

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЁВА»

На правах рукописи

Сердакова Валерия Владимировна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
С УЧЁТОМ ВЫЗВАННЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫМ УДАРОМ ВОЗМУЩЕНИЙ**

1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин

**Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата технических наук**

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Седельников Андрей Валерьевич

Москва, 2025

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИНДЕКСЫ

С о к р а щ е н и я

ROSA – Roll-Out Solar Array (разворачивающаяся солнечная батарея);

ДМ – двигатель-маховик;

КА – космический аппарат;

КУДМ – комплекс управляющих двигателей-маховиков;

МКА – малый космический аппарат;

МКС – международная космическая станция;

НДС – напряжённо-деформированное состояние;

ПСБ – панели солнечных батарей;

ЭТМД – электротермический микродвигатель.

О б о з н а ч е н и я

a – коэффициент температуропроводности;

b – ширина пластины;

c – удельная теплоёмкость;

D – цилиндрическая жёсткость на изгиб;

e – степень черноты;

E – модуль Юнга;

h – толщина пластины;

l – длина пластины;

M_T – внутренний изгибающий момент, обусловленный температурными деформациями пластины;

N – внутренняя продольная сила, вызванная температурным ударом;

Q – плотность теплового потока;

$T = T(z, t)$ – одномерное поле температур;

$T = T(x, z, t)$ – двумерное поле температур;

$\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ – вектор перемещений точек пластины;

α – коэффициент температурного расширения;

$\hat{\varepsilon}$ – тензор деформаций;

Θ – постоянная Стефана-Больцмана;

λ – коэффициент теплопроводности;

μ – модуль сдвига;

ν – коэффициент Пуассона;

ρ – плотность;

$\hat{\sigma}$ – тензор напряжений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
1 Актуальность и современное состояние проблемы учёта температурного удара при движении малого космического аппарата.....	14
1.1 Общие замечания.....	14
1.2 Актуальность проблемы учёта температурного удара.....	15
1.3 Краткий обзор наработок в исследованиях температурного удара.....	20
1.4 Постановка и описание задач диссертационного исследования.....	29
1.5 Выводы по первой главе.....	31
2 Математическая модель движения точек ПСБ в рамках одномерной задачи теплопроводности.....	32
2.1 Общие замечания.....	32
2.2 Упрощающие гипотезы одномерной модели теплопроводности.....	33
2.3 Постановка начально-краевой задачи одномерной теплопроводности.....	39
2.4 Приближенное решение начально-краевой задачи одномерной теплопроводности для случая тонкой пластины.....	42
2.5 Постановка задачи термоупругости.....	45
2.6 Численное моделирование динамики перемещений точек пластины в рамках одномерной задачи теплопроводности.....	53
2.7 Приближенное аналитическое решение задачи термоупругости.....	57
2.8 Исследование применимости приближенного аналитического решения задачи термоупругости для описания движения точек ПСБ при температурном ударе.....	61
2.9 Выводы по второй главе.....	67
3 Математическая модель движения точек ПСБ в рамках двумерной задачи теплопроводности.....	68
3.1 Общие замечания.....	68
3.2 Критерий учёта двумерности.....	69
3.3 Упрощающие гипотезы двумерной модели теплопроводности.....	75
3.4 Постановка начально-краевой задачи двумерной теплопроводности	

и задачи термоупругости.....	78
3.5 Исследование соответствия приближенного решения одномерной задачи двумерной постановке.....	81
3.6 Аппроксимация поля температур и построение приближенного аналити- ческого решения задачи термоупругости в двумерной постановке.....	84
3.7 Численное моделирование движения точек пластины в рамках двумерной задачи теплопроводности.....	89
3.8 Валидация приближенных аналитических решений для поля температур тонкой пластины при температурном ударе.....	106
3.9 Валидация приближенных аналитических решений для прогибов тонкой пластины при температурном ударе.....	115
3.10 Выводы по третьей главе.....	117
4 Метод учёта влияния возмущений от температурного удара на динамику МКА и модель движения МКА с учётом этих возмущений.....	120
4.1 Общие замечания.....	120
4.2 Структура метода учёта влияния температурного удара.....	121
4.3 Основные принципы метода учёта влияния температурного удара.....	122
4.4 Разработка алгоритма метода учёта влияния температурного удара.....	126
4.5 Приближённые аналитические зависимости для возмущений от температурного удара.....	130
4.6 Математическая модель движения МКА с учётом возмущений от температурного удара.....	133
4.7 Результаты численного моделирования возмущений от температурного удара для схемы несимметричного МКА.....	134
4.8 Система управления угловым движением МКА на основе комплекса управляющих двигателей-маховиков.....	141
4.9 Результаты численного моделирования возмущений от температурного удара для схемы симметричного МКА.....	144
4.10 Система управления угловым движением МКА на основе электро- термического микродвигателя.....	147

4.11 Выводы по четвёртой главе.....	149
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	151
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	153
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	173

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования движения малого космического аппарата (МКА) при учёте воздействия различных типов возмущений необходимостью удовлетворения возрастающих требований к качеству выполнения им целевых задач. Так, например, для решения задач дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) требуется получение спутниковых изображений высокого разрешения. Это накладывает ограничения на динамику углового движения МКА ДЗЗ в момент съёмки. Для МКА технологического назначения (ТН) важным фактором являются ограничения по микроускорениям, без выполнения которых проведение гравитационно-чувствительных экспериментов становится нецелесообразным. Поэтому развитие современных МКА и эффективное их применение требует изучения и переосмысления значимости влияния возмущающих факторов на движение МКА. Без этого трудно говорить о качественном выполнении МКА целевых задач, например, в области космических технологий или дистанционного зондирования Земли из космоса. Одним из таких возмущений нового типа является температурный удар упругих элементов МКА, возникающий при погружении и выходе МКА из тени Земли.

Своевременность проводимых исследований обусловлена тем, что, несмотря на бурное развитие МКА в последние годы, до сих пор не реализовано ни одного проекта МКА технологического назначения. Массовая доля упругих элементов (прежде всего, панелей солнечных батарей (ПСБ)) в общей массе МКА может существенно превышать эту долю для космических аппаратов (КА) других классов. Поэтому относительное движение точек ПСБ вызывает существенное возмущение движения корпуса МКА. Это касается и температурного удара. Без детального исследования влияния температурного удара на динамику движения МКА на современном этапе развития космической техники существенных прогресс в области применения МКА для нужд космических технологий вызывает большие сомнения.

Степень разработанности темы. Теоретические исследования задач теплопроводности для полубесконечных тел датированы первой половиной прошлого века. В этой связи следует выделить работы **Н.Н. Лебедева** [1], **В.И. Даниловской** [2–5], **Э. Мелана** [6–8], **Х. Паркуса** [9–11], **Р.Д. Миндлина** [12, 13]. В этих и ряде других работ были поставлены и решены начально-краевые задачи термоупругости с граничными условиями первого и второго родов.

Большую роль в описании различных моделей температурного удара сыграли работы **Э.М. Карташова** [14–66], **В.А. Кудинова** [32, 67–72], **Б.А. Люкшина** [73–75]. Получены приближённые и точные решения как для стационарных, так и для нестационарных задач теплопроводности с различными граничными условиями. Однако большинство теоретических исследований связаны с существенной идеализацией как самих объектов, так и условий температурного удара.

Прикладные исследования в области влияния температурного удара на движение КА или качество выполнения им целевых задач можно найти в работах **Дж. Д. Джонсона** [76–82], **З. Шена** [83–87], **А.В. Седельникова** [88–102] и других авторов. Проанализировано воздействие температурного удара на точность ориентации конкретных КА, оценены температурные колебания ПСБ, возникающие из-за температурного удара, а также решён ряд других частных задач, как правило, с помощью компьютерных моделей. Однако вопрос получения приближенных аналитических решений для корректного описания НДС ПСБ проработан недостаточно детально. Современные задачи, связанные с повышением долговечности и живучести конструктивных элементов технических систем в условиях температурного удара, точности ориентации МКА и т.д., требуют более глубоких и детальных исследований температурного удара.

Сложность решаемой проблемы связана с отсутствием общих методов решения начально-краевой задачи теплопроводности из-за существенной нелинейности граничных условий третьего рода.

Высокая актуальность проблемы исследования динамики движения точек тонкой пластины при температурном ударе определяется высокими

темпами освоения космического пространства, которые связаны с созданием современной космической техники. Эта техника при её эксплуатации в условиях космического пространства должна эффективно выполнять свои задачи, испытывая воздействие факторов космической среды, к числу которых относится и температурный удар. При этом отсутствие воздушной среды и непосредственного контакта между космическими объектами определяет необходимость постановки именно начально-краевой задачи с граничными условиями третьего рода, которая является самой сложной из классических задач. Без учёта температурного удара может существенно снижаться качество выполнения целевых задач МКА, а решение некоторых из них, например, реализация гравитационно-чувствительных процессов на борту МКА, просто невозможно без нейтрализации влияния температурного удара.

Актуальность настоящей диссертации заключается в том, что в ней представлены оценки возмущений от температурного удара для МКА с одной и двумя ПСБ с помощью полученных в работе приближенных аналитических зависимостей компонентов вектора перемещений точек пластины в рамках одномерной и двумерной задач теплопроводности. Это позволяет учитывать температурный удар при моделировании движения МКА и повышать качество выполнения им целевых задач, для которых влияние температурного удара является значимым.

Из актуальности диссертации следует её **цель: *повышение эффективности выполнения целевых задач малым космическим аппаратом путём учёта влияния температурного удара его упругих элементов.***

Объектом исследования является процесс динамики движения точек панели солнечной батареи космического аппарата при температурном ударе.

Предметом исследования является малый космический аппарат с панелями солнечных батарей, подверженных действию температурного удара.

Для достижения поставленной в диссертационной работе цели необходимо решить следующие основные задачи.

1 Моделирование динамики углового движения МКА с упругими элементами при воздействии температурного удара.

2 Разработка метода учёта влияния движения точек ПСБ в процессе температурного удара на динамику МКА.

3 Создание математической модели движения точек ПСБ в рамках одномерной модели теплопроводности для описания возмущений, действующих на МКА в результате температурного удара.

4 Создание математической модели движения точек ПСБ в рамках двумерной модели теплопроводности для описания возмущений, действующих на МКА в результате температурного удара.

5 Формулировка критериев использования двумерной модели теплопроводности для описания возмущений от температурного удара в различных ситуациях.

6 Проведение вычислительных экспериментов, направленных на оценку влияния температурного удара ПСБ на динамику МКА.

При решении этих задач получены *результаты, обладающие научной новизной*.

1 Построена модель движения МКА, учитывающая возмущения нового типа от температурного удара.

2 Разработан метод учёта влияния возмущения нового типа от температурного удара на динамику движения МКА, позволяющий проводить его корректный учёт для случаев, когда его влияние на движение МКА является значимым.

3 Предложена система управления угловым движением МКА на основе комплекса управляющих двигателей-маховиков (КУДМ), нивелирующая негативные последствия температурного удара на качество решения целевых задач.

4 Проведена оценка возмущений от температурного удара для МКА с симметричной и несимметричной схемой расположения ПСБ, которая позволяет построить корректную модель движения МКА.

5 Получены приближённые аналитические зависимости для компонентов вектора перемещений, а также поля температур ПСБ МКА, позволяющие оценивать максимальную значимость влияния температурного удара на движение МКА.

6 Созданы критерии учёта двумерности задачи теплопроводности, позволяющие корректно применять приближённые аналитические зависимости при моделировании углового движения МКА.

На защиту выносятся следующие положения:

- 1 Модель движения МКА с учётом возмущений от температурного удара.
- 2 Метод учёта влияния температурного удара на динамику движения МКА.
- 3 Система управления угловым движением МКА на основе КУДМ.
- 4 Приближенные аналитические зависимости компонентов вектора перемещений точек ПСБ МКА при температурном ударе в рамках одномерной задачи для оценки возмущений, действующих на МКА.
- 5 Приближенные аналитические зависимости компонентов вектора перемещений точек ПСБ МКА при температурном ударе в рамках двумерной задачи для оценки возмущений, действующих на МКА.
- 6 Критерии учёта двумерности при описании движения точек ПСБ МКА, подверженной температурному удару.
- 7 Результаты численного моделирования возмущающих факторов от температурного удара, влияющих на динамику движения МКА.

Область исследования. Основные положения диссертации соответствуют паспорту специальности научных работников 1.1.7 Теоретическая механика, динамика машин и охватывает направления исследования, предусмотренные паспортом:

п 1 «Классическая механика и аналитическая динамика» в части математической формализации силовых возмущающих факторов, влияющих на движение МКА при температурном ударе в рамках классической механики;

п 10 «Динамика летательных аппаратов и космических конструкций» в части построения метода учёта влияния температурного удара ПСБ на динамику МКА;

п 13 «Динамика систем, состоящих из абсолютно твёрдых и деформируемых тел, в том числе машин, приборов и конструкций» в части

исследования динамики движения МКА, состоящего из твёрдого центрального тела и упругой ПСБ;

п 14 «Математическое и компьютерное моделирование кинематики и динамики механических систем, в том числе машин, приборов и их элементов при динамических, статических, тепловых и других видах воздействий» в части проведения математического и компьютерного моделирования динамики МКА как механической системы и ПСБ, как элемента МКА в результате температурного удара, как теплового воздействия;

п 15 «Экспериментальное исследование динамики систем тел, в том числе летательных аппаратов, машин, приборов и конструкций» в части использования экспериментальных данных для валидации зависимостей.

Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в полученных приближенных аналитических оценках возмущений от температурного удара на основе зависимостей компонентов вектора перемещений в рамках одномерной и двумерной моделей теплопроводности.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в создании системы управления угловым движением МКА с учётом возмущений от температурного удара, позволяющей нивелировать эти возмущения. На разработанные программные комплексы были получены два патента на программу для ЭВМ. На предложенную систему управления подана заявка на полезную модель. Разработаны критерии учёта двумерности модели, позволяющие корректно описывать различные ситуации воздействия температурного удара на тонкую пластину. Разработан метод учёта влияния температурного удара на динамику движения МКА, позволяющий вырабатывать рекомендации по управлению движением МКА. Получен акт внедрения разработанного метода и приближенных аналитических зависимостей в практику проектирования перспективных МКА АО РКЦ «Прогресс».

Методы исследования включают в себя известные методы классической механики, теории упругости, термодинамики и теплопередачи; построения

начально-краевых задач теплопроводности и термоупругости; проведения вычислительного эксперимента.

Достоверность полученных в работе результатов достигается корректностью применения известных базовых законов и сравнением результатов с экспериментальными данными и результатами, полученными другими авторами. **Результаты работы апробированы** на 8 международных и Всероссийских конференциях, опубликованы в 22 научных изданиях из перечня ВАК, в том числе – 16 работ в ведущих мировых журналах, входящих в наукометрические базы Web of Science и Scopus (две квартиля Q1 и пять квартиля Q2). Получено два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Работа выполнена при поддержке грантов Минобрнауки России на выполнение крупного научного проекта (соглашение № 075-15-2024-558 от 25.04.24) и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках госзадания (Проект FSSS-2023-0007).

1 АКТУАЛЬНОСТЬ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ УЧЁТА ТЕМПЕРАТУРНОГО УДАРА ПРИ ДВИЖЕНИИ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

1.1 Общие замечания

Одной из важных особенностей МКА является существенно более высокая доля упругой части конструкции в общей массе КА, чем для аппаратов других классов. Эта особенность приводит к необходимости пересмотра состава возмущающих факторов, которые подлежат обязательному учёту при моделировании движения МКА. Фактически речь идёт об учёте возмущающих факторов нового типа, считавшихся ранее незначимыми. В рамках настоящей диссертационной работы в качестве такого возмущения рассматривается температурный удар больших упругих элементов МКА при его погружении в тень Земли и выходе из неё.

Температурный удар относится к динамичным явлениям, для которых существенным является описание переходного процесса при эволюциях параметров системы от одних равновесных значений к другим. Это касается и относительного движения точек упругого элемента при температурном ударе. В ряде фундаментальных работ [5, 57–59] отмечается объективная сложность описания быстродинамических явлений из-за громоздкости математических моделей.

В главе проводится описание современного состояния проблемы учёта температурного удара как с точки зрения теоретических знаний, так и с точки зрения их практического применения. Особенное внимание уделено рассматриваемой проблеме в свете новых разработок в области космической техники, в частности с учётом опыта испытаний и эксплуатации ПСБ нового поколения ROSA [88, 103].

1.2 Актуальность проблемы учёта температурного удара

При эксплуатации ряда конструкций, а также реализации технологий по их созданию возникает явление температурного удара. Так, конструктивные элементы ядерных реакторов регулярно испытывают на себе воздействие температурного удара [104]. Это привело к открытию функционально-градиентных материалов, которые первоначально были предназначены для повышения термостойкости конструктивных элементов ядерных реакторов и химических установок, а также стимулировало широкую исследовательскую деятельность по изучению их поведения [105-107]. Данные исследования касаются не только процессов эксплуатации конструкций, но и процессов изготовления её элементов. При реализации технологий изготовления этих конструктивных элементов, например, из металлокерамики [108, 109], также важно исследовать влияние температурного удара для формирования требуемых механических и термических свойств этих элементов, необходимых для их успешной эксплуатации [110-112].

Проблема температурного удара чрезвычайно важна и для развития космической техники, прежде всего, МКА. В 2017 году на борту МКС были испытаны ПСБ нового поколения ROSA (рисунок 1.1).



*Рисунок 1.1 – ПСБ ROSA в развёрнутом состоянии в составе МКС
(надпись на рисунке: Полёт ROSA на МКС, 2017)*

Эти панели способны при снижении массы на 20 % вырабатывать такое же количество электроэнергии, как и классические ПСБ [114]. Для МКА проблема снижения массы конструкции в пользу целевой аппаратуры является одной из важнейших, поскольку возможности МКА сильно ограничены [115].

Однако использование ROSA для МКА существенно повлияет на его управляемость [89]. Поскольку математических моделей и результатов вычислительных экспериментов оказалось недостаточно для оценки эффективности применения ROSA, то решили провести натурные испытания. Эти испытания показали, что после разворачивания ROSA и наступления температурного удара были возбуждены интенсивные собственные колебания панелей. Они не только существенно влияют на динамику космического аппарата, но и не позволили свернуть панель для безопасной утилизации. Панель была отстрелена в развёрнутом состоянии, поскольку другого варианта её отделения после возбуждения колебаний в результате температурного удара уже не было. Поэтому разработка методов, позволяющих учитывать влияние температурного удара на динамику движения космического аппарата является важной и актуальной задачей развития малых космических аппаратов.

Другим примером, наглядно показывающим необходимость изучения влияния температурного удара на динамику движения МКА, является проблема создания МКА технологического назначения. Для реализации гравитационно-чувствительных процессов требуются ограничения уровня микроускорений в зоне размещения технологического оборудования [116-118]. Микроускорения связаны с параметрами движения КА и вызваны воздействием различных возмущающих факторов [119, 120], в том числе, и температурным ударом [83, 90]. Исследования, проведённые в работах [88, 91], показывают, что микроускорения, порождаемые температурным ударом, способны нарушать благоприятные условия для реализации гравитационно-чувствительных процессов (рисунок 1.2 [88]).

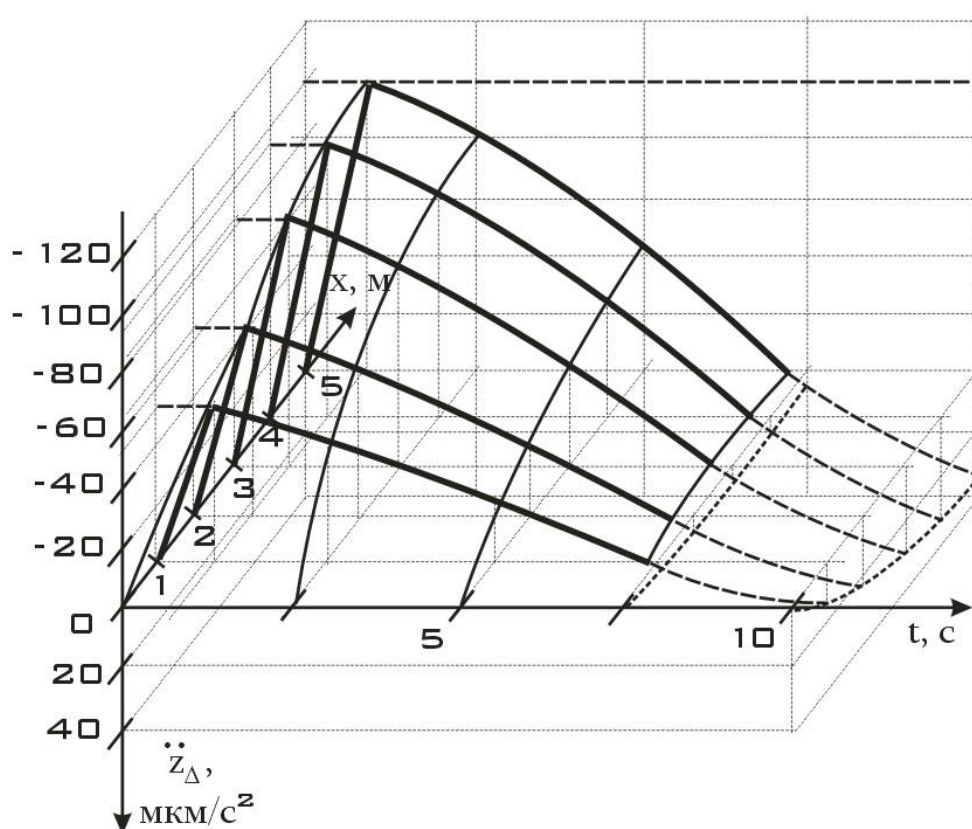


Рисунок 1.2 – Поле ускорений точек срединной поверхности упругого элемента МКА в направлении перпендикулярном плоскости пластины при температурном ударе (процитировано по [88])

Поэтому разработка математических моделей учёта влияния температурного удара на динамику движения космического аппарата является необходимым условием для корректной оценки возможности и целесообразности реализации того или иного гравитационно-чувствительного процесса на малом космическом аппарате технологического назначения. При этом речь идёт о целенаправленном формировании динамических свойств космического аппарата [121].

В настоящее время всё острее встаёт проблема космического мусора. Многие исследователи предлагают свои способы очистки околоземного космического пространства от космического мусора (например, [122, 123]). В качестве космического мусора могут выступать космические аппараты с большими упругими элементами конструкции, срок активного существования которых уже истёк [92, 124]. Существует много способов очистки околоземного

пространства от космического мусора [125]. Одним из таких способов является транспортировка мусора с помощью буксира на тросе [126]. Как показывают исследования [92, 93], связь между буксиром и космическим мусором может быть нарушена в результате температурного удара, поскольку сила взаимодействия буксира и мусора невелика, и ускорение, вызванное температурным ударом, может создать возмущение, соизмеримое с силой взаимодействия.

Следовательно, при буксировке космического мусора, представляющего собой космический аппарат с большими упругими элементами, также необходимо учитывать температурный удар как дополнительное возмущающее воздействие, способное повлиять на эффективность транспортировки и нарушить связь между буксиром и космическим мусором.

Таким образом, речь идёт об учёте возмущений нового типа при моделировании движения МКА. На рисунке 1.3 представлены схемы орбитального движения МКА и относительного движения ПСБ в результате температурного удара.

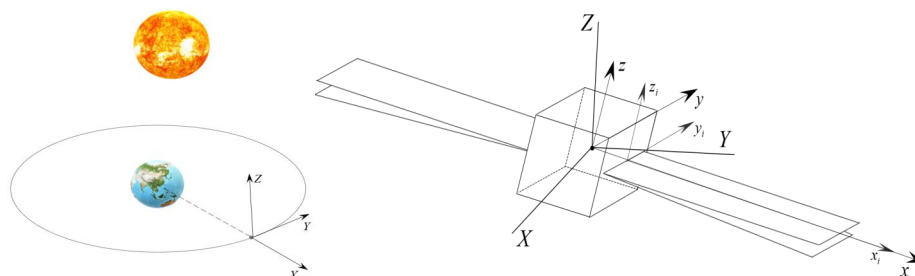


Рисунок 1.3 – Движение МКА по орбите ИСЗ Земли.

Орбитальная (XYZ), связанная (xyz) и местная (xiyi zi) системы координат

Тогда математическая модель движения МКА может быть представлена следующим образом. Уравнения движения центра масс МКА в связанной системе координат:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x^e + \Phi_x^{CCK} + \sum_{i=1}^N \Phi_{xi}; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y^e + \Phi_y^{CCK} + \sum_{i=1}^N \Phi_{yi}; \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z^e + \Phi_z^{CCK} + \sum_{i=1}^N \Phi_{zi}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\vec{F}^e(F_x^e, F_y^e, F_z^e)$ - главный вектор внешних сил, действующих на МКА, и его проекции в связанной системе координат; $\vec{\Phi}^{CCK}(\Phi_x^{CCK}, \Phi_y^{CCK}, \Phi_z^{CCK})$ - вектор сил инерции, вызванных с неинерциальностью связанной системы координат; $\vec{\Phi}_i(\Phi_{xi}, \Phi_{yi}, \Phi_{zi})$ - вектор сил инерции i -го упругого элемента, вызванных его ускоренным относительным движением.

Динамические уравнения Эйлера в связанной системе координат с учётом изменения компонентов тензора инерции МКА будут иметь вид:

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{\omega}_x + \dot{I}_{xx}\omega_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - \dot{I}_{xy}\omega_y - I_{xz}\dot{\omega}_z - \dot{I}_{xz}\omega_z + \omega_y(I_{zz}\omega_z - I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y) - \omega_z(I_{yy}\omega_y - I_{xy}\omega_x - I_{yz}\omega_z) = M_x \\ I_{yy}\dot{\omega}_y + \dot{I}_{yy}\omega_y - I_{xy}\dot{\omega}_x - \dot{I}_{xy}\omega_x - I_{yz}\dot{\omega}_z - \dot{I}_{yz}\omega_z + \omega_x(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z) - \omega_z(I_{zz}\omega_z - I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y) = M_y \\ I_{zz}\dot{\omega}_z + \dot{I}_{zz}\omega_z - I_{xz}\dot{\omega}_x - \dot{I}_{xz}\omega_x - I_{yz}\dot{\omega}_y - \dot{I}_{yz}\omega_y + \omega_x(I_{yy}\omega_y - I_{xy}\omega_x - I_{yz}\omega_z) - \omega_y(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z) = M_z \end{cases}, \quad (1.2)$$

где $\hat{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$ - тензор инерции МКА в связанной системе координат;

$\vec{M}(M_x, M_y, M_z) = \vec{M}^e + \vec{M}^{cont} + \vec{M}(\vec{\Phi}^{CCK}) + \sum_{i=1}^n \vec{M}(\vec{\Phi}_i)$ - вектор возмущающих моментов относительно центра масс МКА; $\vec{M}^e$; $\vec{M}^{cont}$; $\vec{M}(\vec{\Phi}^{CCK})$; $\sum_{i=1}^n \vec{M}(\vec{\Phi}_i)$ - соответственно моменты внешних сил, управления и сил инерции, представленных в системе (1.1).

1.3 Краткий обзор наработок в исследованиях температурного удара

Работы, связанные с решением задач термоупругости, появились ещё в первой половине прошлого века. Так, одним из первых обобщений таких задач можно считать работу [1]. В ней содержится систематическое изложение теории несвязанной термоупругости для изотропного тела. Работы [127, 128] посвящены теории несвязанной термоупругости для анизотропного тела. Одним из первых зарубежных обзоров задач термоупругости можно считать монографию [6]. Эти работы объединяет применение линейной теории термоупругих напряжений в стационарных температурных полях при постоянных теплофизических свойствах материала. В такой постановке можно пренебречь нелинейными динамическими слагаемыми уравнений для получения решения в виде напряжённо-деформированного состояния тела. Однако для быстродинамических явлений, как температурный удар, эти упрощения недопустимы.

Работы, в которых отдельно рассматривалась начально-краевая задача с граничными условиями третьего рода, можно отнести к середине прошлого века. Следует выделить работы **В.И. Даниловской** [2–4, 5]. Работа [2] считается одной из первых по динамическим задачам теории температурных напряжений. В ней рассмотрено распространение одномерной термоупругой волны в упругом полупространстве под действием внезапного нагрева плоскости, ограничивающей полупространство.

Из зарубежных авторов можно выделить работы Паркуса (**H. Parkus**) [6, 9–11], Мелана (**E. Melan**) [6–8], Миндлина (**R.D. Mindlin**) [12, 13]. В этих работах, в том числе, были рассмотрены вопросы расчёта температурных напряжений в гибких пластинках: тонких (без теплопроводящего слоя) с заданной температурой на поверхности и пластинках с теплопроводящим слоем. Однако все эти задачи решены в рамках линейной постановки без учёта инерционных членов нелинейного характера, имеющих значение для таких динамических явлений, как температурный удар.

Далее исследования в данной области получили широкое продолжение в виду необходимости решения научных и технических задач. В этой связи необходимо выделить ряд исследователей, получивших наиболее значимые результаты. **Карташов Э.М.**, начиная с 70-х годов прошлого века, рассматривал вопросы термоупругости пластин [14-24]. Был исследован ряд общих задач, допускающих аналитическое решение [14-21], в том числе и смешанных начально-краевых задач [22, 23], а также задачи нестационарной теплопроводности [24-27]. Получены результаты с переменными термофизическими свойствами [28]. В ряде работ учитывались инерционные члены в рамках динамических задач [29-39]. Примерно с начала 90-х годов прошлого века **Карташовым Э.М.** был получен ряд фундаментальных результатов по решению задач, связанных с температурным ударом [40-66].

В работах [40-43] изучена динамическая термоупругая реакция твёрдого полупространства при температурном ударе в условиях движения границы этого полупространства. Отмечено, что наиболее опасным с точки зрения величины возникающих в полупространстве напряжений и деформаций является случай температурного нагрева [41]. Получены решения для задачи нагрева поверхности полупространства пульсирующим тепловым потоком [42].

В работе [43] изучается проблема теплового удара массивного тела в условиях температурного удара, теплового нагрева и нагрева средой. На основе интегральных соотношений, которые допускают свести задачу к нахождению соответствующей функции Грина, выявлен самый опасный режим нагрева. Развита математический аппарат на базе модификации метода тепловых потенциалов для областей с равномерно движущейся границей.

В работе [44] излагаются теоретические представления о термокинетике процесса теплового разрушения твёрдых тел. Предпринята попытка объединить три подхода (кинетический, механический и термодинамический), получены расчётные соотношения для временной зависимости прочности, предельных характеристик и основных параметров процесса роста трещины в условиях теплового нагружения тела с трещиной.

В работе [45] решена серия начально-краевых задач для обобщённого уравнения нестационарного теплопереноса и уравнения совместности в напряжениях Бельтрами–Митчелла при импульсном и пульсирующем тепловом потоке с использованием интегральных соотношений, позволяющих свести начально-краевую задачу к нахождению соответствующей функции Грина, был выявлен наиболее опасный с точки зрения напряжений режим нагрева.

Работа [46] посвящена исследованию термической реакции вязкоупругих тел на температурный удар в рамках динамических моделей. Известно, что при повышенных температурах и более высоком уровне напряжений классическая модель упругого тела становится некорректной, поскольку почти у всех материалов присутствует явление вязкого течения. Реальное тело в такой ситуации начинает проявлять как упругие, так и вязкие свойства, становясь по сути вязкоупругим. Решение возникающей проблемы изучения температурного удара вязкоупругих тел связано с обобщением соответствующих соотношений между напряжениями и деформациями. Ряд авторов (например, **T. Alfrey** [129], **Н.Н. Hilton** [130], **E. Sternberg** [131] и др.) заметили, что исследование поведения вязкоупругих тел в условиях температурного удара и резких механических воздействий можно свести к рассмотрению термоупругих задач. При этом в операционном решении по Лапласу задачи термоупругости следует заменить коэффициент Пуассона и модуль сдвига их изображениями по Лапласу. Вид этих изображений определяется известными линейными реологическими моделями Максвелла и Кельвина [10]. Однако такой подход можно распространить только на квазистатические исследования в несвязанных квазистатических моделях термоупругости. Полученные в работе [46] выражения допускают преобразования Лапласа. Это позволяет в пространстве изображений перейти к линейным краевым задачам и применить к полученным математическим моделям известные методы математической физики и операционного исчисления. По найденным перемещениям из уравнений можно воспроизвести картину динамической реакции вязкоупругих тел на тепловой удар.

В работе [47] изучается термическая динамическая реакция бесконечной области на температурный удар. Получены результаты, доказывающие влияние геометрического фактора граничной поверхности на величину напряжений от температурного удара в рамках обобщённой динамической модели (подобные результаты представлены также в работах [48, 49]). Сделан вывод о том, что наличие плоской поверхности приводит к появлению растягивающих напряжений, что способствует возможному образованию трещин в приповерхностных слоях.

В работах [50, 51] получены особенности поведения упругой (среды Гука) и вязкоупругой (среда Кельвина и среда Максвелла) при температурном ударе. Отмечено, что исследование проблемы температурного удара для вязкоупругих сред относится трудным вопросам термомеханики. Причём в случае перехода от динамических задач к квазистатическим появляется возможность исследования проблемы аналитически до конца (например, [52, 53]). При этом отмечается, что учёт инерционных эффектов в литературе практически не рассмотрен. Рассмотрение отдельных частных случаев представлено в работах [29, 54-56].

Следует также упомянуть работы **Карташова Э.М.** по исследованию температурного удара в среде с трещинами и полостями [54, 60-62], а также переменными теплофизическими свойствами тел [63, 64].

В работе [65] отмечен класс задач, для которых учёт геометрических размеров тела при исследовании его термомеханической реакции на температурный удар касается в основном приповерхностных слоёв. Показано, что эти слои формируют тепловую реакцию твёрдого тела в течение времени, близкого к началу наступления температурного удара (порядка соответствующего микросекунды), для которых актуален учёт инерционных эффектов. Исследована термическая реакция упругого полупространства в качестве примера при различных режимах температурного удара по его границе. Выявлено, что сам процесс распространения термоупругих напряжений, описываемый динамической моделью, не является в чистом виде диффузионным, поскольку связан с распространением термоупругих волн. Отмечено, что максимум динамических

напряжений оказывается ниже в сравнении с максимумом а случае скачкообразного изменения температуры. Величина этого снижения определяется упругими и теплофизическими свойствами тела и скоростью нагрева (охлаждения) его поверхности. Выявлено, что режим внезапного охлаждения порождает более разрушительные растягивающие напряжения, чем режим нагрева. При этом максимум растягивающих напряжений при увеличении времени охлаждения снижается.

В работе [66] рассмотрена начально-краевая задача с граничными условиями третьего рода. Предложен новый математический подход к построению интегрального преобразования, а также формулы обращения для него при решении начально-краевой задачи нестационарной теплопроводности в областях, обладающих непрерывным спектром собственных значений. Представлен ряд аналитических решений в эквивалентных функциональных формах. Для получения аналитических решений начально-краевой задачи, которая содержит в своей исходной постановке общего вида краевые функции, развит метод функций Грина.

Среди других отечественных авторов следует выделить работы **Кудинова В.А.** [67-72], **Люкшина Б.А.** [73-75].

В работе [67] путём использования метода разделения переменных было получено точное аналитическое решение нестационарной начально-краевой задачи теплопроводности с нелинейным внутренним источником тепла и несимметричными граничными условиями третьего рода. При заданных физических свойствах среды получено максимально допустимое значение удельной мощности источника тепла. Превышение этого значения приведёт к тепловому разрушению среды. В работе [68] получено точное аналитическое решение начально-краевой задачи теплопроводности для бесконечной пластины с граничными условиями третьего рода и переменным по времени коэффициентом теплоотдачи. При этом использовалась оценка фронта температурного возмущения, а также дополнительные граничные условия. Сама зависимость коэффициента теплоотдачи от времени при этом считалась линейной. В работе

[69] решается задача оценки температурных напряжений полого цилиндра, возникающих от температурного удара, приходящегося на его внешнюю поверхность. В работе [70] найдены точные аналитические решения гиперболических уравнений теплопроводности с введёнными релаксационными поправками для теплового потока и градиента температуры, фактически определяющими конечность скорости распространения тепла. При этом сами уравнения теплопроводности содержат третью и четвертую смешанные производные по пространственной координате и времени. Эти результаты нашли своё отражение при разработке APDL-алгоритма, позволяющего исследовать локально-неравновесный теплоперенос в телах сложной геометрической формы [71]. В работе [72] представлен метод, позволяющий получать аналитические решения начально-краевых задач теплопроводности для среды с переменными физическими свойствами. Он основан на использовании дополнительных граничных условий.

В работе [73] исследовано деформационное динамическое поведение термобарьерных покрытий, приводящее к потере их устойчивости в результате температурного удара. Обсуждается сам механизм возникновения таких неустойчивостей в термобарьерных покрытиях. Получены результаты вычислительного эксперимента для представления покрытий в виде пластины, которая находится на упругом основании. В работах [74, 75] проведён анализ прочности для существенно анизотропного теплозащитного покрытия в процессе температурного удара.

Исследованиями температурного удара больших упругих элементов КА занимался ряд отечественных и зарубежных авторов. Исследование влияния температурного удара на динамику вращательного движения КА можно найти в работах **Johnston J.D.** [76-82], **Shen Z.** [83-87], **Седельникова А.В.** [88-95].

Так, в работе [76] отмечается, что тепловые структурные нарушения, которые возникают в результате неравномерного солнечного нагрева, могут снизить точность наведения КА, стабилизированного вращением, и даже повлиять на устойчивость всего КА. Изучению ухудшения целевых

характеристик КА в результате температурного удара, примерами которых являются космический телескоп Хаббл, аппарат для исследования верхних слоёв атмосферы UARS и КА Ulysses, посвящена работа [77]. В работе [78] приведены исследования возмущающим моментам, возникающим в результате температурного удара. Отмечено, что КА испытывали зафиксированные нарушения ориентации в результате тепловых движений больших упругих элементов более 30 лет. Утверждается, что вызванные температурой деформацией элементов, таких как ПСБ, возмущающие моменты могут быть значительными. В работе [79] исследуются нарушения, возникающие в результате термически индуцированных деформаций жёстких панельных солнечных батарей, связанных с температурным ударом. Представлена аналитическая модель теплового структурного отклика солнечной батареи и соответствующего возмущающего момента. Исследуется влияние этих нарушений на динамику ориентации КА с использованием связанной системы управляющих уравнений, которая включает в себя эффекты термически индуцированных деформаций. Численные результаты демонстрируют существенность влияния изменения геометрии солнечной батареи в результате температурного удара на динамический отклик системы КА - большие упругие элементы. В работах [80-82] представлены результаты аналитических и экспериментальных исследований, которые иллюстрируют важность разницы температур по толщине и её производных по времени, а также соотношение характерных тепловых и структурных времён отклика в термически индуцированных структурных движениях ПСБ. Термоструктурные испытания продемонстрировали значимые квазистатические термически индуцированные изгибные деформации ПСБ в лабораторных условиях.

В работе [84] анализируется поведение композитной ПСБ, связанной с КА, путём описания её как многотельной системы с жёстким и гибким телами на низкой околоземной орбите. Термически индуцированные движения вращающегося КА под действием солнечного излучения рассматриваются в работе [85] с помощью формулировки абсолютных узловых координат и естественных координат. В работе [86] для определения термически

индуцированных колебаний стрелы, подверженной падающему солнечному тепловому потоку, представлен аксиально движущийся термодинамический балочный элемент. Математическая модель основана на формулировке абсолютных узловых координат, которые способны достаточно точно описать большое смещение, вращение и деформацию гибкого тела. Численные результаты, представленные в виде динамических и тепловых характеристик невращающегося и вращающегося КА соответственно, показывают, что температурный удар оказывает значительное влияние на динамику КА.

Сравнению результатов вязкоупругих и упругих моделей при исследовании влияния термовязкоупругих эффектов на динамические характеристики композитных стрел при тепловом ударе посвящена работа [87]. Её результаты показывают, что вязкоупругость может играть значительную роль в подавлении вибрации гибких конструкций на орбите, особенно при высокой температуре. В работе не только представлена новая модель для термоструктурного динамического анализа, но и развита теория термовязкоупругости, ориентированная на инженерные и численные приложения.

Проведённый анализ работ показывает не только на актуальность проблемы температурного удара в области современной космической техники, но и на недостаточность исследования самого НДС ПСБ в процессе температурного удара. Так, в работах [76, 77] приведены данные об ухудшении качества выполнения целевых задач КА из-за температурного удара и актуальности его учёта, в работах [79-82] представлены оценки дополнительных возмущающих факторов, в частности, моментов от температурного удара на основе экспериментальных данных. В работах [83-86] построена модель колебаний балки Эйлера-Бернулли, вызванных температурным ударом. В работе [132] численно решена одномерная задача термоупругости, оценён уровень микроускорений, вызываемый температурным ударом для схемы МКА типа «Возврат-МКА», показана значимость этих микроускорений в аспекте выполнения требований для успешной реализации гравитационно-чувствительных процессов на борту МКА и

разработаны алгоритмы снижения влияния температурного удара на поле микроускорений внутренней среды МКА.

Однако для эффективного применения МКА этих постановок недостаточно. Необходимо рассматривать более сложную модель пластины а также решать двумерную задачу теплопроводности и соответствующую ей задачу термоупругости. При этом требуется выявление самого опасного случая влияния температурного удара на динамику МКА, а также проведение двумерного анализа с учётом собственных колебаний пластины для оценки необходимости и целесообразности включения температурного удара в число значимых факторов. Рекомендации о таком включении рациональнее всего сформулировать в виде практического метода учёта влияния температурного удара. Этот метод будет отличаться от существующих подходов возможностью оценки необходимости и целесообразности учёта влияния температурного удара на динамику МКА, критерием учёта двумерности, позволяющим наиболее рационально с практической точки зрения выбрать сложность решаемой задачи термоупругости, а также наличием приближенных аналитических зависимостей, позволяющих проводить оценку с существенной экономией бортовых вычислительных ресурсов МКА.

В данной диссертационной работе рассмотрен самый максимальный по интенсивности влияния случай в рамках одномерной задачи теплопроводности, впервые сформулирован и изучен случай статического учёта собственных колебаний в рамках двумерной задачи теплопроводности, построен новый критерий учёта двумерности, разработан метод учёта влияния НДС при температурном ударе на динамику МКА.

1.4 Постановка и описание задач диссертационного исследования

Для достижения поставленной цели работы во Введении были перечислены основные задачи. Остановимся подробнее на их описании в данном разделе.

Задача моделирования динамики углового движения МКА с упругими элементами при воздействии температурного удара позволяет корректно описать движение МКА с учётом возмущений нового типа, разрабатывать новые эффективные законы управления движением МКА с учётом температурного удара, повышать эффективность решения целевых задач МКА. В рамках решения этой задачи предполагается создание математической модели углового движения МКА с учётом возмущений от температурного удара ПСБ.

Задача разработки метода учёта влияния движения точек ПСБ в процессе температурного удара на динамику МКА поставлена для наглядной иллюстрации высокой практической значимости полученных в работе результатов. Она включает в себя формирование структуры метода, создание основополагающего принципа учёта влияния температурного удара и построение алгоритма. Результаты решения этой задачи имеют практическую направленность и способствуют корректному учёту температурного удара при эксплуатации МКА.

Задача создания математической модели движения точек ПСБ в рамках одномерной модели теплопроводности для описания возмущений, действующих на МКА в результате температурного удара необходима для получения максимальной оценки влияния температурного удара на движение МКА. В рамках решения этой задачи предполагается постановка начально-краевой задачи одномерной теплопроводности, постановка соответствующей задачи термоупругости, получение приближенного аналитического и численного решений этих задач, исследование применимости полученного приближенного аналитического решения для описания температурного удара больших упругих элементов МКА, анализ преимуществ и недостатков одномерной модели теплопроводности применительно к описанию температурного удара больших упругих элементов МКА.

