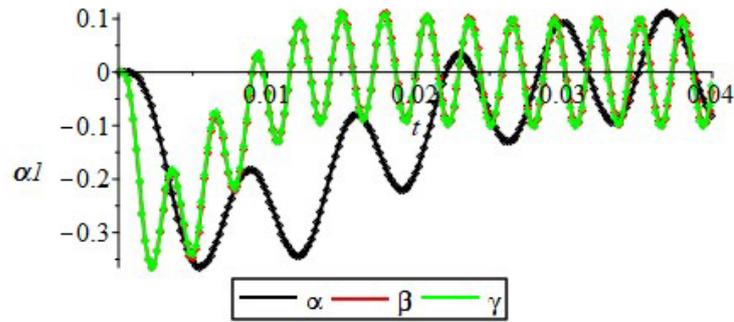
> XT := A1 $\cdot \sin(k1 \cdot t)$: XT1 := A1 k1 $\cos(k1 \cdot t)$: XT2 := -A1 k1² $\sin(k1 \cdot t)$:

> YT := A2 $\cdot \sin(k2 \cdot t)$: YT1 := A2 k2 $\cos(k2 \cdot t)$: YT2 := -A2 k2² $\sin(k2 \cdot t)$:

```

> ZT := A3 · sin(k3 · t) : ZT1 := A3 k3 cos(k3 · t) : ZT2 := -A3 k32 sin(k3 · t) :
> #===== Коэффициенты обратных связей =====
> Hgα := evalf( (sqrt(2)/τ1) ); Hg1α := evalf( (1/τ12) );
                                     Hgα := 201.2623025
                                     Hg1α := 20253.25722
(40)
> Hgβ := evalf( (sqrt(2)/τ2) ); Hg1β := evalf( (1/τ22) );
                                     Hgβ := 492.8012695
                                     Hg1β := 121426.5456
(41)
> Hgγ := evalf( (sqrt(2)/τ3) ); Hg1γ := evalf( (1/τ32) );
                                     Hgγ := 493.5879209
                                     Hg1γ := 121814.5179
(42)
> #===== Дифференциальные уравнения движения =====
> f1 := d/dt αl(t) = α11(t) :
> f2 := d/dt αl(t) = α22(t) :
> f3 := α22(t) = XT2 + Hgα · ( XT1 - ( α11(t) · cos(γ0) + β11(t) · sin(γ0) ) / cos(β) ) + Hg1α · ( XT - αl(t) ) :
> f4 := d/dt βl(t) = β11(t) :
> f5 := d/dt β11(t) = β22(t) :
> f6 := β22(t) = YT2 + Hgβ · ( YT1 - ( β11(t) · cos(γ0) - α11(t) · sin(γ0) ) ) + Hg1β · ( YT - βl(t) ) :
> f7 := d/dt γl(t) = γ11(t) :
> f8 := d/dt γ11(t) = γ22(t) :
> f9 := γ22(t) = ZT2 + Hgγ · ( ZT1 - ( tan(β) · ( α11(t) · cos(γ0) + β11(t) · sin(γ) ) + γ11(t) ) ) + Hg1γ · ( ZT - γl(t) ) :
> #=====
> A1 := 0.1 : A2 := 0.1 : A3 := 0.1 : m := 0.5 :
> #===== Управляющие силы μj =====
> μ1 := Jx · α22(t) · Su[1, 1] + Jy · β22(t) · Su[1, 2] + Jz · γ22(t) · Su[1, 3] + Jx · β11(t) · γ11(t) - Jy · β11(t) · γ11(t) + Jz · α11(t) · γ11(t) - Jx · α11(t) · γ11(t) + Jy · α11(t) · β11(t) - Jz · α11(t) · β11(t) :
> μ2 := Jx · α22(t) · Su[2, 1] + Jy · β22(t) · Su[2, 2] + Jz · γ22(t) · Su[2, 3] + Jx · β11(t) · γ11(t) - Jy · β11(t) · γ11(t) + Jz · α11(t) · γ11(t) - Jx · α11(t) · γ11(t) + Jy · α11(t) · β11(t) - Jz · α11(t) · β11(t) :
> μ3 := Jx · α22(t) · Su[3, 1] + Jy · β22(t) · Su[3, 2] + Jz · γ22(t) · Su[3, 3] + Jx · β11(t) · γ11(t) - Jy · β11(t) · γ11(t) + Jz · α11(t) · γ11(t) - Jx · α11(t) · γ11(t) + Jy · α11(t) · β11(t) - Jz · α11(t) · β11(t) :
> #=====
> fens := { αl(t), βl(t), γl(t), α11(t), β11(t), γ11(t), α22(t), β22(t), γ22(t) };