Задача создания математической модели движения точек ПСБ в рамках двумерной модели теплопроводности для описания возмущений, действующих на МКА в результате температурного удара расширяет возможности одномерной модели теплопроводности, описывая влияние температурного удара при различных начальных формах ПСБ, отличных от плоской. В рамках решения этой задачи предполагается постановка начально-краевой задачи двумерной теплопроводности в статической форме, постановка соответствующей задачи термоупругости, получение численных решений этих задач, сравнительный анализ полученного решения для одномерной и двумерной моделей теплопроводности, анализ преимуществ и недостатков двумерной модели теплопроводности применительно к описанию температурного удара ПСБ МКА.

Задача формулировки критериев использования двумерной модели теплопроводности для описания возмущений от температурного удара в различных ситуациях сводится к выявлению границ применимости одномерной модели и включает в себя ряд критериев геометрического, энергетического и др. характеров, которые указывают на необходимость усложнения модели теплопроводности для корректного описания температурного удара в различных моделируемых ситуациях с помощью количественных показателей. В рамках решения данной задачи предполагается получить критерии как общего характера, так и связанные с решением специфических задач, например, оценки выполнения требований по микроускорениям.

Задача проведения вычислительных экспериментов, направленных на оценку влияния температурного удара ПСБ на динамику МКА, необходима для наглядно иллюстрации практического использования полученных в диссертационной работе результатов. В рамках этой задачи предполагается численное моделирование возмущений от температурного удара для симметричного и несимметричного МКА, а также валидация полученных приближенных зависимостей поля температур и компонентов вектора перемещений точек ПСБ с помощью экспериментальных данных.

1.5 Выводы по первой главе

Проведённые в первой главе исследования позволяют сделать ряд выводов.

- Обширные теоретические исследования температурного удара как отечественными так и зарубежными авторами, которые были начаты ещё в первой половине прошлого века, заложили фундамент для решения современных прикладных задач, связанных с учётом температурных деформаций и влияния температурного удара.
- Учёт температурного удара необходим при эксплуатации ряда конструкций, реализации технологий изготовления конструктивных элементов, а также выполнении различных космических миссий. Для успешного функционирования конструкций ядерных реакторов, различного рода двигателей необходимо детальное исследование влияния температурного удара на механические свойства конструктивных элементов, которые подвергаются этому удару. Большие упругие элементы КА, прежде всего ПСБ, регулярно подвергаются температурному удару при погружении КА в тень Земли и выходе из неё. Это оказывает существенное влияние на движение МКА.
- Решение поставленных в первой главе задач позволит корректно учитывать влияние температурного удара. Разработанный метод учёта влияния температурного удара на динамику движения МКА обеспечит корректное построение математических моделей движения МКА с учётом температурного удара.

2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК ПСБ В РАМКАХ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

2.1 Общие замечания

Одномерная модель теплопроводности является базовой для решения задачи оценки влияния температурного удара ПСБ на динамику КА по двум причинам.

Во-первых, как отмечается в работах [88, 89, 92, 96, 133], для нормально падающего на поверхность ПСБ однородного и стационарного теплового потока (солнечного излучения) происходит максимально быстрый прогрев её поверхностного слоя. Это, в свою очередь, вызывает максимальные ускорения относительного движения точек панели и, как следствие, максимальные возмущения. При этом влияние температурного удара на угловое движение МКА будет максимальным. Таким образом, реальная ситуация, рассматриваемая в одномерной модели теплопроводности, является самой опасной с точки зрения влияния температурного удара. Поэтому использование оценки возмущений от температурного удара в рамках одномерной модели теплопроводности в некотором смысле аналогично расчёту на прочность для самого опасного сечения.

Во-вторых, при плоском положении ПСБ в момент температурного удара одномерная постановка задачи теплопроводности вполне достаточна, если считать, что начальное поле температур является однородным. Использование активных демпфирующих устройств для гашения собственных колебаний ПСБ КА в ряде случаев позволяет за короткий промежуток времени нивелировать эти колебания [134-137]. Таким образом, возмущения от температурного удара могут быть в этих случаях достаточно адекватно описаны в рамках одномерной модели теплопроводности.

Следовательно, исследование возмущений от температурного удара в рамках одномерной модели теплопроводности имеет важное значение для достижения цели работы.

2.2 Упрощающие гипотезы одномерной модели теплопроводности

Для построения математической модели движения точек ПСБ МКА при температурном ударе в рамках одномерной задачи теплопроводности введём упрощающие предположения, которые также были частично описаны в работах [88, 92-94, 97, 133].

1 В данной работе в качестве тела, температурное поле которого моделируется при решении поставленных задач, используется тонкая однородная пластина.

В реальности при выполнении силового каркаса из металлических материалов будет наблюдаться неоднородность жесткостных свойств из-за отличий формы каркаса от пластины. Некоторые исследователи для учёта этого факта формируют критерий начальных несовершенств, нарушение которого приводит к необходимости учёта неоднородности для корректного описания процесса деформации [138]. При выполнении силового каркаса из композиционных материалов однородность также может нарушаться в виду неоднородности самого материала. Однако при построении базовой модели такое упрощение вполне допустимо.

2 Граничными условиями для задачи термоупругости являются жёстко заделанный один край и свободные три других края пластины.

В реальной ситуации узел крепления ПСБ к корпусу КА может обладать упругими свойствами, если не предъявляются слишком жёсткие требования к ориентации ПСБ на Солнце (таким примером является космический телескоп «Spot-4» [139, 140]. Для КА технологического назначения существуют жёсткие требования к энерговооружённости из-за того, что многие гравитационные процессы являются энергоёмкими [91, 141]. Поэтому крепления ПСБ более близко к модели жёсткой заделки. В этой связи стоит также отметить, что даже самое жёсткое крепление ПСБ к корпусу не будет в полной мере аналогично заделке, поскольку сам КА может изменять своё положение при деформациях ПСБ. Этот факт в большей степени относится к МКА, для которых соотношение

массы упругой и жёсткой частей является максимальным. Однако для построения базовой модели пренебрежение возможными перемещениями в узле крепления является вполне оправданным и несколько завышает значение внутренних силовых факторов, возникающих в пластине из-за температурного удара. С другой стороны, современные пакеты прикладных программ, например, ANSYS, позволяют смягчать геометрические граничные условия в заделке. Этим можно пользоваться при проведении практических расчётов, а также при проверке степени завышенности значений компонентов вектора деформаций в рамках геометрических граничных условий, соответствующих жёсткой заделке.

3 В момент наступления температурного удара пластина имеет плоскую недеформированную форму.

Это упрощение позволяет корректно использовать одномерную модель теплопроводности. Поскольку в этом случае при определённых ограничениях, наложенных на тепловой поток, температура поверхностного слоя пластины будет однородной. Эти ограничения будут введены в следующих упрощающих предположениях.

4 Направление падающего потока солнечного излучения в момент температурного удара перпендикулярно поверхности пластины.

В такой ситуации влияние температурного удара будет максимальным, поскольку будет обеспечен максимальный прогрев поверхностного слоя. Этот предельный случай будет демонстрировать актуальность учёта температурного удара на динамику движения КА. Если влияние окажется пренебрежимо малым по сравнению с другими возмущающими факторами, то нет необходимости рассматривать более сложные модели температурного удара.

5 Поток солнечного излучения считаем равномерным и стационарным, а его мощность - равной максимальному значению на уровне орбиты Земли относительно Солнца.

Данное упрощающее предположение также способствует созданию условий для максимального влияния температурного удара на динамику КА. В реальности неравномерностью и нестационарностью потока при изучении такого

быстропеременного явления, как температурный удар, можно пренебречь без существенной потери точности. Вопрос о значении мощности потока связан с тем, в какой точке земной орбиты происходит температурный удар.

6 Собственные колебания ПСБ не влияют на их температурное поле.

Значимость колебаний в аспекте процессов теплопередачи означала бы то, что, несмотря на равномерный поток солнечного излучения, поверхность панели солнечной батареи нагревалась бы неравномерно. Из-за существенных различий в углах падения солнечного излучения на различные участки поверхности панели солнечной батареи возникнет неравномерное распределение температуры по поверхности. В этом случае решение задачи теплопроводности будет значительно осложнено. Однако, насколько это оправдан учёт колебаний для базовой модели и какой эффект вызовет такая неравномерность. Легко представить, что при учёте колебаний нагрев будет происходить менее интенсивно, чем в случае, когда солнечное излучение падает нормально на каждый участок поверхности. Эффект температурного удара с точки зрения его влияния на динамику орбитального движения космического аппарата будет слабее. Действительно, в случае пренебрежения колебаниями и при справедливости других приведённых упрощающих гипотез внутренние тепловые потоки будут распространяться только внутрь пластины перпендикулярно поверхности, на которую падает поток излучения. Неравномерность распределения температуры на поверхности за счёт колебаний заставит часть внутренних тепловых потоков двигаться параллельно поверхности. Это, несомненно, уменьшит интенсивность прогрева, а, следовательно, и скорость температурных деформаций. Поэтому пренебрежение колебаниями в базовой модели несколько завышает эффект от температурных деформаций. Это, скорее, не является недостатком, а создаёт своеобразный запас полученной с помощью базовой модели оценки.

7 Все теплофизические свойства ПСБ предполагаются однородными и одинаковыми во всём диапазоне температур.

В реальной ситуации данные свойства будут зависеть от температуры панели. Согласно экспериментальным данным, рабочий диапазон температур является

достаточно широким: $100...400\text{ K}$ [94]. Для металлических материалов различия в свойствах могут быть значимыми, однако для композитных материалов вполне возможно соответствие данному допущению [142]. С другой стороны, в работе рассматривается очень динамичное явление температурного удара. Поэтому на небольшом промежутке времени, когда по данным работы [103] температура меняется на десятки градусов в секунду, диапазон изменения температур сужается. В этом случае допущение может быть применимо и в случае металлических материалов.

8 Для вывода уравнений модели используется закон Фурье.

Классический закон Фурье состоит в предположении пропорциональности внутреннего теплового потока градиенту температуры однородной неподвижной среды. Однако КА не является неподвижным, а совершает сложное свободное движение, двигаясь по орбите вместе с центром масс и вращаясь относительно него по трём перпендикулярным осям. Это приводит к тому, что на низких околоземных орбитах, где значимо аэродинамическое сопротивление, необходимо вносить поправки в модель. Например, пересмотрев граничные условия и учтя тепловое взаимодействие внешней поверхности ПСБ с набегающим потоком. Для более высоких орбит, где можно пренебречь аэродинамическим сопротивлением, видимых отличий покоящегося космического аппарата от движущегося, по всей вероятности, наблюдаться не будет.

9 Начальное поле распределения температур в ПСБ считается однородным. Данное допущение существенно упрощает решение задачи. Насколько оно справедливо можно судить исходя из конкретной орбиты КА. Рассчитав длительность солнечного и теневого участков орбиты КА, возможна корректная оценка степени соответствия конечного температурного поля предыдущего участка предположению о равномерности начального температурного поля следующего участка. Для базовой модели, которая должна быть достаточно универсальной, другого обоснованного допущения о начальном распределении температур ПСБ сделать довольно трудно.

10 Толщина ПСБ пренебрежимо мала по сравнению с её длиной и шириной. Для реальных панелей солнечных батарей при длине в несколько метров и ширине около одного метра толщина составляет всего несколько миллиметров. Для панелей нового поколения ROSA она и вовсе не превышает одного миллиметра [103]. Поэтому такое допущение вполне оправдано и не влияет на точность получаемых результатов. С другой стороны, это предположение допускает использование теории тонких пластин к исследованию НДС ПСБ.

11 Теплообмен через боковые поверхности пластины является пренебрежимо малым.

При справедливости предыдущей упрощающей гипотезы данное допущение является вполне справедливым. Его нарушение приведёт к некорректности описания моделируемой ситуации с помощью одномерной модели теплопроводности, поскольку значимое излучение тепла через боковую поверхность вызовет соответствующие внутренние тепловые потоки. Их описание возможно только в трёхмерной постановке.

12 Тепловые, механические и электрические процессы, протекающие в ПСБ, не оказывают друг на друга взаимного влияния за исключением влияния температурного расширения на процесс деформирования ПСБ.

Данное упрощение вполне справедливо не только для построения базовой модели, но и в реальной ситуации, где другие внутренние факторы, например, нагрев в результате протекания электрического тока, оказывают существенно менее значимое влияние на поле температур ПСБ, чем сам температурный удар.

13 ПСБ мгновенно выходит на штатную мощность выработки электроэнергии после выхода МКА из тени Земли.

Это связано с тем, что явление фотоэффекта считается безинерционным. При этом электроны сразу начинают своё движение после попадания солнечного потока на поверхностный слой ПСБ.

Таким образом, сделанные упрощающие предположения, с одной стороны, существенно упрощают построение математической модели движения точек ПСБ, а, с другой, - позволяют оценить максимально возможное влияние

температурного удара, поскольку описывают ситуацию наиболее интенсивного воздействия потока солнечного излучения на ПСБ.

2.3 Постановка начально-краевой задачи одномерной теплопроводности

Пусть однородная прямоугольная пластина с постоянными теплофизическими свойствами, соответствующая упрощающим гипотезам 1-13 раздела 2.2, подвергается температурному удару. В момент температурного удара она имеет плоскую форму и не деформирована (рисунок 2.1).

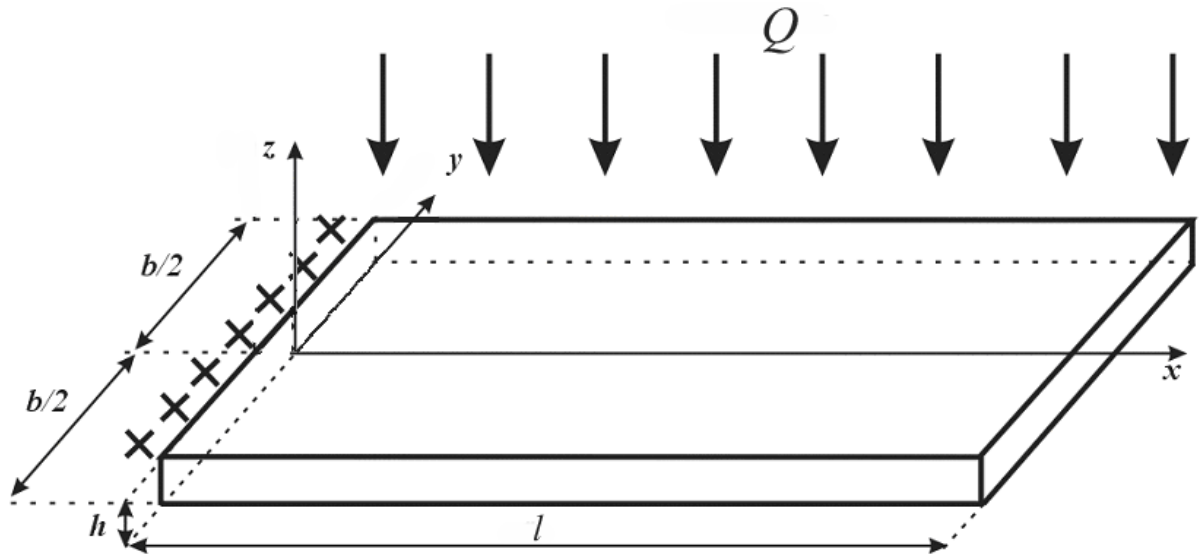


Рисунок 2.1 – Схема температурного удара однородной пластины [99]

В этом случае при равномерном и стационарном тепловом потоке (гипотеза 5) можно считать, что поверхностный слой пластины нагревается этим потоком однородно. Таким образом, температура всех точек поверхностного слоя в первом приближении может считаться одинаковой. Начальным полем температуры пластины будем считать однородное поле с одинаковой температурой T_0 во всех точках пластины (гипотеза 9). В такой постановке справедлива одномерная модель теплопроводности. При этом представим саму абсолютную температуру пластины в виде суммы двух функций: $T = T_0 + \Delta T$, где T_0 - является функцией первоначальной температуры, а ΔT - приращением температуры относительно первоначальной. В данной работе в качестве начального поля температур используется однородное поле, согласно упрощающему предположению 9. Поэтому в дальнейшей части работы под T будет пониматься искомое

приращение температуры, которая в рамках одномерной задачи теплопроводности является функцией только одной пространственной координаты и времени: $T = T(z, t)$. Подобная задача была рассмотрена в работах [92, 93, 97-99, 133], соавтором которых является автор данной диссертационной работы. Используем для такой модели одномерное уравнение теплопроводности, предполагая, что тепловые потоки внутри пластины распространяются только в направлении оси z (рисунок 2.1):

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}, \quad 0 \leq z \leq h, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

где $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности; λ - коэффициент теплопроводности; c - удельная теплоёмкость; ρ - плотность; h - толщина пластины.

Для постановки начально-краевой задачи дополним уравнение теплопроводности (2.1) граничными условиями третьего рода для нижней не освещённой Солнцем поверхности пластины (рисунок 2.1):

$$\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} = -e\Theta [T(0, t)^4 - T_c^4], \quad z = 0, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

где e - степень черноты материала пластины; Θ - постоянная Стефана-Больцмана; T_c - температура окружающей пластины среды.

Для верхней освещённой Солнцем поверхности пластины (рисунок 2.1):

$$\lambda \frac{\partial T(h, t)}{\partial z} = Q - \frac{UI}{lb} - e\Theta [T(h, t)^4 - T_c^4], \quad z = h, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

где Q - тепловой поток, падающий на поверхностный слой пластины; U и I – рабочие напряжение и сила тока бортовой сети.

Дополним задачу начальными условиями в соответствие с ранее сделанными допущениями:

$$T(z, 0) = T_0, \quad 0 \leq z \leq h, \quad t = 0, \quad (2.4)$$

где T_0 - некоторая начальная температура, одинаковая для всех точек пластины.

Таким образом, система (2.1)–(2.4) представляет собой третью начально-краевую задачу с одномерным уравнением теплопроводности (2.1). Результатом её решения является динамическое поле температур $T = T(z, t)$ точек пластины.

Третья начально-краевая задача не имеет общего алгоритма получения аналитического решения, поскольку граничные условия третьего рода (2.2) и (2.3) являются существенно нелинейными. Обычно она решается численными методами [88, 122, 143-145].

2.4 Приближённое решение начально-краевой задачи одномерной теплопроводности для случая тонкой пластины

Для получения приближенного решения поставленной в предыдущем разделе начально-краевой задачи теплопроводности воспользуемся разложением, предложенным в работе [146]:

$$T_n(z, t) = \sum_{i=0}^n \xi_i(t) z^i. \quad (2.5)$$

Ограничимся первыми четырьмя членами разложения (2.5):

$$T_3(z, t) = \xi_0(t) + \xi_1(t)z + \xi_2(t)z^2 + \xi_3(t)z^3. \quad (2.6)$$

Остальные члены ряда (2.5) будем считать пренебрежимо малыми в силу тонкости пластины. Тогда частные производные, входящие в уравнение теплопроводности (2.1), будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_3(z, t)}{\partial t} = \frac{d\xi_0(t)}{dt} + \frac{d\xi_1(t)}{dt}z + \frac{d\xi_2(t)}{dt}z^2 + \frac{d\xi_3(t)}{dt}z^3 \\ \frac{\partial^2 T_3(z, t)}{\partial z^2} = 2\xi_2(t) + 6\xi_3(t)z \end{cases}. \quad (2.7)$$

Подставляем (2.7) в (2.1):

$$\frac{d\xi_0(t)}{dt} + \frac{d\xi_1(t)}{dt}z + \frac{d\xi_2(t)}{dt}z^2 + \frac{d\xi_3(t)}{dt}z^3 = 2a[\xi_2(t) + 3\xi_3(t)z] \quad (2.8)$$

Сгруппируем слагаемые в (2.8), пренебрегая членами, содержащими z в степени выше первой:

$$\left[\frac{d\xi_0(t)}{dt} - 2a\xi_2(t) \right] + z \left[\frac{d\xi_1(t)}{dt} - 6a\xi_3(t) \right] = 0. \quad (2.9)$$

Для удовлетворения уравнения теплопроводности потребуем, чтобы обе квадратные скобки в левой части (2.9) были равны нулю. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_0(t)}{dt} = 2a\xi_2(t) \\ \frac{d\xi_1(t)}{dt} = 6a\xi_3(t) \end{cases}. \quad (2.10)$$

Таким образом, равенства (2.10) гарантируют удовлетворение уравнения теплопроводности (2.1) с точностью до слагаемых, содержащих z^2 в рамках разложения (2.6).

Рассмотрим далее граничные условия (2.2). Входящие в него выражения с учётом разложения (2.6) при $z = 0$ примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_3(z, t)}{\partial z} = \xi_1(t), & z = 0; t \geq 0; \\ T_3(0, t) = \xi_0(t), & z = 0; t \geq 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Пренебрегая температурой окружающей среды, подставив (2.11) в (2.2), получим:

$$\lambda \xi_1(t) = -e\Theta \xi_0^4(t). \quad (2.12)$$

Аналогично граничные условия (2.3). Входящие в него выражения с учётом разложения (2.6) при $z = h$ примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_3(z, t)}{\partial z} = \xi_1(t) + 2\xi_2(t)h + 3\xi_3(t)h^2; \\ T_3(h, t) = \xi_0(t) + \xi_1(t)h + \xi_2(t)h^2 + \xi_3(t)h^3. \end{cases} \quad (2.13)$$

Пренебрегая температурой окружающей среды, подставив (2.13) в (2.3), получим:

$$\lambda[\xi_1(t) + 2\xi_2(t)h + 3\xi_3(t)h^2] = Q - e\Theta[\xi_0(t) + \xi_1(t)h + \xi_2(t)h^2 + \xi_3(t)h^3]^4. \quad (2.14)$$

Линеаризуем (2.14), оставив только первую степень h :

$$\lambda[\xi_1(t) + 2\xi_2(t)h] = Q - e\Theta[\xi_0(t) + \xi_1(t)h]^4. \quad (2.15)$$

Раскроем в правой части (2.15) скобку, содержащую четвёртую степень:

$$[\xi_0(t) + \xi_1(t)h]^4 = \xi_0^4(t) + 4\xi_0^3(t)\xi_1(t)h + 6\xi_0^2(t)\xi_1^2(t)h^2 + 4\xi_0(t)\xi_1^3(t)h^3 + \xi_1^4(t)h^4. \quad (2.16)$$

Линеаризуем (2.16) относительно h :

$$[\xi_0(t) + \xi_1(t)h]^4 \approx \xi_0^4(t) + 4\xi_0^3(t)\xi_1(t)h. \quad (2.17)$$

С учётом (2.17) граничное условие (2.15) примет вид:

$$\lambda \xi_1(t) + 2\lambda \xi_2(t)h = Q - e\Theta \xi_0^4(t) - 4e\Theta \xi_0^3(t)\xi_1(t)h. \quad (2.18)$$

Из первого уравнения (2.10) имеем:

$$\xi_2(t) = \frac{1}{2a} \frac{d\xi_0(t)}{dt}. \quad (2.19)$$

Из выражения (2.12) получим:

$$\xi_1(t) = -\frac{e\Theta}{\lambda} \xi_0^4(t). \quad (2.20)$$

Подставляем (2.19) и (2.20) в (2.18) и получаем с учётом (2.12) после элементарных преобразований:

$$\frac{d\xi_0(t)}{dt} = \frac{Qa}{\lambda h} + 4 \frac{e^2 \Theta^2 a}{\lambda^2} \xi_0^7(t). \quad (2.21)$$

Интегрируя (2.21), можно найти, используя (2.10) и (2.12), остальные функции, входящие в разложение (2.6). Следует заметить, что уравнение (2.21) не интегрируется аналитически. Его решение может быть получено лишь приближённо. Данный результат частично опубликован в работе [147], соавтором которой является автор диссертационной работы.

2.5 Постановка задачи термоупругости

После определения динамического поля температур $T = T(z, t)$ из начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) рассмотрим НДС пластины, которое вызывает это поле температур, т.е. речь идёт о задаче термоупругости, соответствующей третьей начально-краевой задачи одномерной теплопроводности, рассмотренной в предыдущем разделе диссертационной работы. Пусть вектор $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ определяет перемещение точек пластины вдоль соответствующих координатных осей, показанных на рисунке 2.1.

Согласно гипотезе Кирхгофа о плоских сечениях:

$$u_x = -z \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (2.22)$$

Поэтому для тонких пластин можно считать, что в первом приближении изменения координат точек вдоль оси x (рисунок 2.1) пренебрежимо малы по сравнению с изменениями других координат, т.е. $u_x = 0$, т.е. вектор перемещений точек пластины при температурном ударе будет иметь вид: $\vec{u}(0, u_y, u_z)$. Вопрос о том, почему $u_y \neq 0$ в отличие от u_x можно объяснить следующим образом. Речь идёт о плоскости xu . При свободном температурном расширении пластины (граничные условия предполагают четыре свободных края) следует ожидать, что произойдёт симметричное всестороннее расширение пластины в плоскости xu относительно линий $x = l/2$ и $y = 0$. При этом логично предположить, что сами линии $x = l/2$ и $y = 0$ не перемещаются в направлении оси x и y соответственно при температурных деформациях в плоскости пластины. В рассматриваемой постановке один свободный край заменяется жёстко закреплённым. Это нарушает симметрию деформаций в плоскости в направлении оси x . В рамках данной работы предполагается, что в первом приближении справедлива следующая модель деформации в плоскости. В области пластины $(0 \leq x \leq l/2, -b/2 \leq y \leq b/2, 0 \leq z \leq h)$ деформация точек вдоль оси x равна нулю ($u_x = 0$). При этом формируется поле внутренних усилий сжатия $N(x, t)$. В области пластины $(l/2 < x \leq l, -b/2 \leq y \leq b/2, 0 \leq z \leq h)$ происходит свободное температурное

расширение пластины в направлении оси x и деформация точек $u_x \neq 0$. В этой области возможны такие участки при различных геометрических параметрах пластины, что допущение о возможном пренебрежении u_x по сравнению с u_y не является корректным. Однако представленный в работе подход имеет право на существование по двум важным причинам:

- рассмотрение случая $u_x \neq 0$ существенно усложняет решаемую задачу и не даёт возможности получить приближённые зависимости других компонентов вектора перемещений, необходимые для практических целей;
- в области $(0 \leq x \leq l/2, -b/2 \leq y \leq b/2, 0 \leq z \leq h)$ пренебрежение u_x по сравнению с u_y не подлежит никакому сомнению и при описании более сложной модели с учётом $u_x \neq 0$ в области $(l/2 < x \leq l, -b/2 \leq y \leq b/2, 0 \leq z \leq h)$ всё равно придётся рассматривать такую упрощённую постановку.

В соответствие с одномерной моделью теплопроводности (2.1)–(2.4) с учётом допущений 1–11 есть основания полагать, что прогиб точек пластины является функцией только их продольной координаты и времени: $u_z = u_z(x, t)$.

Запишем уравнение Софи Жермен с инерционным членом, определяющее динамику прогиба пластины в направлении оси z в общем виде [148, 149]:

$$D\Delta\Delta u_z + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = -\Delta M_T, \quad (2.23)$$

где D – цилиндрическая жёсткость пластины на изгиб; M_T – изгибающий момент от температурных деформаций; Δ – оператор Лапласа.

Для рассматриваемой одномерной задачи теплопроводности в работах [88, 99, 132] было получен вид уравнения Софи Жермен, соответствующий упрощающим гипотезам 1-13:

$$D \frac{\partial^4 u_z(x, t)}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial t^2} = -2\mu\alpha \int_0^h \left[2 \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + z \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \right] dz, \quad 0 \leq x \leq l, t > 0, \quad (2.24)$$

где μ – коэффициент Ламэ; α – коэффициент линейного расширения материала пластины; l – длина пластины.

Фактически уравнение (2.24) описывает прогиб срединной поверхности пластины в предположении, что она является тонкой. Это соответствует упрощающей гипотезе 10.

Дополним уравнение (2.24) граничными условиями в соответствии с упрощающей гипотезой 2.

Закреплённый край $x = 0$ (условия жёсткой заделки) геометрические граничные условия:

$$\begin{cases} u_z(0, t) = 0, x = 0, t > 0; \\ \frac{\partial u_z(x, t)}{\partial x} = 0, x = 0, t > 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Свободный край $x = l$ статические граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial y^2} = 0, x = l, t > 0; \\ \frac{\partial^3 u_z(x, t)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 u_z(x, t)}{\partial x \partial y^2} = 0, x = l, t > 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

где ν - коэффициент Пуассона.

Поскольку прогиб $u_z = u_z(x, t)$ не зависит от поперечной координаты y , граничные условия (2.26) существенно упрощаются:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} = 0, x = l, t > 0; \\ \frac{\partial^3 u_z(x, t)}{\partial x^3} = 0, x = l, t > 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Следует отметить, что вообще говоря, выражения для моментов, входящих в статические граничные условия, содержат слагаемые, содержащие температуру. Поэтому для данной задачи, строго говоря, необходимо записать:

$$\begin{cases} M_x = -\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial y^2} \right) - \mu\alpha \int_0^h T(z, t) z dz, x = l, t > 0; \\ M_y = -\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{h^3}{12} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial y^2} \right) - \mu\alpha \int_0^h T(z, t) z dz, x = l, t > 0. \end{cases}$$

Однако в случае тонкой пластины можно считать, что интеграл $\int_0^h T(z, t) z dz$ является пренебрежимо малым, поэтому в данной диссертационной работе

считается, что для приближенного удовлетворения статических граничных условий достаточно первого уравнения (2.27).

Дополним уравнение (2.24) начальными условиями, учитывающими, что в начальный момент времени пластина была не деформирована:

$$\begin{cases} u_z(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq l, t = 0; \\ \frac{\partial u_z}{\partial x}(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq l, t = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Рассмотрим далее другой компонент вектора перемещений $\vec{u}(0, u_y, u_z)$. В силу симметрии задачи относительно продольной оси x пластины (рисунок 2.1) есть основания полагать, что перемещения её точек в направлении оси y будут также симметричными. При этом перемещения u_y будут зависеть от продольной и поперечной координат: $u_y = u_y(x, y, t)$. Поэтому будем рассматривать только половину пластины: $0 \leq y \leq \frac{b}{2}$.

Предположим, что после температурного удара пластина пришла к равновесному состоянию, в котором можно пренебречь движением её точек. Тогда будет справедливо уравнение равновесия, учитывая, что пластина изотропна [149]:

$$\frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \text{grad div } \vec{u} - \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \text{rot rot } \vec{u} = \alpha \text{ grad } T, t = \infty. \quad (2.29)$$

В (2.29) и далее момент наступления равновесного состояния условно обозначен как $t = \infty$. Введённые ранее допущения позволяют представить уравнение (2.29) в скалярном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial x \partial y} = 0, 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t = \infty; \\ \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial y^2} + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial x^2} = 0, 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t = \infty; \\ \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial T(z, t)}{\partial z}, 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t = \infty. \end{cases} \quad (2.30)$$

Систему (2.30) можно использовать как дополнительные конечные условия, полагая при этом наличие равновесного состояния пластины.

С другой стороны, для описания динамики изменения вектора перемещений точек пластины $\vec{u}(0, u_y, u_z)$ в систему (2.30), согласно принципу Даламбера, нужно добавить силы инерции. Ранее было сделано предположение, что $u_x = 0$. Следовательно, первое уравнение (2.30) будет справедливо для $t > 0$, поскольку $\ddot{u}_x \equiv 0$. Это означает, что перемещение точек пластины в направлении оси y может быть представлено как сумма двух независимых функций:

$$u_y(x, y, t) = u_{1y}(x, t) + u_{2y}(y, t). \quad (2.31)$$

Действительно, для разложения (2.31) всегда выполняется условие:

$$\frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial x \partial y} \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad t > 0. \quad (2.32)$$

По сути функция (2.31) одновременно удовлетворяет двум уравнениям. Такой приём встречается и в классической механике, например, когда вводится функция напряжений, которая своей структурой автоматически удовлетворяет статическим условиям, а сам вид функции определяется уравнениями неразрывности [148].

Что касается третьего уравнения (2.30), то при справедливости сделанных предположение необходимо наложить дополнительные ограничения на функцию $T = T(z, t)$. Она может зависеть от z только линейно. В этом случае производная

$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z}$ не будет зависеть от z . Это не войдёт в противоречие с предположением,

что $u_z = u_z(x, t)$. Использование данного уравнения с таким ограничением затруднительно. Однако для определения прогиба было использовано уравнение Софи Жермен (2.24), которое свободно от указанного ограничения. Как первая, так и вторая частные производные в этом случае могут зависеть от z любым образом. Таким образом, интерес представляет второе уравнение (2.30). Величины

$\frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial y^2}$ представляют собой в первом приближении кривизны

деформированной пластины в направлении осей x и y соответственно. Несмотря на то, что, исходя второго уравнения (2.30), они должны быть одного порядка

$\frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial y^2}$, предположим, что они достаточно малы. Это даёт

возможность утверждать, что $\frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial y^2} \approx 0$ и переписать (2.31) в виде:

$$u_y(x, y, t) = u_{1y}(x, t) + y u_{3y}(t). \quad (2.33)$$

Тогда второе уравнение (2.30) с учётом инерционного члена для бесконечно малого элемента пластины объёмом $h \frac{b}{2} dx$ будет иметь вид:

$$D \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial^3 u_y(x, y, t)}{\partial x^3} dx + \rho \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial t^2} h \frac{b}{2} dx = 0, \quad 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t > 0. \quad (2.34)$$

Усилим предположение о малости кривизн. Это усиление будет основано на том, что длина рассматриваемой пластины существенно больше её ширины: $l \gg b$. В этом случае функция $u_{3y}(t)$ в разложении (2.33) будет играть роль малого параметра $\varepsilon(t)$. Тогда будет справедливо $\frac{\partial^2 u_{1y}(x, t)}{\partial t^2} \gg \frac{d^2 u_{3y}(t)}{dt^2}$. Следовательно, получим из (2.34) с учётом разложения (2.33):

$$\frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial^3 u_{1y}(x, t)}{\partial x^3} + \frac{6\rho(1-\nu^2)}{Eh^2} \frac{\partial^2 u_{1y}(x, t)}{\partial t^2} b = 0, \quad 0 \leq x \leq l, t > 0, \quad (2.35)$$

где E - модуль Юнга.

Уравнение (2.35) можно считать уравнением первого приближения для определения компонента вектора перемещений $u_y = u_y(x, y, t)$ с учётом (2.33).

Дополним уравнение (2.35) граничными условиями.

Закреплённый край (условия жёсткой заделки) геометрические граничные условия:

$$\begin{cases} u_y(0, y, t) = 0, x = 0, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t > 0; \\ \frac{\partial u_y(x, y, t)}{\partial x} = 0, x = 0, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t > 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

С учётом разложения (2.33) они могут быть преобразованы:

$$\begin{cases} u_{1y}(0, t) = -\frac{b}{2} u_{3y}(t), x = 0, y = \frac{b}{2}, t > 0; \\ \frac{\partial u_{1y}(x, t)}{\partial x} = 0, x = 0, t > 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Свободный край $x = l$ статические граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{1y}(x, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial y^2} = 0, & x = l, t > 0; \\ \frac{\partial^3 u_{1y}(x, t)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 u_y(x, y, t)}{\partial x \partial y^2} = 0, & x = l, t > 0, \end{cases} \quad (2.38)$$

С учётом разложения (2.33) они могут быть преобразованы:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{1y}(x, t)}{\partial x^2} = 0, & x = l, t > 0; \\ \frac{\partial^3 u_{1y}(x, t)}{\partial x^3} = 0, & x = l, t > 0, \end{cases} \quad (2.39)$$

Граничные условия по координате y :

Статические граничные условия при $y = 0$:

$$\frac{E(1-\nu)h}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u_y(x, y, t)}{\partial y} - \mu\alpha \int_0^h T(z, t) dz = 0, \quad 0 \leq x \leq l, y = 0, t > 0.$$

С учётом случая тонкой пластины и пренебрежения вторым слагаемым это условие можно переписать:

$$\frac{\partial u_y(x, y, t)}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, y = 0, t > 0.$$

Условие симметрии пластины при $y = 0$:

$$\frac{\partial u_y(x, y, t)}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, y = 0, t > 0.$$

Данные условия не могут быть выполнены точно при использовании разложения (2.33). Поскольку в этом случае $u_{3y}(t) \equiv 0$, а $u_y = u_y(x, y, t)$ превращается в $u_y = u_y(x, t)$ при использовании разложения (2.33). Однако, как было сказано выше, функция $u_{3y}(t)$ в разложении (2.33) играет роль малого параметра $\varepsilon(t)$. Таким образом, можно утверждать, что статические граничные условия по y и условия симметрии выполняются с точностью до малого параметра $\varepsilon(t)$.

Дополним уравнение (2.35) начальными условиями, характеризующими отсутствие начальных деформаций пластины:

$$\begin{cases} u_y(x, y, 0) = 0, 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t = 0; \\ \frac{\partial u_y}{\partial x}(x, y, 0) = 0, 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t = 0; \\ \frac{\partial u_y}{\partial y}(x, y, 0) = 0, 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Таким образом, уравнение (2.24) с граничными условиями (2.25) и (2.27), а также начальным условием (2.28) в совокупности с уравнением (2.35) с граничными условиями (2.37) и (2.39), а также начальным условием (2.40) определяет задачу термоупругости в части определения поля перемещений точек пластины под действием температурного удара. Подстановка в уравнения (2.24) и (2.35) поля температур $T = T(z, t)$, полученного при решении третьей начально-краевой задачи, описанной в разделе 2.3, позволяет определить деформацию пластины при справедливости основных упрощающих гипотез 1-13 и дополнительных, введённых при постановке задачи термоупругости в данном разделе диссертационной работы.

2.6 Численное моделирование динамики перемещений точек пластины в рамках одномерной задачи теплопроводности

Выберем для численного моделирования основные параметры пластины, соответствующие каркасу ПСБ перспективного МКА технологического назначения (таблица 2.1).

Основные параметры моделируемой пластины

Таблица 2.1

Параметр	Обозначение	Величина	Размерность
Материал пластины	—	МА2	—
Коэффициент теплопроводности	λ	96,3	$Вт/(м \cdot K)$
Постоянная Стефана-Больцмана	Θ	$5,67 \cdot 10^{-8}$	$Вт/(м^2 \cdot K^4)$
Мощность теплового потока	Q	1400	$Вт/м^2$
Температура среды (вакуума)	T_c	3	K
Начальная температура пластины	$T_0 = T(z, 0)$	200	K
Степень черноты	e	0,2	-
Удельная теплоёмкость пластины	c	1130,4	$Дж/(кг \cdot K)$
Плотность пластины	ρ	1780	$кг/м^3$
Модуль Юнга	E	$4 \cdot 10^{10}$	$Па$
Модуль сдвига	μ	$1,6 \cdot 10^{10}$	$Па$
Коэффициент Пуассона	ν	0,3	-
Длина пластины	l	1	$м$
Ширина пластины	b	0,5	$м$
Толщина пластины	h	1	$мм$

Проведём численное моделирование в пакете ANSYS. Часть результатов моделирования представлено в работах [92, 93, 96-100, 133, 150], автором и

соавтором которых является автор диссертационной работы. Теплофизические характеристики материала МА2 взяты из исследования [151].

Согласно упрощающей гипотезе 3, в момент наступления температурного удара пластина имела плоскую форму (рисунок 2.2).

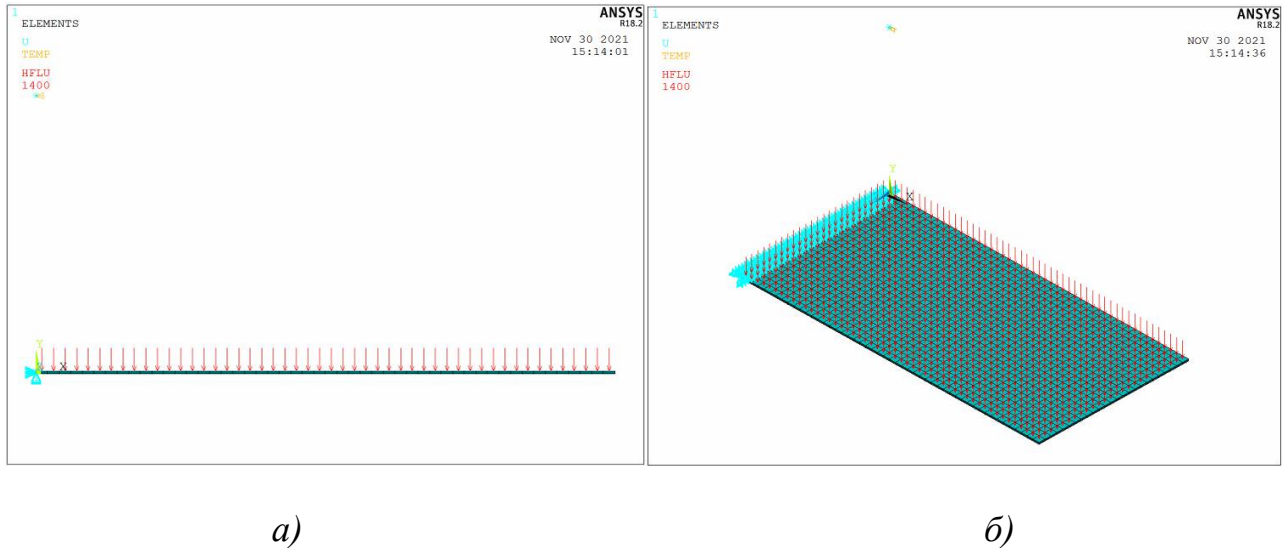
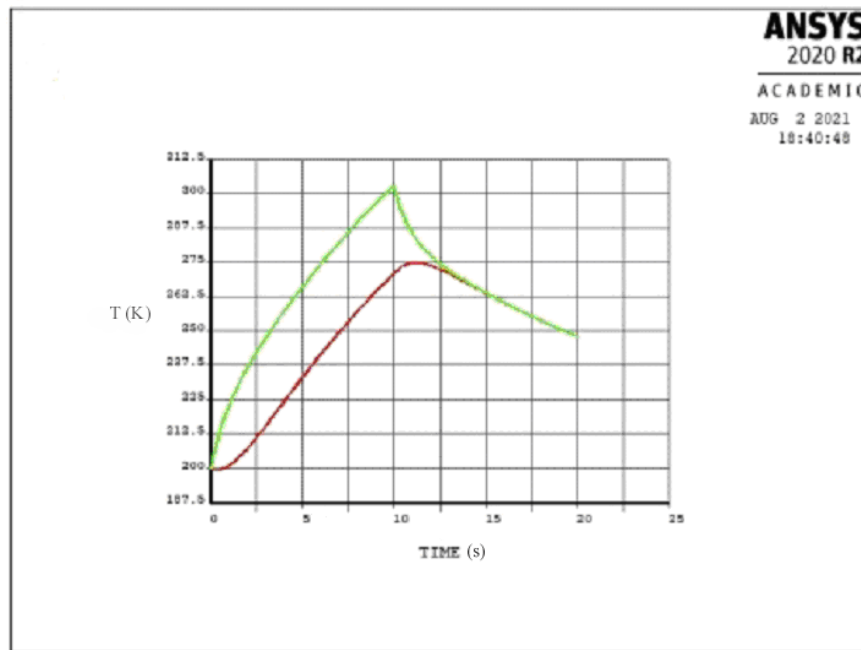
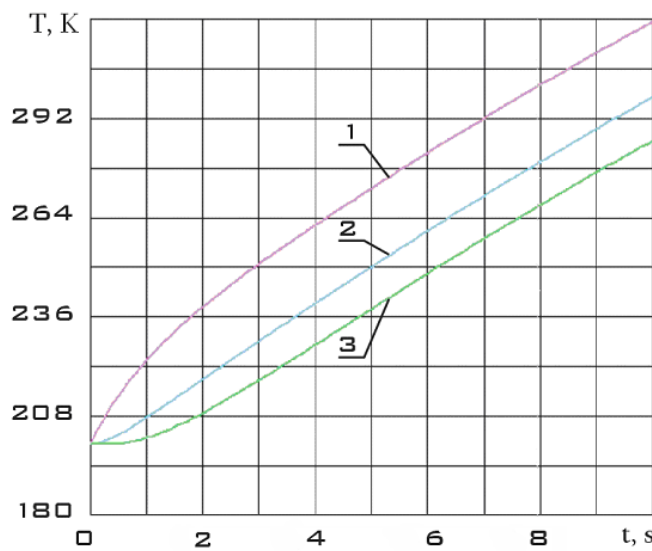


Рисунок 2.2 – Упругий элемент без начального прогиба в момент наступления температурного удара: а) в плоскости xz; б) аксонометрия

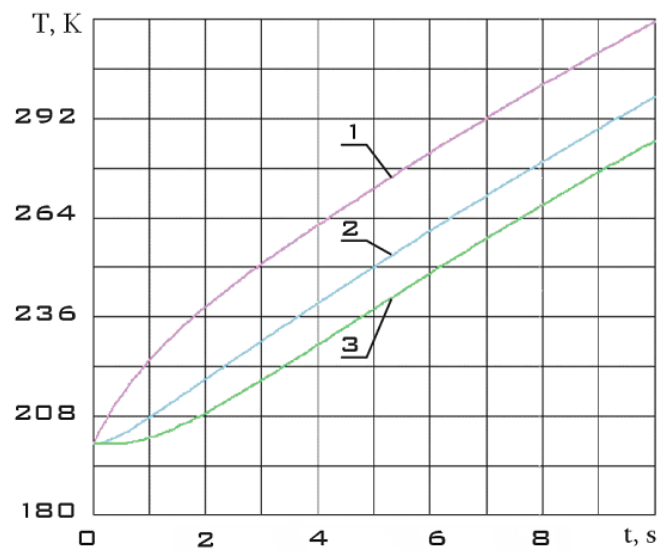
Как видно из рисунка 2.2, на пластину действует равномерный тепловой поток, величина которого представлена в таблице 1. Для определения динамики температурного поля внутри пластины она была представлена единым телом и разбита на три слоя. Температура средних точек этих слоёв показана на рисунке 2.3.



a)



б)



в)

Рисунок 2.3 – Модель динамики изменения температуры слоёв пластины:
 а) для однослойной модели (верхняя кривая - $z=h/2$, нижняя кривая - $z=-h/2$), в
 момент времени $t = 10$ с нагрев прекращается ($Q=0$)

б) для $x=l/2$; в) для $x=l$

1 - верхний слой; 2 - срединный слой; 3 - нижний слой

Рисунки 2.3 б) и 2.3 в) идентичны, поскольку в рамках одномерной задачи теплопроводности температура $T = T(z, t)$ и не зависит от координаты x .

Представленные на рисунке 2.3 кривые фактически являются численным решением начально-краевой задачи одномерной теплопроводности (2.1)–(2.4). Численное решение одномерной задачи термоупругости (2.24) с граничными условиями (2.25) и (2.27), а также начальным условием (2.28) в совокупности с (2.35) с граничными условиями (2.37) и (2.38), а также начальным условием (2.40) представлено на рисунке 2.4.

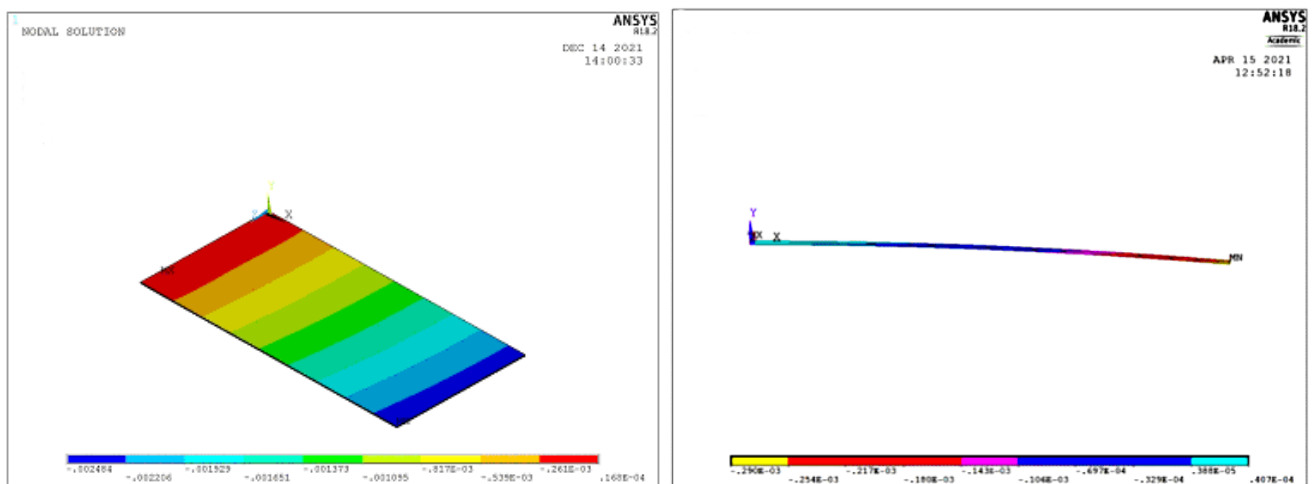


Рисунок 2.4 – Модель деформированного состояния пластины в результате температурного удара

На рисунках 2.3 хорошо видно, что только поверхностный слой, на который падает тепловой поток, сразу начинает прогреваться. Другие слои сначала немного охлаждаются, поскольку скорость теплопередачи внутри пластины является конечной.

В целом можно утверждать, что модель деформированного состояния пластины, представленная на рисунке 2.4, соответствует основным упрощающим гипотезам и математической постановке задачи термоупругости.

2.7 Приближенное аналитическое решение задачи термоупругости

Для получения приближенного аналитического решения задачи термоупругости в данной диссертационной работе предлагается следующий алгоритм.

1 Получить из решения задачи теплопроводности (2.1)-(2.4) выражение для температуры и проверить соответствие этого выражения численному решению, представленному на рисунке 2.3.

2 На основе метода разделения переменных представить решение уравнения (2.24) в виде:

$$u_z(x, t) = u_{1z}(t)u_{2z}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \quad (2.41)$$

Которое будет удовлетворять граничным условиям (2.25) и (2.27), а также начальному условию (2.28).

3 На основе введённых дополнительных допущений, используя выражение (2.33), представить решение для $u_y(x, y, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq \frac{b}{2}$, $t > 0$, удовлетворяющее граничным условиям (2.37) и (2.39), а также начальному условию (2.40).

4 На основе уравнения (2.35) сделать вывод о применимости найденного приближенного аналитического решения для моделирования температурного удара пластины в рамках одномерной модели теплопроводности путём анализа соответствия температурного поля полю деформаций.

В качестве приближенного аналитического решения для $u_z(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $t > 0$ рассмотрим следующее выражение:

$$u_z(x, t) = \frac{t}{t + \beta} (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \quad (2.42)$$

где $\beta > 0$ - некоторая положительная константа; A , B и C также являются константами.

Очевидно, что при $t = 0$ выражение (2.42) будет удовлетворять начальному условию (2.28). Поберём константы A , B и C так, чтобы (2.42) удовлетворяло граничным условиям (2.25) и (2.27). С учётом (2.41) эти граничные условия можно переписать следующим образом. Граничные условия (2.25):

$$u_{2z}(0) = 0, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial u_{2z}(x)}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t > 0. \quad (2.44)$$

Граничные условия (2.27):

$$\frac{\partial^2 u_{2z}(x)}{\partial x^2} = 0, \quad x = l, \quad t > 0, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial^3 u_{2z}(x)}{\partial x^3} = 0, \quad x = l, \quad t > 0. \quad (2.46)$$

Очевидно, что при $x = 0$ условия (2.43) и (2.44) для выражения (2.42) удовлетворяется при любых значениях искомых констант A , B и C . Таким образом, имеем из уравнений (2.45) и (2.46):

$$\begin{cases} 12Ax^2 + 6Bx + 2C = 0, & x = l, \quad t > 0; \\ 24Ax + 6B = 0, & x = l, \quad t > 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Выражая из (2.47) константы B и C через A , имеем:

$$\begin{cases} C = 6Al^2; \\ B = -4Al. \end{cases} \quad (2.48)$$

Таким образом, (2.42) с учётом (2.48) преобразуется в следующее выражение:

$$u_z(x, t) = \frac{Al^4 t}{t + \beta} \left(\frac{x^4}{l^4} - 4 \frac{x^3}{l^3} + 6 \frac{x^2}{l^2} \right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0. \quad (2.49)$$

При подстановке (2.49) в уравнении (2.24) в нём будут содержаться два параметра (β и A), которыми можно варьировать для приведения температурного поля в соответствие с результатами численного анализа. В случае, когда это невозможно ни при каких значениях параметров, следует сделать вывод о неприменимости приближенного аналитического решения (2.49) к моделируемой ситуации и поискать решение, отличное от (2.49). Физический анализ параметров будет проведён в следующем разделе диссертационной работы.

В качестве приближенного решения для u_y рассмотрим следующую функцию:

$$u_{1y}(x, t) = -\alpha \frac{b}{2} [T(0, t) - T_0] \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)^4, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0. \quad (2.50)$$

Очевидно, что при $t = 0$ выражение (2.50) будет удовлетворять начальному условию (2.40), т.к. в этом случае $T(0, t)|_{t=0} = T_0$. Убедимся в том, что функция (2.50) удовлетворяет второму уравнению (2.27) и обоим уравнениям (2.39). Вычислим соответствующие производные:

$$\frac{\partial u_{1y}(x, t)}{\partial x} = 4\alpha b [T(0, t) - T_0] \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^3 \frac{x}{l^2}. \quad (2.51)$$

Очевидно, что при $x = 0$ выражение (2.51) обращается в ноль для произвольных значений t , следовательно, функция (2.50) удовлетворяет второму уравнению (2.27).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{1y}(x, t)}{\partial x^2} &= 4 \frac{\alpha b}{l^2} [T(0, t) - T_0] \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^3 - 24\alpha b [T(0, t) - T_0] \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 \frac{x^2}{l^4} = \\ &= 4 \frac{\alpha b}{l^2} [T(0, t) - T_0] \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 \left(1 - 7 \frac{x^2}{l^2}\right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Очевидно, что при $x = l$ выражение (2.52) обращается в ноль для произвольных значений t , следовательно, функция (2.50) удовлетворяет первому уравнению (2.39).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u_{1y}(x, t)}{\partial x^3} &= -16 \frac{\alpha b}{l^4} [T(0, t) - T_0] \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \left(1 - 7 \frac{x^2}{l^2}\right) x - 56 \frac{\alpha b}{l^4} [T(0, t) - T_0] \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 x = \\ &= -8 \frac{\alpha b}{l^4} [T(0, t) - T_0] \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \left(9 - 21 \frac{x^2}{l^2}\right) x \end{aligned} \quad (2.53)$$

Очевидно, что при $x = l$ выражение (2.53) обращается в ноль для произвольных значений t , следовательно, функция (2.50) удовлетворяет второму уравнению (2.39). Первое уравнение (2.27) в этом случае будет иметь вид:

$$u_{3y}(t) = \alpha [T(0, t) - T_0], \quad t > 0. \quad (2.54)$$

Тогда с учётом (2.50) и (2.54) разложение (2.33) примет вид:

$$u_y(x, y, t) = \alpha [T(0, t) - T_0] \left[y - \frac{b}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^4 \right], \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad t > 0. \quad (2.55)$$

Функция (2.55) по сути является приближенной зависимостью компонента u_y вектора перемещений точек срединной поверхности пластины ($z = 0$, рисунок 2.1). Она удовлетворяет всем граничным условиям (2.27) и (2.39), а также начальному

условию (2.40). Таким образом, выражения (2.49) и (2.55) представляют собой приближённые аналитические зависимости компонентов вектора перемещений.

2.8 Исследование применимости приближенного аналитического решения задачи термоупругости для описания движения точек ПСБ при температурном ударе

В предыдущем разделе были предложены приближённые аналитические решения для компонентов вектора перемещений точек пластины при температурном ударе, которые удовлетворяют граничным и начальным условиям задачи термоупругости. Выясним, насколько реалистично эти решения описывают НДС пластины, которой моделируется ПСБ, в условиях околоземного космического пространства. Третье уравнение системы (2.30) и выдвинутое дополнительное ограничение на функцию $T = T(z, t)$ делают необходимым линеаризовать разложение (2.6) решения начально-краевой задачи теплопроводности относительно z в виде:

$$T(z, t) = T_0 + \xi_1(t)z, \quad 0 \leq z \leq h, \quad t > 0. \quad (2.56)$$

Затем сравним его с численным решением (рисунок 2.3).

Далее подставим аппроксимацию (2.42) в уравнение (2.24) для анализа соответствия поля температур и деформаций. Тогда правая часть (2.24) будет иметь вид:

$$-2\mu\alpha \int_0^h \left[2 \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + z \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \right] dz = -4\mu\alpha \int_0^h f(t) dz = -4\mu\alpha f(t) h. \quad (2.57)$$

После подстановки (2.42) в (2.24) будем иметь:

$$\frac{Eh^2}{1-\nu^2} \cdot A \frac{t}{t+\beta} - A \frac{\beta\rho}{(t+\beta)^3} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2) = -2\mu\alpha f(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0. \quad (2.58)$$

С учётом данных таблицы 2.1 (2.58) можно преобразовать:

$$4,4A \frac{t}{t+\beta} - 0,17A \frac{\beta}{(t+\beta)^3} x^2 (x^2 - 4lx + 6l^2) = -83,2 f(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0. \quad (2.59)$$

Поскольку при одномерной постановке температура не зависит от координаты x , то можно исследовать область, где значения этой координаты достаточно малы, т.е. вблизи заделки. В этом случае можно было пренебречь вторым слагаемым левой части (2.59) по сравнению с первым. Тогда имеем в первом приближении:

$$\xi_1(t) = -0,053 A \cdot B \frac{t}{t + \beta}, t > 0, \quad (2.60)$$

где B - некоторая константа.

Обозначим:

$$C = -0,053 A \cdot B. \quad (2.61)$$

Тогда (2.56) с учётом (2.60) и (2.61) будет иметь вид:

$$T(z, t) = Cz \frac{t}{t + \beta} + T_0, 0 \leq z \leq h, t > 0. \quad (2.62)$$

Выражение (2.62) представляет двухпараметрическое семейство с параметрами C и β . При этом параметры β и C имеют размерности $[c]$ и $[K/m]$ соответственно и связаны с теплофизическими свойствами пластины. На рисунках 2.5 и 2.6 показана динамика прогрева пластины при различных значениях параметров β и C для $z = h$, т.е. верхнего слоя пластины, подверженного падающему тепловому потоку (рисунок 2.1).

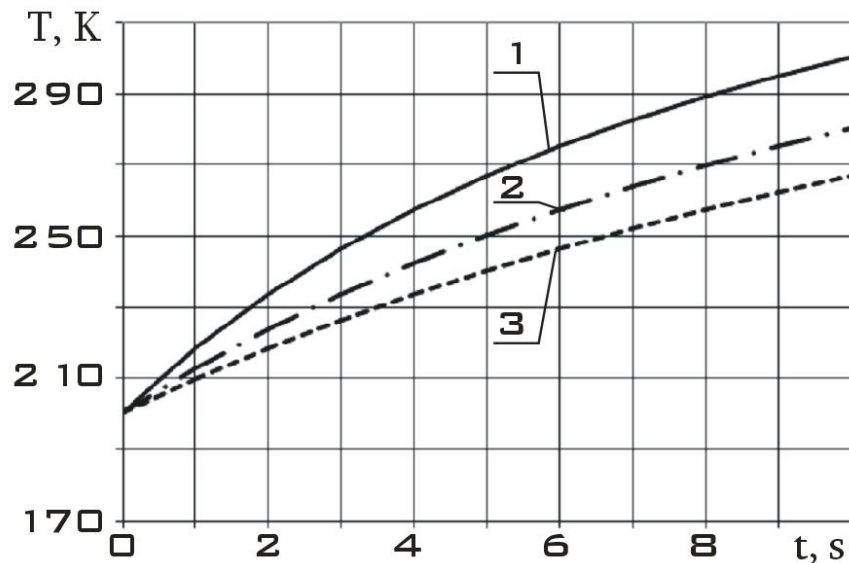


Рисунок 2.5 – Зависимость динамики температуры пластины от параметра β

($C=200 K/m$):

$$1 - \beta = 1 \text{ c}; 2 - \beta = 1,5 \text{ c}; 3 - \beta = 2 \text{ c}$$

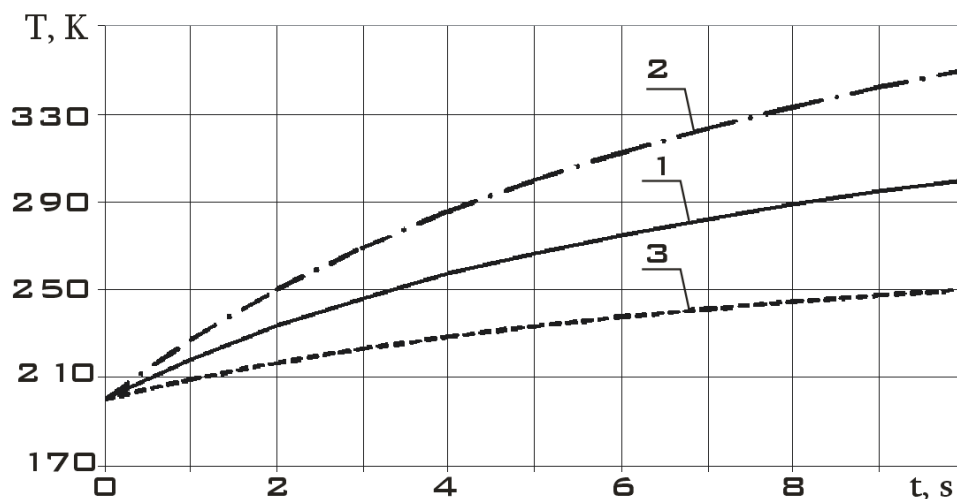


Рисунок 2.6 – Зависимость динамики температуры пластины от параметра C ($\beta=1$ с): 1 – $C = 200$ К/м; 2 – $C = 300$ К/м; 3 – $C = 100$ К/м

Проведём анализ выражения (2.62). Как отмечалось в разделе 2.6, только поверхностный слой, на который воздействует тепловой поток, начинает сразу прогреваться. Функция (2.62) на участке, показанном на рисунках 2.5 и 2.6 только возрастает. Поэтому сравнительный анализ следует проводить именно с поверхностным слоем. Для других слоёв зависимость температуры от времени является более сложной, чем (2.62). На рисунке 2.7 показана динамика температуры поверхности пластины (верхняя кривая рисунка 2.3 а), приближенное нелинеаризованное решение начально-краевой задачи (2.1)-(2.4) и функция (2.62) при значениях параметров: $C = 200$ К/м, $\beta = 1$ с.

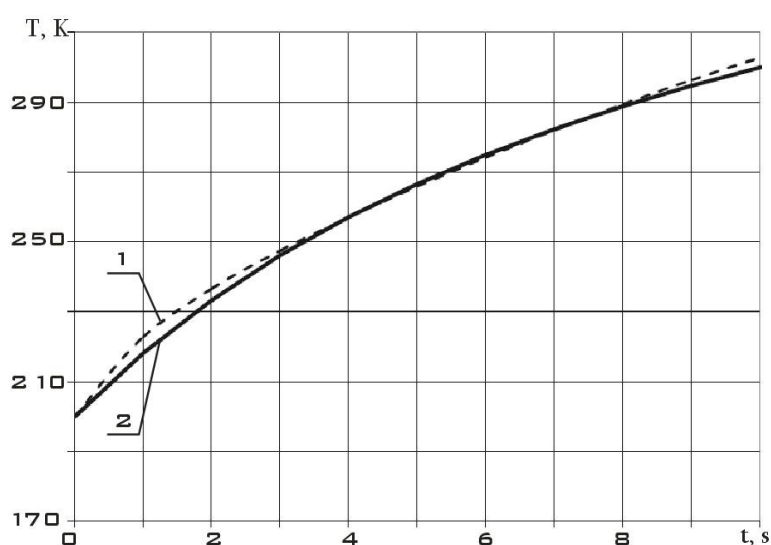


Рисунок 2.7 – Динамика температур поверхностного слоя пластины ($z = h$): 1 – верхняя кривая рисунок 2.3 а); 2 – по формуле (2.43) при $C = 200$ К/м, $\beta = 1$ с

Как видно из рисунка 2.7, кривые температур демонстрируют сходство. Таким образом, можно утверждать о применимости приближенного аналитического решения (2.49) для описания НДС ПСБ при температурном ударе в первом приближении и его соответствии линеаризованному полю температур (2.56), а также о соответствии линеаризованного поля температур (2.56) разложению (2.6), полученному из решения одномерной задачи теплопроводности (2.1)-(2.4). Зависимость (2.49) при значении параметра $A=10^{-4} \text{ м}^{-3}$ представлена на рисунке 2.8 и в целом соответствует представленным на рисунке 2.4 результатам численного моделирования задачи термоупругости.

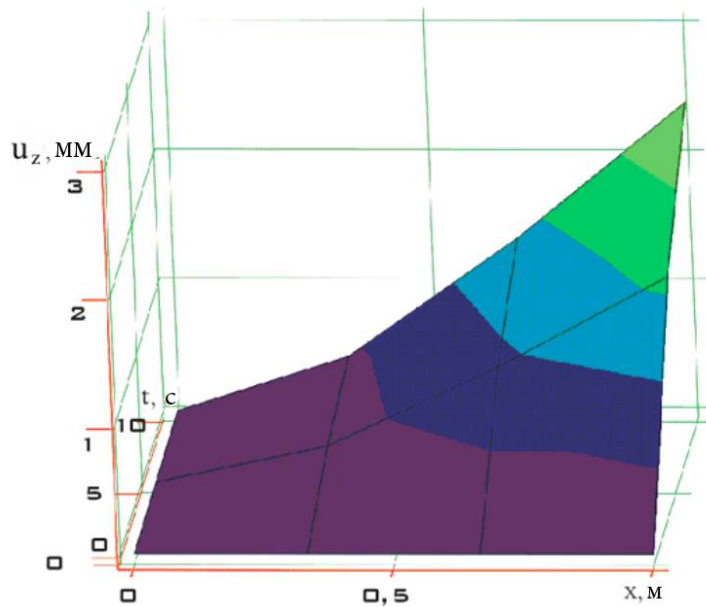


Рисунок 2.8 - Зависимость $u_z(x, t)$ для $A=10^{-4} \text{ м}^{-3}$

Рассмотрим далее другой компонент вектора перемещений u_y и проанализируем соответствие поля температур задаче аппроксимации u_y (2.55). Для этого подставим в (2.35) выражение для температуры (2.62):

$$b \left\{ \frac{3xh^2t}{2l^4(1-\nu^2)} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \left(7 \frac{x^2}{l^2} - 3 \right) \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{\rho}{4E} \left[y - \frac{b}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)^4 \right] \frac{\beta}{(t+\beta)^2} \right\} = \frac{1}{2}t, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad t > 0 \quad (2.63)$$

Обозначим:

$$\varphi(x, y, t) = b \left\{ \frac{3xh^2t}{2l^4(1-\nu^2)} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \left(7\frac{x^2}{l^2} - 3 \right) \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{\rho}{4E} \left[y - \frac{b}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)^4 \right] \frac{\beta}{(t+\beta)^2} \right\} - \frac{1}{2}t. \quad (2.64)$$

Тогда с учётом числовых значений параметров (таблица 1) $\varphi(x, t)$ (2.64) можно привести к виду:

$$\varphi(x, y, t) = \left\{ 51xt(7x^2 - 3)(1 - x^2) - 1,1 \left[y - \frac{1}{4}(1 - x^2)^4 \right] \frac{\beta}{(t+\beta)^2} \right\} \cdot 10^{-8} - t. \quad (2.65)$$

Таким образом, в моделируемой ситуации функция (2.65) близка к нулю, независимо от x и y , лишь при малых значениях t . Можно утверждать, пренебрегая слагаемыми в фигурных скобках, что:

$$\varphi(x, y, t) \approx \varphi^*(t) = -t. \quad (2.66)$$

Следовательно, приближенное решение (2.55) корректно может быть использовано при малых значениях t (рисунок 2.9).

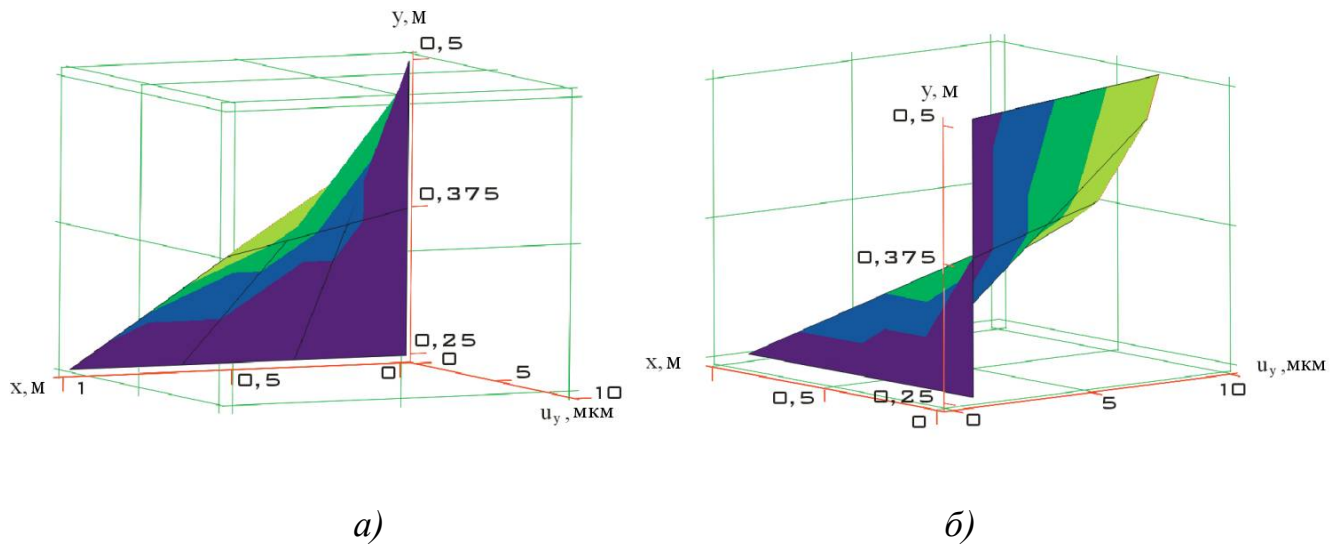


Рисунок 2.9 - Выполнение граничных условий (2.35) при различных значениях переменной t : а) $t = 1$ с; б) $t = 5$ с

Здесь ещё следует вспомнить и об ограничениях, связанных с предположением о малости кривизн $\frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial y^2}$, которое было использовано при формировании вида разложения (2.33). Исходя из (2.55) для

этого необходимо выбрать область с малыми значениями y и значениями x , близкими к l . Причём значения x объясняются удалением от заделки, где кривизны соседних с заделкой сечений должны быть существенными.

Зависимости компонентов вектора перемещений точек поверхностного слоя пластины, соответствующие приближенному решению (2.55), показаны на рисунке 2.10. Поскольку $u_y(x, y, t)$ может быть показана только в четырёхмерном пространстве, на рисунке 2.10 показаны два её трёхмерных сечения.

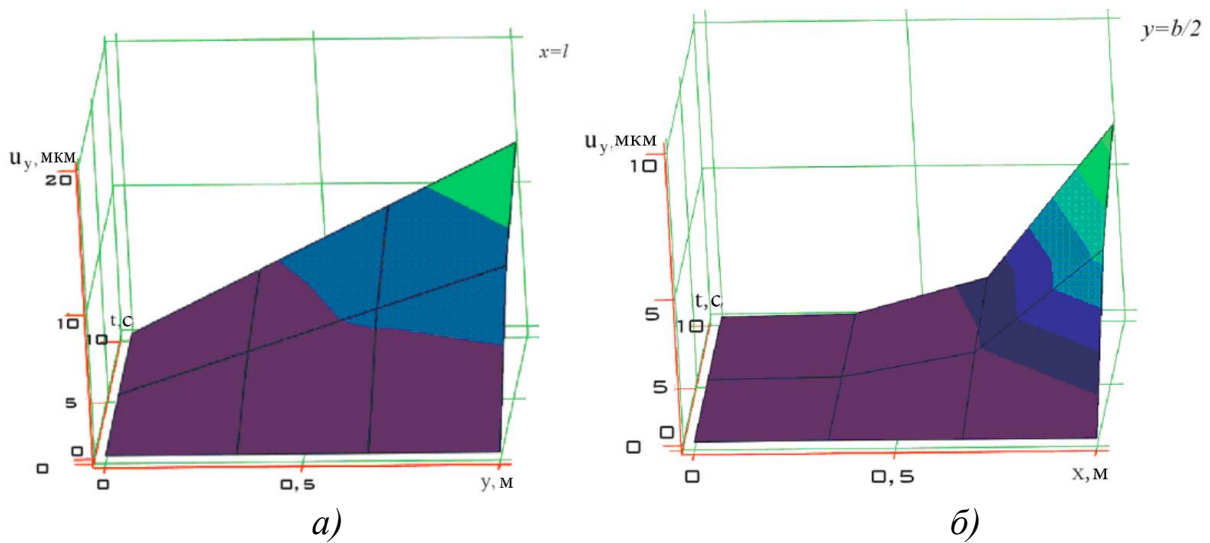


Рисунок 2.10 - Зависимость $u_y(x, y, t)$:

$$a) u_y(x=l, y, t); b) u_y(x, y=\frac{b}{2}, t)$$

Таким образом, анализ применимости приближенных аналитических решений показал возможность их использования для описания НДС ПСБ при температурном ударе для определённых временных и пространственных областей.

2.9 Выводы по второй главе

По результатам исследований, проведённых во второй главе, можно сделать следующие выводы.

Поставленная и решённая в данной главе начально-краевая задача одномерной теплопроводности и соответствующая ей задача термоупругости представляют собой самый опасный случай влияния температурного удара на динамику МКА. Поэтому, несмотря на простоту этой задачи, её роль для оценки влияния температурного удара достаточно важна с точки зрения практической значимости.

Несмотря на отсутствие общих методов решения начально-краевой задачи с граничными условиями третьего рода в виду их существенной нелинейности в диссертационной работе удалось получить приближенные решения для компонентов вектора перемещений в рамках одномерной модели теплопроводности при справедливости основных 1-13 и дополнительных допущений, сделанных по ходу вывода этих решений.

Полученные приближённые решения для компонентов вектора перемещений в рамках одномерной модели теплопроводности могут быть использованы для описания движения точек ПСБ при температурном ударе для определённых временных и пространственных областей. Причём, решение (2.49) хорошо согласуется с численным при описании перемещений точек поверхностного слоя пластины, подверженного воздействию теплового потока. Проблемы описания перемещений точек других слоёв возникают в самый начальный период температурного удара и связаны не с самим решением (2.49), а с линеаризованной аппроксимацией температуры с помощью функции (2.62).

Значения компонента вектора перемещений u_y значительно меньше, чем u_z . Даже в рамках одномерной модели теплопроводности u_y имеет более сложную структуру, чем u_z , завися, по крайней мере, от трёх переменных. По-видимому, корректное описание u_y в рамках одномерной модели достаточно затруднительно даже для более сложной аппроксимации поля температур, чем выражение (2.62).

3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК ПСБ В РАМКАХ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

3.1 Общие замечания

Оценку влияния температурного удара в рамках одномерной модели теплопроводности можно охарактеризовать как точечную оценку самого опасного с точки зрения интенсивности влияния случая. Эта оценка позволит решить вопрос о необходимости учёта влияния температурного удара на динамику движения МКА. Так, в работе [132] отмечено, что для КА среднего класса и класса орбитальных космических станций нет необходимости в учёте температурного удара, поскольку его влияние на движение космических аппаратов указанных классов является пренебрежимо малым по сравнению с другими возмущающими факторами.

Однако для более детального исследования влияния температурного удара в случае необходимости его учёта одномерная постановка может оказаться недостаточной. В реальности большие упругие элементы МКА совершают собственные колебания, в том числе, и благодаря температурному удару. Авторы многих исследований утверждают, что температурные колебания способны снижать точность ориентации МКА настолько, что это сказывается на качестве выполнения им целевых задач, например, дистанционного зондирования Земли из космоса или съёмки космических объектов. Примерами таких работ могут служить [76-82, 99, 150]. В этих случаях факт значимости влияния температурного удара доказан и не требует дополнительных исследований. Использование одномерной модели будет не столь актуальным. Безусловно, что полный учёт колебаний приведёт к необходимости решать задачу температурного удара в общей трёхмерной постановке. Однако для ряда случаев может оказаться достаточным решение двумерной задачи. Такому подходу будет посвящена данная глава диссертационной работы.

3.2 Критерий учёта двумерности

Предположим, что температурный удар существенно более быстрое явление, чем колебания упругих элементов. Основанием для этого могут служить исследования собственных колебаний больших упругих элементов, в которых говорится о быстром затухании высокочастотной части спектра [151, 152]. Низкочастотные или квазистатические колебания имеют частоту менее 0,01 Гц [153, 154]. Поэтому в отношении их данное предположение является справедливым. Такое предположение даёт возможность исключить из учёта сами колебания. Поэтому такая постановка тоже, как и одномерная задача, является статической в том смысле, что точки ПСБ могут двигаться только в результате температурных деформаций. Без температурного воздействия в рамках двумерной постановки они считаются неподвижными за время температурного удара.

Однако гипотезы 3, 4 и отчасти гипотеза 6 одномерной постановки задачи утрачивают свою силу. Действительно, предполагая возможность колебаний ПСБ, нельзя гарантировать, что на момент температурного удара ПСБ будет всё время иметь плоскую форму (гипотеза 3). Плоская форма может быть реализована на ряду с другими искривлёнными формами. Искривление формы ПСБ в момент температурного удара повлияет на характер её нагрева, поскольку искривлённая поверхность ПСБ не может быть на каждом её участке перпендикулярна падающему тепловому потоку (гипотеза 4). В таком случае нельзя утверждать, что собственные колебания ПСБ не влияют на поле её температур (гипотеза 6). Однако сохраняется отсутствие влияния динамики самих колебаний. Колебания будут влиять на распределение температур через начальный прогиб ПСБ на момент температурного удара.

Можно констатировать, что, по сравнению с одномерной постановкой, прогрев ПСБ будет менее интенсивным, поскольку не все части упругого элемента располагаются нормально падающему тепловому потоку. Это определяет ситуацию, при которой не все точки поверхностного слоя будут

прогреты одинаково. Поэтому внутренние тепловые потоки направлены не только вглубь пластины (вдоль оси z , рисунок 2.1), но и вдоль оси x .

Перед изложением математической модели в двумерной постановке следует разработать критерий, при выполнении которого одномерная модель не достаточно корректно описывает явление температурного удара с точки зрения температурных деформаций точек ПСБ и её НДС. В данной работе представлен ряд критериев общего характера и связанных со спецификой решаемой задачи. Результаты данных исследований опубликованы в работе [101], одним из соавторов которой является автор диссертационной работы.

Рассмотрим критерии общего характера. Самым простым из них видится *геометрический подход* к построению критерия. Будем исходить из геометрических соображений, в рамках которых принято считать углы менее 5^0 малыми углами. Для малых углов приняты приблизительные соотношения: $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$. Первое соотношение позволяет предполагать о том, что в контексте решаемой задачи можно считать, что тепловой поток падает нормально к поверхности пластины (гипотеза 4). Для углов, превышающих 5^0 , такие упрощения не приняты. При этом $\cos 5^0 \approx 0,9962$. Не нарушая дополнительного упрощения относительно прогиба ($u_z = u_z(x, t)$), предположим, что начальный прогиб определяется некоторым выражением: $u_{z0} = u_{z0}(x, t)$. Тогда взяв частную производную по x имеем:

$$\theta_{z0}(x, t) = \frac{\partial u_{z0}(x, t)}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0, \quad (3.1)$$

где $\theta_{z0}(x, t)$ - угол наклона касательной к искривлённой поверхности пластины в плоскости xz (рисунок 2.1).

Можно утверждать, что, если выполняется следующее условие:

$$\theta_{z0}(x, t) \leq 0,0872, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0, \quad (3.2)$$

то с геометрической точки зрения гипотеза 4 может быть корректно применена при описании температурного удара пластины. Само выражение (3.2) по сути является геометрическим критерием использования одномерной модели теплопроводности.

На рисунке 3.1 показан пример зависимости, построенной на основе (3.1) и исследованной в работе [101].

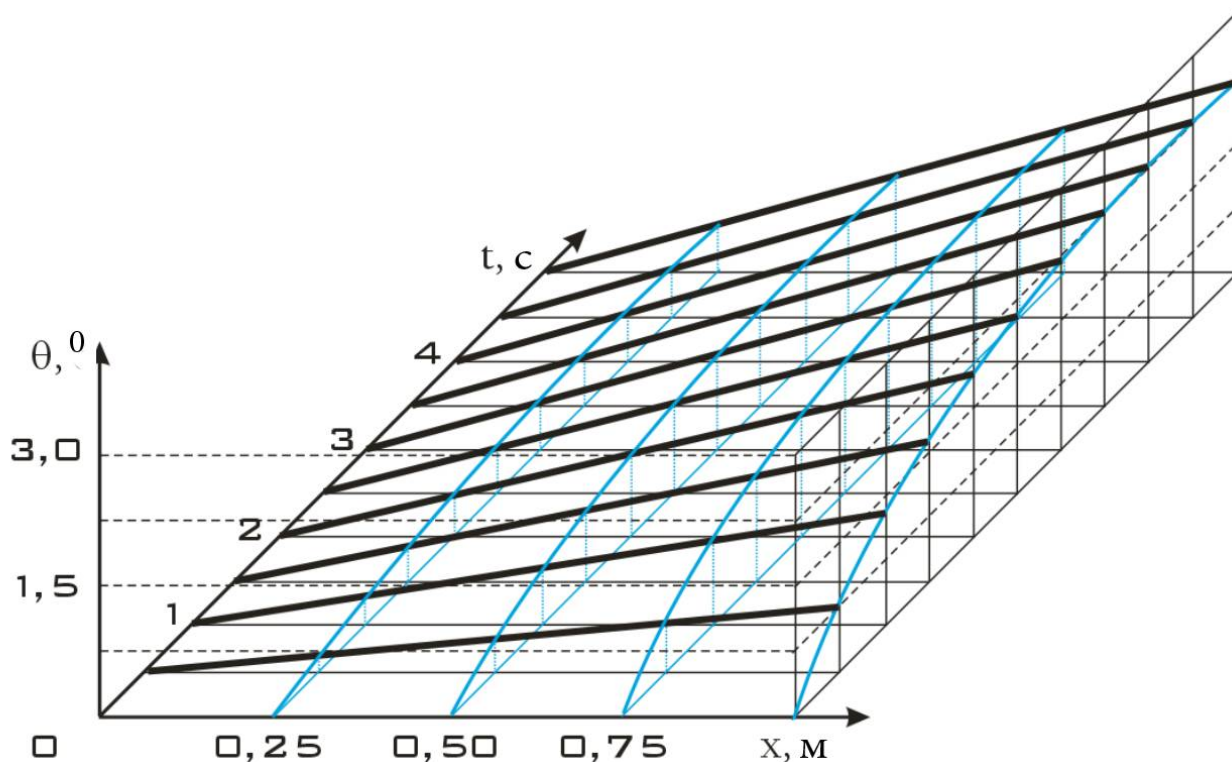


Рисунок 3.1 – Зависимость углов поворота от продольной координаты x и времени t

Представленная на рисунке 3 зависимость показывает, что во всех точках пластины критерий (3.2) выполняется. Поэтому использование одномерной модели теплопроводности является в данном случае обоснованным.

Другим подходом к построению критерия видится *энергетический подход*. Он будет заключаться в анализе возможных тепловых потоков, распространяющихся не во внутрь пластины (параллельно оси z), а вдоль пластины (параллельно оси x). Запишем более общее уравнение теплопроводности, чем уравнение (2.1) [88, 149]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \operatorname{div}(\operatorname{grad} T). \quad (3.3)$$

В случае неравномерности нагрева поверхностного слоя из-за начального прогиба пластины справедливым будет $T = T(x, z, t)$, следовательно, уравнение (3.3) примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (3.4)$$

Тогда граничное условие (2.3) в общем случае примет вид:

$$\lambda \frac{\partial T(x, h, t)}{\partial n} = Q \cos \theta_{z_0}(x, t) - e\Theta [T(x, h, t)^4 - T_c^4], \quad 0 \leq x \leq l, \quad z = h, \quad t = 0, \quad (3.5)$$

где n - направление нормали к искривлённой поверхности пластины, не совпадающее в общем случае с направлением оси z , как в одномерной модели.

Разложим в (3.5) $\cos \theta_{z_0}(x, t)$ в ряд:

$$\cos \theta_{z_0}(x, t) = 1 - \frac{\theta_{z_0}^2(x, t)}{2} + \dots,$$

где точками помечены слагаемые более высокого порядка.

Тогда в первом приближении разницу между (2.3) и (3.5) можно оценить как:

$$\lambda \left[\frac{\partial T(h, t)}{\partial z} - \frac{\partial T(x, h, t)}{\partial n} \right] = Q \frac{\theta_{z_0}^2(x, t)}{2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad z = h, \quad t = 0. \quad (3.6)$$

Проинтегрируем (3.6) по x . Тогда в рамках справедливости гипотезы 5 имеем:

$$\Delta \bar{q} = \frac{Q}{2l} \int_0^l \theta_{z_0}^2(x, 0) dx. \quad (3.7)$$

Величина $\Delta \bar{q}$ является среднеинтегральным значением неучитываемой в одномерной модели теплопроводности неравномерности прогрева поверхностного слоя пластины из-за её начального прогиба. Фактически признание значимости величины $\Delta \bar{q}$, определяемой выражением (3.7) означает утрату справедливости гипотезы 5 и представлении падающего теплового потока в виде диапазона:

$$Q \in \left[Q_{\max} \left(1 - \frac{\theta_{z_0}^2(l, 0)}{2} \right), Q_{\max} \right], \quad (3.8)$$

где $Q_{\max}$ - значение теплового потока, обозначенное в гипотезе 5.

Именно замена максимального значения теплового потока на диапазон (3.8) и определяет снижение интенсивности прогрева пластины и, как следствие, снижение влияния температурного удара на движение МКА.

Значимость учёта этой неравномерности может определяться по-разному. Так, в работе [101] предложено сравнивать $\Delta \bar{q}$ со среднеквадратичным

отклонением значений падающего теплового потока при условии их измерений. Возможно и сравнение $\Delta \bar{q}$ с самой величиной падающего потока Q_{max} . Это может зависеть от специфики решаемой задачи, хотя сам энергетический подход является универсальным. В этом случае критерий применимости одномерной модели теплопроводности может иметь вид:

$$\frac{Q}{2l} \int_0^l \theta_{z=0}^2(x, 0) dx \leq \Delta \bar{q}_{кр}, \quad (3.9)$$

где $\Delta \bar{q}_{кр}$ - некоторое критическое значение, выбираемое, исходя из конкретной задачи.