      fens := { αl(t), α11(t), α22(t), βl(t), β11(t), β22(t), γl(t), γ11(t), γ22(t) }
(43)
> ics := αl(0) = 0, βl(0) = 0, γl(0) = 0, α11(0) = 0, β11(0) = 0, γ11(0) = 0, α22(0) = 0, β22(0) = 0, γ22(0) = 0 :
> F := dsolve( { f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8, f9, ics }, fens, numeric);
      F := proc(x_rkf45_dae) ... end proc
(44)
> with(plots) : mm := 0.04 :
> p1 := odeplot(F, [t, αl(t)], 0 .. mm, color = black, thickness = 2) :
> p2 := odeplot(F, [t, βl(t)], 0 .. mm, color = red, thickness = 2) :
> p3 := odeplot(F, [t, γl(t)], 0 .. mm, color = green, thickness = 2) :
> display(p1, p2, p3);

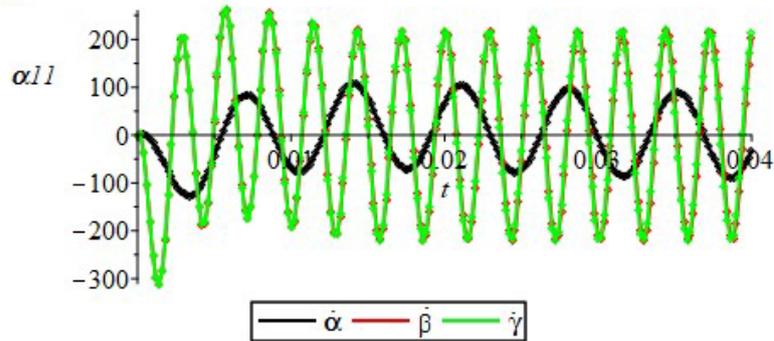
```



```

> with(plots) : mm := 0.04 :
> p4 := odeplot(F, [t, alpha l(t)], 0..mm, color = black, thickness = 2) :
> p5 := odeplot(F, [t, beta l(t)], 0..mm, color = red, thickness = 2) :
> p6 := odeplot(F, [t, gamma l(t)], 0..mm, color = green, thickness = 2) :
> display(p4, p5, p6);

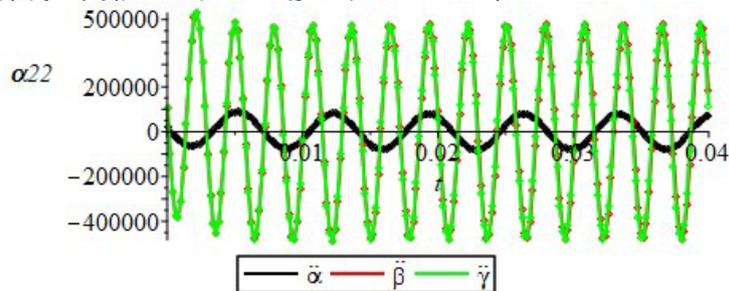
```



```

> with(plots) : mm := 0.04 :
> p7 := odeplot(F, [t, alpha 22(t)], 0..mm, color = black, thickness = 2) :
> p8 := odeplot(F, [t, beta 22(t)], 0..mm, color = red, thickness = 2) :
> p9 := odeplot(F, [t, gamma 22(t)], 0..mm, color = green, thickness = 2) :

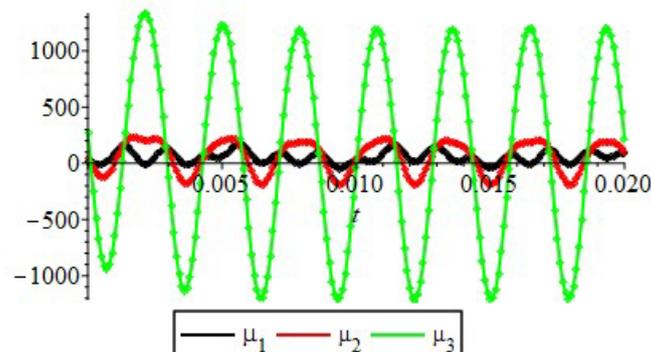
```



```

>
> #=====
> with(plots) : mm := 0.02 :
> p30 := odeplot(F, [t, mu 1], 0..mm, color = black, thickness = 2) :
> p31 := odeplot(F, [t, mu 2], 0..mm, color = red, thickness = 2) :
> p32 := odeplot(F, [t, mu 3], 0..mm, color = green, thickness = 2) :
> display(p30, p31, p32);

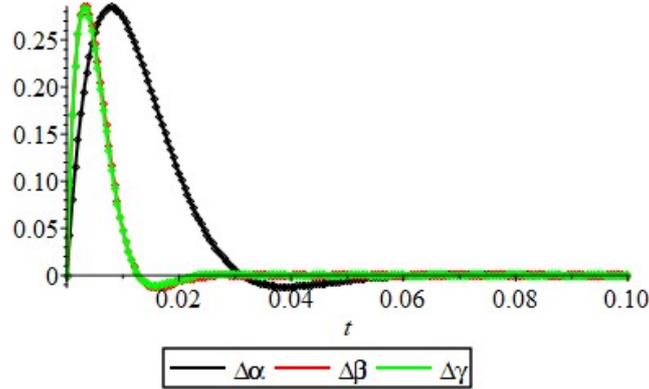
```



```

> R1 := A1·sin(k1·t) - αI(t) :
> R2 := A2·sin(k2·t) - βI(t) :
> R3 := A3·sin(k3·t) - γI(t) :
> #=====
>
> with(plots) : mm := 0.1 :
> p23 := odeplot(F, [t, R1], 0..mm, color = black, thickness = 2) :
> p24 := odeplot(F, [t, R2], 0..mm, color = red, thickness = 2) :
> p25 := odeplot(F, [t, R3], 0..mm, color = green, thickness = 2) :
> display(p23, p24, p25);

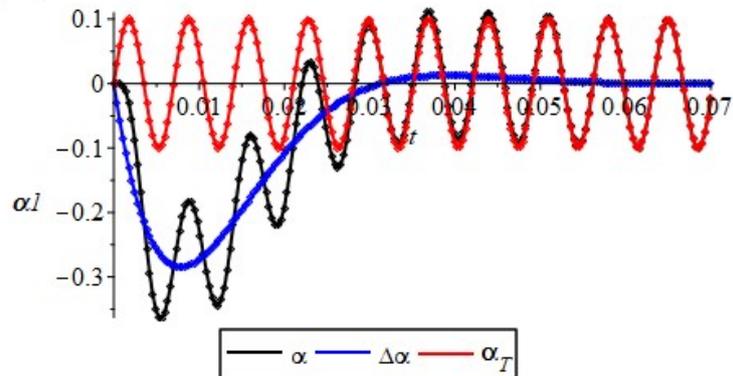
```



```

> #=====
> R1 := αI(t) - A1·sin(k1·t) :
> with(plots) : mm := 0.07 :
> p33 := odeplot(F, [t, αI(t)], 0..mm, color = black, thickness = 2) :
> p34 := odeplot(F, [t, R1], 0..mm, color = blue, thickness = 2) :
> p35 := odeplot(F, [t, XT], 0..mm, color = red, thickness = 2) :
> display(p33, p34, p35);