При обсуждении критериев применимости одномерной модели можно указать ряд специализированных, связанных с решением той или иной конкретной задачи. Так, при исследовании температурного удара ПСБ МКА следует обращать внимание на его конструкцию. Например, выступающие элементы МКА могут затенять часть ПСБ в момент температурного удара (рисунок 3.2).



Рисунок 3.2 - МКА с занегающими ПСБ выступающими конструктивными элементами

Это вызовет неравномерность прогрева поверхностного слоя ПСБ, несмотря на то, что все основные гипотезы останутся в силе. Поэтому можно сформировать *конструктивный критерий* на основе приведённых выше соображений. Предметом для анализа в таком критерии может являться определение значимости затеняемой площади ПСБ выступающими элементами МКА.

Анализ порождаемых температурным ударом микроускорений, влияющих на динамику вращательного движения МКА, может привести к созданию критерия различий между микроускорениями, оценёнными по одномерной и двумерной моделям. Так, в работе [101] предлагается сравнивать эту разницу с инструментальной или косвенной погрешностью оценки микроускорений:

$$\left| \frac{\alpha E b}{m_0} \int_0^l dx \int_0^h (T_1(z, t) - T_2(x, z, t)) dz \right| < \Delta w_{inst}, \quad (3.10)$$

где m_0 – общая масса МКА, включая ПСБ; Δw_{inst} – инструментальная погрешность средств измерений или косвенная погрешность оценки.

Таким образом, при решении практических задач следует показать недостаточную корректность одномерной модели теплопроводности перед использованием более сложной модели. Это возможно путём использования одного из предложенных универсальных критериев либо разработки собственного критерия, например, с учётом специфики решаемой задачи.

3.3 Упрощающие гипотезы двумерной модели теплопроводности

Проведём ревизию упрощающих гипотез одномерной модели, отказавшись от части из них.

1 Моделью тела, подверженного температурному удару, является тонкая однородная пластина.

2 Граничными условиями для задачи термоупругости являются жёсткая заделка на одном краю и свободные три других края пластины.

Сохранение этих гипотез позволит оставить в силе основные положения решённой в предыдущей главе задачи термоупругости. В частности, по-прежнему, справедливы представления компонентов вектора перемещений точек пластины: $u_x = 0$; $u_y = u_y(x, y, t)$ и $u_z = u_z(x, t)$. Однако сам вид решений изменится из-за более сложного представления температурного поля пластины в рамках двумерной модели.

3 В момент наступления температурного удара ($t=0$) пластина имеет произвольную форму, однако $u_{z0} = u_{z0}(x, 0)$.

Если предположить, что $u_{z0} = u_{z0}(x, y, 0)$, то это приведёт к необходимости трёхмерной постановке задачи, поскольку в направлении оси y также будет происходить неравномерный прогрев поверхностного слоя пластины. С другой стороны, для более общего предположения необходимо, чтобы значимыми были собственные продольные и поперечные колебания ПСБ. Однако характерные размеры ПСБ различных МКА (например, рисунки 1.1 или 3.2) предполагают, что поперечными колебаниями можно пренебречь по сравнению с продольными. Поэтому данная гипотеза имеет под собой основание.

Двумерная постановка предполагает отказ от гипотезы 4 раздела 2.2. Это существенно расширяет спектр моделируемых ситуаций. Помимо того, что, очевидно, падающий тепловой поток не может быть перпендикулярен искривлённой поверхности пластины, появляется возможность моделирования температурного удара при произвольном значении угла между направлением на Солнце и нормалью к участку ПСБ. Существенная величина этого угла может

быть связана не только с начальным прогибом ПСБ, но и, например, расположением плоскости ПСБ относительно Солнца в момент выхода МКА из тени Земли, которое связано с вращательным движением МКА относительно центра масс.

4 Поток солнечного излучения считаем равномерным и стационарным с максимально возможной мощностью на уровне орбиты Земли относительно Солнца.

В двумерной постановке данная величина определяет максимальное значение теплового потока. Сам же тепловой поток, падающий на поверхность пластины, не будет иметь постоянного значения в каждой точке поверхностного слоя, как это было в одномерной модели.

5 Собственные колебания ПСБ статически влияют на их температурное поле.

Статическое влияние колебаний, как уже отмечалось ранее, означает в данной работе влияние на температурное поле посредством начального прогиба пластины в момент наступления температурного удара. Динамическое влияние колебаний, связанное с изменением положения пластины в результате колебаний в период протекания температурного удара, по-прежнему, исключается ввиду того, что процесс колебаний в рамках двумерной постановки считается существенно более медленным, чем процесс температурного удара.

6 Все теплофизические свойства ПСБ предполагаются однородными и одинаковыми во всём диапазоне температур.

7 Для вывода уравнений модели используется закон Фурье.

8 Начальное поле распределения температур в ПСБ считается однородным.

9 Толщина ПСБ пренебрежимо мала по сравнению с её длиной и шириной.

10 Теплообмен через боковые поверхности пластины является пренебрежимо малым.

11 Тепловые, механические и электрические процессы, протекающие в ПСБ, не оказывают друг на друга взаимного влияния за исключением влияния температурного расширения на процесс деформирования ПСБ.

12 ПСБ мгновенно выходит на штатную мощность выработки электроэнергии после выхода МКА из тени Земли.

Последние семь гипотез не претерпели изменений по сравнению с одномерной постановкой.

3.4 Постановка начально-краевой задачи двумерной теплопроводности и задачи термоупругости

Появление начального прогиба изменяет схему температурного удара. Поэтому вместо рисунка 2.1 в данном разделе следует рассматривать изогнутую пластину в момент температурного удара (рисунок 3.3).

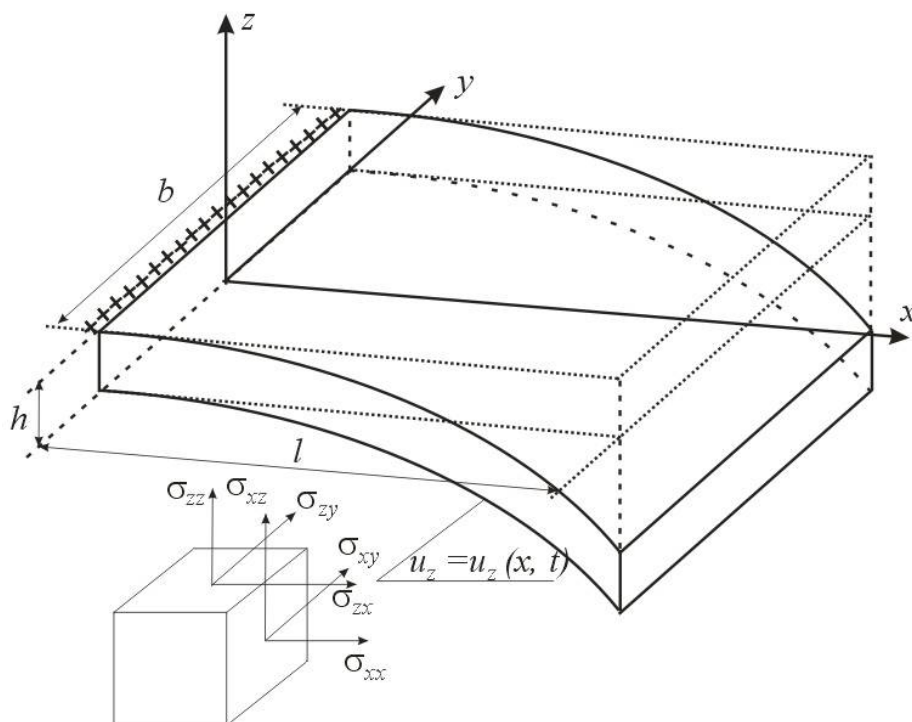


Рисунок 3.3 – Схема упругого элемента в момент температурного удара

С учётом пересмотра упрощающих гипотез начально-краевая задача двумерной теплопроводности вместо уравнений (2.1)–(2.4) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, z, t)}{\partial z^2} \right), 0 \leq x \leq l, h \leq z \leq 0, t > 0; \\ \left(\lambda \frac{\partial T(x, h, t)}{\partial n} \right) = Q_0 \cdot \cos \left(\frac{du_{z0}(x, 0)}{dx} \right) - \frac{UI}{lb} - e\Theta(T^4(x, h, t) - T_C^4), 0 \leq x \leq l, z = h, t > 0; \\ \left(\lambda \frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial n} \right) = -e\Theta(T^4(x, 0, t) - T_C^4), 0 \leq x \leq l, z = 0, t > 0; \\ T(x, z, 0) = T_0 = const. \end{cases} \quad (3.11)$$

Следует отметить, что в (3.11) Q_0 - максимальное значение падающего потока, когда элемент пластины перпендикулярен этому потоку, а функция $u_{z0} = u_{z0}(x, 0)$

фактически является функцией одной переменной (продольной координаты x , рисунок 3.3), поэтому частная производная во втором уравнении системы заменена полной производной.

Что касается задачи термоупругости, то, рассуждая аналогично, как и при выводе одномерной модели, и не изменяя вектор перемещений, мы снова придём к уравнению (2.29). Однако, его проекции на оси, ввиду того, что температура имеет более сложный вид, изменятся. Поэтому (2.30) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial x \partial y} = \alpha \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial x}, & 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t = \infty; \\ \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial y^2} + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial x^2} = 0, & 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t = \infty; \\ \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial z}, & 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, t = \infty. \end{cases} \quad (3.12)$$

Это означает, что вид функции $u_y = u_y(x, y, t)$ усложняется по сравнению с одномерной моделью. Действительно, изменение первого уравнения (3.12) по сравнению с первым уравнением (2.30) не даёт возможность использовать разложение (2.31) при поиске решения. Единственное, что можно заметить по новому виду первого уравнения (3.12), так это то, что функция $u_y = u_y(x, y, t)$ должна линейно зависеть от y . Тогда после взятия частной производной по y эта координата исчезает из зависимости, а левая часть первого уравнения (3.12) согласуется с правой по составу переменных. Граничные условия имеют вид (2.36) и (2.38), а начальное условие – (2.40).

Для другого компонента вектора перемещений уравнение (2.24) преобразуется из соображения того, что в моделируемом случае пластина на момент температурного удара будет находиться в деформированном состоянии, следовательно, её внутренние напряжения будут отличны от нуля. Это вызывает необходимость скорректировать уравнение Софи Жермен (2.24), добавляя внутренние напряжения. Будем в первом приближении считать, что начальный прогиб для каждой точки пластины представляется вектором перемещения $\bar{u}_0 = (0, 0, u_{z0})$. При этом компоненты тензора деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0; \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_{z0}}{\partial x},$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0; \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial u_{z0}}{\partial x}. \quad (3.13)$$

В выражении (3.13) считаются все деформации упругими, вследствие чего справедлив закон Гука.

Тогда для верхнего поверхностного слоя (рисунок 3.3) уравнение Софи Жермен (2.24) будет иметь вид:

$$D \frac{\partial^4 u_z(x, t)}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial t^2} = -2\mu\alpha \int_0^h \left[2 \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial z} + z \frac{\partial^2 T(x, z, t)}{\partial z^2} \right] dz + \frac{\partial^2 u_{z0}(x, 0)}{\partial x^2} \sigma_{xz}, \quad (3.14)$$

$$0 \leq x \leq l, t > 0$$

где σ_{xz} — соответствующий компонент тензора напряжений, показанный на рисунке 3.3.

Легко убедиться в том, что, если $u_{z0}(x, 0) \equiv 0$ (случай одномерной модели), то (3.14) переходит в (2.24).

При сохранении вида приближенного решения (2.49) теперь, разумеется, следует учитывать начальный прогиб:

$$u_z(x, t) = \frac{Al^4 t}{t+a} \left(\frac{x^4}{l^4} - 4 \frac{x^3}{l^3} + 6 \frac{x^2}{l^2} \right) + u_{z0}(x, 0), \quad 0 \leq x \leq l, t > 0. \quad (3.15)$$

Необходимо отметить, что добавленная к решению (2.49) функция начального прогиба $u_{z0}(x, 0)$ должна отдельно удовлетворять всем граничным (2.25), (2.27) и начальным условиям (2.28). Однако это не создаёт дополнительных проблем для использования приближенного решения в форме (3.15).

Уравнение (3.14) претерпело ещё одно изменение по сравнению с одномерной задачей. В связи с двумерной постановкой произошло усложнение вида зависимости температуры — она сейчас функция трёх переменных, что отражено в уравнении (3.14).

Материалы данного раздела частично освещены в работах [93, 96, 101], соавтором которых является автор данной диссертационной работы.

3.5 Исследование соответствия приближенного решения одномерной задачи двумерной постановке

Следует отметить, что двумерная задача существенно отличается от одномерной при построении численной модели. Если при одномерной постановке была возможна только одна ситуация - пластина имеет плоскую форму, а тепловой поток падает перпендикулярно этой плоскости, - то при двумерной постановке возможно бесконечное множество моделируемых ситуаций. Поэтому сразу стоит обозначить, о какой из них идёт речь. Эффективным и корректным сравнением одномерной и двумерной моделей будет ситуация, когда в каком-то из предельных случаев двумерная модель вырождается в одномерную. Поэтому в данной работе в рамках двумерной модели предлагается рассмотреть ситуацию, когда пластина имеет искривлённую форму в момент температурного удара, описываемую некоторой функцией $u_{z0} = u_{z0}(x, 0)$ (рисунок 3.3), а падающий поток перпендикулярен поверхности пластины вблизи заделки. Тогда в предельном случае $u_{z0} = u_{z0}(x, 0) \equiv 0$ двумерная модель вырождается в одномерную.

Таким образом, в этом предельном случае приближенное решение одномерной задачи будет отражать картину, которая была прояснена в предыдущей главе, а исследование соответствия будет проводится в направлении изменения начального прогиба пластины, т.е. изменении функции $u_{z0} = u_{z0}(x, 0)$ относительно указанного предельного случая.

Прежде всего, следует отметить, что при построении приближенного аналитического решения задачи термоупругости в рамках двумерной модели теплопроводности ревизии подлежит представление температуры в виде разложения (2.56). Отсутствие зависимости температуры от координаты x делало её зависимость от времени (рисунок 2.7) инвариантной по отношению к этой координате. Однако, для двумерной модели теплопроводности это не так. На рисунке 3.4 показаны температуры точек пластины вблизи заделки ($x \approx 0$), в середине пластины ($x \approx l/2$), а также вблизи свободного края ($x \approx l$). При этом

зависимость начального прогиба от координаты x была аппроксимирована следующей функцией: $u_{z0}(x, 0) = -0,1 x^2/l^2$.

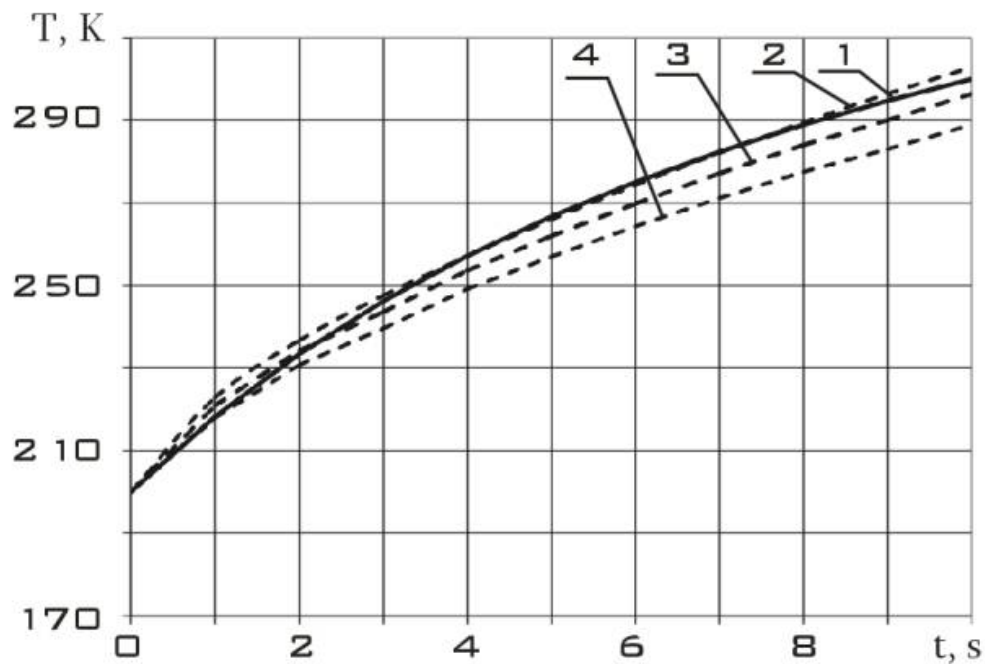


Рисунок 3.4 – Динамика температур поверхностного слоя пластины при начальном прогибе $u_{z0} = -0,1 x^2/l^2$:

1 – вблизи заделки ($x \approx 0$); 2 – в середине пластины ($x \approx l/2$); 3 – на свободном краю пластины ($x \approx l$); 4 – по формуле (2.62) при $C = 200 \text{ K/м}$, $\beta = 1 \text{ с}$

Рисунок 3.4 наглядно показывает, что для корректного описания поля температур зависимость (2.56) в рамках двумерной модели теплопроводности уже не подходит. Очевидно, что при дальнейшем увеличении начального прогиба функции, представленные на рисунке 3.4, будут расходиться ещё более существенно.

Однако, рисунки 2.7 и 3.4 были построены на основе приближенного аналитического решения (2.49). Стоит ли отказываться от этого решения или возможен вариант его сохранения с учётом начального прогиба в форме (3.15) при усложнении зависимости (2.56) и улучшении сходимости поля температур по сравнению с рисунком 3.4 в рамках двумерной модели.

В данной диссертационной работе предлагается следующий вариант замены (2.56), который соответствует начально-краевой задаче (3.11):

$$T(x, z, t) = z \cdot f_1(t) + f_2(x, t) + T_0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq z \leq h, \quad t > 0. \quad (3.16)$$

В этом случае частная производная по координате z для функций (2.56) и (3.16) будут идентичными. Тогда интегралы в правых частях уравнений (2.24) и (3.14) совпадают. Следовательно, решение (3.15) для прогиба может быть справедливо и в рамках двумерной модели теплопроводности, если в поле температур функция $f_2(x, t)$ будет объяснять неоднородность этого поля, представленную на рисунке 3.4. Тогда в предельном случае при $u_{z0} = u_{z0}(x, 0) \equiv 0$ функция $f_2(x, t) \equiv 0$, а (3.16) переходит в (2.56).

С другой стороны, функция $f_2(x, t)$ должна улучшить решение (2.55), которое, в отличие от (3.15), должно более значительно видоизмениться в силу изменения первого уравнения (3.12) по сравнению с первым уравнением (2.30).

Таким образом, если удастся подобрать такую функцию, одновременно объясняющую неоднородность температур на рисунке 3.4 и улучшающую сходимость (2.55) к данным вычислительного эксперимента, то таким приближенным решением можно пользоваться для решения широкого круга практических задач, связанных с температурным ударом ПСБ МКА.

Материалы данного раздела были частично изложены в работах [99, 156].

3.6 Аппроксимация поля температур и построение приближенного аналитического решения задачи термоупругости в двумерной постановке

Как было отмечено в предыдущей главе, самой проблемной частью приближенного аналитического решения задачи термоупругости была зависимость $u_y = u_y(x, y, t)$ (2.36). В предыдущем разделе было отмечено, что в изменённой постановке задачи она должна быть пересмотрена. Тогда для построения приближенного решения можно предложить следующий алгоритм.

- 1 Оставить в силе приближенное решение для прогибов с учётом начального прогиба в форме (3.15).
- 2 Заменить (2.56) на (3.16), что не окажет влияния на решение (3.15).
- 3 Найти функцию $f_2(x, t)$, входящую в (3.16), такую, чтобы она удовлетворяла первому и второму уравнениям системы (3.12).
- 4 Составить решение для $u_y = u_y(x, y, t)$, удовлетворяющее (3.12).
- 5 Проверить выполнение граничных (2.36), (2.38) и начального (2.40) условий для решения $u_y = u_y(x, y, t)$.
- 6 Сравнить аналитические решения с численными и сделать вывод о их применимости.

Гипотеза 5 наводит на мысли о том, что в рассматриваемом случае можно использовать статическую функцию $f_2(x, t)$, исключив динамику. Предположим, что она зависит от координаты x следующим образом:

$$f_2(x, t) = f_2(x) = -\frac{M}{\eta} \sin \eta x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.17)$$

где M – некоторая положительная константа, а η – некоторый малый параметр, позволяющий представлять $\sin \eta x \approx \eta x$, $0 \leq x \leq l/2$.

В этом случае поле температур (3.16), исходя из решения начально-краевой задачи (3.11), будет иметь вид:

$$T(x, z, t) = Cz \frac{t}{t + \beta} - \frac{M}{\eta} \sin \eta x + T_0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq z \leq h, \quad t > 0. \quad (3.18)$$

Очевидно, что в рассматриваемой ситуации по мере удаления от заделки (роста координаты x) угол $\frac{du_{z0}(x, 0)}{dx}$ будет возрастать, а его косинус, соответственно, уменьшаться. Поэтому интенсивность прогрева поверхностного слоя и его температура с увеличением координаты x будут снижаться.

Разложение (2.33) функции $u_y = u_y(x, y, t)$ теперь не удовлетворяет первому уравнению (3.12). Представим тогда функцию $u_y = u_y(x, y, t)$ в следующем виде:

$$u_y(x, y, t) = u_{4y}(x, t)y. \quad (3.19)$$

Тогда вторая смешанная производная:

$$\frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_{4y}(x, t)}{\partial x}. \quad (3.20)$$

С другой стороны, согласно первому уравнению системы (3.12):

$$\frac{\partial u_{4y}(x, t)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial x}. \quad (3.21)$$

Рассуждая аналогично как и при одномерной постановке, придём к уравнению (2.16):

$$\frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial^3 u_y(x, y, t)}{\partial x^3} + \frac{6\rho(1-\nu^2)}{Eh^2} \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial t^2} b = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad t > 0. \quad (3.22)$$

Тогда:

$$\frac{\partial^3 u_y(x, y, t)}{\partial x^3} = y \frac{\partial^3 u_{4y}(x, t)}{\partial x^3}. \quad (3.23)$$

Продифференцируем (3.21) дважды по x :

$$\frac{\partial^3 u_{4y}(x, t)}{\partial x^3} = \alpha \frac{\partial^3 T(x, z, t)}{\partial x^3}.$$

С учётом поля температур (3.18) производная (3.23) примет вид:

$$\frac{\partial^3 u_{4y}(x, t)}{\partial x^3} = \alpha M \eta^2 \cos \eta x. \quad (3.24)$$

Тогда:

$$\frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial t^2} = y \frac{\partial^2 u_{4y}(x, t)}{\partial t^2}. \quad (3.25)$$

Уравнение (3.22) с учётом (3.24) и (3.25) преобразуется следующим образом:

$$\frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}\alpha M\eta^2 y \cos \eta x + \frac{6\rho(1-\nu^2)}{Eh^2} \frac{\partial^2 u_{4y}(x,t)}{\partial t^2} b y = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad t > 0. \quad (3.26)$$

При $y = 0$ уравнение (3.26) удовлетворяется автоматически. Поэтому сократим на y и исключим $y = 0$ из возможных значений переменных в (3.26):

$$\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}\alpha M\eta^2 \cos \eta x + \frac{2\rho(1-\nu^2)}{Eh^2} \frac{\partial^2 u_{4y}(x,t)}{\partial t^2} b = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < y \leq \frac{b}{2}, \quad t > 0. \quad (3.27)$$

Преобразуем (3.27) к виду:

$$\frac{\partial^2 u_{4y}(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{Eh^2(1-2\nu)\alpha M\eta^2}{4\rho(1-\nu^2)(1+\nu)b} \cos \eta x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < y \leq \frac{b}{2}, \quad t > 0. \quad (3.28)$$

Правая часть (3.28) не зависит от времени в силу сделанных допущений $u_x = 0$. Поэтому после двойного интегрирования по времени имеем:

$$u_{4y}(x,t) = -\frac{Eh^2(1-2\nu)\alpha M\eta^2}{8\rho(1-\nu^2)(1+\nu)b} \cos \eta x t^2 + C_1(x)t + C_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < y \leq \frac{b}{2}, \quad t > 0. \quad (3.29)$$

В общем случае $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – функции, зависящие от x , которые определяются, согласно, пункту 5 алгоритма, с помощью граничных условий (2.17), (2.19) и начального условия (2.21). Тогда, согласно разложению (3.19), имеем:

$$u_y(x,y,t) = \left[-\frac{Eh^2(1-2\nu)\alpha M\eta^2}{8\rho(1-\nu^2)(1+\nu)b} \cos \eta x t^2 + C_1(x)t + C_2(x) \right] y, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < y \leq \frac{b}{2}, \quad t > 0. \quad (3.30)$$

При этом функция $u_y = u_y(x, y, t)$ должна удовлетворять статическому уравнению (3.21), следующему из второго уравнения (3.12). Поэтому предположим, что $C_1 = \text{const}$ и определим $C_2(x)$:

$$\frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial x \partial y} = \frac{Eh^2(1-2\nu)\alpha M\eta^3}{8\rho(1-\nu^2)(1+\nu)b} \sin \eta x t^2 + \frac{\partial C_2(x)}{\partial x}. \quad (3.31)$$

Пренебрегая первым слагаемым правой части (3.31) из-за малости η^3 и подставляя правую часть (3.21) с учётом поля температур (3.18), получим:

$$\frac{\partial C_2(x)}{\partial x} = -\alpha M \eta \cos \eta x. \quad (3.32)$$

Интегрируя (3.32), получим функцию $C_2(x)$:

$$C_2(x) = -\alpha M \sin \eta x + C_3. \quad (3.33)$$

Тогда выражение (3.30) принимает вид:

$$u_y(x, y, t) = \left[-\frac{Eh^2(1-2\nu)\alpha M\eta^2}{8\rho(1-\nu^2)(1+\nu)b} \cos \eta x t^2 + C_1 t - \alpha M \sin \eta x + C_3 \right] y, 0 \leq x \leq l, 0 < y \leq \frac{b}{2}, t > 0. \quad (3.34)$$

Исследуем удовлетворение граничных и начальных условий решением (3.34). Начальное условие при $t = 0$, исходя из выражения (3.34) имеем:

$$u_y(x, y, 0) = [-\alpha M \sin \eta x + C_3] y, 0 \leq x \leq l, 0 < y \leq \frac{b}{2}, t = 0.$$

Поскольку $C_3 = \text{const}$, то добиться его точного удовлетворения можно только при $x=0$. При $x \approx 0$ данное равенство будет приближенным. Для этого нужно положить $C_3 = 0$.

Тогда можно уточнить вид решения (3.34):

$$u_y(x, y, t) = \left[-\frac{Eh^2(1-2\nu)\alpha M\eta^2}{8\rho(1-\nu^2)(1+\nu)b} \cos \eta x t^2 + C_1 t - \alpha M \sin \eta x \right] y, 0 \leq x \leq l, 0 < y \leq \frac{b}{2}, t > 0. \quad (3.35)$$

При исследовании удовлетворения граничных условий следует понимать, что решение (3.35) рассматривается вблизи заделки, поэтому требование удовлетворения статических граничных условий (2.38) на противоположном от заделки свободном конце пластины ($x = l$) является избыточным в свете введённых ограничений.

Геометрические граничные условия (2.36) для заделки с учётом вида решения (3.35) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \left[-\frac{Eh^2(1-2\nu)\alpha M\eta^2}{8\rho(1-\nu^2)(1+\nu)b} t^2 + C_1 t \right] y = 0, & 0 < y \leq \frac{b}{2}, t > 0 \\ -\alpha M \eta y = 0, & 0 < y \leq \frac{b}{2} \end{cases}. \quad (3.36)$$

Второе уравнение (3.36) не зависит от C_1 и выполняется приблизительно из-за малости коэффициента линейного расширения α и параметра η . Для $y = 0$ оно выполняется точно. Исходя из первого уравнения (3.36), можно положить $C_1 = 0$. Тогда оно будет удовлетворяться точно при $y = 0$ или $t = 0$. С увеличением времени оно будет удовлетворяться слабее, однако параметр $\alpha\eta^2$ является очень малым. Поэтому, учитывая высокую динамичность температурного удара, диапазон допустимых значений t можно изменить с $t > 0$ на $0 < t < t_{\max}$. Где $t_{\max}$ определяет характерное время температурного удара, например, при

обезразмеривании переменных в уравнении теплопроводности характерное время предлагается вычислять следующим образом: $t_{\max} = \frac{c\rho l^2}{\lambda}$.

Упростим (3.35) с учётом нулевого значения константы C_1 :

$$u_y(x, y, t) = - \left[\frac{Eh^2(1-2\nu)\alpha M\eta^2}{8\rho(1-\nu^2)(1+\nu)b} \cos \eta x t^2 + \alpha M \sin \eta x \right] y, 0 \leq x \leq l, 0 < y \leq \frac{b}{2}, t > 0. \quad (3.37)$$

Таким образом, найденное приближенное решение для одномерной задачи теплопроводности (2.55) удовлетворяет всем граничным и начальным условиям начально-краевой задачи термоупругости, но согласуется с динамическим уравнением (2.35) только при малых значениях t . Приближенное решение (3.37) для двумерной модели теплопроводности полностью согласуется с динамическим уравнением (3.22), приближённо удовлетворяет начальным условиям (2.40) в области корректного использования решения вблизи заделки и геометрическим граничным условиям (2.36). Вопрос о степени сходимости этих решений с результатами вычислительного эксперимента и возможности их использования при моделировании движения точек ПСБ МКА будет рассмотрен в следующем разделе диссертационной работы.

Материалы данного раздела были частично изложены в работах [93, 96, 97, 157].

3.7 Численное моделирование движения точек пластины в рамках двумерной задачи теплопроводности

Для численного моделирования используем те же данные, что и при решении задачи термоупругости в рамках одномерной модели теплопроводности (таблица 2.1). Само моделирование будет проводиться в пакете ANSYS. Для моделирования пластины выберем элемент типа SOLID226 (рисунок 3.5), который имеет двадцать узлов с шестью степенями свободы на каждый узел.

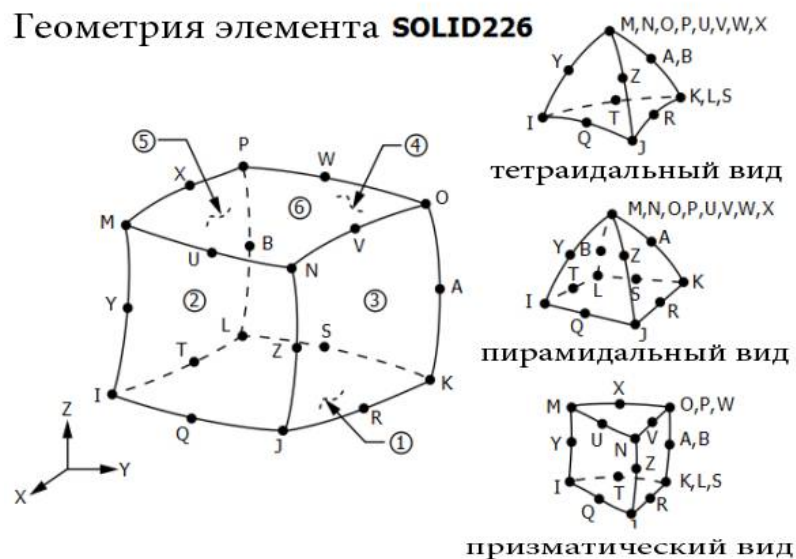


Рисунок 3.5 – Схема элемента типа SOLID226

На рисунке 3.6 показан интерфейс для описания свойств элемента типа SOLID226. Для использования этого элемента должны быть заданы свойства эластичности, пластичности, вязкоупругости, вязкопластичности и ползучести. Для решения особых задач возможно использование опций гиперэластичность, большая деформация, большой прогиб и эффекты повышения жёсткости.

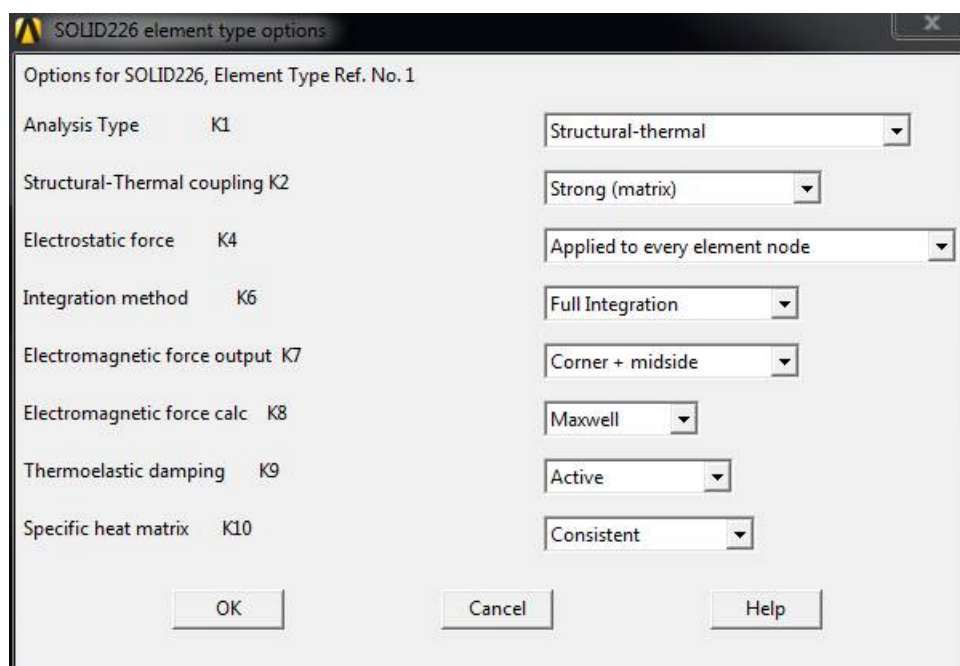


Рисунок 3.6 – Опции элемента типа SOLID226

Для задания различных внешних воздействий, в том числе нагрузок, на поверхность элемента типа SOLID226 будем использовать элемент SURF152. Вид этого элемента показан на рисунке 3.7.

Геометрия элемента SURF152

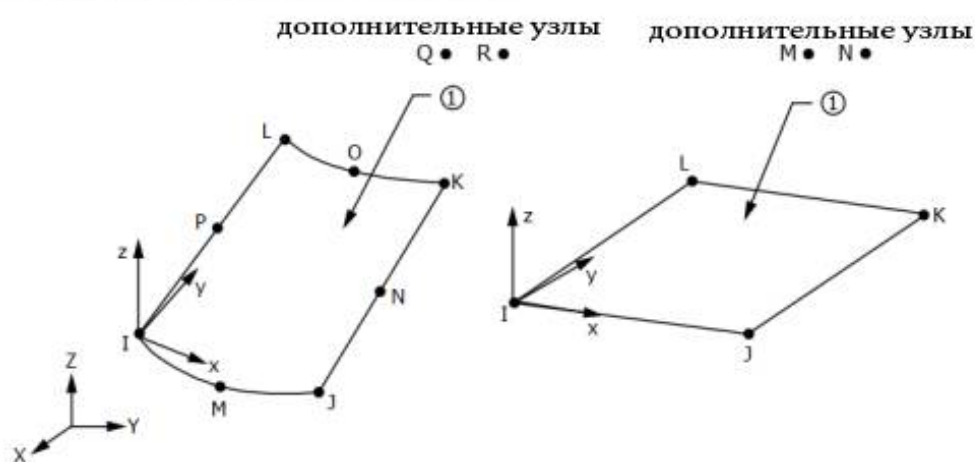


Рисунок 3.7 – Схема элемента типа SURF152

На рисунке 3.8 показан интерфейс для описания свойств элемента типа SURF152.

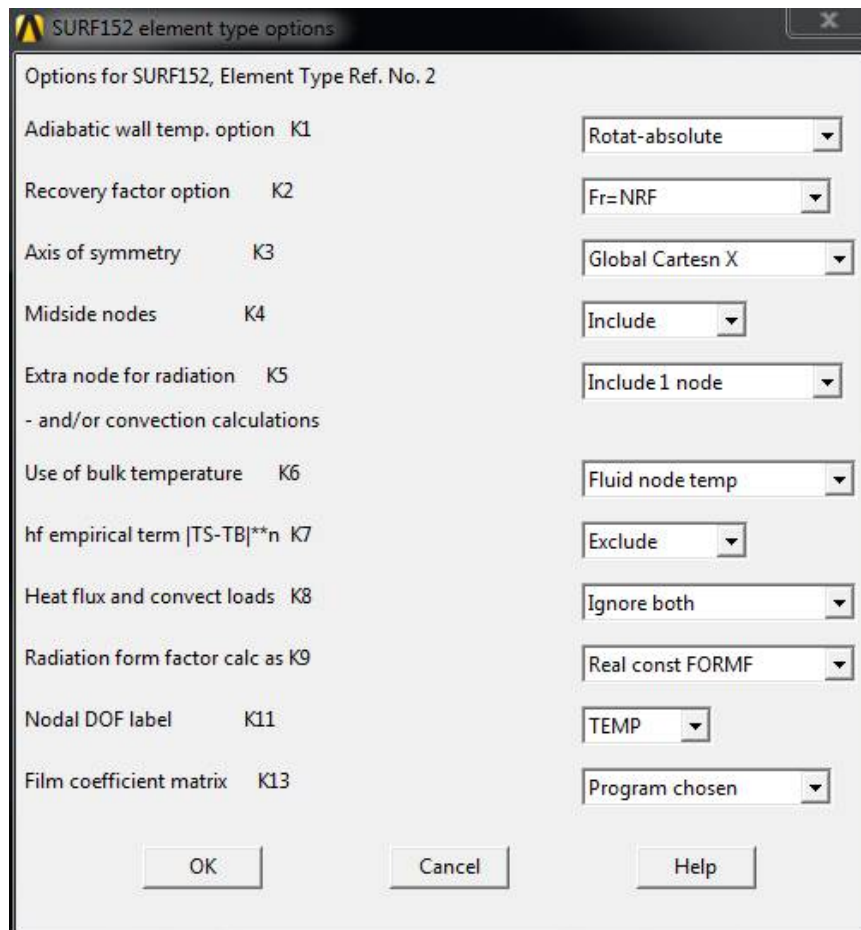
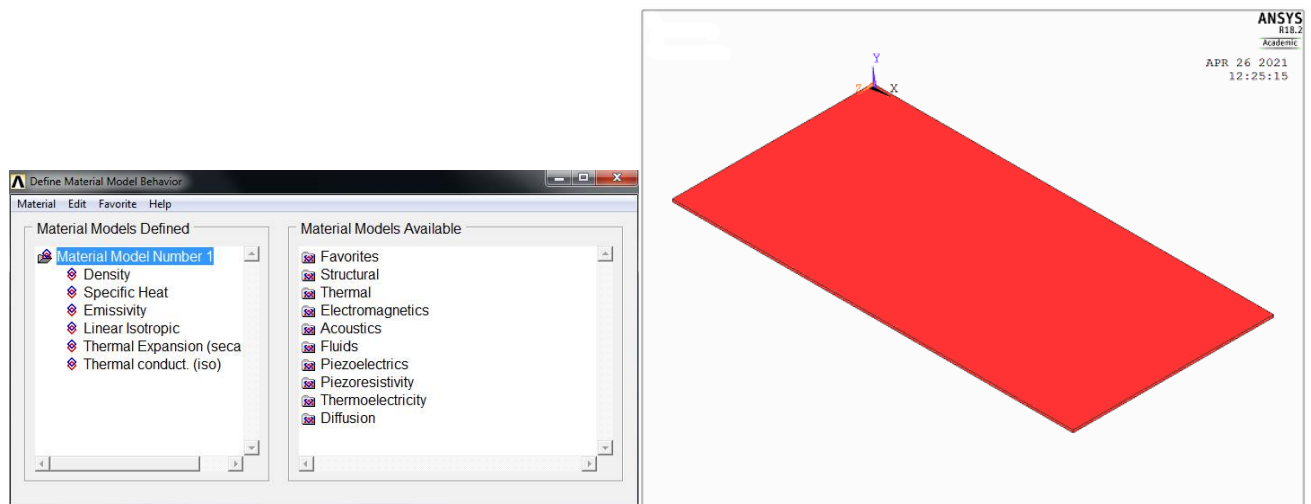


Рисунок 3.8 – Опции элемента типа SURF152

Далее задаются свойства материала и строится модель (рисунок 3.9).



а)

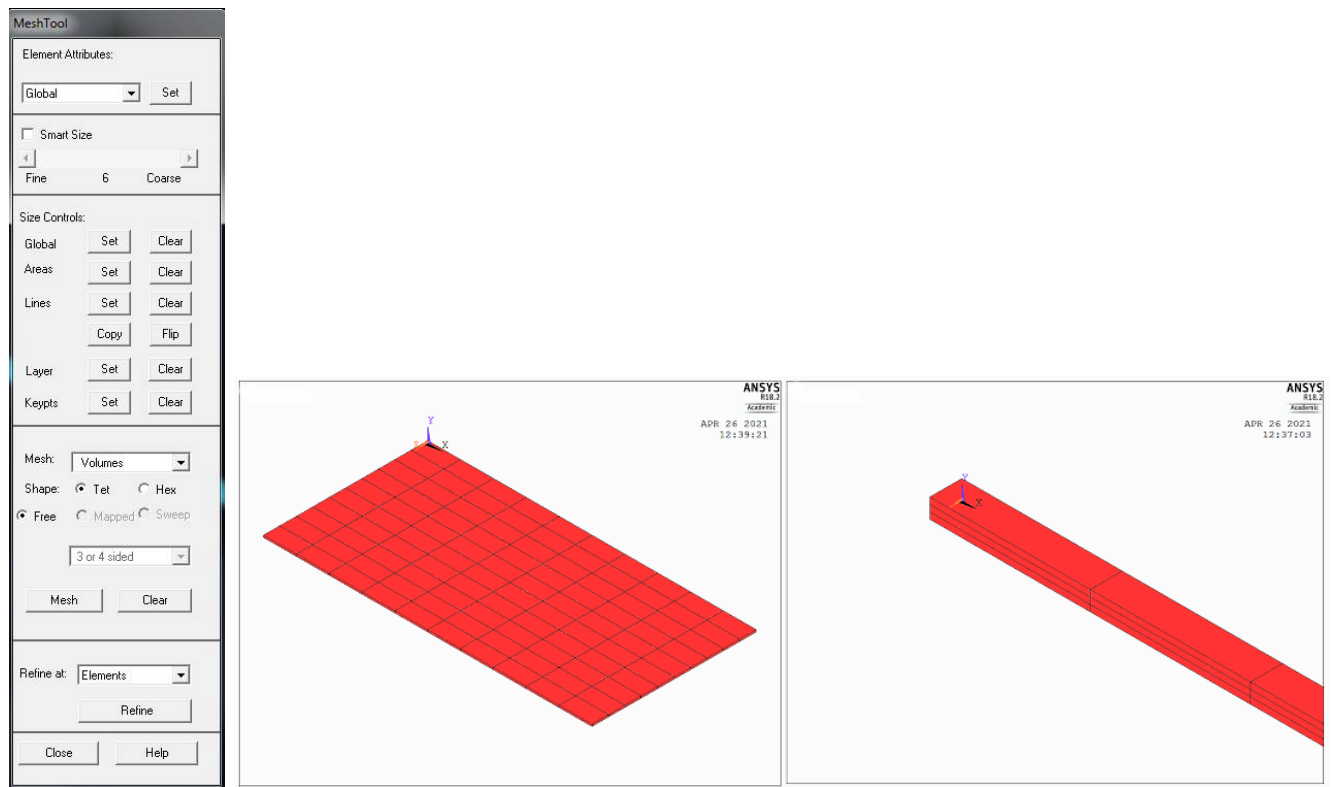
б)

Рисунок 3.9 – Построение модели пластины в пакете ANSYS:

а) панель задания свойств материала пластины;

б) вид пластины без теплового потока

Затем задаются параметры сетки конечных элементов модели (рисунок 3.10).