```



Алгоритм программы для анализа рабочей зоны механизма в MAPLE 17.0

```

> restart;
> with(RealDomain) : # -- выделение вещественных корней
> #[x1, y1, z1, x2, y2, z2, x3, y3, z3] assuming real;
>
> P1 := R - r1 :
> P2 := R - r2 :
> P3 := R - r3 :
>
> # -- начальные условия
> l := 1.6 : R := 2.55 : a := 1.2 : km := 0.76 : n := 12 : h := 0.075 :
>
> r1 := 0 :
> r2 := 0 :
> r3 := 0 :
> ii := 0 :

> for i from 0 to n do i :
  r1 := r1 + h : r2 := 0 :
    for j from 0 to n do j :
      r2 := r2 + h : r3 := 0 :
        for k from 0 to n do k :
          r3 := r3 + h :

          ii := ii + 1 :
          u1 := expand( (P1 - x1)2 + (y1)2 + (z1)2 - a2 ) :
          u2 := expand( (x2)2 + (P2 - y2)2 + (z2)2 - a2 ) :
          u3 := expand( (x3)2 + (y3)2 + (P3 - z3)2 - a2 ) :
          w1 := expand( (x1 - x2)2 + (y1 - y2)2 + (z1 - z2)2 - l2 ) :
          w2 := expand( (x1 - x3)2 + (y1 - y3)2 + (z1 - z3)2 - l2 ) :
          w3 := expand( (x2 - x3)2 + (y2 - y3)2 + (z2 - z3)2 - l2 ) :
          v1 := expand( ( y1 -  $\frac{y2 + y3}{2}$  ) - ( z1 -  $\frac{z2 + z3}{2}$  ) ) :
          v2 := expand( ( x2 -  $\frac{x1 + x3}{2}$  ) - ( z2 -  $\frac{z1 + z3}{2}$  ) ) :
          v3 := expand( ( x3 -  $\frac{x1 + x2}{2}$  ) - ( y3 -  $\frac{y1 + y2}{2}$  ) ) :

          S := solve( {u1, u2, u3, w1, w2, w3, v1, v2, v3}, {x1, y1, z1, x2, y2, z2, x3, y3, z3} ) :
          x11 := subs(S[1], x1) : x12 := subs(S[1], x2) : x13 := subs(S[1], x3) :
          y11 := subs(S[1], y1) : y12 := subs(S[1], y2) : y13 := subs(S[1], y3) :
          z11 := subs(S[1], z1) : z12 := subs(S[1], z2) : z13 := subs(S[1], z3) :

          #----- нормаль -----

```

```

Nx :=  $\frac{1}{3} \cdot (x11 + x12 + x13)$  : Ny :=  $\frac{1}{3} \cdot (y11 + y12 + y13)$  : Nz :=  $\frac{1}{3} \cdot (z11 + z12 + z13)$  :
# -- центр треугольника --
ex := ((y12 - y11) · (z13 - z11) - (y13 - y11) · (z12 - z11)) :
ey := ((x13 - x11) · (z12 - z11) - (x12 - x11) · (z13 - z11)) :
ez := ((x12 - x11) · (y13 - y11) - (y12 - y11) · (x13 - x11)) :
nn :=  $\sqrt{ex^2 + ey^2 + ez^2}$  : ex :=  $\frac{ex}{nn}$  : ey :=  $\frac{ey}{nn}$  : ez :=  $\frac{ez}{nn}$  :
Nx1 := Nx - km · ex : Ny1 := Ny - km · ey : Nz1 := Nz - km · ez :

Mx[ii] := Nx1 :
My[ii] := Ny1 :
Mz[ii] := Nz1 :

Mxx[ii] := Nx1 + 0.1 :
Myy[ii] := Ny1 + 0.1 :
Mzz[ii] := Nz1 + 0.1 :

od: od: od:
> ii;
2197 (1)

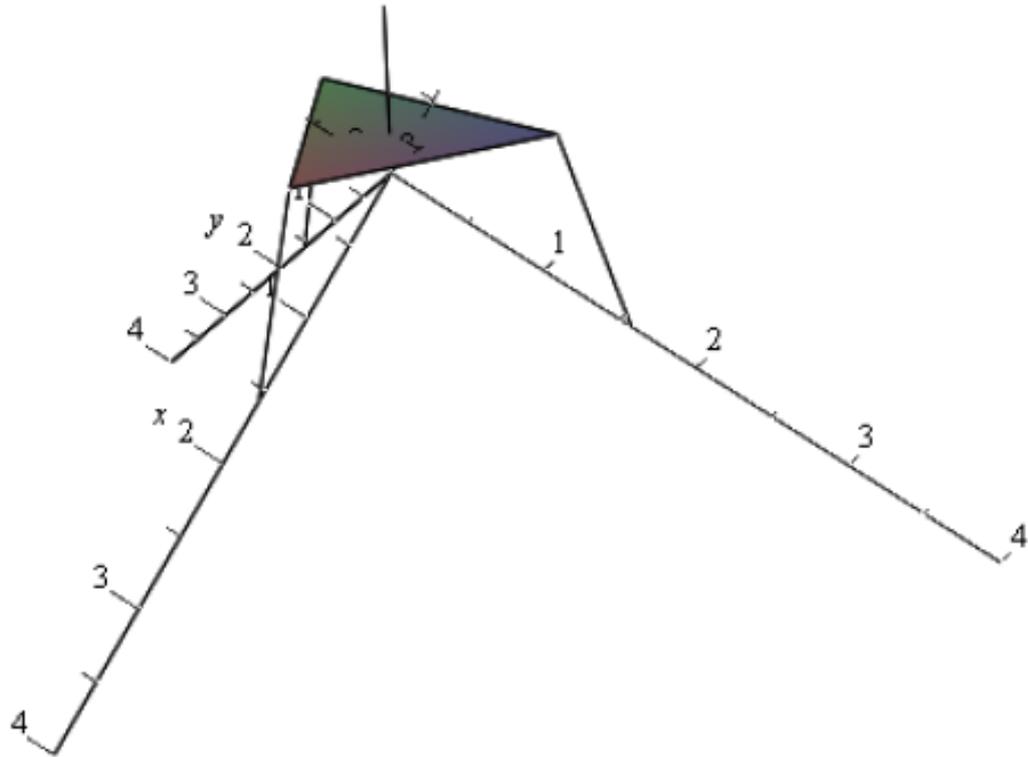
> Mx[1] : My[1] : Mz[1] :
> Mx[2] : My[2] : Mz[2] :
> Mx[3] : My[3] : Mz[3] :
> Mx[4] : My[4] : Mz[4] :
> Mx[5] : My[5] : Mz[5] :
> Mx[6] : My[6] : Mz[6] :
> Mx[7] : My[7] : Mz[7] :
> Mx[8] : My[8] : Mz[8] :
>
> r1, r2, r3;
0.975
0.975
0.975 (2)

> #-----
> #n:=10: m:=10:
> #x11:=x11[n] : x12 := x12[n] : x13 := x13[n] :
> #y11:=y11[m] : y12 := y12[m] : y13 := y13[m] :
> #-----
>
> w := 40 :
> #f1:=Nx1(t) = 0.1 · sin(w · t);
> #f2:=Ny1(t) = 0.1 · sin(w · t);
> #f3:=Nz1(t) = 0.1 · sin(w · t);

> GO := [[0, 0, 0], [4, 0, 0]], [[0, 0, 0], [0, 4, 0]], [[0, 0, 0], [0, 0, 4]],
[[P1, 0, 0], [x11, y11, z11]], [[0, P2, 0], [x12, y12, z12]], [[0, 0, P3], [x13, y13, z13]],
[[x11, y11, z11], [x12, y12, z12], [x13, y13, z13]], [[Nx, Ny, Nz], [Nx1, Ny1, Nz1]], [[Mx,
My, Mz], [Mxx, Myy, Mzz]] :

> with(plots) :
> PLOT3D(POLYGONS(GO));