а)

б)

в)

Рисунок 3.10 – Построение конечноэлементной сетки в пакете ANSYS:

а) панель задания параметров сетки;

б) вид пластины с сеткой;

в) фрагмент трёхслойной пластины с сеткой

Далее задаём геометрические граничные условия (2.25) и (2.36) (рисунок 3.11).

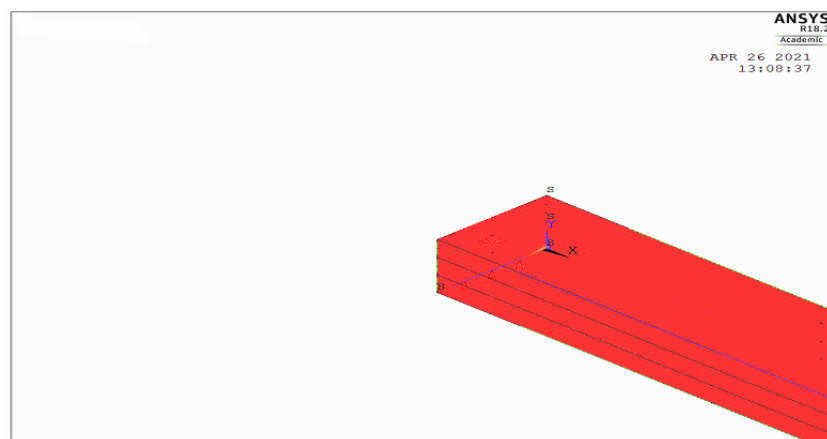
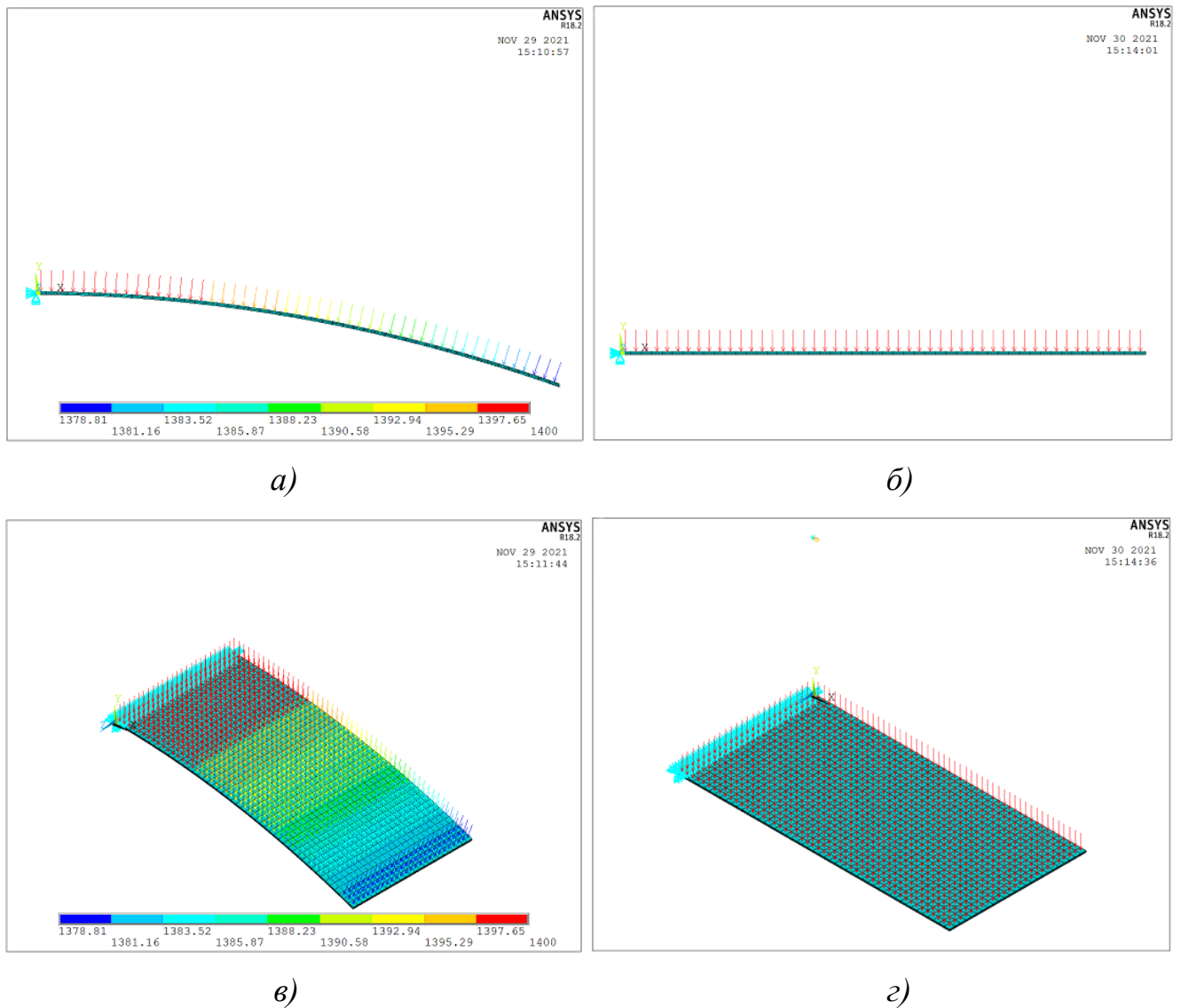


Рисунок 3.11 – Вид жёсткой заделки в пакете ANSYS

Задаём тепловой поток и прогиб (рисунок 3.12).



*Рисунок 3.12 – Вид пластины с заданным тепловым потоком в пакете ANSYS:
а) и в) с начальным прогибом; б) и г) без начального прогиба*

Таким образом, завершено построение конечно-элементной модели пластины в пакете ANSYS.

Результаты, полученные по построенной модели для двумерной задачи теплопроводности при наличии начального прогиба пластины, можно разделить на два типа. Первый тип результатов является схожим с одномерной моделью теплопроводности и характеризуется малым начальным прогибом пластины или смягчением граничных условий (2.25) и (2.36), которые позволяют материалу пластины расширяться в заделке (рисунок 3.13, 3.14).

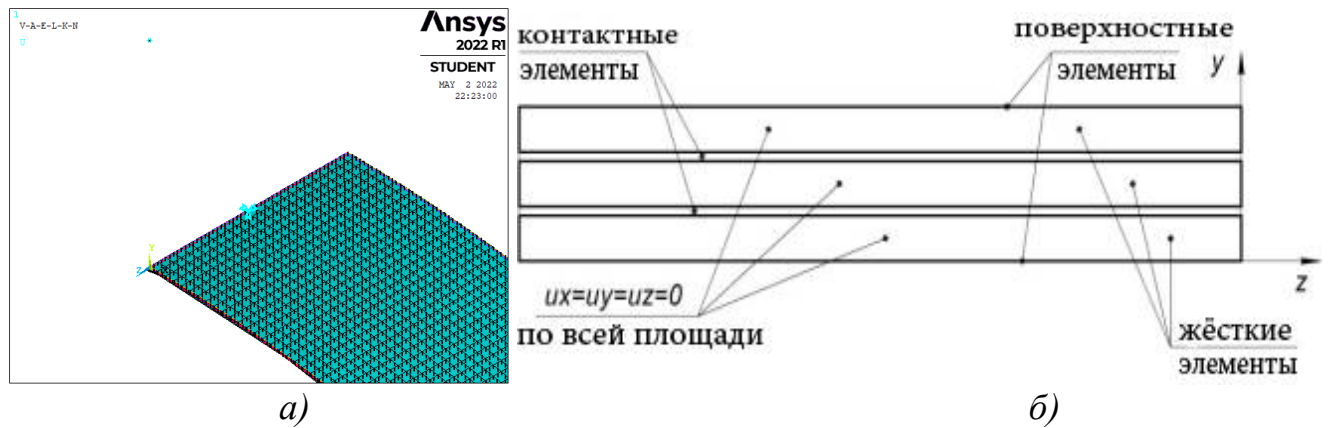


Рисунок 3.13 – Вид пластины с начальным прогибом в среде ANSYS (а) и схема жёсткого закрепления слоёв пластины в сечении заделки, соответствующее граничным условиям (2.25) и (2.36) (б)

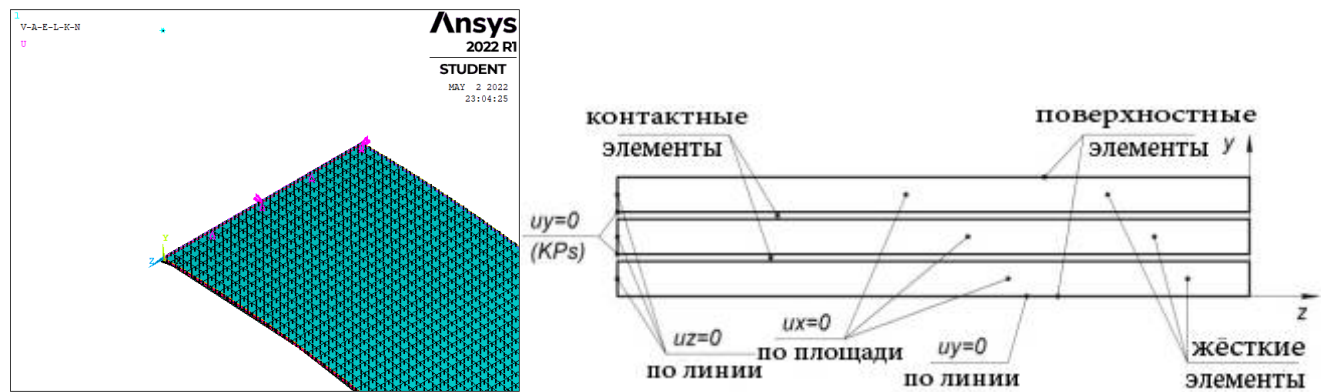
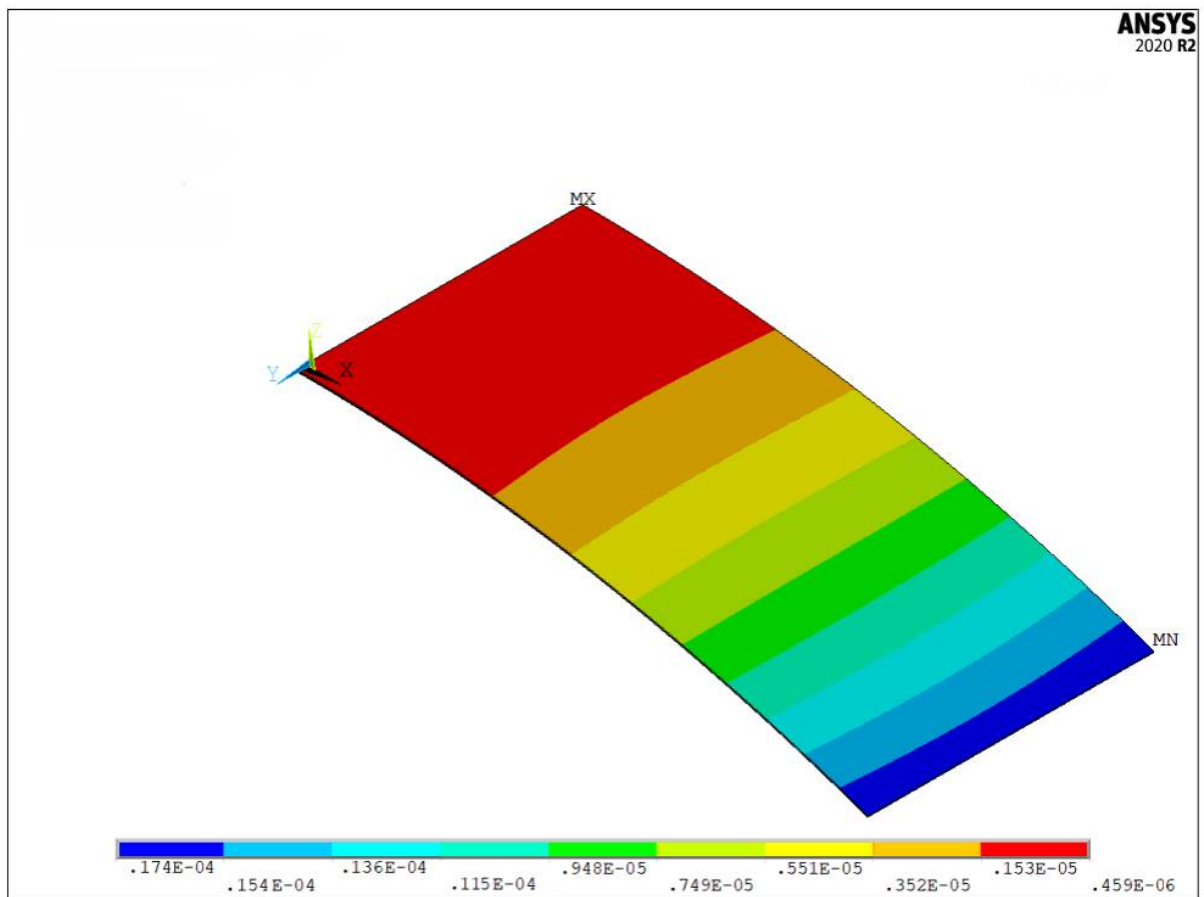
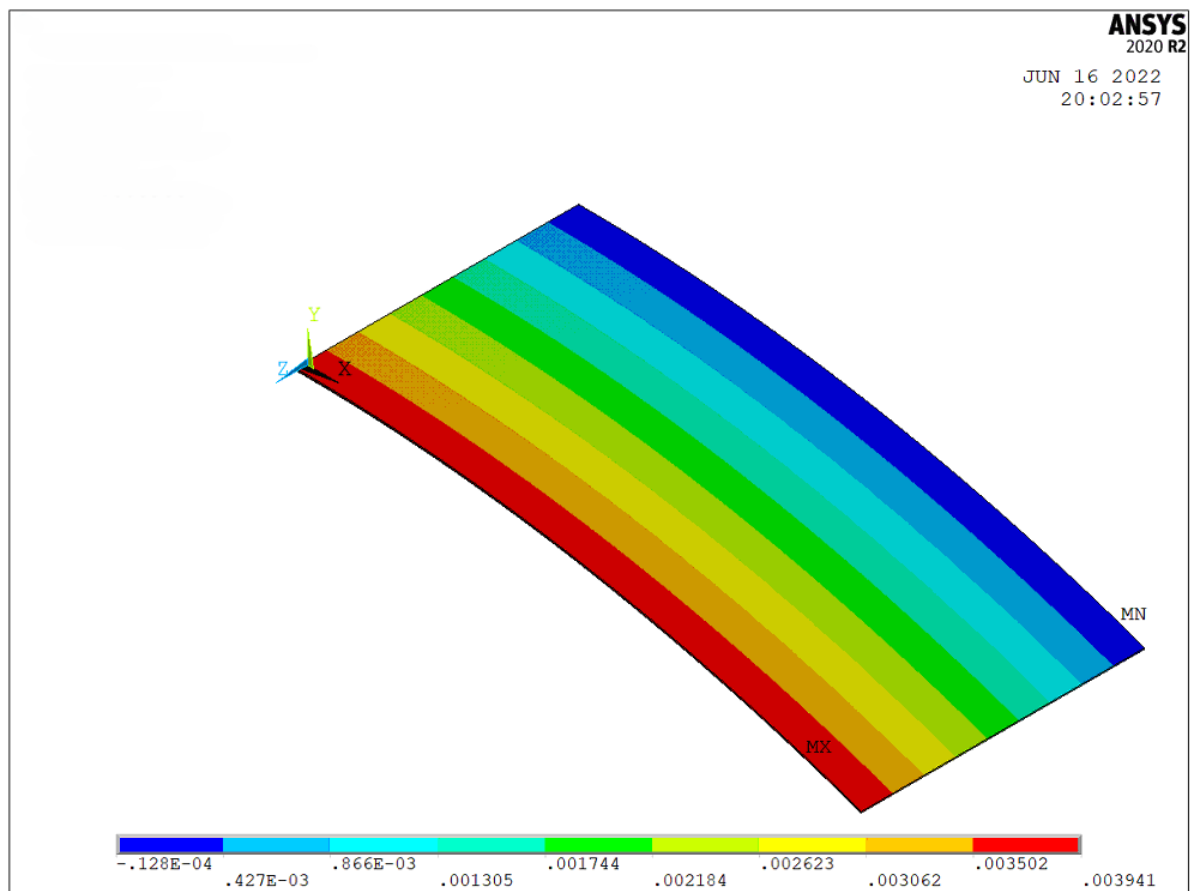


Рисунок 3.14 – Вид пластины с начальным прогибом в среде ANSYS (а) и схема закрепления слоёв пластины в сечении заделки, соответствующее более мягкому закреплению, чем предполагают граничные условия (2.25) и (2.36) (б)

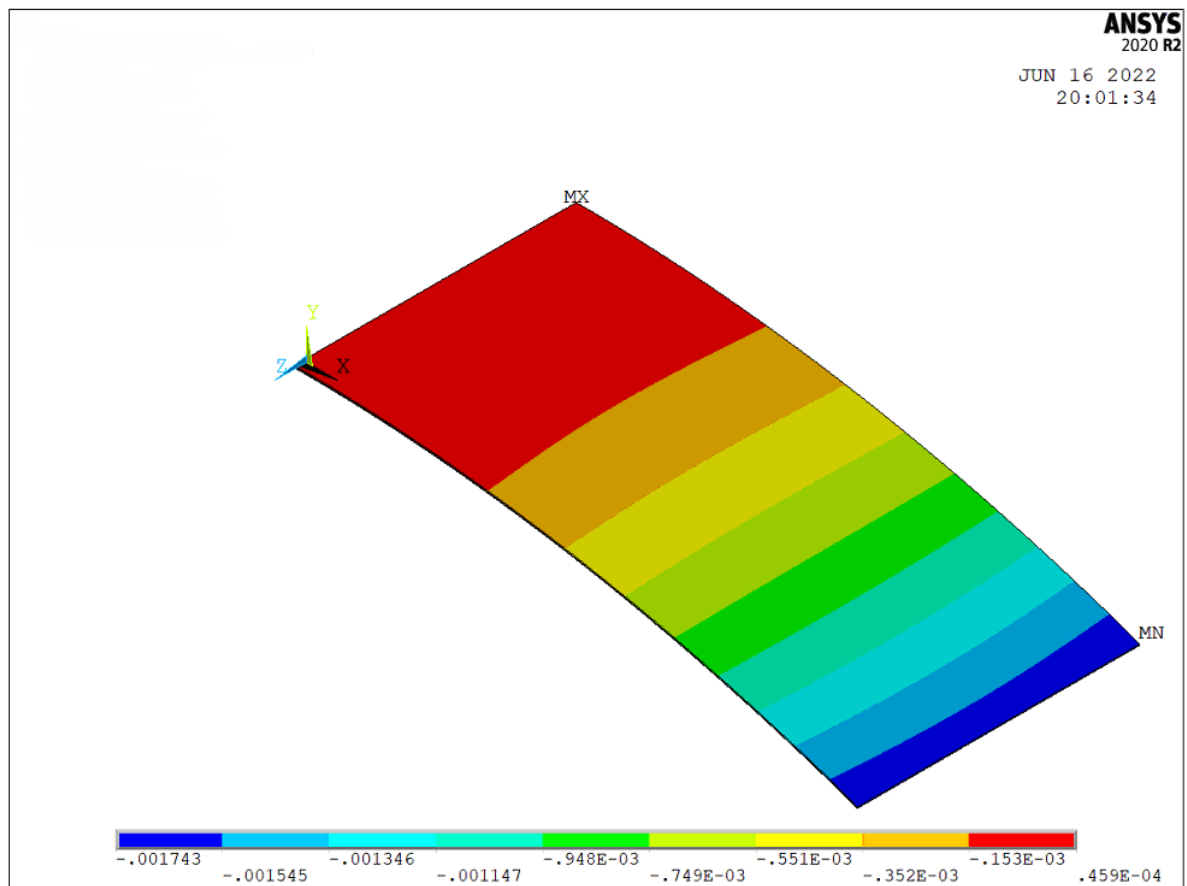
В качестве результатов приведены зависимости компонентов вектора перемещений точек пластины (рисунок 3.15) для закрепления, соответствующего рисунку 3.14. Использование малых начальных прогибов также является приемлемым, однако при этом существенных различий температурных полей для одномерной и двумерной моделей теплопроводности не наблюдается. Более наглядно видны различия при существенных начальных прогибах и ослаблении граничных условий (2.25) и (2.36).



a)



б)



в)

Рисунок 3.15 – Компоненты вектора перемещений точек пластины:

а) u_x ; б) u_y ; в) u_z

Из рисунка 3.15 видно, что u_x и u_y меньше, чем u_z . Это полностью соответствует сделанным упрощениям при решении одномерной и двумерной задач теплопроводности. При этом значения температур, как и предполагалось, оказались ниже, чем для одномерной задачи за счёт менее интенсивного прогрева пластины, имеющей начальный прогиб, как показано на рисунке 3.12 а) и в). На рисунке 3.16 представлена максимальная разница температур между одномерной и двумерной моделями, которая реализуется на свободном конце пластины для точек, координата x у которых максимальна ($x = l$).

На рисунке 3.17 представлена разница температур поверхностного слоя пластины для точек с координатой $x = l/2$. Как и ожидалось, меньшая разница в значениях тепловых потоках, падающих перпендикулярно поверхности пластины, вызвала меньшую разницу в динамике температур в рамках различных моделей.

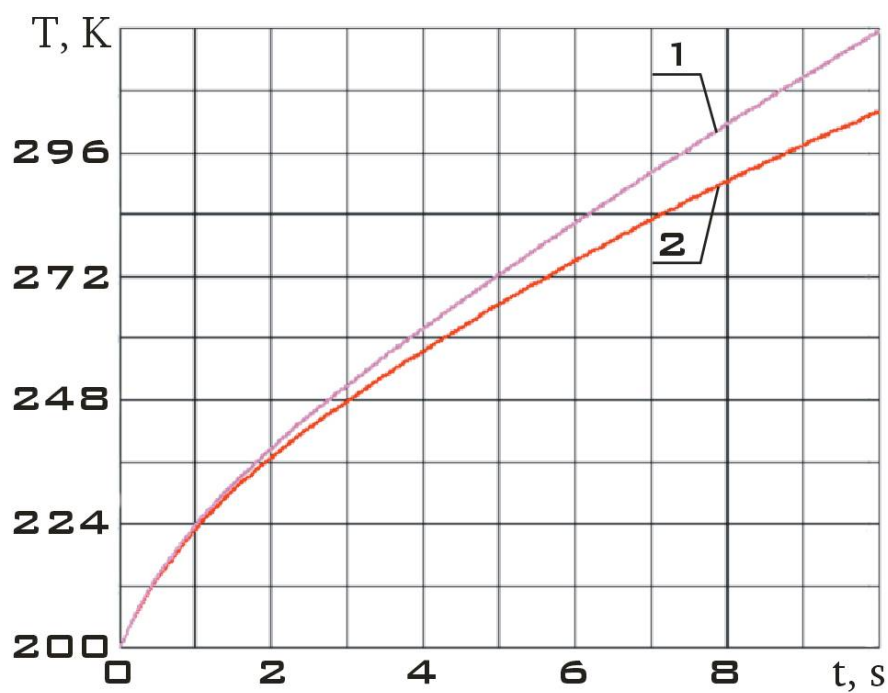


Рисунок 3.16 – Сравнение динамики температур верхнего слоя пластины, подверженного температурному удару для $x=l$:

1 – без прогиба; 2 – с прогибом $u_{z0} = -0,1 x^2/l^2$

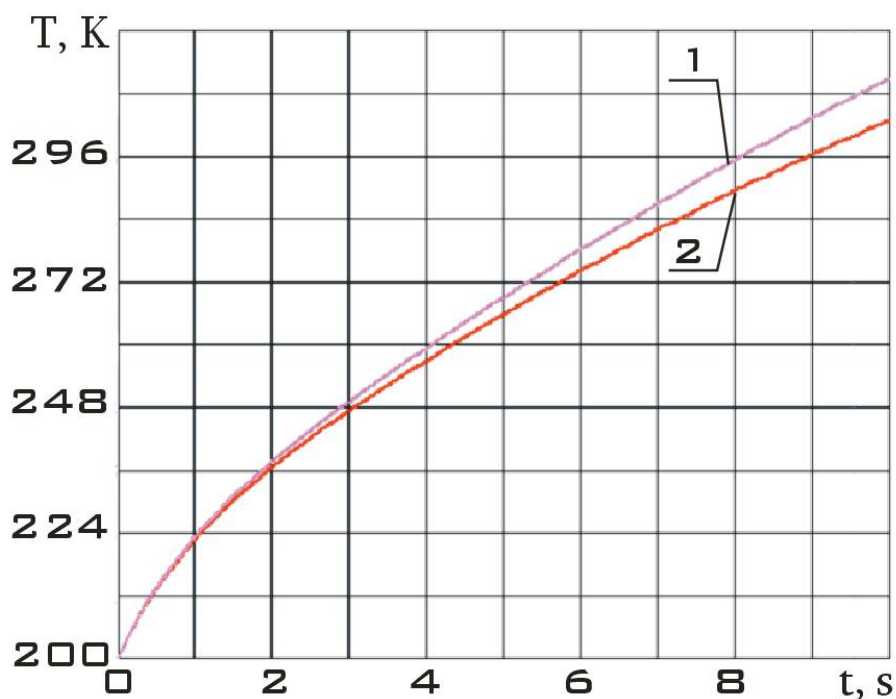
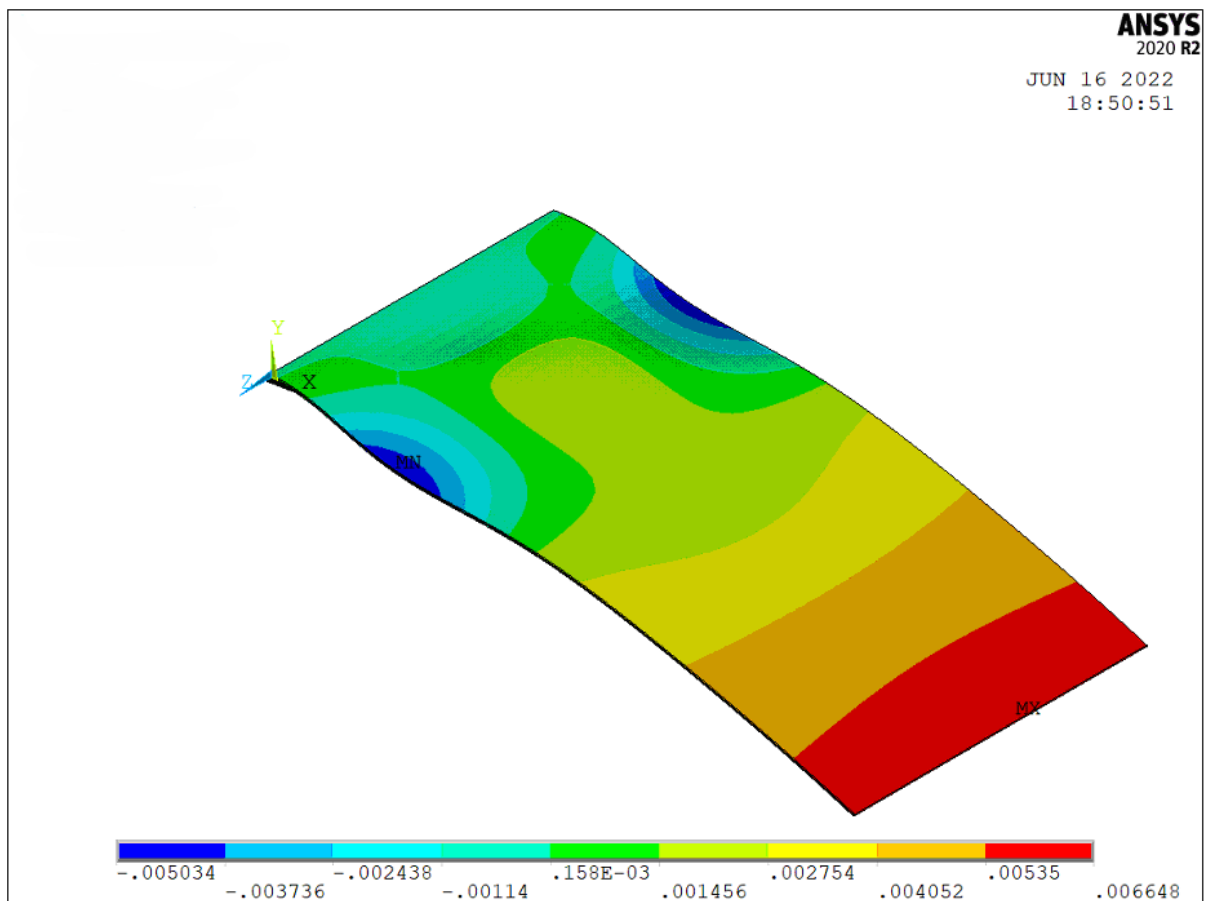


Рисунок 3.17 – Сравнение динамики температур верхнего слоя пластины, подверженного температурному удару для $x=l/2$:

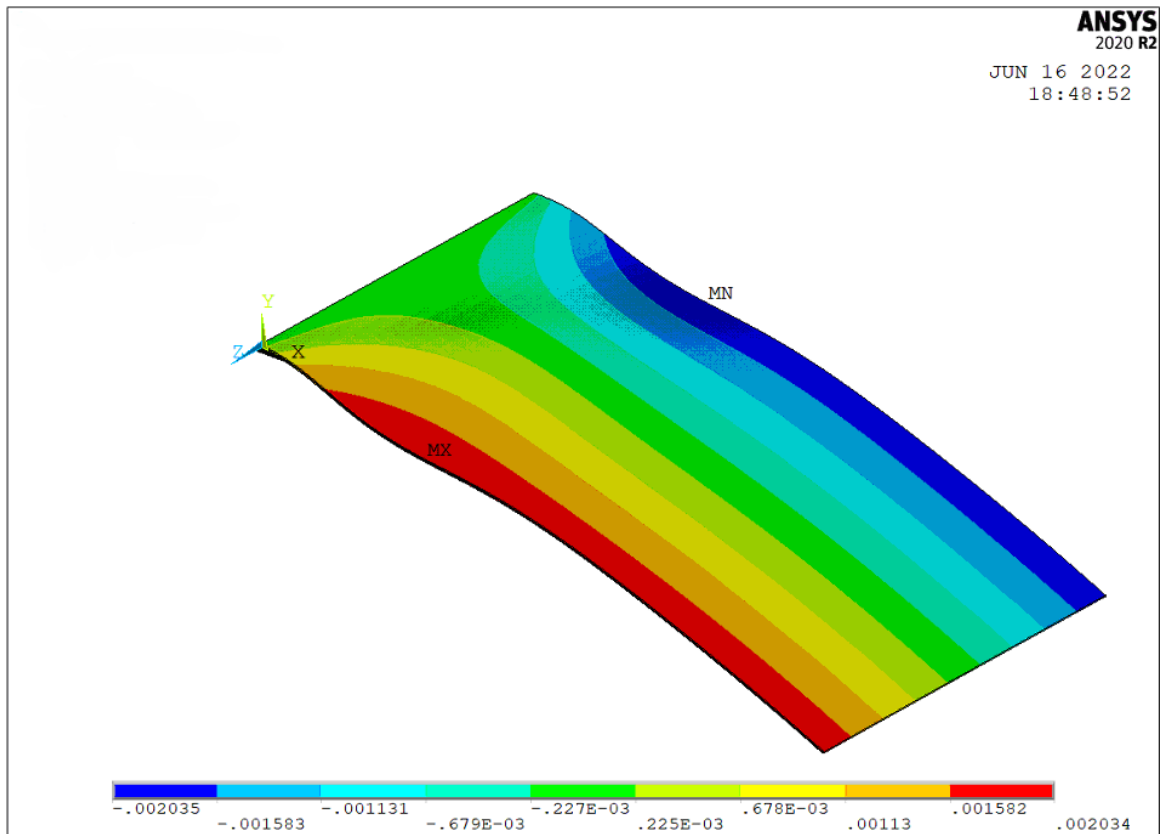
1 – без прогиба; 2 – с прогибом $u_{z0} = -0,1 x^2/l^2$

Таким образом, этот тип результатов соответствует ожидаемым изменениям, связанным с учётом начального прогиба пластины в момент температурного удара.

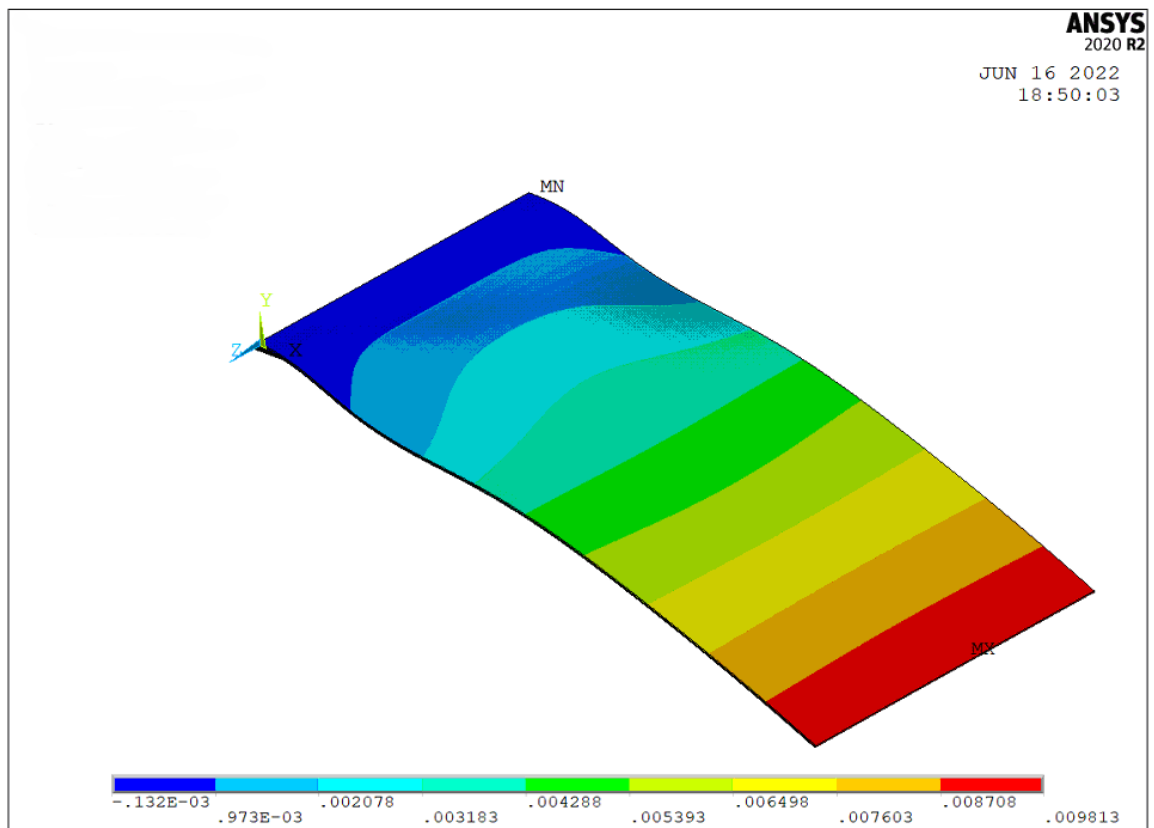
Второй тип результатов представляет собой более сложную картину влияния температурного удара на НДС пластины. Этот тип характерен для случаев значительных начальных прогибов и модели жёсткого закрепления, соответствующего граничным условиям (2.25) и (2.36) (рисунок 3.13). При реализации таких условий в рамках вычислительного эксперимента происходит потеря устойчивости пластины, которая существенно усложняет её НДС. При этом зависимости компонентов вектора перемещений, аналогичные рисунку 3.12 для случая без потери устойчивости, показаны на рисунке 3.18.



a)



б)



в)

Рисунок 3.18 – Компоненты вектора перемещений точек пластины:

а) u_x ; б) u_y ; в) u_z

Исследования, проведённые в работе [93], показывают, что такая потеря устойчивости происходит из-за превышения суммы термонапряжений и напряжений, вызванных начальным прогибом, критических напряжений по устойчивости, которые можно представить как:

$$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h}, \quad (3.38)$$

где K – коэффициент, зависящий от вида закрепления пластины.

Если оценивать термонапряжения, как предлагается в работах [96, 149]:

$$\sigma_{x(term)} = \frac{E}{1-\mu} \alpha (T(x, z, t) - T(x, z, 0)), \quad (3.39)$$

то полные напряжения σ_x могут быть определены следующим образом:

$$\sigma_x = -E \left[\frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\alpha}{1-\mu} (T(x, z, t) - T(x, z, 0)) \right]. \quad (3.40)$$

Выполненные оценки, представленные в работе [93], показывают, что для моделируемой ситуации (таблица 2.1) оценка критических напряжений (3.38) даёт:

$$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = K \frac{\pi^2 E h^2}{12 b^2 (1-\nu^2)} \approx 1.6 \text{ МПа}. \quad (3.41)$$

Пользуясь аппроксимацией начального прогиба: $u_z(0, t) = -0.1x^2$, имеем из (3.40):

$$\sigma_{xz} = -E \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{\partial u_z}{\partial x} \bigg|_{x=0.5} \approx 1.5 \text{ МПа}. \quad (3.42)$$

Выражение (3.42) даёт оценку максимальных напряжений от начального прогиба. Зависимость температурных напряжений от времени, соответствующая прогибам, представленным на рисунке 3.12 без потери устойчивости, приведена на рисунке 3.19, взятого из работы [93].

Складываясь с напряжениями от начального прогиба в соответствие с выражением (3.40), они превышают критические значения (3.41), в чём легко убедиться, используя оценку (3.42) и данные, представленные на рисунке 3.19. Это и приводит к потере устойчивости, показанной на рисунке 3.18.

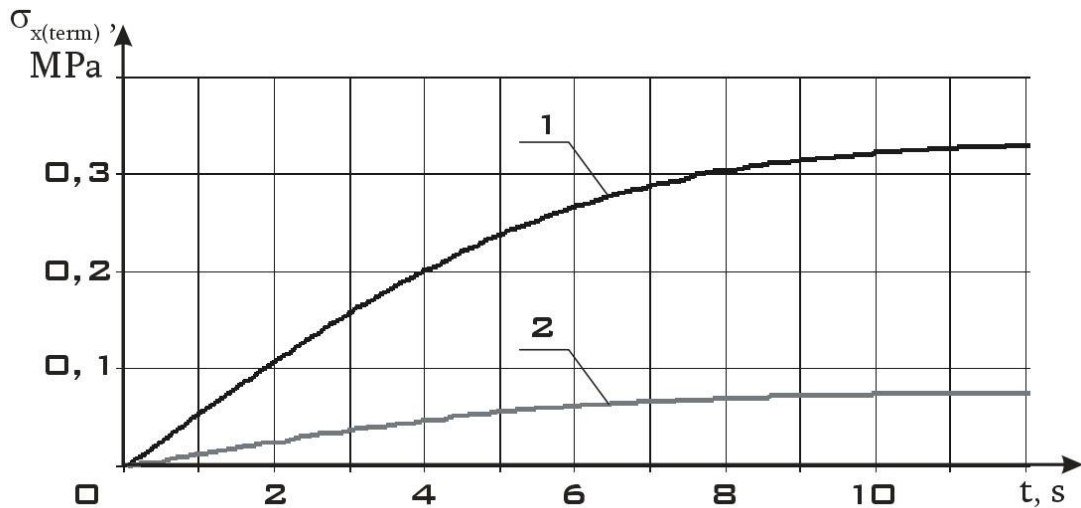


Рисунок 3.19 – Зависимость температурных напряжений, возникающих из-за температурного удара, от времени:

- 1 – для случая закрепления упругого элемента, соответствующего рисунку 3.13;
 2 – для случая закрепления упругого элемента, соответствующего рисунку 3.14

После поверхностного анализа данного типа результатов следует отметить, что при потере устойчивости двумерная постановка задачи теплопроводности становится некорректной. Более глубокий анализ данных этого типа в настоящей диссертационной работе не проводился, поскольку требует отдельных исследований и перехода от двумерной к трёхмерной модели теплопроводности.

Однако данная ремарка едва ли является недостатком работы. С практической точки зрения потеря устойчивости является недопустимым явлением. Согласно исследованиям, проведённым в работе [93], она вызывает как дополнительные микроускорения, так и снижает эффективность работы самой ПСБ по выработке электроэнергии. Поэтому ситуация с потерей устойчивости ПСБ должна быть исключена всеми возможными способами. Например, снижением жёсткости узла крепления ПСБ к корпусу МКА, о чём уже отмечалось в данном разделе диссертационной работы.

Вернёмся к результатам первого типа и проведём их сравнение с приближенными аналитическими решениями для компонентов вектора перемещений и поля температур. Так, принимая значения константы $M = 3 \text{ K/м}$ в

формуле (3.18), можно получить следующее поле температур, полученное с помощью приближенного решения (рисунок 3.20).

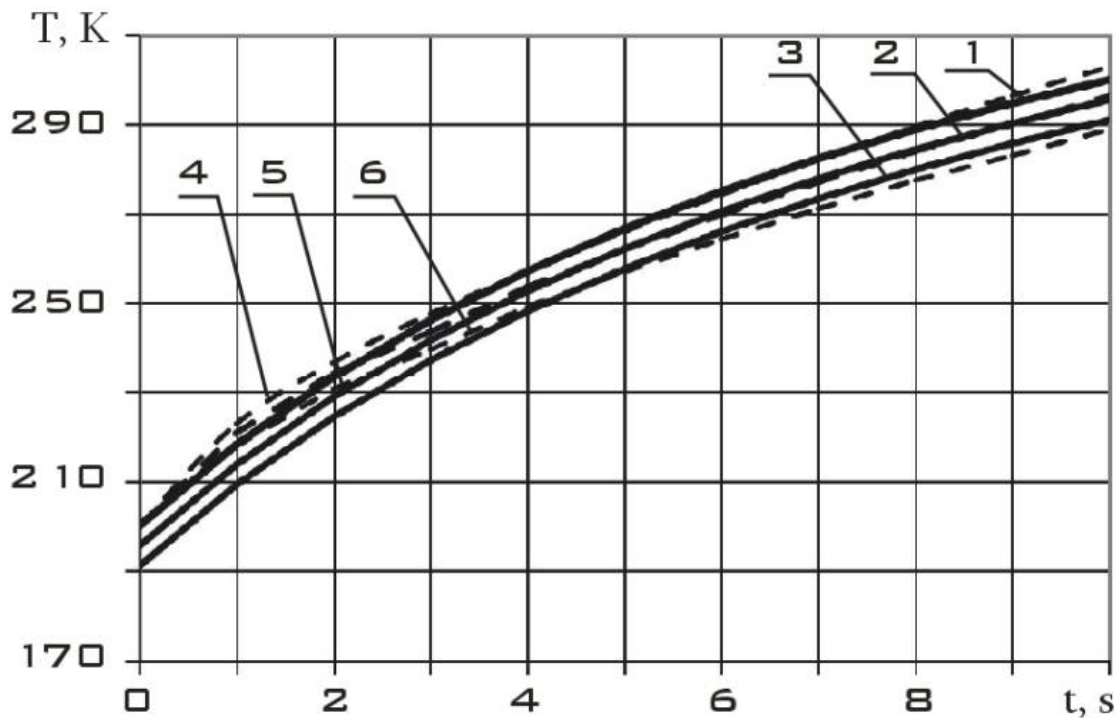


Рисунок 3.20 – Динамика температур поверхностного слоя пластины при начальном прогибе $u_{z0} = -0,1 x^2/l^2$, полученная:

в результате численного моделирования: 1 – вблизи заделки ($x \approx 0$); 2 – в середине пластины ($x \approx l/2$); 3 – на свободном краю пластины ($x \approx l$);
по формуле (3.18) при $C = 200 \text{ K/m}$, $a = 1 \text{ s}$ и $M = 3 \text{ K/m}$: 4 – вблизи заделки ($x \approx 0$);
5 – в середине пластины ($x \approx l/2$); 6 – на свободном краю пластины ($x \approx l$)

Как видно из рисунка 3.20, на интервале $[3, 10] \text{ s}$ наблюдается хорошая сходимость результатов приближенной аналитической зависимости поля температур с вычислительным экспериментом. Эта сходимость может быть улучшена путём усложнения зависимостей (3.17)–(3.19) и введением временной координаты в выражение для $f_2(x, t)$.