```

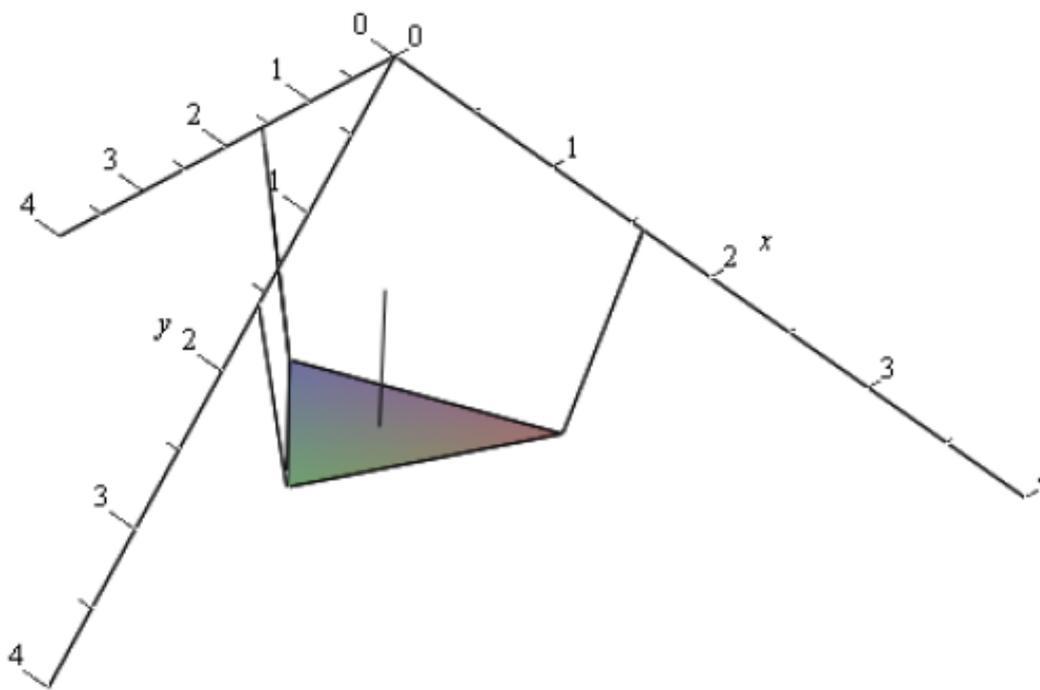


```

> A := PLOT3D(POLYGONS(GO));
                                     A := PLOT3D(...)
> #plots[pointplot3d]({seq([Mz[n], My[n], Mx[n]], n = 1 ..(nn + 4))}),
  display(POLYGONS(GO));
>
> x11 := subs(S[2], x1) : x12 := subs(S[2], x2) : x13 := subs(S[2], x3) :
> y11 := subs(S[2], y1) : y12 := subs(S[2], y2) : y13 := subs(S[2], y3) :
> z11 := subs(S[2], z1) : z12 := subs(S[2], z2) : z13 := subs(S[2], z3) :
> #----- нормаль -----
> Nx := 1/3 * (x11 + x12 + x13) : Ny := 1/3 * (y11 + y12 + y13) : Nz := 1/3 * (z11 + z12 + z13) :
  # -- центр треугольника --
> ex := ((y12 - y11) * (z13 - z11) - (y13 - y11) * (z12 - z11)) :
> ey := ((x13 - x11) * (z12 - z11) - (x12 - x11) * (z13 - z11)) :
> ez := ((x12 - x11) * (y13 - y11) - (y12 - y11) * (x13 - x11)) :
> nn := sqrt(ex^2 + ey^2 + ez^2) : ex := ex/nn : ey := ey/nn : ez := ez/nn :
>
> Nx1 := Nx - km * ex : Ny1 := Ny - km * ey : Nz1 := Nz - km * ez :
> #-----
>
> GO := [[0, 0, 0], [4, 0, 0], [[0, 0, 0], [0, 4, 0]], [[0, 0, 0], [0, 0, 4]],
  [[P1, 0, 0], [x11, y11, z11]], [[0, P2, 0], [x12, y12, z12]], [[0, 0, P3], [x13, y13, z13]],
  [[x11, y11, z11], [x12, y12, z12], [x13, y13, z13]], [[Nx, Ny, Nz], [Nx1, Ny1, Nz1]] :
> PLOT3D(POLYGONS(GO));

```

(3)

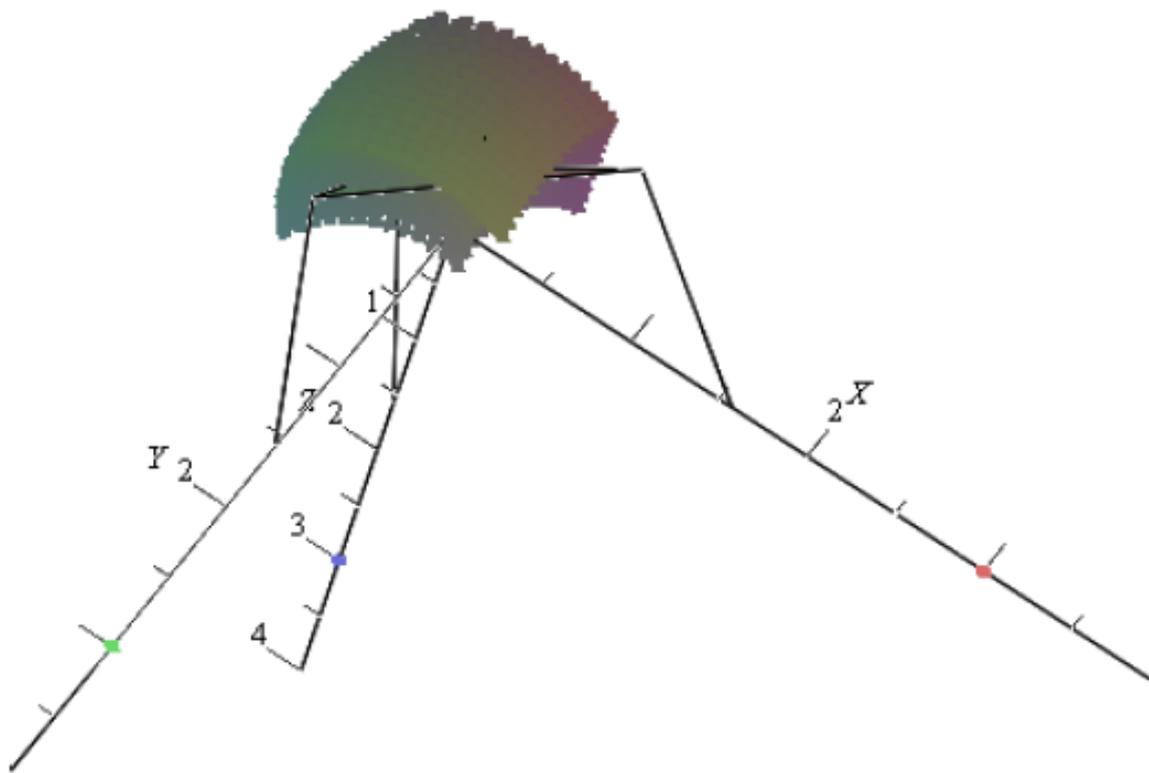


```

> nn := (n + 1)3;
> Mx[nn + 1] := 0 : My[nn + 1] := 0 : Mz[nn + 1] := 0 :
> Mx[nn + 2] := 0 : My[nn + 2] := 0 : Mz[nn + 2] := 3 :
> Mx[nn + 3] := 0 : My[nn + 3] := 3 : Mz[nn + 3] := 0 :
> Mx[nn + 4] := 3 : My[nn + 4] := 0 : Mz[nn + 4] := 0 :
>
> H := plots[pointplot3d]({seq([Mz[n], My[n], Mx[n]], n = 1 .. (nn + 4))});
      H := PLOT3D(...)
> display({A, H}, labels = [X, Y, Z]);