Зависимости прогибов концевое сечения пластины ($x = l$), полученные по результатам вычислительного эксперимента и по приближенным аналитическим зависимостям (2.49) и (3.15), показаны на рисунке 3.21.

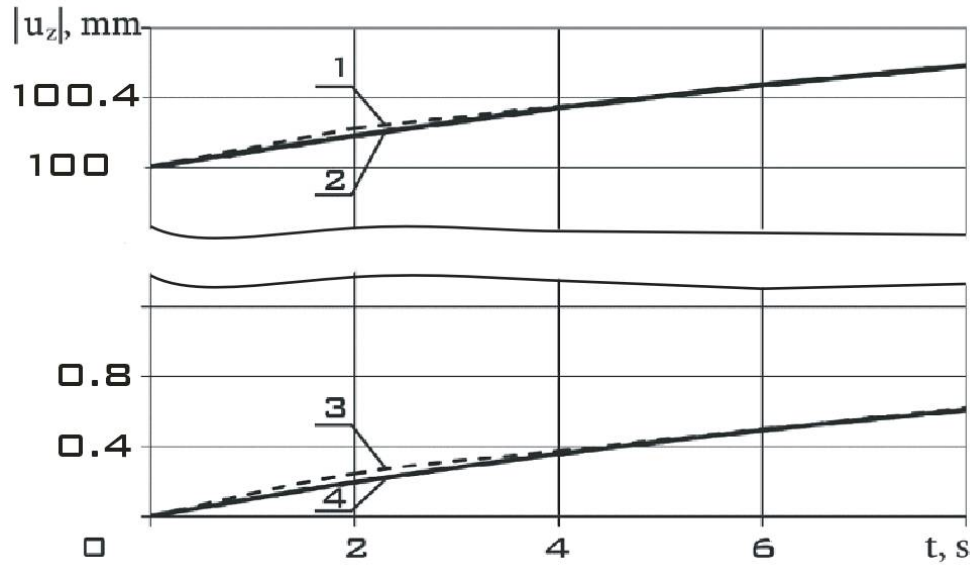


Рисунок 3.21 – Динамика прогибов u_z конечного сечения пластины ($x = l$):

при начальном прогибе $u_{z0} = -0,1 x^2/l^2$:

1 – по результатам вычислительного эксперимента;

2 – по приближённой зависимости (2.49);

без начального прогиба:

3 – по результатам вычислительного эксперимента;

4 – по приближённой зависимости (3.15)

Как видно из рисунка 3.21, хорошая сходимость прогибов наблюдается во всём временном интервале, однако она немного ухудшается на интервале $[0, 3]$ с из-за различий поля температур (рисунок 3.20) на данном временном интервале.

Зависимость второго компонента вектора перемещений $u_y(x, y, t)$ при $y = b/2$, аналогичная представленной на рисунке 2.11 б, показана на рисунке 3.22.

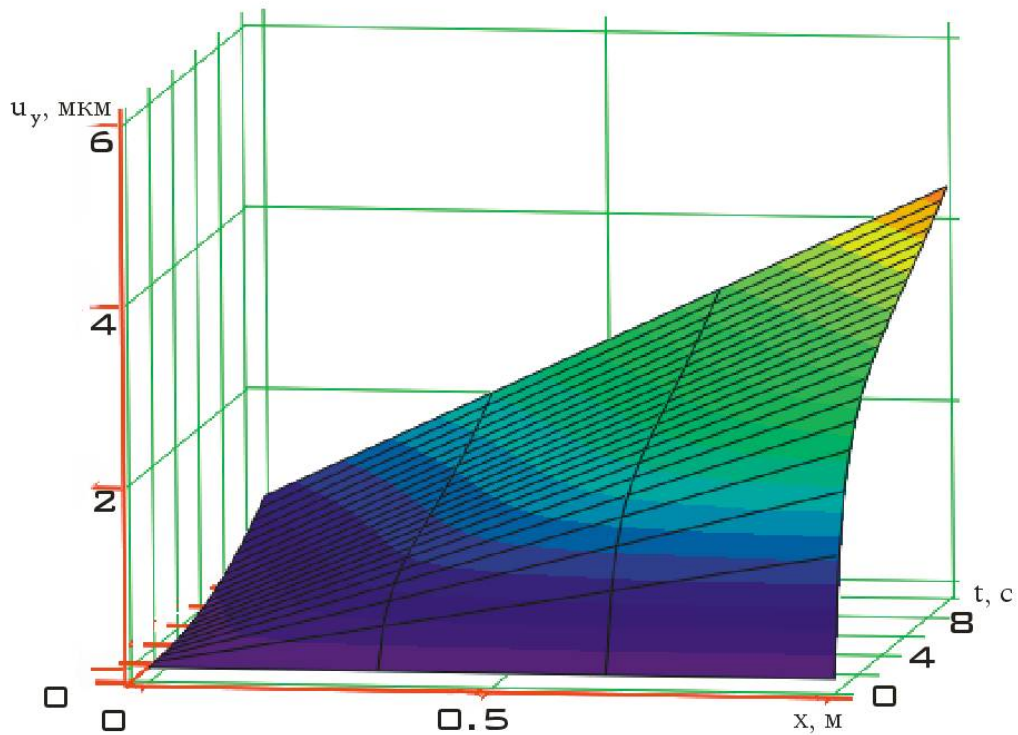


Рисунок 3.22 - Зависимость $u_y(x, y, t)$ для $u_y(x, y = \frac{b}{2}, t)$, соответствующая выражению (3.37)

Сравнение рисунков 3.22 и 2.11 б показывает, что, по сравнению с одномерной моделью теплопроводности, удалось добиться более плавного изменения функции $u_y(x, y, t)$, однако при этом нарушаются граничные условия (2.36), согласно которым $u_y(0, y, t) \equiv 0$. Это хорошо заметно на рисунке 3.22. С увеличением временной переменной t (2.36) нарушаются всё в большей степени.

С другой стороны, зависимость, представленная на рисунке 3.22, лучше согласуется с результатами вычислительного эксперимента (рисунок 3.15 б). Возможно, это связано не столько с улучшением представления $u_y(x, y, t)$ с помощью выражения (3.37) по сравнению с выражением (2.55), сколько с тем фактом, что при получении результатов вычислительного эксперимента, представленных на рисунке 3.15 б, граничные условия (2.36) в конечноэлементной модели также были нарушены.

Таким образом, в рамках двумерной модели удалось описать поле температур с помощью приближенной зависимости (3.18), показать сходимость

прогибов $u_z(x, t)$, полученных с помощью приближенных зависимостей (2.49) и (3.15), с результатами вычислительного эксперимента. Однако существенно улучшить представление другого компонента вектора перемещений $u_y(x, y, t)$ в рамках двумерной постановки задачи термоупругости не удалось. Для такого улучшения необходимо существенно усложнять аппроксимирующие зависимости.

Результаты, представленные в данном разделе, были частично опубликованы в работах [93, 96, 158], соавтором которых является автор диссертационной работы.

3.8 Валидация приближенных аналитических решений для поля температур тонкой пластины при температурном ударе

Проведём валидацию (процесс определения степени соответствия расчётной модели реальному физическому объекту в рамках области планируемого использования данной модели) полученных в работе приближённых зависимостей для поля температур:

$$T(x, z, t) = Cz \frac{t}{t + \beta} - Mx + T_0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq z \leq h, \quad t > 0, \quad (3.43)$$

где $M \equiv 0$; $T(x, z, t) \equiv T(z, t)$ для одномерной и $M > 0$ для двумерной задач.

Выберем в качестве данных для сравнений эксперименты, проведённые с ПСБ ROSA в 2017 году на борту МКС. Результаты этих экспериментов приведены в работах [103, 159]. Для измерения температуры были использованы резистивные датчики температуры, схема расположения которых показана на рисунке 3.23 [103, 159].

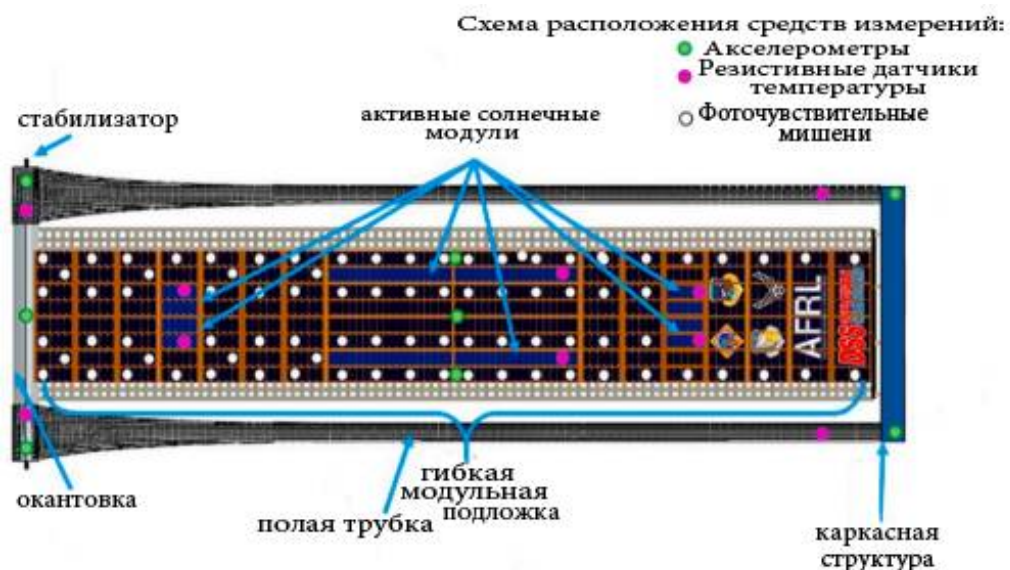


Рисунок 3.23 - Схема расположения резистивных датчиков температуры
(выделены фиолетовыми точками и обозначены RTD)
(процитировано по [103, 159])

В результате проведённых экспериментов были получены следующие данные, представленные на рисунке 3.24 [103, 159].

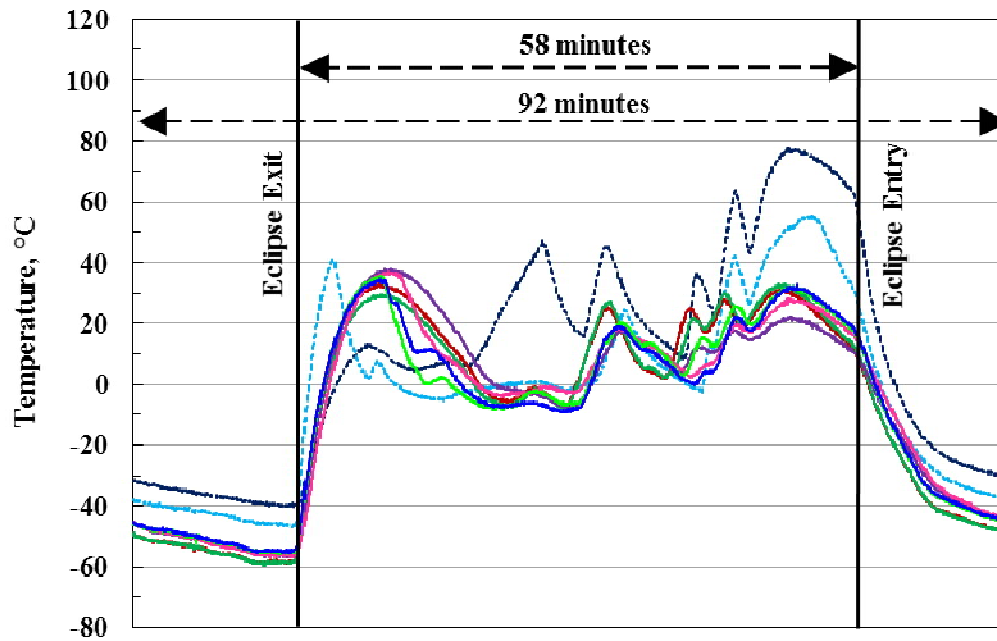


Рисунок 3.24 - Измерение температуры резистивными датчиками на поверхности панели ROSA во время эксперимента в космосе на борту МКС (процитировано по [103, 159])

На рисунке 3.24 показаны измерения нескольких резистивных датчиков, которые располагаются на различных расстояниях от узла крепления ПСБ ROSA (рисунок 3.23). Для получения сравнимых результатов необходимо привести в соответствие параметры модели (таблица 2.1) условиям натурного эксперимента [103, 159]. Причём для сравнительного анализа были выбраны измерения различных датчиков: по одному датчику расположены вблизи узла крепления и середины ПСБ ROSA и три датчика, расположенные вблизи её свободного края пластины. В таблице 3.1 представлены значения основных параметров модели пластины, подвергающейся температурному удару, соответствующие предыдущему моделированию (результаты приведены на рисунке 3.20) и моделированию для сравнительного анализа (результаты приведены на рисунке 3.25).

*Основные параметры пластины для сравнительного анализа результатов
натурного [103, 159] и вычислительного экспериментов*

Таблица 3.1

Параметр	Обозначение	Значение		Размерность
		Для рис. 3.20	Для рис. 3.25	
Материал ПСБ	—	МА2	композит	—
Коэффициент теплопроводности	λ	96,3	16,3	$Вт/(м \cdot K)$
Коэффициент линейного расширения	α	$2,6 \cdot 10^{-5}$	$1,35 \cdot 10^{-5}$	K^{-1}
Внешний поток	Q	1400	1400	$Вт/м^2$
Температура окружающей среды	T_c	3	3	K
Начальная температура ПСБ	$T_0 = T(z, 0)$	200	227	K
Степень черноты	e	0,2	0,2	—
Удельная теплоёмкость	c	1130,4	461	$Дж/(кг \cdot K)$
Плотность ПСБ	ρ	1780	7540	$кг/м^3$
Модуль Юнга	E	$4 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{11}$	$Па$
Коэффициент Ламэ	μ	$1,6 \cdot 10^{10}$	$7,5 \cdot 10^{11}$	$Па$
Коэффициент Пуассона	ν	0,3	0,3	—
Длина ПСБ	l	1	0,6	$м$
Ширина ПСБ	b	0,5	0,29	$м$
Толщина ПСБ	h	1	0,09	$мм$
Функция начального прогиба ПСБ	u_{z0}	$-0,1 x^2$	$-0,1 x^2$	$м$
Параметры модели:	C	200	200	$K/м$
	β	1	26	$с$
	M	9	23	$K/м$

После подстановки данных из четвёртого столбца таблицы 3.1 в модель и выделении соответствующего резистивного датчика и временного интервала на рисунке 3.24 имеем сравнимые результаты вычислений поля температур по формуле (3.43) и натурального эксперимента [103, 159]. Эти результаты показаны на рисунке 3.25.

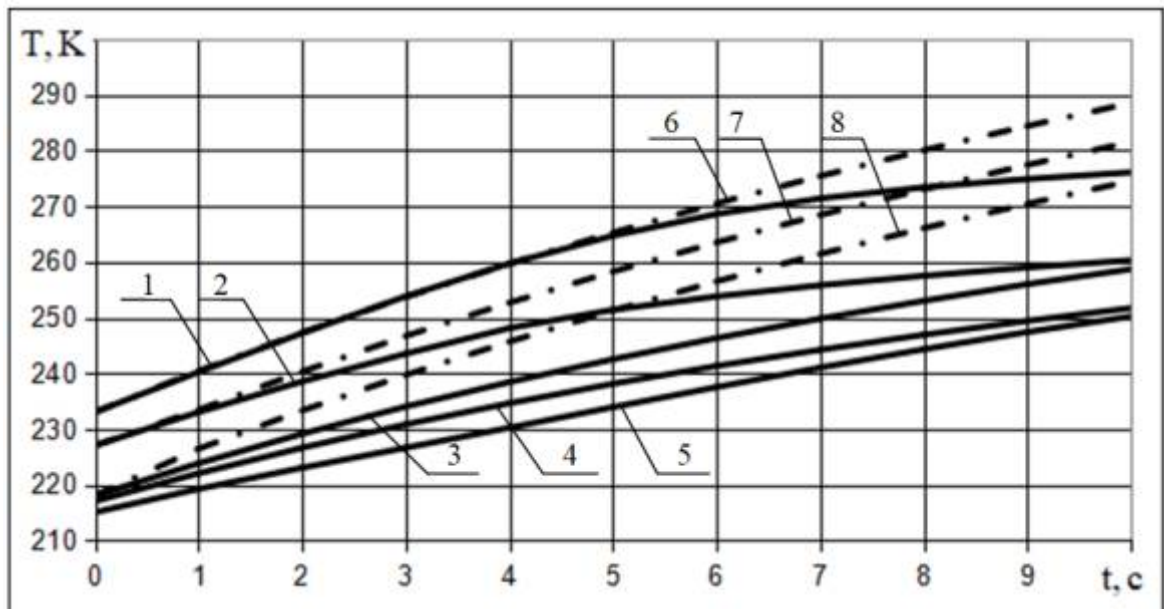


Рисунок 3.25 - Динамика изменения температуры по формуле (3.43) и для натурального [103, 159] эксперимента:

- 1 - измерения датчиком 1 вблизи узла крепления ПСБ к корпусу;
- 2 - измерения датчиком 2 вблизи середины ПСБ;
- 3, 4, 5 - измерения датчиками 3, 4 и 5 вблизи свободного края ПСБ;
- 6 - моделирование приближенной зависимостью (4) для $x=0$;
- 7 - моделирование приближенной зависимостью (4) для $x=l/2$;
- 8 - моделирование приближенной зависимостью (4) для $x=l$

Экспериментальные данные наглядно показывают более слабый прогрев поверхностного слоя вблизи свободного края ПСБ, поскольку все кривые температур (кривые 3, 4 и 5 на рисунке 3.25), построенные с помощью данных резистивных датчиков, расположенных вблизи свободного края, располагаются ниже аналогичных кривых (кривые 1 и 2 на рисунке 3.25), построенных с помощью датчиков вблизи середины и узла крепления ПСБ. Также можно

констатировать наиболее интенсивный прогрев ПСБ вблизи узла крепления: кривая 1 лежит выше кривой 2.

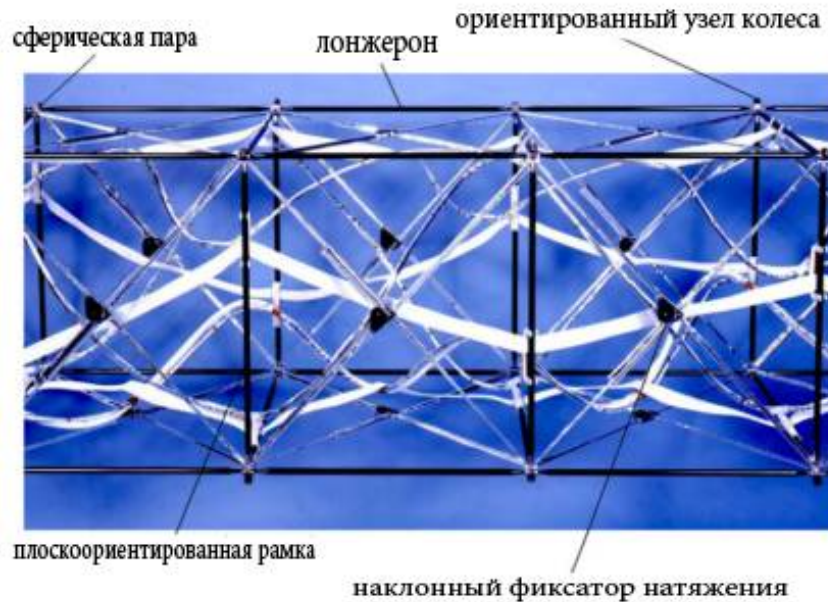
Проведём теперь сравнительный анализ измерительных данных с моделью. Из рисунка 3.25 видно, что кривая 1 (измерения датчика вблизи узла крепления) ближе к соответствующей ей модельной кривой 6. Это, в первую очередь, можно объяснить тем, что вблизи заделки форма ПСБ ROSA ближе к плоской. Именно неучёт трёхмерности случая с натурным экспериментом приводит к более существенным отклонениям модельных и экспериментальных кривых на рисунке 3.25. В ситуации с натурным экспериментом [103, 159] двумерной постановки задачи теплопроводности оказывается недостаточно - необходима общая трехмерная постановка. Использование результатов двумерного моделирования даст несколько завышенные результаты по сравнению с реальными, что и наблюдается на рисунке 3.25. Все модельные кривые являются более крутыми, чем соответствующие им экспериментальные.

Выявить другую причину различий модельных и экспериментальных кривых на рисунке 3.25 можно, анализируя разброс значений температуры в измерениях датчиков 3, 4 и 5, находящихся вблизи свободного края ПСБ. Безусловно, что часть этого разброса можно объяснить погрешностями средств измерений и различиями начальных температур в соответствующих точках ПСБ. Однако, при разнице температур в 3 К и погрешности 1 К максимальная разность данных измерений датчиков 3, 4 и 5 составляет более 8 К. Таким образом, отличие формы ПСБ от плоской вблизи свободного края является существенным, а, следовательно, функция начального прогиба (предпоследняя строка таблицы 3.1) сильно упрощена.

Однако в целом можно утверждать об адекватном описании динамики температур с помощью приближенной зависимости (3.43) и о хорошей сходимости этого описания при самом температурном ударе при сопоставимых условиях.

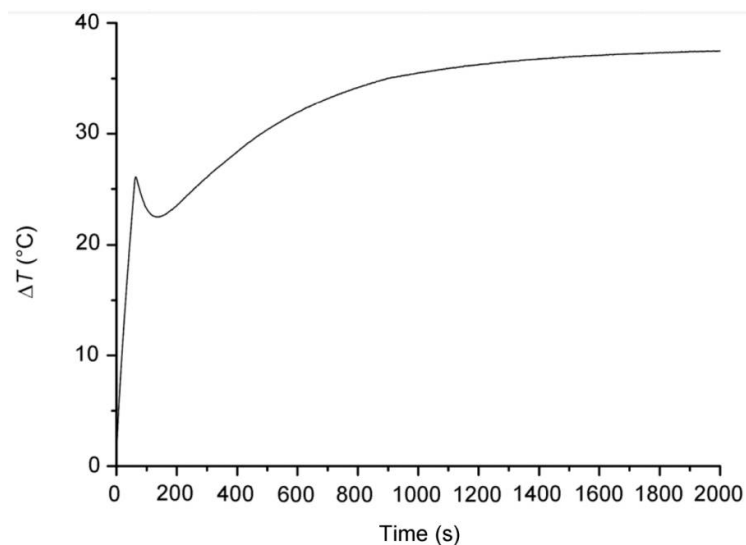
В качестве следующего шага валидации приближённых аналитических решений для поля температур тонкой пластины при температурном ударе

проанализируем результаты экспериментов, которые были проведены в земных условиях (КМ7 - симулятор условий космической среды [160]) с секцией космической фермы (рисунок 3.26) [161].



*Рисунок 3.26 - Внешний вид элемента секции космической фермы
(процитировано по [161])*

Эксперимент проводился при давлении в вакуумной камере $p = 2,8 \cdot 10^{-5}$ Па. Повышение температуры тела за время эксперимента ($t = 63$ с) составило $\Delta T = 37,6$ К [161]. Его результаты представлены на рисунке 3.27 [161].



*Рисунок 3.27 - Динамика роста температуры секции космической фермы
(процитировано по [161])*

Как видно из рисунка 3.27, авторами [161] рассматривался длительный промежуток времени (2000 с) для исследования установившегося режима термоколебаний фермы. При этом представленная на рисунке 3.27 кривая, строго говоря, не является гладкой. Полученные в данной работе приближённые зависимости для поля температур (3.43) корректны только для начальной части температурного удара (примерно 0-10 с), когда возбуждаемые им термоколебания ещё пренебрежимо малы по сравнению с температурными деформациями. Поэтому, не вдаваясь в объяснение причин негладкости кривой зависимости температуры на рисунке 3.27, рассмотрим её часть в соответствующем временном интервале (0-10 с), где данная кривая является гладкой. В качестве сравнения возьмём результаты для одномерной задачи теплопроводности, т.е. параметр $M \equiv 0$ в приближенной зависимости (3.43). Этому случаю соответствует динамика температур, показанная на рисунке 2.7.

Как и в предыдущем примере, скорректируем основные параметры модели (таблица 3.1) для соответствия их условиям проведения натурного эксперимента [161] и получения сопоставимых результатов для их сравнительного анализа и последующей валидации.

В таблице 3.2 представлены значения основных параметров модели пластины, подвергающейся температурному удару, соответствующие предыдущему моделированию (результаты приведены на рисунке 2.7) и моделированию для сравнительного анализа (результаты приведены на рисунке 3.28).

*Основные параметры пластины для сравнительного анализа результатов
натурного [161] и вычислительного экспериментов*

Таблица 3.2

Параметр	Обозначение	Значение		Размерность
		Для рис. 2.8	Для рис. 3.28	
Материал ПСБ	—	МА2	углеродно-эпоксидный композит	—
Коэффициент теплопроводности	λ	96,3	0,3	$Вт/(м \cdot K)$
Коэффициент линейного расширения	α	$2,6 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-5}$	K^{-1}
Внешний поток	Q	1400	1367	$Вт/м^2$
Температура окружающей среды	T_c	3	291,5	K
Начальная температура ПСБ	$T_0 = T(z, 0)$	200	291,5	K
Степень черноты	e	0,2	0,4	—
Удельная теплоёмкость	c	1130,4	600	$Дж/(кг \cdot K)$
Плотность ПСБ	ρ	1780	1166	$кг/м^3$
Модуль Юнга	E	$4 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^9$	$Па$
Коэффициент Ламэ	μ	$1,6 \cdot 10^{10}$	$9,5 \cdot 10^8$	$Па$
Коэффициент Пуассона	ν	0,3	0,3	—
Длина ПСБ	l	1	2	$м$
Ширина ПСБ	b	0,5	0,5	$м$
Толщина ПСБ	h	1	1	$мм$
Параметры модели:	C	200	33	$K/м$
	β	1	40	c

Результаты расчёта поля температур с помощью приближенной зависимости (3.43) и данные натурного эксперимента [161] в сопоставимых условиях показаны на рисунке 3.28.

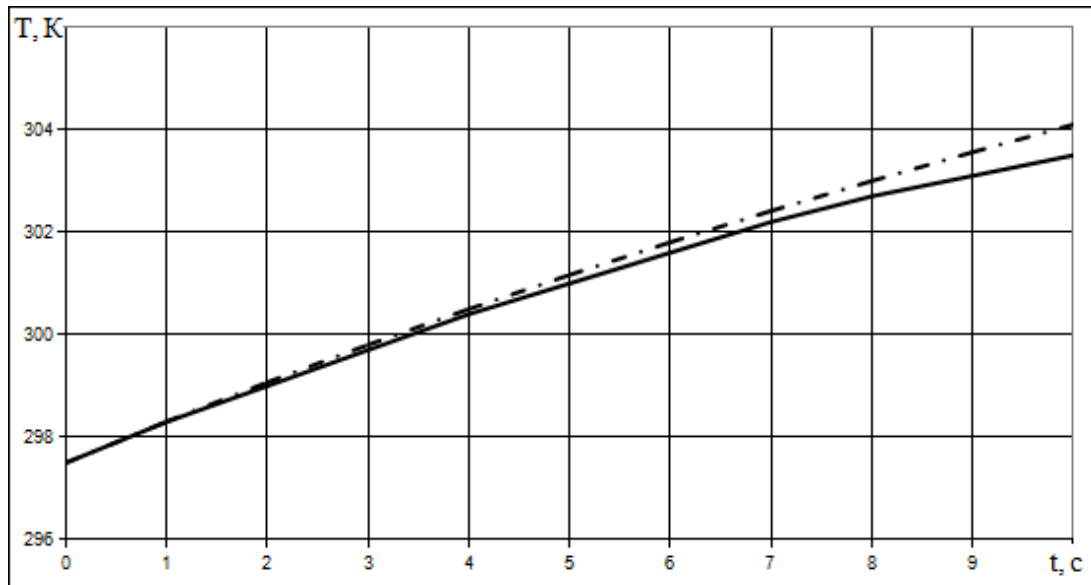


Рисунок 3.28 - Динамика изменения температуры в сравнимых условиях: для натурного эксперимента [161] (сплошная линия); по приближенной зависимости (3.43) (пунктирная линия)

Хорошее совпадение результатов видно примерно до $t = 5$ с. Несмотря на существенные отличия моделей балки (натурный эксперимент) и пластины (численное моделирование) в самом начале после момента температурного удара динамика изменения температур имеет весьма схожий характер. Далее пластина прогревается быстрее балки. Прежде всего, это объясняется пренебрежением тепловых потерь пластины через её боковые поверхности. Для балки это совершенно не так, поэтому динамика её прогрева снижается и экспериментальная кривая располагается на рисунке 3.28 ниже модельной кривой.

Однако в целом можно констатировать хорошую схожесть результатов, что также свидетельствует об адекватном описании динамики температур с помощью приближенной зависимости (3.43).

Результаты, представленные в данном разделе, были частично опубликованы в работе [162], соавтором которой является автор диссертационной работы.

3.9 Валидация приближенных аналитических решений для прогибов тонкой пластины при температурном ударе

Для валидации приближенных зависимостей (2.49) и (3.15) для прогибов воспользуемся данными экспериментов, проведенных с ПСБ ROSA [163]. Как уже ранее отмечалось, они отличаются друг от друга наличием или отсутствием начального прогиба $w_0(x, t)$. Значения основные параметры экспериментального образца определяются величинами, которые представлены в столбце 4 таблицы 3.1 [163]. Сам эксперимент проводился в наземной вакуумной камере, в которой была размещена уменьшенная модель (масштаб 1/10) ПСБ ROSA (рисунок 3.23). Результаты измерений прогиба концевых сечений внутренней и внешней опорных балок ПСБ ROSA показаны на рисунке 3.29 [163].

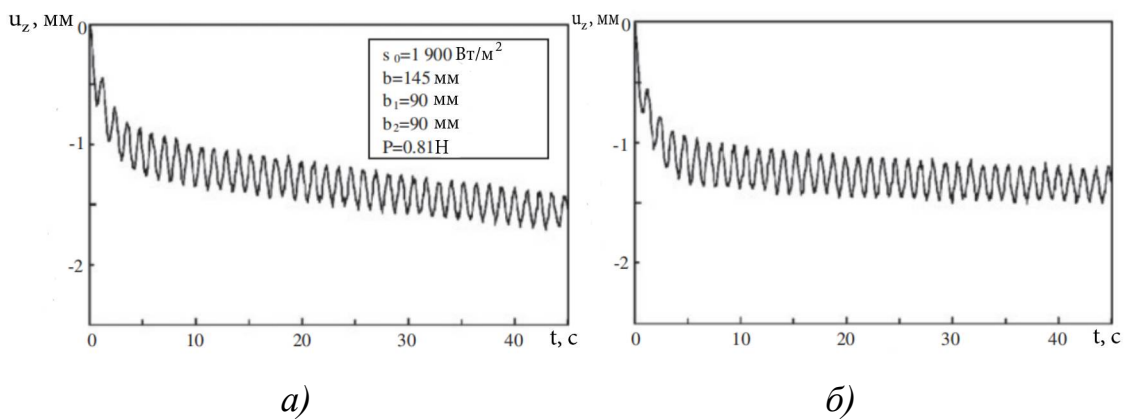


Рисунок 3.29 - Прогибы концевых сечений опорных балок
(а - внешней; б - внутренней) модели ПСБ ROSA
(процитировано по [163])

Для сравнительного анализа используем результаты в рамках одномерной модели теплопроводности, где была построена функция прогибов по зависимости (2.49) и представлена на рисунке 2.9. Для получения сравнимых результатов с натурным экспериментом [163] зададим значения основных параметров модели, представленные в столбце 4 таблицы 3.1, $Q = 1900 \text{ Вт/м}^2$ как в [163] (рисунок 3.29), а также $A = 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ и $\beta = 0,05 \text{ с}$. Эти результаты представлены на рисунке 3.30.

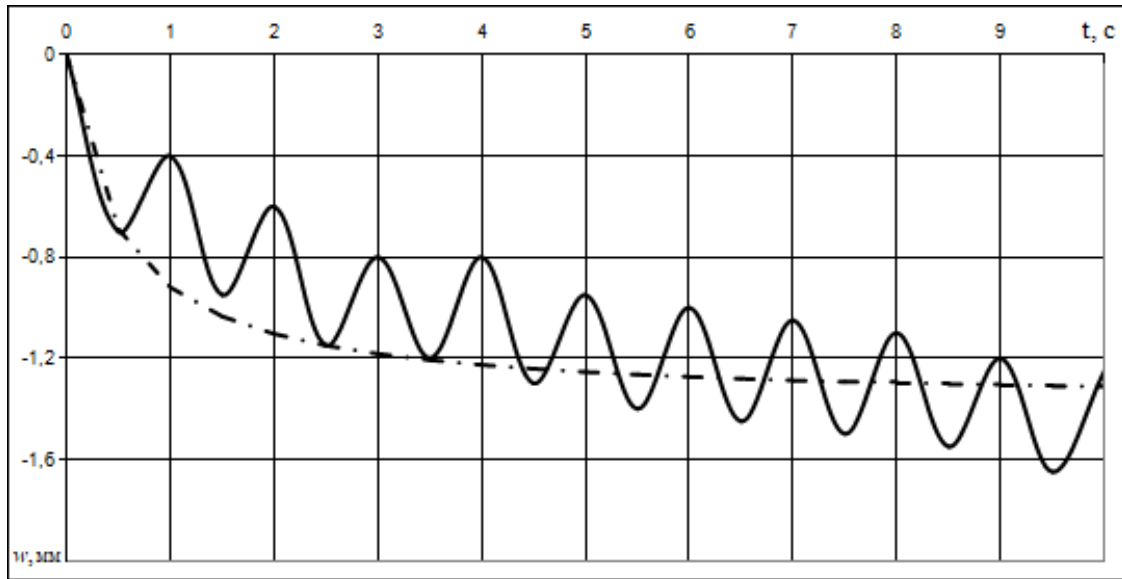


Рисунок 3.30 - Динамика прогибов свободного края:

1 - для натурального эксперимента [163]; 2 - по приближенной зависимости (2.49)

Сразу после температурного удара наблюдается хорошая сходимость результатов (первые 0,5 с на рисунке 3.30), далее возбуждаемые колебания в натурном эксперименте [163] начинают вносить существенный вклад в динамику прогибов. В модели термоколебания не учитывались, поэтому сходимость результатов ухудшилась. Однако в схожих постановках задачи при рассмотрении одинаковых факторов приближённые зависимости (2.49) и (3.15) адекватно описывают прогибы точек пластины из-за температурного удара. Более корректное представление динамических факторов возможно только в трёхмерной постановке задачи теплопроводности и с учётом их случайности [163].

Результаты, представленные в данном разделе, были частично опубликованы в работе [162], соавтором которой является автор диссертационной работы.

3.10 Выводы по третьей главе

По результатам исследований, проведённых в третьей главе, можно сделать следующие выводы.

Поставленная и решённая в данной главе начально-краевая задача двумерной теплопроводности и соответствующая ей задача термоупругости в отличие от одномерной, которая была решена во второй главе, не имеет однозначного решения в силу бесконечного количества возможных начальных форм пластины в момент температурного удара, а также возможных значений угла между нормалью к поверхности участков пластины и падающим тепловым потоком. В данной диссертационной работе была рассмотрена ситуация с необходимостью учёта двумерности, предельным случаем которой является одномерная задача. Такое сочетание было выбрано с целью корректного сравнения результатов, полученных в рамках одномерной и двумерной моделей, между собой для последующего анализа их практического применения при описании движения точек ПСБ МКА под действием температурного удара.

Главным отличием двумерной постановки от одномерной является опосредованное статическое влияние собственных колебаний пластины на её температурное поле. Это влияние реализуется через начальный прогиб пластины, которая не имеет недеформированную плоскую форму в момент температурного удара. Это отличие заставило отказаться от ряда упрощающих гипотез, которые считались справедливыми в рамках одномерной модели.

Как и для одномерной задачи, в двумерной постановке удалось получить приближённые решения для компонентов вектора перемещений, а также приближённую аналитическую зависимость для поля температур пластины. При этом был сделан ряд дополнительных упрощений по ходу вывода этих решений.

Путём добавления дополнительной функции в выражение для поля температур удалось объяснить неравномерность этого поля. Однако сама дополнительная функция, которая может зависеть от двух переменных, для исключения громоздких выкладок была представлена как функция одной

переменной. Более общее представление этой функции способствовало бы ещё большему сближению результатов вычислительного эксперимента и приближенной аналитической зависимости для поля температур пластины.

Выбор специальным образом дополнительной функции для температур позволил полностью сохранить структуру приближенного решения для прогибов u_z по сравнению с одномерной задачей. Это решение претерпело изменения лишь в части необходимости учёта начального прогиба. При этом оно, как и в рамках одномерной модели, полностью удовлетворяет как граничным, так и начальным условиям.

Что касается другого компонента вектора перемещений u_y , то подход к его определению был кардинально изменён. Усложнение вида зависимости $u_y(x, y, t)$ не позволило найти функцию, удовлетворяющую всем граничным и начальным условиям. Зато по сравнению с одномерной моделью, эта функция полностью удовлетворяет динамическому уравнению. В рамках одномерной модели наблюдалась плохая сходимость динамического уравнения при больших значениях t . Сравнивая полученные приближённые аналитические зависимости для $u_y(x, y, t)$, можно утверждать, что решение двумерной задачи ведёт себя более плавно, чем решение одномерной задачи, однако граничные условия выполняются только при малых значениях t .

Для оценки точности полученных приближенных аналитических зависимостей для поля температур и двух компонентов вектора перемещений точек пластины в разделе 3.7 были представлены результаты вычислительного эксперимента, аналогичного тому, что проводился в рамках одномерной модели теплопроводности и был представлен в главе 2. Результаты сравнения позволили отметить неплохую сходимость поля температур, особенно в диапазоне от 3 до 10 с, а также хорошую сходимость прогибов u_z как в одномерной, так и в двумерной постановках. Более худшую сходимость поля температур в диапазоне от 0 до 3 с, по-видимому, можно объяснить более сложной зависимостью температуры от переменных и, прежде всего, от времени на начальном этапе температурного удара. Затем предлагаемая приближенная зависимость более точно описывает

динамику поля температур. Этот факт сказывается и на сходимости прогибов. В диапазоне, где температурные поля расходятся больше, такое же явление наблюдается и для зависимостей прогибов.

Что касается компонента вектора перемещений u_y , то, по-видимому, не удалось добиться существенных улучшений при его описании из-за усложнения вида зависимости его от переменных. Даже в относительно простом его представлении не удалось добиться удовлетворения всех граничных и начального условий полученным приближенным решением.

Стоит также отметить, что в результате проведённого вычислительного эксперимента были выявлены случаи потери устойчивости пластины. Эти случаи были проанализированы, однако исключены из рассмотрения, поскольку требуют более сложной трёхмерной постановки задачи теплопроводности.

4 МЕТОД УЧЁТА ВЛИЯНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРНОГО УДАРА НА ДИНАМИКУ МКА И МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ МКА С УЧЁТОМ ЭТИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

4.1 Общие замечания

В данной главе диссертационной работы осуществляется демонстрация практической значимости полученных в диссертационной работе результатов оценки возмущений от температурного удара и степени их влияния на движение МКА. Для наглядности этой демонстрации представляется метод учёта возмущений от температурного удара при моделировании движения МКА. Он позволяет определять те ситуации, для которых необходим такой учёт, а также выбирать модель теплопроводности для каждой конкретной ситуации, гарантирующей корректность учёта возмущений. Конструкция и функциональное назначение МКА чрезвычайно разнообразны. Поэтому метод учёта влияния температурного удара, представляемый в данной главе, предполагается как интегрирующий инструмент оценки этого влияния на динамику МКА для формирования выводов и рекомендаций о необходимости такого учёта в конкретной ситуации.

Исследования [83, 88-91] и др. показывают, что с практической точки зрения температурный удар ПСБ и других больших упругих элементов конструкции КА следует учитывать для МКА. Поскольку доля упругой части конструкции в общей массе КА наиболее велика именно для КА этого класса. Поэтому было проведено численное моделирование возмущений от температурного удара для симметричного и несимметричного МКА. Справедливости ради стоит заметить, что испытания ПСБ типа ROSA показали, что задача учёта температурного удара этих перспективных ПСБ может быть поставлена существенно шире и распространяться не только на МКА [93, 103, 114].

4.2 Структура метода учёта влияния температурного удара

Под методом учёта влияния температурного удара в настоящей диссертационной работе понимается следующая совокупность элементов метода:

- **основополагающий принцип учёта**, позволяющий ответить на вопрос о целесообразности учёта и сформировать методическую основу стратегии учёта влияния температурного удара на динамику КА.
- **критерии необходимости учёта**, позволяющие на основе первичной информации сделать вывод о значимости влияния температурного удара на динамику КА и необходимости его учёта для корректного описания движения КА.
- **приближённые зависимости для получения первичной информации**, позволяющие осуществить количественную оценку влияния температурного удара на динамику КА.
- **совокупность правил применения основополагающего принципа**, обеспечивающая получение адекватной оценки путём выявления границ применимости приближенных зависимостей для конкретной решаемой задачи с учётом моделируемой ситуации.

Предложенная структура построена на основе классической структуры метода технического контроля, описанного, например, в работе [155]. Главным отличием от метода технического контроля является отсутствие необходимости в получении вторичной информации об объекте контроля в виде отклонений первичной информации от целевых значений, а также в выработке комплекса мероприятий, направленных на приведение контролируемой характеристики в соответствие её целевым значениям. Здесь речь идёт об оценке значимости влияния для дальнейшего учёта при построении математической модели движения КА, а также о выборе приближенных зависимостей, описывающих это влияние в контексте конкретной моделируемой ситуации и облика КА.

Данная структура метода учёта влияния температурного удара была описана в работе [165], соавтором которой является автор диссертации.

4.3 Основные принципы метода учёта влияния температурного удара

Для формулировки основополагающего принципа, о котором говорилось в предыдущем разделе, необходимо обозначить ряд принципиальных позиций, имеющих важное значение для эффективного решения задачи учёта влияния температурного удара на динамику МКА. Эти позиции, которые сформулированы в виде отдельных принципов, существенно влияют на выбор стратегии учёта и, в конечном счёте, определяют сложность математической модели движения МКА, включающей в себя приближённые зависимости оценки возмущений параметров движения МКА от температурного удара.

Говоря о МКА, следует, в первую очередь, проанализировать основные целевые задачи, стоящие перед ним. Как уже отмечалось, ряд целевых задач связан, например, с необходимостью точной ориентацией МКА (задачи дистанционного зондирования Земли из космоса) или ограничениями поля микроускорений внутренней среды МКА, особенно области размещения целевого оборудования (задачи реализации гравитационно-чувствительных процессов на борту МКА). Другие задачи, напротив, допускают эксплуатацию МКА в неориентированном полёте, например, измерение параметров космической среды. Поэтому следует убедиться в том, что температурный удар больших упругих элементов МКА способен ухудшить качество выполнения им целевых задач. Это можно представить как **функциональный принцип**, который заключается в оценке степени влияния температурного удара на качество выполнения МКА целевых задач. При этом для значений степени влияния возможно использовать следующие термины и определяющие их диапазоны:

«*пренебрежимо малая*» - означает, что оказываемое влияние на уровне возмущений, которые не учитываются в математической модели движения МКА;
 «*малая*» - означает, что оказываемое влияние на уровне возмущений, которые входят в математическую модель движения МКА как малые параметры;
 «*значимая*» - означает, что оказываемое влияние на уровне основных возмущений, учитываемых в математической модели движения МКА;

«определяющая» - означает, что оказываемое влияние оказывается самым существенным из всех основных возмущений.

Для выбора стратегии учёта влияния температурного удара необходим анализ конструкции МКА. Разнообразие конструктивных обликов МКА предполагает использование различных моделей оценки влияния температурного удара. На рисунке 4.1 представлены различные КА с разным числом больших упругих элементов.

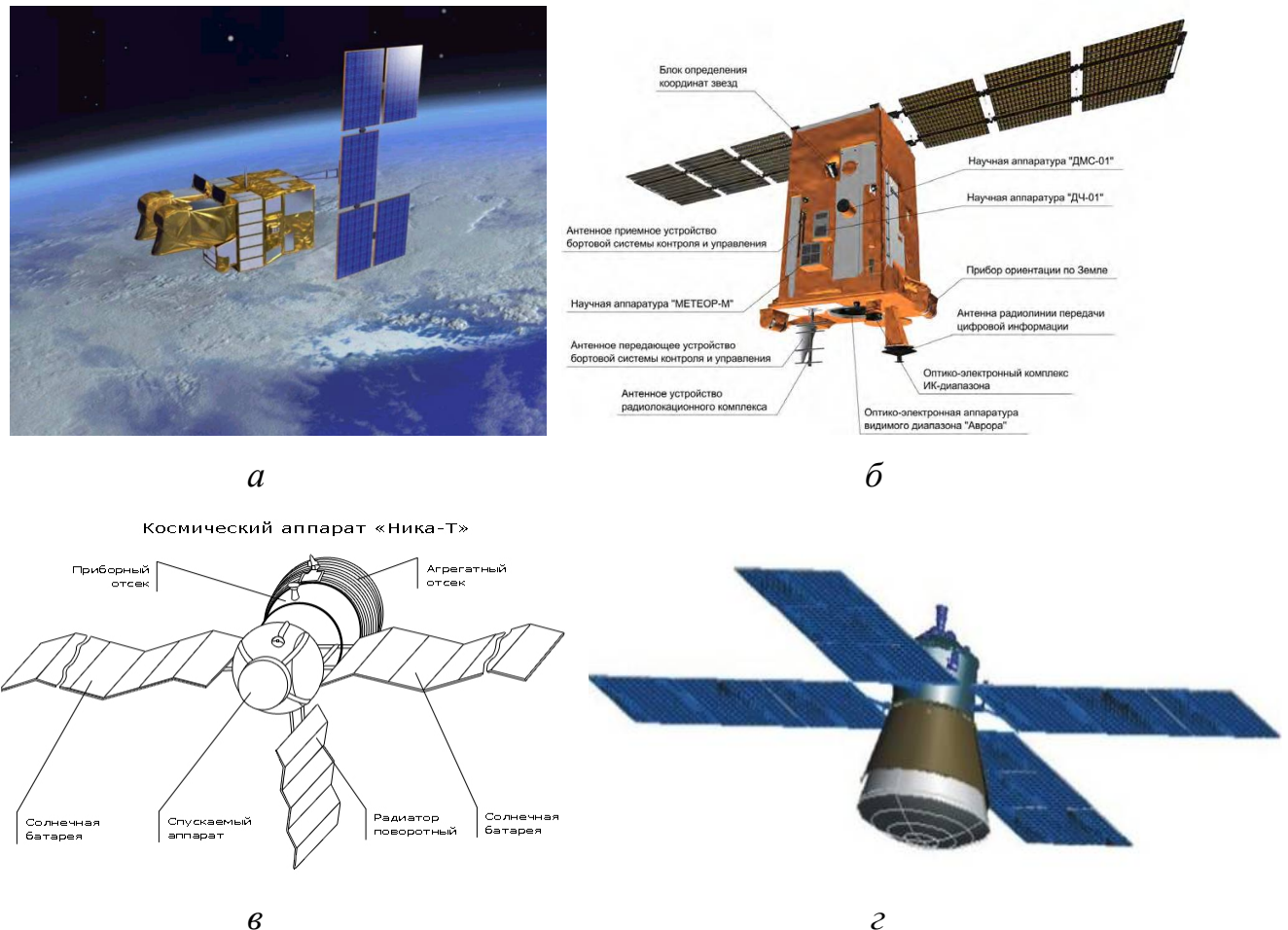


Рисунок 4.1 – Внешний вид различных КА:

а) Spot-4 ; б) Аист-2Д ; в) Ника-Т; г) Возврат-МКА

Если МКА имеет один большой упругий элемент (рисунок 4.1 а), то модель учёта влияния может быть выражена с помощью представленных приближенных зависимостей компонентов вектора перемещений. Однако большее количество упругих элементов (рисунок 4.1 б, в, г) усложнит построение модели учёта. Разумеется, что данный аспект является довольно сложным, однако в первом

приближении он может быть выражен **геометрическим принципом**, который заключается в оценке степени симметрии МКА с точки зрения наличия и расположения больших упругих элементов. Здесь может быть использована градация симметричный - несимметричный, а может быть введена и степень симметрии. Исследования, проведённые в работах [88, 89, 98, 132], показали, что для МКА с одним большим упругим элементом (несимметричный вариант) температурный удар влияет на поступательную и вращательную части движения МКА, а для симметричного МКА возмущения вращательного характера будут скомпенсированы в силу симметрии. При этом температурным ударом в большей степени будет оказано влияние на поступательную часть движения МКА.

Важную роль при учёте влияния температурного удара играет то, насколько полно были использованы конструктивные методы снижения влияния температурного удара. Речь может идти о разработке упругого узла крепления, снижающего передачу возмущающего воздействия корпусу МКА, или, например, выбор конструкционных материалов, которые слабо деформируются под воздействием температурного удара и т.д. Возможно, понимая значимость температурного удара для эффективного выполнения целевых задач, следует использовать весь спектр имеющихся конструктивных приёмов для снижения влияния температурного удара, а затем уже проводить его учёт по оптимизированному проектному облику МКА. Это положение можно трактовать как **конструктивный принцип**, который заключается в оценке степени полноты использования конструктивных приёмов для снижения влияния температурного удара на динамику МКА.

Последний важный аспект при формировании основополагающего принципа учёта касается использования различных исполнительных органов МКА для снижения влияния температурного удара на стадии эксплуатации МКА. Этими исполнительными органами могут являться двигательные установки, комплексы управляющих двигателей-маховиков, подвижные устройства, изменяющие инерционно-массовые характеристики МКА и другие технические средства. Необходимость такого применения технических средств может

возникать при определяющем влиянии температурного удара на качество выполнения МКА целевых задач, о котором шла речь в функциональном принципе. Для учёта этого аспекта, который существенно повлияет на модель движения МКА, следует сформулировать **эксплуатационный принцип**, который заключается в оценке необходимости использования технических средств для снижения влияния температурного удара.

Сочетание этих основных принципов, приводящее к ситуации, при которой учёт влияния температурного удара на динамику МКА необходим, и может быть представлено **основополагающим принципом учёта**.

Критерием необходимости учёта могут служить количественные оценки снижения качества выполнения целевых задач под влиянием температурного удара. Эти оценки приведут к одному из терминов оценки степени влияния температурного удара в рамках функционального принципа. Однако следует понимать, что критерий необходимости учёта представляет собой отдельный самостоятельный модуль метода учёта, поскольку при решении одной и той же задачи он может давать различные ответы. Например, при решении задачи дистанционного зондирования Земли с разрешением 10 м данный критерий определит степень влияния как «малую». Решение той же задачи с разрешением 0,5 м переведёт эту степень в категорию «значимая» и т.д.

Основополагающий принцип формирует структуру совокупности правил его применения и определяет вид приближенных зависимостей для получения первичной информации.

Материалы данного раздела частично изложены в работе [165], соавтором которой является автор диссертационной работы.

4.4 Разработка алгоритма метода учёта влияния температурного удара

Изложенные в предыдущем разделе особенности позволяют представить алгоритм метода учёта влияния температурного удара, который показан на рисунке 4.2.

В представленном алгоритме предлагается последовательное применение основных принципов. Первым предлагается применить функциональный принцип, который определяет необходимость учёта влияния температурного удара и степень сложности его математически формализованного описания при учёте. При *«пренебрежимо малой»* степени влияния на качество выполнения целевых задач МКА предлагается пренебречь этим влиянием и закончить процедуру учёта (рисунок 4.2). *«Малая»* степень влияния теоретически открывает возможность использования любой модели теплопроводности. Однако при формировании алгоритма предполагалось, что трёхмерная постановка окажется избыточной для учёта влияния температурного удара как малого параметра в уравнениях движения МКА. Поэтому данный диапазон степени влияния на рисунке 4.2 приводит к одномерной и двумерной моделям теплопроводности. *«Значимая»* степень влияния также теоретически может быть реализована с помощью любой модели теплопроводности. Однако, поскольку одномерная модель предполагает единственную моделируемую ситуацию, то при формировании алгоритма считалось, что одномерной постановки, скорее всего, окажется недостаточно для корректного учёта влияния температурного удара. Поэтому одномерная модель была исключена из связи с данным значением степени влияния. Наконец, *«определяющая»* степень влияния почти наверняка потребует трёхмерной постановки задачи теплопроводности, хотя теоретически не исключены и другие варианты выбора модели.

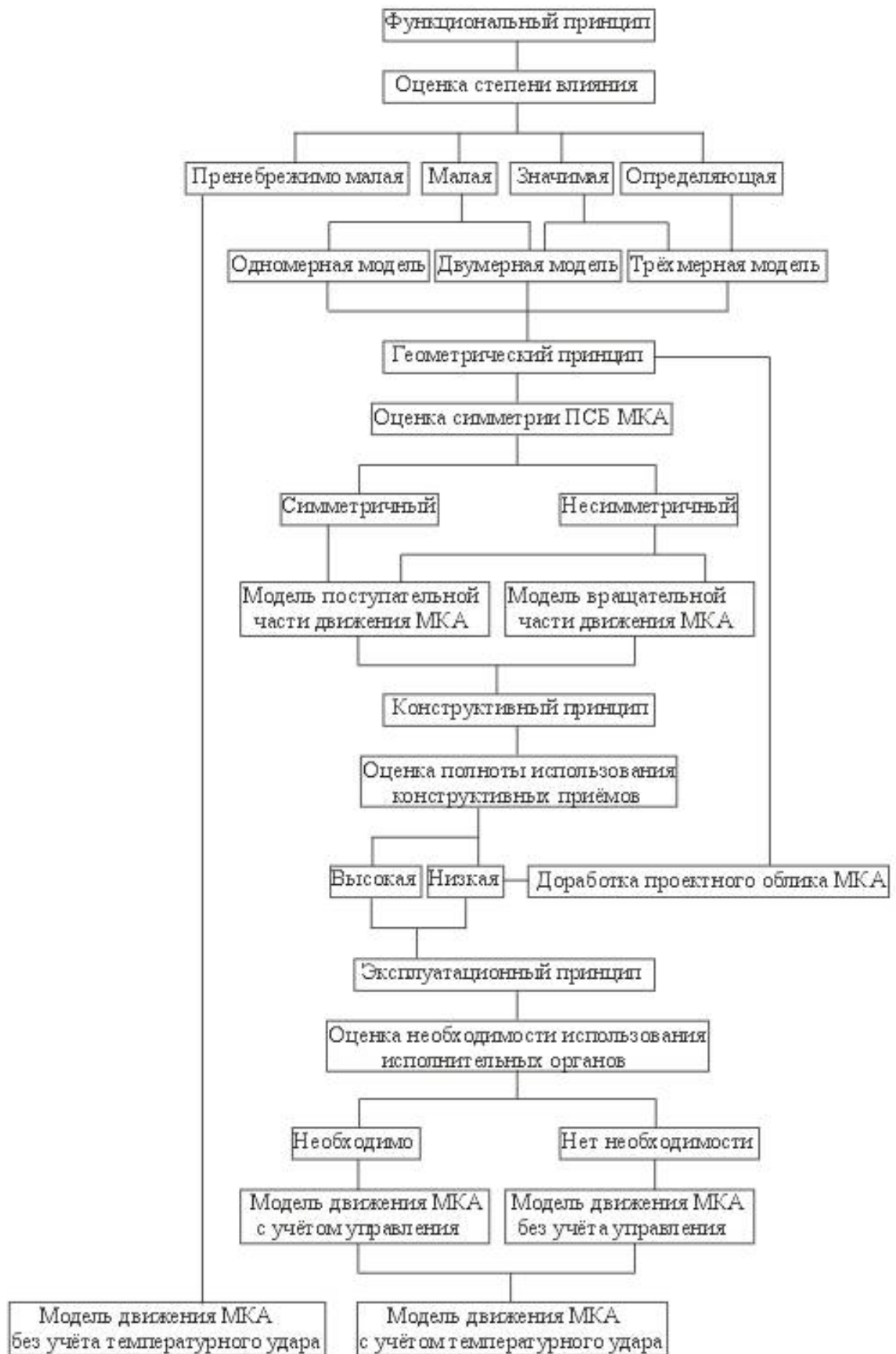


Рисунок 4.2 – Алгоритм метода учёта влияния температурного удара на динамику движения МКА

Далее предлагается применить геометрический принцип, проводя оценку симметрии МКА с точки зрения расположения ПСБ или других больших упругих элементов конструкции. На рисунке 4.2 показаны два возможных результата такой оценки (симметрия и асимметрия больших упругих элементов). При необходимости этот состав можно расширить, включив оценку степени симметрии. Особенностью симметричной схемы является взаимная компенсация возмущений, влияющих на вращательную часть движения МКА. Поэтому в этой ситуации следует рассматривать влияние температурного удара только на поступательную часть движения. При асимметричной схеме влияние будет оказываться и на поступательную и на вращательную части движения. Однако его интенсивность может быть существенно различной на разные части движения. В этом случае градация степени асимметрии может помочь решить вопрос о необходимости учёта влияния температурного удара на вращательную часть движения МКА. На рисунке 4.2 предполагается, что признание схемы расположения больших упругих элементов МКА асимметричной влечёт за собой необходимость учёта температурного удара и в поступательной и во вращательной частях движения МКА.

Затем в разработанном алгоритме применяется конструктивный принцип, предполагающий оценку степени полноты использования конструктивных приёмов для снижения влияния температурного удара. В рамках этого принципа можно определить запас конструктивных методов, которые не были использованы. Предполагается оценить степень полноты значениями «высокая» и «низкая». При необходимости возможна и более детальная градация. «Низкая» степень полноты использования может привести к необходимости доработки проектного облика МКА с целью снижения влияния температурного удара. В этом случае следует вернуться к геометрическому принципу. Функциональный принцип при этом затронут не будет в силу неизменности целевых задач, стоящих перед МКА. С другой стороны, без применения геометрического принципа информации для понимания, в каком направлении следует оптимизировать проектные параметры МКА для снижения влияния температурного удара, может

оказаться недостаточно. Поэтому геометрический принцип предшествует конструктивному в рамках данного метода учёта. Однако и при «низкой» степени полноты использования конструктивных приёмов доработка проектного облика МКА необязательна.

Применение эксплуатационного принципа позволяет уточнить как модель движения МКА (с учётом управления или без учёта управления), так и значимость влияния температурного удара. Например, в случае без управления степень влияния может быть *«определяющей»*, а в случае с управлением – *«значимой»*.

В итоге формируется математическая модель движения МКА, которая либо учитывает влияние температурного удара либо пренебрегает этим влиянием. При этом эта модель использует полученные в работе зависимости компонентов вектора перемещений в случае необходимости учёта влияния температурного удара.

4.5 Приближенные аналитические зависимости для возмущений от температурного удара

Общий вид приближенных зависимостей возмущений от температурного удара при наличии одной ПСБ в конструктивной схеме МКА представлен в работах [88, 89, 98, 132]:

$$\Phi_z = \int_0^m w_z(x, t) dm = \frac{m_1}{l} \int_0^l w_z(x, t) dx. \quad (4.1)$$

$$\Phi_y = \frac{m_1}{lb} \int_0^l \int_0^b w_y(x, y, t) dy dx. \quad (4.2)$$

$$\Phi_x = \int_0^m w_x(x, t) dm = \frac{m_1}{l} \int_0^l w_x(x, t) dx. \quad (4.3)$$

$$N = E \iint_S [\varepsilon_{xx} - \alpha (T - T_0)] dS. \quad (4.4)$$

$$M_y(\Phi) = \int_0^m w_z(x, t) x dm = \frac{m_1}{l} \int_0^l w_z(x, t) x dx. \quad (4.5)$$

На рисунке 4.3, который процитирован по работе [132], схематично показаны направления ускорений точек пластины при температурном ударе.

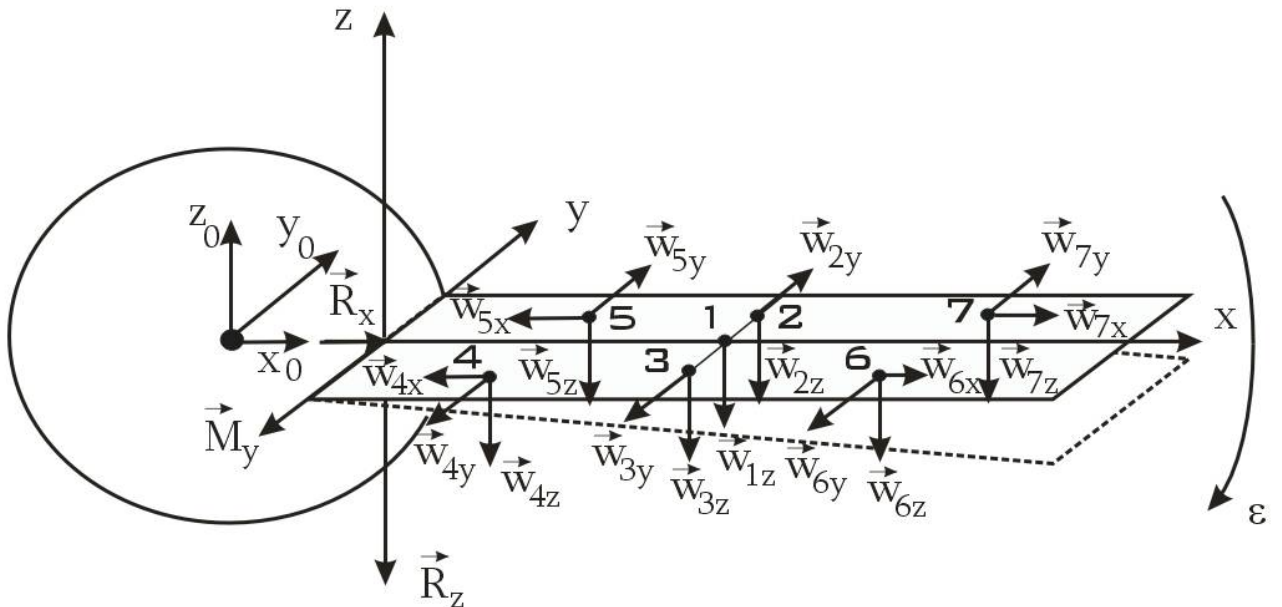


Рисунок 4.3 – Ускорения точек пластины при температурном ударе

($x_0 y_0 z_0$ – главная связанная система координат) [132]

Выражения (4.1)–(4.5) определяют влияние температурного удара ((4.1)–(4.3) – модули сил инерции, (4.4) – внутреннее продольное усилие вдоль оси x , (4.5) – модуль момента от сил инерции) в случае наличия одной ПСБ у МКА. Учитывая, что в данной диссертационной работе предполагается возможное наличие более одной ПСБ, (4.1)–(4.5) можно преобразовать к виду:

$$\Phi_z = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{iz}(x_i, t) dx_i.$$

$$\Phi_y = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i b_i} \int_0^{l_i} \int_0^{b_i} w_{iy}(x_i, y_i, t) dy_i dx_i.$$

$$\Phi_x = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{ix}(x_i, t) dx_i.$$

$$M_y(\Phi) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{iz}(x_i, t) x_i dx_i.$$

Следует отметить, что зависимости возмущений (4.6)–(4.9) в одно- и двумерной постановках могут быть преобразованы с учётом зависимостей (2.49), (2.55) и (3.15), (3.47). Они имеют следующий вид для i -й ПСБ:

$$\Phi_{zi} = \frac{12}{5} \frac{m_i A l_i^4 \beta}{(t + \beta)^3} - \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 u_{z_0}(x_i, t)}{\partial t^2} dx_i. \quad (4.6)$$

$$\Phi_{yi} = -\frac{m_i}{l_i b_i} \int_0^{l_i} \int_0^{b_i} w_{yi}(x_i, y_i, t) dy_i dx_i. \quad (4.7)$$

$$\Phi_{xi} = \frac{591}{1920} \frac{\alpha A C l_i \beta (2\beta - t)}{(t + \beta)^4}. \quad (4.8)$$

$$M_y(\Phi_{yi}) = \frac{26}{15} \frac{m_i A l_i^5 \beta}{(t + \beta)^3} - \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 u_{z_0}(x_i, t)}{\partial t^2} x_i dx_i. \quad (4.9)$$

Эти возмущения передаются на корпус МКА (рисунок 4.3):

$$\begin{cases} R_x = N; \\ R_z = \Phi_z; \\ M_y = M_y(\Phi). \end{cases} \quad (4.10)$$

Значимость их влияния определяется применением представленного в предыдущей части данной главы метода учёта влияния. Для полноты картины описания этого метода следует указать на выражения для возмущений (4.6)–(4.9) как на приближённые зависимости для получения первичной информации,

которые были упомянуты в структуре метода (раздел 4.2). Выбор этих зависимостей при реализации метода учёта влияния температурного удара предполагается осуществлять после применения функционального и геометрического принципов. В рамках функционального принципа выбирается размерность задачи теплопроводности, а в рамках геометрического принципа решается вопрос о взаимном влиянии температурных деформаций отдельных больших упругих элементов для оценки суммарного возмущающего воздействия температурного удара на движение МКА.

В настоящей диссертационной работе были исследованы только одно- и двумерные постановки, поэтому в случае выбора трёхмерной постановки для формирования приближенных зависимостей возмущений от температурного удара следует обратиться к работам, например, [47, 66, 86, 102, 166], где такая постановка была рассмотрена.

Таким образом, результатом применения функционального принципа будет выбор размерности задачи теплопроводности, а также соответствующих этой задаче приближенных зависимостей компонентов вектора перемещений, определяющих движение точек ПСБ при температурном ударе. Для одномерной задачи это зависимости (2.49) и (2.55), для двумерной задачи – (3.15) и (3.37). Используя зависимости (4.6)–(4.10) с учётом (2.49), (2.55) и (3.15), (3.47) можно получить приближённые аналитические зависимости возмущений от температурного удара, которые могут быть включены в модель движения МКА.

4.6 Математическая модель движения МКА с учётом возмущений от температурного удара

Модель движения МКА была ранее представлена в общем виде (1.1)–(1.2). Внесём полученные в предыдущем разделе приближённые аналитические зависимости для возмущений от температурного удара. Тогда получим в орбитальной системе координат МКА:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x^e + \Phi_x^{CCK} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{ix}(x_i, t) dx_i; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y^e + \Phi_y^{CCK} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i b_i} \int_0^{b_i} w_{iy}(x_i, y_i, t) dy_i dx_i; \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z^e + \Phi_z^{CCK} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{iz}(x_i, t) dx_i. \end{cases} \quad (4.11)$$

Для углового движения в связанной системе координат МКА:

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{\omega}_x + \dot{I}_{xx} \omega_x - I_{xy} \dot{\omega}_y - \dot{I}_{xy} \omega_y - I_{xz} \dot{\omega}_z - \dot{I}_{xz} \omega_z + \omega_y (I_{zz} \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y) - \omega_z (I_{yy} \omega_y - I_{xy} \omega_x - I_{yz} \omega_z) = M_x; \\ I_{yy} \dot{\omega}_y + \dot{I}_{yy} \omega_y - I_{xy} \dot{\omega}_x - \dot{I}_{xy} \omega_x - I_{yz} \dot{\omega}_z - \dot{I}_{yz} \omega_z + \omega_z (I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) - \omega_x (I_{zz} \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y) = M_y + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{iz}(x_i, t) x_i dx_i; \\ I_{zz} \dot{\omega}_z + \dot{I}_{zz} \omega_z - I_{xz} \dot{\omega}_x - \dot{I}_{xz} \omega_x - I_{yz} \dot{\omega}_y - \dot{I}_{yz} \omega_y + \omega_x (I_{yy} \omega_y - I_{xy} \omega_x - I_{yz} \omega_z) - \omega_y (I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) = M_z, \end{cases} \quad (4.12)$$

где $\vec{M}(M_x, M_y, M_z) = \vec{M}^e + \vec{M}^{cont}$ – вектор возмущающих моментов.

Таким образом, системы уравнений (4.11)–(4.12) в рамках проведённых исследований в данной диссертационной работе представляют собой модель движения МКА с учётом возмущений от температурного удара. В следующих разделах будет проведено численное моделирование возмущений от температурного удара для симметричной и несимметричной схемы МКА.

4.7 Результаты численного моделирования возмущений от температурного удара для схемы несимметричного МКА

В случае несимметричного МКА учёт возмущений от температурного наиболее актуален. На рисунке 4.4 показана схема несимметричного МКА, содержащего одну ПСБ.

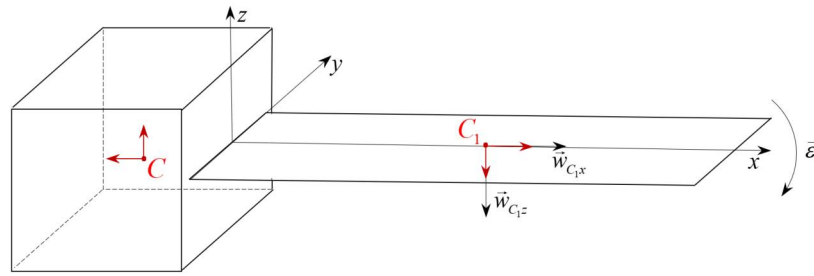


Рисунок 4.4 – Схема несимметричного МКА с одной ПСБ

На рисунке 4.4 обозначена местная система координат ($x y z$), связанная с ПСБ. Точки C и C_1 показывают положения центров масс корпуса МКА и ПСБ соответственно, а стрелки — направления их перемещения из-за влияния температурного удара.

Примерами МКА, соответствующих схеме, показанной на рисунке 4.4., являются «Spot-4» [139, 140], «Starlink» [167], ЕО-1 [168, 169] и др. Для проведения численного моделирования используем данные МКА ЕО-1 (рисунок 4.5) [169], которые приведены в таблице 4.1 [169].



Рисунок 4.5 – Внешний вид МКА ЕО-1 [169]

Таблица 4.1

Параметр	Обозначение	Значение	Размерность
Тип МКА	—	ЕО-1	—
Количество упругих элементов	i	1	—
Масса корпуса МКА	m_0	573	кг
Масса упругого элемента	m_1	25	кг
Длина упругого элемента	l	3	м
Расстояние от заделки ПСБ до центра масс МКА	r	0,5	м
Ширина упругого элемента	b	0,5	м
Толщина упругого элемента	h	6	мм
Материал упругого элемента	—	МА-2	—
Модуль Юнга	E	42	ГПа
Теплопроводность	λ	96,3	Вт/(м·К)
Коэффициент температурного расширения	α	$26 \cdot 10^{-5}$	мкм/(м·К)
Внешний тепловой поток	Q	1,4	кВт/м ²
Температура вакуума	T_c	3	К
Начальная температура упругого элемента	$T(x, y, z, 0)$	200	К
Удельная теплоёмкость	c	1,13	кДж/(кг·К)
Плотность	ρ	1,78	т/м ³
Степень черноты материала	e	0,3	—
Постоянная Стефана-Больцмана	Θ	$5,67 \cdot 10^{-8}$	Вт/(м ² ·К ⁴)

Само численное моделирование проводилось в пакете Математика. Получены результаты оценок возмущающих факторов по формулам (4.6)–(4.9) для МКА, схема которого представлена на рисунке 4.4, а основные параметры приведены в таблице 4.1. В виду симметрии задачи температурного удара относительно продольной оси x местной системы координат, а также однородности свойств ПСБ сила инерции, определяемая формулой (4.7) $\Phi_y = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i b_i} \int_0^{l_i} \int_0^{b_i} w_{iy}(x_i, y_i, t) dy_i dx_i = 0$. Тогда уравнения модели движения МКА (4.11) и (4.12) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x^e + \Phi_x^{CCK} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{ix}(x_i, t) dx_i; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y^e + \Phi_y^{CCK}; \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z^e + \Phi_z^{CCK} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{iz}(x_i, t) dx_i. \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{\omega}_x + \dot{I}_{xx} \omega_x - I_{xy} \dot{\omega}_y - \dot{I}_{xy} \omega_y - I_{xz} \dot{\omega}_z - \dot{I}_{xz} \omega_z + \omega_y (I_{zz} \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y) - \omega_z (I_{yy} \omega_y - I_{xy} \omega_x - I_{yz} \omega_z) = M_x; \\ I_{yy} \dot{\omega}_y + \dot{I}_{yy} \omega_y - I_{xy} \dot{\omega}_x - \dot{I}_{xy} \omega_x - I_{yz} \dot{\omega}_z - \dot{I}_{yz} \omega_z + \omega_z (I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) - \omega_x (I_{zz} \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y) = M_y + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{iz}(x_i, t) x_i dx_i; \\ I_{zz} \dot{\omega}_z + \dot{I}_{zz} \omega_z - I_{xz} \dot{\omega}_x - \dot{I}_{xz} \omega_x - I_{yz} \dot{\omega}_y - \dot{I}_{yz} \omega_y + \omega_x (I_{yy} \omega_y - I_{xy} \omega_x - I_{yz} \omega_z) - \omega_y (I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) = M_z, \end{cases} \quad (4.14)$$

Динамика возмущений при температурном ударе показана на рисунке 4.6.

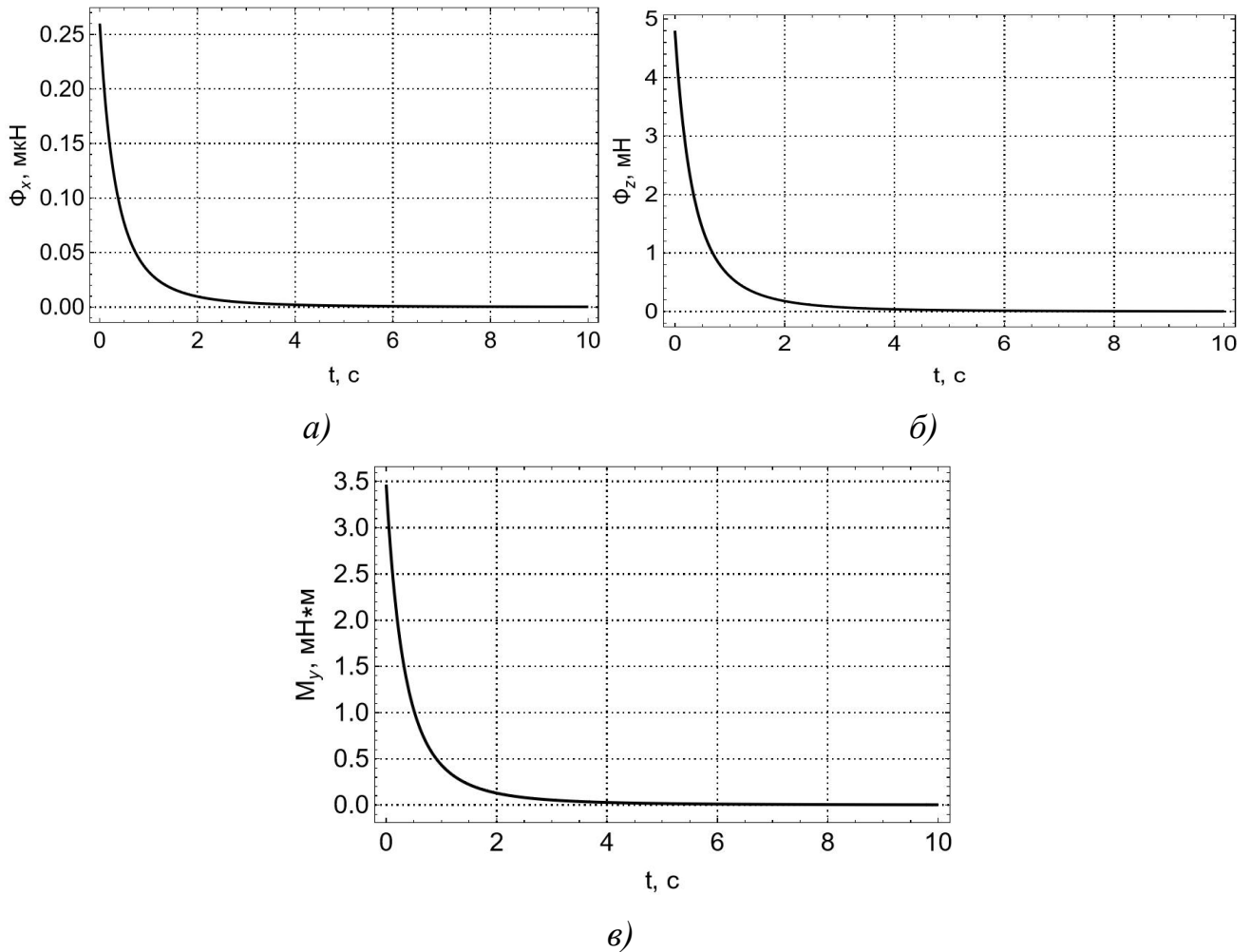


Рисунок 4.6 – Динамика возмущающих факторов при температурном ударе:

а) Φ_x формула (4.8); б) Φ_z формула (4.6); в) $M_y(\Phi)$ формула (4.9)

Анализ рисунка 4.6 показывает, что динамические процессы, связанные с температурным ударом, интенсивно протекают в первые 1,5–2 с после самого удара. Это позволяет корректно моделировать возмущения до возбуждения термоколебаний (рисунок 3.30). Поэтому постановка двумерной задачи теплопроводности со статическим учётом собственных колебаний через начальный прогиб имеет актуальность и практическую значимость для учёта первичных возмущений от температурного удара, к которым относятся возмущения, показанные на рисунке 4.6. Эти возмущения вызывают линейное ускорение центра масс корпуса МКА и угловое ускорение МКА, определяемые системами уравнений (4.11) и (4.12) и показанные на рисунке 4.7.

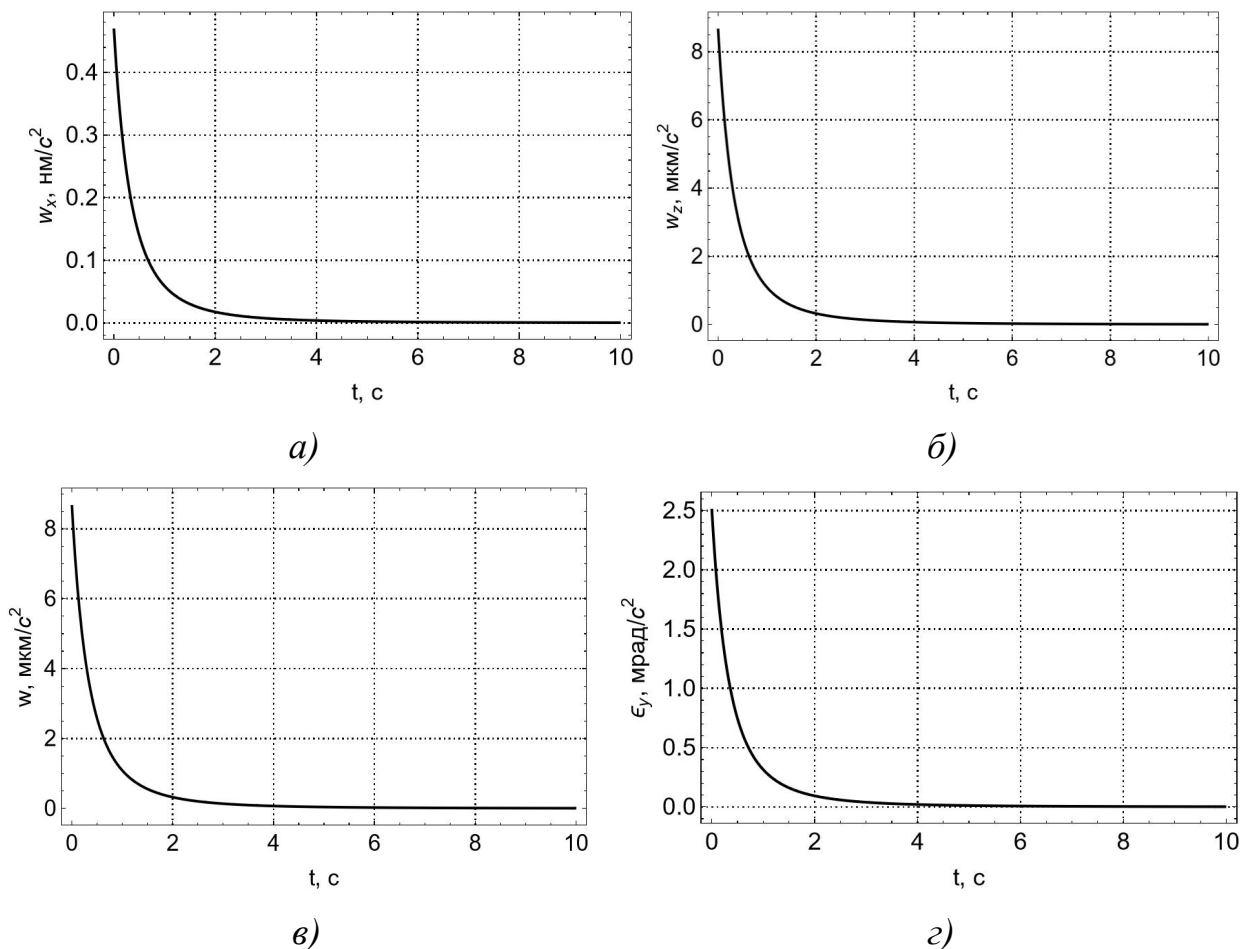


Рисунок 4.7 – Динамика ускорений, вызванных возмущающими факторами при температурном ударе:

а) w_x формула (4.13); б) w_z формула (4.13); в) $|\vec{w}|$; г) ε_y формула (4.14)

Выполним оценку разориентации МКА ЕО-1, вызванную угловым ускорением (рисунок 4.7 г), для подтверждения актуальности учёта температурного удара при решении некоторых задач дистанционного зондирования. Предположим, что в момент температурного удара МКА имел нулевую угловую скорость. Оптическая ось его целевой аппаратуры была направлена строго на центр инспектируемого объекта. Такая идеальная постановка позволит оценить степень влияния температурного удара. Из рисунка 4.7 г видно, что основное влияние происходит в первые две секунды с момента температурного удара. Будем исследовать именно этот отрезок времени. Угловая скорость малого космического аппарата, соответствующая рисунку 4.7 г, будет иметь вид, представленный на рисунке 4.8.

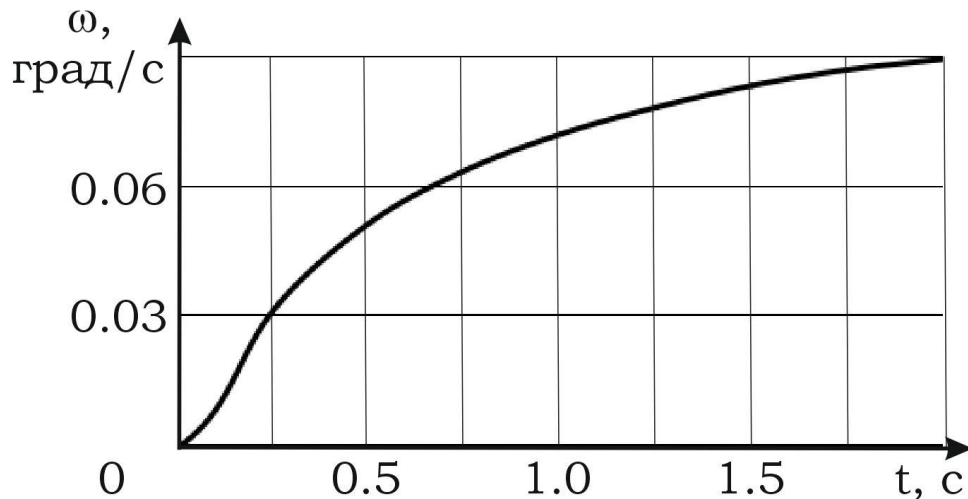
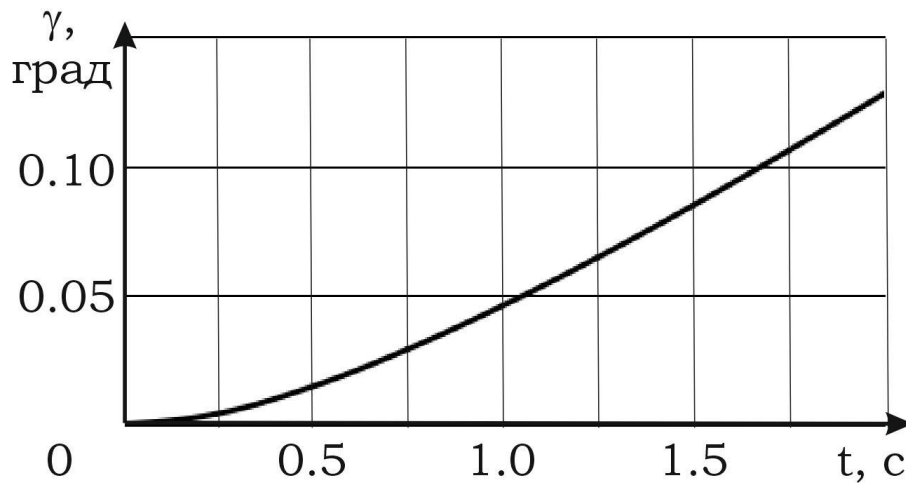


Рисунок 4.8 – Зависимость угловой скорости МКА ЕО-1 при воздействии на него температурного удара

Представим себе, что вектор угловой скорости (рисунок 4.8) лежит в плоскости, перпендикулярной оптической оси целевой аппаратуры МКА. Этот случай вызовет самую большую разориентацию относительно инспектируемого объекта. Для такой ситуации график зависимости угла разориентации, соответствующий угловой скорости (рисунок 4.8), показан на рисунке 4.9.