```

(4)



СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в научных периодических изданиях из списка ВАК

1. **Носова Н.Ю.** Синтез механизмов параллельной структуры с кинематической развязкой / **Н.Ю. Носова**, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, А.Н. Терехова // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2014. – №5. – С. 34 – 40.
2. **Носова Н.Ю.** Синтез и кинематический анализ механизмов параллельной структуры с развязкой поступательных движений / **Н.Ю. Носова**, В.А. Глазунов, С.Ю. Мисюрин, Д.Н. Филиппов // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. – 2015. – №2. – С. 109 – 113.
3. **Носова Н.Ю.** Динамический анализ манипулятора параллельной структуры / **Н.Ю. Носова**, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин // Дизайн и технологии. – 2015. – №47. – С. 83 -94.
4. **Носова Н.Ю.** Динамика манипулятора параллельной структуры с учётом закона управления / **Н.Ю. Носова**, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин // Машиностроение и инженерное образование. – 2015. – № 4. – С. 13 – 20.
5. **Носова Н.Ю.** Динамический анализ сферической части манипулятора параллельной структуры с учетом закона управления / **Н.Ю. Носова**, С.В. Хейло, В.А. Глазунов, А.В. Царьков // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2018. – №3. – С. 3 – 11.
DOI: 10.7868/S023571191803001X

Публикации в зарубежных научных изданиях, индексируемых базами

Scopus Web of Science

1. **Nosova N.Y.**, Glazunov V.A., Palochkin S.V., Terekhova A.N. Synthesis of mechanisms of parallel structure with kinematic interchange // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Т. 43, №5. – С. 378 – 383. **DOI:** 10.3103/S1052618814050136.
2. **Nosova N.Yu.**, Glazunov V.A., Misyurin S.Yu., Filippov D.N. Synthesis and the kinematic analysis of mechanisms of parallel structure with the outcome of progress // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2015. – №2. – P. 109 – 113.
3. Glazunov V., **Nosova N.**, Ceccarelli M. Kinematics of a 6 DOFs manipulator with interchangeable translation and rotation motions // Recent Advances in Mechanism Design for Robotics. Proceedings of the 3rd IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics. Mechanisms and Machine Science. – Springer, Switzerland, 2015. – Т. 33. – С. 407 – 416. **DOI:** 10.1007/978-3-319-18126-4_39.
4. **Nosova N.Yu.**, Glazunov V.A., Nguyen Minh Thanh. Task of Control of Parallel Mechanism for Given Law of Motion // 14th International Federation for the Promotion of Mechanism and

Machine Science World Congress, IFToMM 2015. – National Taiwan University, Taipei, Taiwan. – 2015. – С. 159 – 163. **DOI:** 10.6567/IFToMM.14TH.WC.OS12.010.

5. Glazunov V.A., **Nosova N.Yu.**, Kheilo S.V., Tsar'kov A.V. Design and Analysis of the 6-DOF Decoupled Parallel Kinematics Mechanism (Book Chapter) // Mechanisms and Machine Science. – 2018. – Т. 56. – С. 125 – 170. **DOI:** 10.1007/978-3-319-74363-9_6.

6. **Nosova N.Yu.**, Kheilo S.V., Glazunov V.A., Tsar'kov A.V. Dynamic Analysis of the Spherical Part of the Parallel Manipulator Taking into Account the Control Law // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2018. – Т. 47, № 3. – С. 205 -212. **DOI:** 10.3103/S1052618818030111

7. **Nosova N.Yu.** A Review of the Parallel Structure Mechanisms with Kinematic Decoupling // Advanced Technologies in Robotics and Intelligent Systems: Proceeding of ITR 2019. Mechanisms and Machine Science. – 2020. – Т. 80. – С. 247 – 255. **DOI:** 10.1007/978-3-030-33491-8_30

Патент на полезную модель и изобретение

Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В. Пространственный механизм с пятью степенями свободы // Патент на полезную модель RU № 135283, регистрация в Государственном реестре РФ 10 декабря 2013 г.

Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы // Патент на изобретение RU № 2534706, регистрация в Государственном реестре РФ 06 октября 2014 г.

Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В., Комисарук Л.В. Пространственный механизм с шестью степенями свободы // Патент на изобретения RU № 253635, регистрация в Государственном реестре РФ 28 октября 2014 г.

Публикации в других изданиях

1. **Носова Н.Ю.** Синтез, анализ и управление механизмами с тремя кинематическими цепями для аддитивных технологий / **Н.Ю. Носова**, В.А. Глазунов // Мир робототехники и мехатроники: Новые механизмы в современной робототехнике / под ред. В.А. Глазунова. – М.: Техносфера, 2018. – С. 89 – 120.

2. **Носова Н.Ю.** Структурный синтез пространственного манипулятора параллельной структуры с четырьмя степенями свободы / **Н.Ю.Носова** // Сб. Тезисы докладов на 65-ю межвузовская научно-техническую конференцию «Студенты и молодые учёные КГТУ – производству» – Кострома, 2013. – С. 146.

3. **Носова Н.Ю.** Пространственный манипулятор параллельной структуры с пятью степенями свободы (тезисы) / **Н.Ю. Носова**, С.В. Палочкин / Сб. Молодые учёные – развитию текстильной и лёгкой промышленности (ПОИСК-2013): материалы международной научно-технической конференции аспирантов и студентов. Ч.2 – Иваново, 2013. – С. 160-161.

4. **Носова Н.Ю.** Задача о положениях механизма параллельной структуры с развязкой поступательных движений / **Н.Ю. Носова**, С.В. Палочкин // Сб. Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности (Инновации-2013): материалы международной научно-технической конференции. – Москва, 2013. – С. 45.
5. **Носова Н.Ю.** Пространственный манипулятор параллельной структуры с пятью степенями свободы / **Н.Ю. Носова**, В.А. Глазунов // Машины, технологии и материалы для современного машиностроения, посвященная 75-летию Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН: Материалы международной научной конференции. – Москва, 2013. – С. 77.
6. **Носова Н.Ю.** Определение работоспособности механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы методом винтов / **Н.Ю. Носова**, С.В. Палочкин // Новое в технике и технологии текстильной и лёгкой промышленности: материалы докладов международной научно-технической конференции. – Витебск, 2013. – С. 338-340.
7. **Носова Н.Ю.** Особенности конструктивных решений пространственного манипулятора параллельной структуры с кинематической развязкой // 2-й международный симпозиум «Современные проблемы создания и производства механических передач». – Москва, 2013.
8. **Носова Н.Ю.** Определение скоростей и особых положений сферического манипулятора // Сб. Тезисы докладов на 66-й межвузовской научно-технической конференции молодых учёных и студентов «Студенты и молодые учёные КГТУ – производству». – Кострома, 2014. – С.70-71.
9. **Носова Н.Ю.** Расчёт скоростей поступательно-направляющего манипулятора методом дифференцирования уравнений связи с применением матрицы Якоби / **Н.Ю.Носова**, С.В. Палочкин // Инновационные технологии в текстильной и лёгкой промышленности: Материалы докладов международной научно-технической конференции. – Витебск, 2014. – С. 286-288.
10. **Носова Н.Ю.** Определение работоспособности механизма параллельной структуры с пятью степенями свободы методом винтов / **Н.Ю.Носова**, С.В. Палочкин // Сб. Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности (Инновации-2014): материалы международной научно-технической конференции. – Москва, 2014. – С. 165-168.
11. **Носова Н.Ю.** Анализ колебательных процессов механизма параллельной структуры на основе уравнения Даламбера–Лагранжа II рода / **Н.Ю.Носова**, С.В. Палочкин // Сб. Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности (Инновации-2015): материалы международной научно-технической конференции. Часть 3. – Москва, 2015. – С. 12-16.
12. **Носова Н.Ю.** Эволюция методов кинематической развязки механизмов параллельной структуры / **Н.Ю.Носова** // Сборник трудов 4-го московского международного симпозиума «Приводная техника и компоненты машин». – Москва, 2018. – С. 109-116.