*Рисунок 4.9 – Зависимость угла разориентации МКА ЕО-1
при воздействии на него температурного удара*

Таким образом, спустя две секунды после наступления температурного удара угол разориентации составит примерно $0,128^{\circ}$. Обсудим полученные результаты. Предположим, что высота орбиты МКА составляет 400 км. В этом случае угловой размер инспектируемого объекта может быть оценён как:

$$\alpha = \arctan \frac{l}{H}.$$

Тогда угол в $0,128^{\circ}$ соответствует примерно характерному размеру l объекта в 1120 м. Таким образом, через 2 секунды после температурного удара оптическая ось целевой аппаратуры сместится на 1120 м. Также из поля зрения уйдут объекты такого же размера. Для панорамного изображения, когда снимаются большие территории, это возмущение, по-видимому, является не очень существенным. Также это не существенно для бюджетных МКА, где точность ориентации ниже указанного значения (например, 5° для SXC3-219 [170]). Однако для высокоточной съёмки это возмущение является существенным. Так, например, для малого космического аппарата «Аист-2Д» в режиме трёхосной ориентации заявлена точность ориентации по углу в 3 угловые минуты ($0,05^{\circ}$) [171], а точность определения ориентации по информации со звёздных датчиков составляет 20 угловых секунд (приблизительно $0,006^{\circ}$) [171]. Полученное значение угла разориентации более, чем в 2,5 раза превышает точность ориентации по углу. Следовательно, для таких космических аппаратов, как «Аист-

2Д», учёт температурного удара необходим. Без этого учёта будет ухудшено качество выполнения целевых задач.

Таким образом, величины полученных ускорений могут быть значимыми при выполнении задач ДЗЗ и реализации гравитационно-чувствительных процессов. Результаты данного раздела частично опубликованы в работе [169], соавтором которой является автор диссертационной работы.

4.8 Система управления угловым движением МКА на основе комплекса управляющих двигателей-маховиков

Разработанный метод учёта возмущений от температурного удара на динамику углового движения МКА позволяет предложить систему управления угловым движением, нивелирующую эти возмущения. Рассмотрим классическую модель системы управления на основе КУДМ с использованием трёх основных и одного резервного двигателей-маховиков (рисунок 4.8).

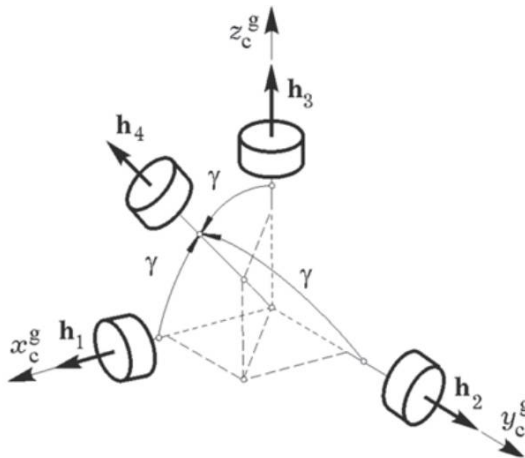


Рисунок 4.8 – Схема системы управления на основе КУДМ с тремя основными и одним резервным ДМ (процитировано по [172])

Такая схема реализована в «КМХ Колокол» [173] и планируется к реализации на перспективных МКА серии «Аист». На рисунке 4.8 оси x_c^g ; y_c^g ; z_c^g – являются главными связанными осями МКА. Таким образом, три основных ДМ совпадают осями вращения с главной связанной системой координат МКА, а четвёртый, резервный ДМ, имеет ось собственного вращения, направленную по пространственной биссектрисе между этими осями (рисунок 4.8) [172]. Как правило, он активируется при выходе из строя одного из трёх основных ДМ. Поскольку вероятность отказа всех трёх ДМ считается одинаковой, ось резервного ДМ составляет одинаковые углы с их осями (угол γ на рисунке 4.8).

В настоящей диссертационной работе предлагается добавить резервному ДМ функцию нивелирование угловых возмущений от температурного удара. В

рассмотренном в предыдущем разделе численном примере была получена зависимость момента $M_y(\Phi)$, вызванного температурным ударом, от времени (рисунок 4.6 в). По ней можно вычислить суммарный кинетический момент, который приобретёт МКА в результате температурного удара:

$$L_{\Sigma} = \int_0^{t_{ch}} M_y(\Phi) dt, \quad (4.15)$$

где t_{ch} – характерное время температурного удара.

Далее следует рассчитать угол, на который следует повернуть ось резервного ДМ по направлению к оси y_c^g следующим образом:

$$h_4^{\max} \cos(\gamma - \iota) - h_4^{\max} \cos \gamma = L_{\Sigma}. \quad (4.16)$$

Решением уравнения (4.16) будет следующее выражение:

$$\iota = \arccos \left\{ 2 \left[\left(\cos \gamma + \frac{L_{\Sigma}}{h_4^{\max}} \right) \cos \gamma \pm \sin \gamma \sqrt{1 - \left(\cos \gamma + \frac{L_{\Sigma}}{h_4^{\max}} \right)^2} \right] \right\}. \quad (4.17)$$

Из двух корней (4.17) следует выбрать меньший корень. Тогда схема предлагаемой системы управления на основе КУДМ с тремя основными и одним резервным ДМ будет иметь вид, представленный на рисунке 4.9.

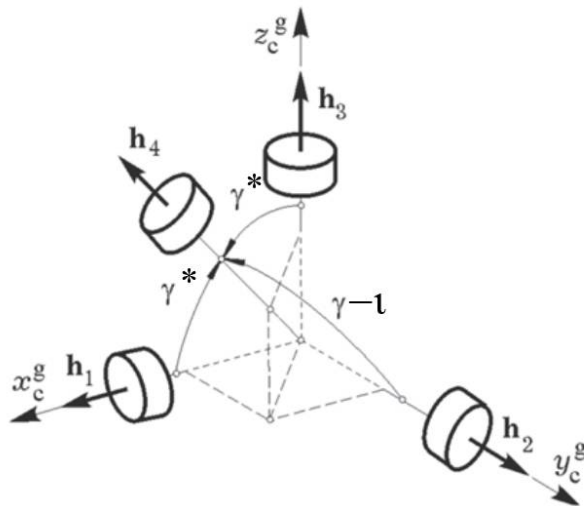


Рисунок 4.9 – Схема предлагаемой системы управления на основе КУДМ с тремя основными и одним резервным ДМ

Новые значения углов между осями связанной системы координат и осью вращения резервного ДМ можно найти из условия нормировки:

$$\cos^2(\gamma - \iota) + \cos^2 \gamma^* + \cos^2 \gamma^* = 1. \quad (4.18)$$

Откуда:

$$\gamma^* = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\gamma - \iota) \right]. \quad (4.19)$$

Предполагается, что резервный ДМ активируется для нивелирования угловых возмущений от температурного удара и при отказе одного из основных ДМ. Причём он может решать обе эти задачи одновременно.

4.9 Результаты численного моделирования возмущений от температурного удара для схемы симметричного МКА

В отличие от рассмотренной в предыдущем разделе несимметричной схемы МКА, при наличии симметрии часть возмущений от температурного удара взаимно компенсируется. При этом задача учёта этих возмущений приобретает другой характер. В настоящем разделе моделируются возмущения от температурного удара с учётом не только геометрической симметрии. Постановка данной задачи описана в работе [98]. Используются следующие дополнительные упрощающие предположения.

- 1 МКА представляет собой осесимметричное тело как в смысле формы, так и инерционно-массовых характеристик, с симметрично прикреплёнными к нему двумя ПСБ.
- 2 ПСБ абсолютно идентичны друг другу.
- 3 Температурный удар происходит абсолютно одновременно для обеих ПСБ.
- 4 В момент температурного удара обе ПСБ имели плоскую форму и находились в одной плоскости.
- 5 Падающий поток солнечного излучения строго перпендикулярен плоскости обеих ПСБ за всё время температурного удара.
- 6 Собственные колебания ПСБ пренебрежимо малы за всё время температурного удара.
- 7 Начальное поле распределения температур в обеих ПСБ является однородным и одинаковым.

Схема моделируемого МКА показана на рисунке 4.10.

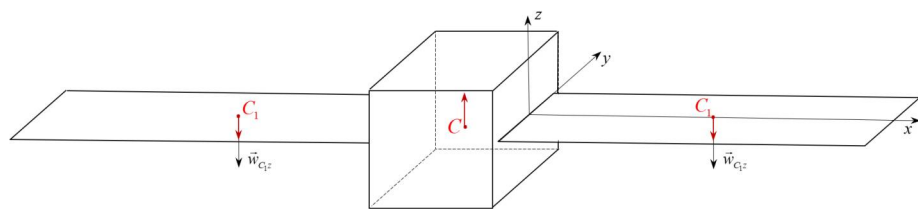


Рисунок 4.10 – Схема симметричного МКА с двумя ПСБ

Из рисунка 4.10 видны отличия воздействия возмущений. Теперь компенсируются не только инерциальные силы вдоль оси y местной системы координат, но и вдоль оси x , а также моменты инерционных сил. Можно записать:

$$\begin{cases} \Phi_x = \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{ix}(x_i, t) dx_i = 0; \\ \Phi_y = \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{l_i b_i} \int_0^{l_i} \int_0^{b_i} w_{iy}(x_i, y_i, t) dy_i dx_i = 0; \\ M_y(\Phi) = \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{iz}(x_i, t) x_i dx_i = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

С учётом (4.20) уравнения (4.11) и (4.12) примут следующий вид:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x^e + \Phi_x^{CCK}; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y^e + \Phi_y^{CCK}; \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z^e + \Phi_z^{CCK} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} w_{iz}(x_i, t) dx_i. \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{\omega}_x + \dot{I}_{xx} \omega_x - I_{xy} \dot{\omega}_y - \dot{I}_{xy} \omega_y - I_{xz} \dot{\omega}_z - \dot{I}_{xz} \omega_z + \omega_y (I_{zz} \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y) - \omega_z (I_{yy} \omega_y - I_{xy} \omega_x - I_{yz} \omega_z) = M_x; \\ I_{yy} \dot{\omega}_y + \dot{I}_{yy} \omega_y - I_{xy} \dot{\omega}_x - \dot{I}_{xy} \omega_x - I_{yz} \dot{\omega}_z - \dot{I}_{yz} \omega_z + \omega_z (I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) - \omega_x (I_{zz} \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y) = M_y; \\ I_{zz} \dot{\omega}_z + \dot{I}_{zz} \omega_z - I_{xz} \dot{\omega}_x - \dot{I}_{xz} \omega_x - I_{yz} \dot{\omega}_y - \dot{I}_{yz} \omega_y + \omega_x (I_{yy} \omega_y - I_{xy} \omega_x - I_{yz} \omega_z) - \omega_y (I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) = M_z, \end{cases} \quad (4.22)$$

В качестве модельного МКА выбран «Аист-2Д». Его основные характеристики представлены в таблице 4.2. На рисунке 4.11 показана динамика возмущающих факторов и вызванные ими ускорения центра масс корпуса МКА.

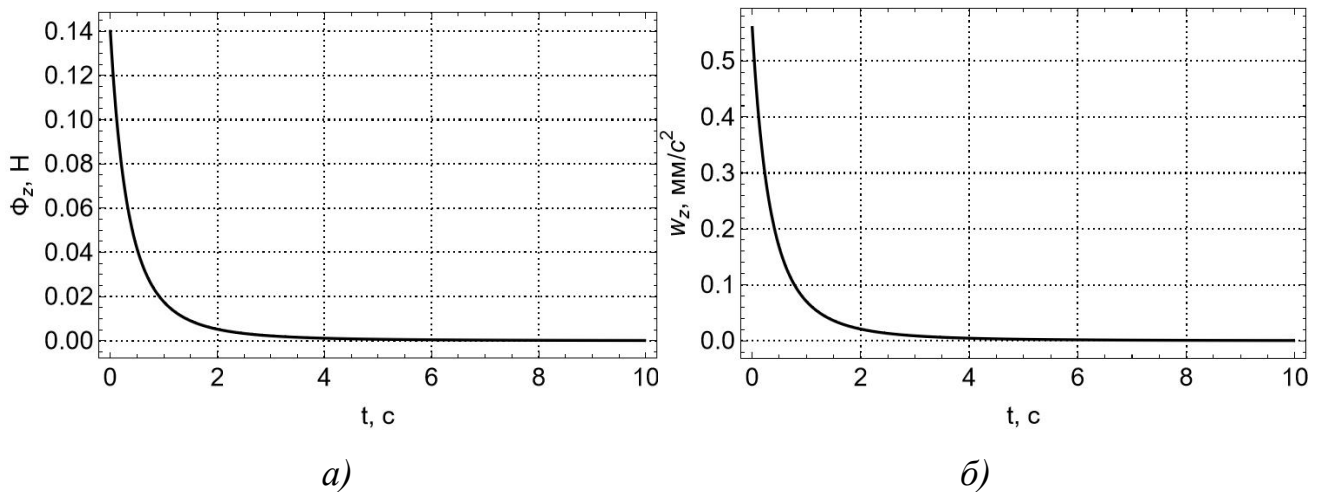


Рисунок 4.11 – Возмущающие факторы и вызванные ими ускорения :

а) Φ_z формула (4.6); б) w_z формула (4.21)

Как видно из схемы (рисунок 4.10), возмущения вдоль оси z складываются, а не компенсируют друг друга. Поэтому представленные на рисунке 4.11 возмущения являются более значимыми, чем при несимметричной схеме (рисунок 4.4).

4.10 Система управления угловым движением МКА на основе электротермического микродвигателя

Моделирование возмущений от температурного удара при симметричной схеме МКА показало, что в этом случае часть возмущений компенсируется. Нивелировать силу инерции Φ_z (рисунок 4.11а) за счёт ДМ не представляется возможным. Поэтому для этой цели в настоящей диссертационной работе предлагается использовать ЭТМД (рисунок 4.12 [141]).



Рисунок 4.12 – Внешний вид ЭТМД с автономным нагревательным элементом
(процитировано по [141])

Эксперименты, проведённые в лаборатории ОмГТУ (руководитель д.т.н., профессор Блинов В.Н.) и описанные в работе [141], показали возможность снижения ускорений от температурного удара при использовании ЭТМД (рисунок 4.13 [141]).

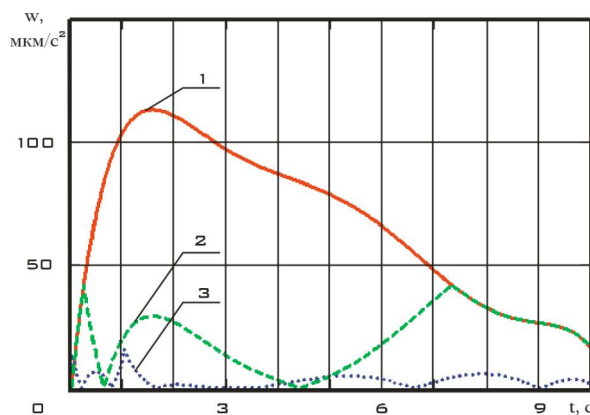


Рисунок 4.13 – Динамика изменения модуля ускорений, возникающих от температурного удара больших упругих элементов в случае:

- 1 – отсутствия управления; 2 – управления с постоянной тягой;
3 – кусочно-линейного управления (процитировано [141])

Таким образом, предлагаемая система управления может эффективно нивелировать возмущения от температурного удара и в случае симметричной схемы МКА. Поскольку реальный МКА будет обладать асимметрией даже в случае симметричного расположения ПСБ, возможно применение системы управления, включающую в себя модернизированную схему расположения ДМ в КУДМ и ЭТМД. Такая система управления позволит максимально снизить влияние температурного удара на качество выполнения МКА целевых задач, таких как высокоточная съёмка при ДЗЗ.

4.11 Выводы по четвёртой главе

Проведённые в первой главе исследования позволяют сделать ряд выводов.

- Полученные в диссертационной работе результаты обладают практической значимостью, о чём свидетельствует разработанный и представленный в данной главе метод учёта влияния температурного удара на динамику движения МКА. Применение данного метода позволит корректно проводить учёт влияния температурного удара и улучшать качество выполнения МКА своих целевых задач.
- Структура разработанного метода соответствует структуре классического метода технического контроля и позволяет решать задачи выбора размерности задачи теплопроводности, формирования приближенных зависимостей возмущающего воздействия температурного удара на движение МКА, оценки неиспользованных конструктивных возможностей для снижения влияния температурного удара, разработки алгоритмов работы различных исполнительных органов системы управления движением МКА для снижения влияния температурного удара и, в конечном счёте, построения корректной математической модели движения МКА с учётом возмущений от температурного удара.
- Построена математическая модель движения МКА с учётом температурного удара и представлены результаты численного моделирования для случая симметричного и несимметричного МКА. Анализ этих результатов показывает, что при симметричной схеме МКА часть возмущений взаимно компенсируется. Однако другая часть складывается и оказывает большее влияние на движение МКА, чем в случае несимметричной схемы. Численные оценки возмущений от температурного удара показывают, что их нужно учитывать при выполнении задач ДЗЗ или реализации гравитационно-чувствительных процессов на борту МКА.
- Предложена система управления угловым движением МКА на основе КУДМ (для несимметричной схемы МКА) и ЭТМД (для симметричной схемы МКА),

нивелирующая негативные последствия температурного удара на качество решения целевых задач. Предлагается использовать схему с тремя основными и одним резервным ДМ и нивелировать угловые возмущения от температурного удара за счёт резервного ДМ. Для этого предложена модернизированная схемы расположения ДМ. Для нивелирования силы инерции от температурного удара предложено использовать ЭТМД. Эксперименты подтверждают эффективность такого решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей диссертационной работе получены положения, заключающиеся в совершенствовании математически формализованного описания движения МКА с учётом температурного удара ПСБ в форме приближенных аналитических зависимостей возмущений от температурного удара для одномерной и двумерной начально-краевой задачи теплопроводности, которые учитываются в построенной модели движения МКА, получены критерии двумерности модели теплопроводности и разработан метод учёта температурного удара на динамику движения МКА, имеющие важное значение для развития и широкого применения и повышения эффективности МКА при решении различных целевых задач, например, задач ДЗЗ или реализации гравитационно-чувствительных процессов на борту МКА.

Проведённые в диссертационной работе исследования позволили получить следующие результаты, обладающие научной новизной.

- 1 Построена модель движения МКА с учётом возмущений от температурного удара.
- 2 Разработан метод учёта влияния температурного удара на динамику движения МКА, позволяющий проводить корректный учёт температурного удара для случаев, когда его влияние на движение МКА является значимым. Данный метод предполагается использовать при моделировании движения МКА.
- 3 Получены приближённые аналитические зависимости компонентов вектора перемещений и поля температур ПСБ МКА в рамках одномерной задачи теплопроводности для оценки возмущений от температурного удара.
- 4 Получены приближённые аналитические зависимости компонентов вектора перемещений и поля температур ПСБ МКА в рамках двумерной задачи теплопроводности для оценки возмущений от температурного удара. По сравнению с одномерной постановкой в двумерной предполагается статический учёт собственных колебаний ПСБ за счёт начального прогиба в момент температурного удара.

5 Созданы критерии учёта двумерности, позволяющие корректно описывать температурный удар при различных начальных условиях. Эти критерии показывают возможность применения оценок в рамках одномерной модели либо необходимость усложнения задачи до двумерной постановки для получения корректных оценок влияния температурного удара.

6 Проведено численное моделирование возмущающих факторов от температурного удара, влияющих на динамику движения МКА, для случая симметричного и несимметричного МКА.

Таким образом, решённая в представленной работе задача оценки возмущений нового типа при температурном ударе позволяет корректно учитывать его влияние на качество выполнения МКА целевых задач, корректировать модели движения МКА, а также проводить вычислительные эксперименты по оценке температурных деформаций ПСБ. Это открывает возможности проектирования современной космической техники с учётом влияния температурного удара.

Дальнейшая разработка этой тематики может быть направлена на:

- 1 Решение задачи в динамической постановке с учётом динамики колебаний ПСБ;
- 2 Решение трёхмерной задачи с учётом колебаний ПСБ в двух направлениях;
- 3 Разработка законов управления движением МКА, снижающих влияние температурного удара.

Таким образом, в работе достигнута поставленная цель и полностью решены все поставленные задачи, обеспечивающие достижение этой цели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Лебедев, Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости / Н.Н. Лебедев, М. – Ленинград: ОНТИ, 1937. – 110 с.
- 2 Даниловская, В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы / В.И. Даниловская // Прикладная математика и механика. – 1950. – Т 14. – № 3. – С. 316–318.
- 3 Даниловская, В.И. Температурное поле и температурные напряжения, возникающие в упругом полупространстве вследствие потока лучистой энергии, падающей на границу полупространства / В.И. Даниловская // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – № 3. – 1959. – С. 129–132.
- 4 Danilovskaya, V.I. Temperature stresses forming in cylinders under the effect of a luminous flux / V.I. Danilovskaya, V.N. Zubchaninova // US Government Res. and Dev. Rept. 70. – 1970. – No. AD-704–020.
- 5 Даниловская, В.И. Температурные поля и напряжения, возникающие в пластинке вследствие потока лучистой энергии / В.И. Даниловская, В.Л. Зубчанинова // Прикладная механика. – 1968. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 103–110.
- 6 Мелан, Э. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус, М: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – 170 с.
- 7 Melan, E. Wärmespannungen in Scheiben / E. Melan // Österr. Ingenieur-Arch. – 1950. – Vol. 4. – P. 153–157.
- 8 Melan, E. Temperaturverteilungen ohne Wärmespannungen / E. Melan // Österr. Ingenieur-Arch. – 1951. – Vol. 6. – P. 1–15.
- 9 Parkus, H. Wärmespannungen in Rotationsschalen bei drehsymmetrischen Temperaturverteilung / H. Parkus, Sitzungsber: Österr. Akad. Wiss., 1951. – 160 p.
- 10 Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус, М: Физматгиз, 1963. – 252 с.
- 11 Parkus, H. Thermal stresses in bodies with random surface temperature / H. Parkus // ZAMM. – 1962. – Vol. 42. – P. 499–507.

- 12 Mindlin, R.D. Thermoelastic stress around a cylindrical inclusion of elliptic cross section / R.D. Mindlin, H.L. Cooper // *Journal Applied Mechanics*. – 1950. – Vol. 17. – P. 265–270.
- 13 Mindlin, R.D. Thermoelastic stress in the semi-infinite solid / R.D. Mindlin, D.H. Cheng // *Journal Applied Physic*. – 1950. – Vol. 21. – P. 931–938.
- 14 Любов, Б. Я. Метод решения краевых задач теплопроводности в области с границей, движущейся по произвольному закону / Б. Я. Любов, Э. М. Карташов // *Доклады Академии наук СССР*. – 1971. – Т. 198. – № 2. – С. 323–326.
- 15 Карташов, Э.М. Метод решения обобщенных тепловых задач в области с границей, движущейся по параболическому закону / Э.М. Карташов, Б.Я. Любов // *Журнал технической физики*. – 1971. – Т. 61. – № 1. – С. 3–16.
- 16 Карташов, Э.М. Построение функции Грина в виде интегрального уравнения для обобщенных краевых задач, включающих уравнение теплопроводности / Э.М. Карташов, Г.М. Бартенев // *Советский физический журнал*. – 1972. – Т. 12. – № 2. – С. 189–198.
- 17 Карташов, Э.М. Обобщенная модель теплового удара в динамической термоупругости / Э.М. Карташов, С.С. Крылов // *Инженерно-физический журнал*. – 2023. – Т. 96. – № 3. – С. 575–587.
- 18 Kartashov, E.M. Analytical approaches to the analysis of unsteady heat conduction for partially bounded regions / E.M. Kartashov // *High temperature*. – 2020. – Vol. 58. – № 3. – С. 377–385.
- 19 Карташов, Э.М. Аналитические решения моделей локально-неравновесного теплопереноса / Э.М. Карташов // *Теплофизика высоких температур*. – 2021. – Т. 59. – № 2. – С. 212–220.
- 20 Карташов, Э.М. Методы расчета температурных полей / Э.М. Карташов, В.П. Белоусов // *Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт*. – 1983. – № 5. – С. 112–121.
- 21 Карташов, Э.М. Метод обобщенного интегрального преобразования при решении уравнения теплопроводности в области с движущейся границей / Э.М. Карташов // *Инженерно-физический журнал*. – 1987. – Т. 52. – № 3. – С. 495–505.

- 22 Карташов, Э.М. Аналитические методы решения смешанных граничных задач теории теплопроводности / Э.М. Карташов // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. – 1986. – № 6. – С. 116–129.
- 23 Карташов, Э.М. Краевые задачи для уравнений параболического типа в нецилиндрических областях / Э.М. Карташов // Теплофизика высоких температур. – 2022. – Т. 60. – № 5. – С. 725–739.
- 24 Карташов, Э.М. Метод функций Грина при решении уравнений нестационарной теплопроводности в области с движущейся границей / Э.М. Карташов // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. – 1989. – № 3. – С. 117–127.
- 25 Карташов, Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами / Э.М. Карташов // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 1999. – № 5. – С. 3–34.
- 26 Kartashov, E.M. Analytical methods of solution of boundary-value problems of nonstationary heat conduction in regions with moving boundaries / E.M. Kartashov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2001. – Vol. 74. – № 2. – P. 498–536.
- 27 Карташов, Э.М. Новые интегральные соотношения в теории нестационарного теплопереноса на основе уравнения гиперболического типа / Э.М. Карташов, О.Н. Ремизова // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2002. – № 3. – С. 146–156.
- 28 Kartashov, E.M. Heat conduction at a variable heat-transfer coefficient / E.M. Kartashov // High temperature. – 2019. – Vol. 57. – № 5. – С. 663–670.
- 29 Ненахов, Е.В. Оценки температурных напряжений в моделях динамической термоупругости / Е.В. Ненахов, Э.М. Карташов // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. – 2022. – № 1. – С. 88–106.

- 30 Карташов, Э.М. Аналитические подходы к исследованиям нестационарной теплопроводности для частично ограниченных областей / Э.М. Карташов // Теплофизика высоких температур. – 2020. – Т. 58. – № 3. – С. 402–411.
- 31 Карташов, Э.М. Об особенностях динамических процессов в твердых телах с изменяющейся границей при взаимодействии с интенсивными тепловыми потоками / Э.М. Карташов, А.А. Рхима, А.Г. Рубин // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 1994. – № 1. – С. 30–34.
- 32 Кудинов, В.А. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В.А. Кудинов, Э.М. Карташов, В.В. Калашников. – М.: Высшая школа, 2005. – 430 с.
- 33 Карташов, Э.М. О новом подходе при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа / Э.М. Карташов // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2010. – № 1. – С. 119–127.
- 34 Карташов, Э.М. Развитие обобщенных модельных представлений теплового удара для локально-неравновесных процессов переноса теплоты / Э.М. Карташов // Russian technological journal. – 2023. – Т. 11. – № 3. – С. 70–85.
- 35 Карташов, Э.М. Основные принципы термоупругости в динамической постановке / Э.М. Карташов // Вестник МИТХТ им. М.В. Ломоносова. – 2009. – Т. 4. – № 6. – С. 107–109.
- 36 Карташов, Э.М. Эффект связанности в динамической термоупругости полимерных материалов / Э.М. Карташов // Вестник МИТХТ им. М.В. Ломоносова. – 2010. – Т. 5. – № 5. – С. 116–118.
- 37 Карташов, Э.М. Динамическая термовязкоупругость в проблеме теплового удара на основе новых модельных представлений / Э.М. Карташов // Инженерно-физический журнал. – 2012. – Т. 85. – № 5. – С. 1015–1024.
- 38 Карташов, Э.М. Обобщенные модельные представления теории теплового удара / Э.М. Карташов // Математическое моделирование. – 2023. – Vol. 35. – № 8. – Р. 14–30.

- 39 Kartashov, É.M. New model representations of dynamic thermoviscoelasticity in the problem of heat shock / E.M. Kartashov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2012. – Vol. 85. – № 5. – P. 1102–1113.
- 40 Карташов, Э.М. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара. / Э.М. Карташов, В.З. Партон // Итоги науки и техники, серия Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1991. – Т.22. – 127 с.
- 41 Карташов, Э.М. Проблема теплового удара для области с движущимися границами в моделях динамической термоупругости / Э.М. Карташов, А.Г. Рубин // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7. – № 10. – С. 3–11.
- 42 Карташов, Э.М. Термическая реакция вязкоупругих тел на тепловой удар на основе нового уравнения динамической термовязкоупругости / Э.М. Карташов // Доклады Академии наук. – 1997. – Том 355. – № 4. – С. 479–483.
- 43 Карташов, Э.М. Новые модельные представления в проблеме теплового удара / Э.М. Карташов, Л.М. Ожерелкова // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14. – № 2. – С. 95–108.
- 44 Карташов, Э.М. Тепловое разрушение / Э.М. Карташов // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2003. – № 2. – С. 84–96.
- 45 Карташов, Э.М. Модельные представления термического удара при импульсных и пульсирующих тепловых нагрузках на основе обобщенного уравнения энергии / Э.М. Карташов, О.И. Ремизова // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – № 4. – С. 81–95.
- 46 Карташов, Э.М. Новые модельные представления динамической термовязкоупругости в проблеме теплового удара / Э.М. Карташов // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. – 2012. – № 2 (2). – С. 123–130.
- 47 Карташов, Э.М. Теория теплового удара на основе обобщённой модели динамической термоупругости / Э.М. Карташов // Вестник МИТХТ им. М.В. Ломоносова. – 2012. – Т. 7. – № 1. – С. 69–72.

- 48 Карташов, Э.М. Обобщенная модель термовязкоупругости в теории теплового удара / Э.М. Карташов // Тепловые процессы в технике. – 2014. – Т. 6. – № 2. – С. 75–80.
- 49 Карташов, Э.М. Обобщенные модельные представления теории теплового удара для локально-неравновесных процессов теплообмена / Э.М. Карташов, С.В. Поляков // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2022. – № 100. – С. 1–28.
- 50 Карташов, Э.М. Тепловой удар вязкоупругих тел / Э.М. Карташов // Вестник МИТХТ им. М.В. Ломоносова. – 2012. – Т. 7. – № 3. – С. 63–70.
- 51 Карташов, Э.М. Термическая реакция вязкоупругих тел на тепловой удар / Э.М. Карташов // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. – № 3. – С. 125–131.
- 52 Карташов, Э.М. Термовязкоупругость в динамических моделях теории теплового удара / Э.М. Карташов, И.А. Нагаева // Вестник МИТХТ им. М.В. Ломоносова. – 2013. – Т. 8. – № 2. – С. 90–94.
- 53 Карташов, Э.М. Обобщенная модель теплового удара вязкоупругих тел на основе линейных реологических моделей Максвелла и Кельвина / Э.М. Карташов // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87. – № 2. – С. 272–283.
- 54 Карташов, Э.М. Инерционные эффекты при тепловом ударе массивного тела с внутренней сферообразной трещиной / Э.М. Карташов // Тепловые процессы в технике. – 2014. – Т. 6. – № 1. – С. 30–36.
- 55 Карташов, Э.М. Стохастическая модель теплового удара и динамической термоупругости / Э.М. Карташов, И.А. Соловьев // Тепловые процессы в технике. 2016. – Т. 8. – № 6. – С. 249–257.
- 56 Стригунова, А.Ю. Тепловой удар и динамическая термоупругость / А.Ю. Стригунова, Э.М. Карташов // Тонкие химические технологии. – 2016. – Т. 11. – № 1. – С. 67–74.
- 57 Карташов, Э.М. Новые модельные идеи в динамической термовязкоупругости в задаче теплового удара / Э.М. Карташов // Доклады Математика. – 2012. – Т. 86. – № 2. – С. 704–706.

- 58 Карташов, Э.М. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости / Э.М. Карташов, В.А. Кудинов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2012. – 656 с.
- 59 Ненахов, Е.В. Теория теплового удара в моделях динамической термоупругости / Е.В. Ненахов, Э.М. Карташов // Тепловые процессы в технике. – 2019. – Т. 11. – № 5. – С. 230–240.
- 60 Формалев, В.Ф. Волновой теплоперенос в анизотропном полупространстве под действием точечного источника теплоты экспоненциального характера на основе волнового уравнения параболического типа / В.Ф. Формалев, Э.М. Карташов, С.А. Колесник // Инженерно-физический журнал. – 2022. – Т. 95. – № 2. – С. 373–380.
- 61 Карташов, Э.М. Обобщенная модель теплового удара массивных тел с внутренними полостями / Э.М. Карташов, И.Р. Тишаева, Е.В. Соломонова // Тепловые процессы в технике. – 2022. – Т. 14. – № 2. – С. 56–66.
- 62 Карташов, Э.М. Модельные представления теплового удара массивного тела с внутренней полостью / Э.М. Карташов, Е.В. Ненахов // Математическое моделирование. – 2021. – Т. 33. – № 4. – С. 116–132.
- 63 Карташов, Э.М. Краевые задачи теплопроводности при переменном во времени коэффициенте теплоотдачи / Э.М. Карташов, И.А. Нагаева // Тонкие химические технологии. – 2015. – Т. 10. – № 4. – С. 79–86.
- 64 Карташов, Э.М. Теплопроводность при переменном коэффициенте теплообмена / Э.М. Карташов // Теплофизика высоких температур. – 2019. – Т. 57. № 5. – С. 694–701.
- 65 Карташов, Э.М. Модельные представления теплового удара в динамической термоупругости / Э.М. Карташов // Российский технологический журнал. – 2020. Т. 8. – № 2 (34). – С. 85–108.
- 66 Карташов, Э.М. Интегральное преобразование для третьей краевой задачи нестационарной теплопроводности с непрерывным спектром собственных значений / Э.М. Карташов // Тонкие химические технологии. – 2017. – Т. 12. – № 3. – С. 81–86.

- 67 Кудинов, В.А. Критические условия теплового взрыва в пластине с нелинейным источником теплоты / В.А. Кудинов, А.В. Еремин, Е.В. Стефанюк // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. – № 1. – С. 44–49.
- 68 Кудинов, В.А. Аналитические решения задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи / В.А. Кудинов, А.В. Еремин, Е.В. Стефанюк // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88. – № 3. – С. 663–673.
- 69 Кудинов, В.А. Температурные напряжения в многослойном полом цилиндре при тепловом ударе на его внешней поверхности / В.А. Кудинов, А.В. Еремин, А.Э. Кузнецова и др. // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2014. – № 1. – С. 30–35.
- 70 Кудинов, В.А. Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты / В.А. Кудинов, И.В. Кудинов // Теплофизика высоких температур. – 2013. – Т. 51. – № 2. – С. 301–310.
- 71 Еремин, А.В. Программный модуль ANSYS "ThermalRelax" / А.В. Еремин, И.В. Кудинов, Е.А. Кишов и др. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2021612335, 16.02.2021. Заявка № 2020667064 от 21.12.2020.
- 72 Кудинов, В.А. Получение аналитических решений задач теплопроводности с переменными физическими свойствами среды / В.А. Кудинов, Е.В. Ларгина // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2011. – № 2 (30). – С. 186–192.
- 73 Люкшин, П.А. Потеря устойчивости и отслоение термобарьерного покрытия от подложки при температурном нагружении / П.А. Люкшин, Б.А. Люкшин, Н.Ю. Матолыгина, С.В.Панин // Физическая мезомеханика. – 2020. – Т. 23. – № 5. – С. 69–84.
- 74 Lyukshin, P.A. Strength analysis of anisotropic thermal barrier coating under heat shock / P.A. Lyukshin, N.Yu. Matolygina, S.V. Panin, B.A. Lyukshin // Procedia Engineering. – 2015. – Vol. 113. – P. 408–412.

- 75 Lyukshin, P.A. Stability loss and delamination of a thermal barrier coating from the substrate under heat loads / P.A. Lyukshin, B.A. Lyukshin, N.Yu. Matolygina, S.V. Panin // *Physical mesomechanics*. – 2021. – Vol. 24. – № 3. – P. 269–281.
- 76 Johnston, J.D. Thermal response of radiantly heated spinning spacecraft booms / J.D. Johnston, E.A. Thornton // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. – 1996. – Vol. 10. – № 1. – P. 60–68. – DOI: 10.2514/6.1995-2019.
- 77 Johnston, J.D. Recent Progress in Thermally Induced Vibrations Research / J.D. Johnston, R.S. Foster, D.L. Eby, E.A. Thornton // *Engineering, Construction, and Operations in Space V*, Fifth International Conference on Space, 1996. – DOI: 10.1061/40177(207)153.
- 78 Johnston, J.D. An evaluation of thermally-induced structural disturbances of spacecraft solar arrays / J.D. Johnston, E.A. Thornton // *IECEC 96. Proceedings of the 31st Intersociety Energy Conversion Engineering Conference*, 1996. – DOI: 10.1109/IECEC.1996.552835.
- 79 Johnston, J.D. Thermally-Induced Structural Disturbances of Rigid Panel Solar Arrays / J.D. Johnston, E.A. Thornton // *NASA Technical Report*, 1997. – № 19970017189.
- 80 Johnston, J.D. Thermally-induced structural motions of satellite solar arrays / J.D. Johnston // *NASA Technical Report*, 1999. – https://www.researchgate.net/publication/234189170_Thermally-induced_structural_motions_of_satellite_solar_arrays.
- 81 Johnston, J.D. Thermally induced attitude dynamics of a spacecraft with a flexible appendage / J.D. Johnston, E.A. Thornton // *Journal of guidance, control and dynamics*. – 1998. – Vol. 21. – № 4. – P. 581–587.
- 82 Johnston, J.D. Thermally Induced Dynamics of Satellite Solar Panels / J.D. Johnston, E.A. Thornton // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 2000. – Vol. 37. – № 5. – P. 604–613.
- 83 Shen, Z. Comparison of various thin-walled composite beam models for thermally induced vibrations of spacecraft boom / Z. Shen, S. Hao, H. Li // *Composite Structures*. – 2023. – Vol. 320. – № 9. – 117163.

- 84 Shen, Z. Thermoviscoelastic dynamics of composite thin-walled booms on spacecrafts subjected to solar radiation / Z. Shen, S. Hao, H. Li // *Composite Structures*. – 2022. – Vol. 294. – № 7-8. – 115795.
- 85 Xing, X. Thermoelastic–structural dynamics analysis of a satellite with composite thin-walled boom / X. Xing, Z. Shen // *Acta Mechanica*. – 2022. – Vol. 234. – № 4. – P. 1259–1273.
- 86 Shen, Z. Thermal shock induced dynamics of a spacecraft with a flexible deploying boom / Z. Shen, H. Li, X. Liu, G. Hu // *Acta Astronautica*. – 2017. – Vol. 141. – P. 1–6. DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.10.004.
- 87 Shen, Z. Thermoviscoelastic dynamics of composite thin-walled booms on spacecrafts subjected to solar radiation / Z. Shen, S. Hao, H. Li // *Composite Structures*. – 2022. – Vol. 294. – № 7-8. – 115795. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.115795.
- 88 Sedelnikov, A.V. Development of control algorithms for the orbital motion of a small technological spacecraft with a shadow portion of the orbit / A.V. Sedelnikov, D.I. Orlov // *Microgravity Science and Technology*. – 2020. – Vol. 32. – № 5. – P. 941–951.
- 89 Sedelnikov, A.V. Analysis of the significance of the influence of various components of the disturbance from a temperature shock on the level of microaccelerations in the internal environment of a small spacecraft / A.V. Sedelnikov, D.I. Orlov // *Microgravity Science and Technology*. – 2021. – Vol. 33. – № 2. – 22.
- 90 Седельников, А.В. О влиянии температурных деформаций упругих элементов на динамику движения космического аппарата / А.В. Седельников, М.И. Казарина // *Известия Самарского научного центра РАН*. – 2010. – Т. 12. – №4. – С. 321–324.
- 91 Седельников, А.В. Влияние температурных деформаций упругих элементов на динамику КА типа «НИКА-Т» / А.В. Седельников, М.И. Казарина // *Вестник Московского авиационного института*. – 2011. – т. 18. – № 2. – С. 47–51.
- 92 Sedelnikov, A.V. Investigating the temperature field of large elastic elements of a small spacecraft for the Earth remote sensing to assess the effect of a temperature shock on its rotational motion / A.V. Sedelnikov, D.I. Orlov, **V.V. Serdakova**, et al. // 2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT). – 2022. – doi: 10.1109/ITNT55410.2022.9848563.

- 93 Sedelnikov, A.V. Modeling the Effect of a Temperature Shock on the Rotational Motion of a Small Spacecraft, Considering the Possible Loss of Large Elastic Elements Stability / A.V. Sedelnikov, **V.V. Serdakova**, D.I. Orlov, et al. // Microgravity Science and Technology. – 2022. – Vol. 34. – № 4. – 78.
- 94 Sedelnikov, A.V. Modeling the effect of temperature deformations of large elements on the dynamics of the orbital motion of a small spacecraft / A.V. Sedelnikov, V.S. Rodina, D.I. Orlov // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1368. – 042074.
- 95 Sedelnikov, A.V. Compensating Microaccelerations from a Temperature Shock / A.V. Sedelnikov, V.V. Salmin, Yu. N. Lazarev, D.I. Orlov, A.S. Taneeva // Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Safety in Aviation and Space Technologies. Select Proceedings of the 9th World Congress "Aviation in the XXI Century". – 2022. DOI: 10.1007/978-3-030-85057-9.
- 96 Sedelnikov, A.V. Consideration of the Initial Deformation From Natural Oscillations of Large Elastic Elements of the Spacecraft When Assessing Microaccelerations From Thermal Shock Using a Two-dimensional Model of Thermal Conductivity / A.V. Sedelnikov, **V.V. Serdakova**, S.V. Glushkov, A.S. Nikolaeva, M.A. Evtushenko // Microgravity Science and Technology. – 2022. – Vol. 34. – № 2. – 22.
- 97 Sedelnikov, A.V. Simulating the stress-strain state of a thin plate after a thermal shock / A.V. Sedelnikov, S.V. Glushkov, **V.V. Serdakova**, M.A. Evtushenko, E.S. Khnyreva // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. – 2022. – Vol. 13. – № 3. – 2250024.
- 98 Sedelnikov, A.V. The Symmetric Formulation of the Temperature Shock Problem for a Small Spacecraft with Two Elastic Elements / A.V. Sedelnikov, D.I. Orlov, **V.V. Serdakova**, A.S. Nikolaeva // Symmetry. – 2023. – Vol. 15. – № 1. – 172. <https://doi.org/10.3390/sym15010172>.
- 99 Sedelnikov, A.V. Investigation of the stress-strain state of a rectangular plate after a temperature shock / A.V. Sedelnikov, D.I. Orlov, **V.V. Serdakova**, A.S. Nikolaeva // Mathematics. – 2023. – Vol. 11. – № 3. – 638. <https://doi.org/10.3390/math11030638>.

- 100 Седельников, А.В. Исследование возмущений от температурного удара панели солнечной батареи при моделировании вращательного движения малого космического аппарата вокруг центра масс / А.В. Седельников, Д.И. Орлов, **В.В. Сердакова**, А.С. Николаева // Труды МАИ. – 2022. – № 4(126). – 11.
- 101 Sedelnikov, A.V. Construction of the criterion for using a two-dimensional thermal conductivity model to describe the stress-strain state of a thin plate under the thermal shock / A.V. Sedelnikov, **V.V. Serdakova**, E.S. Khnyreva // Microgravity Science and Technology. – 2021. – Vol. 33. – № 6. – 65.
- 102 Sedelnikov, A.V. The importance of a three-dimensional formulation of the thermal conductivity problem in assessing the effect of a temperature shock on the rotational motion of a small spacecraft / A.V. Sedelnikov, D.I. Orlov, **V.V. Serdakova** et al. // E3S Web of Conferences. – 2023. – 371. – 03015. doi: 10.1051/e3sconf/202337103015.
- 103 Chamberlain, M.K., On-Orbit Structural Dynamics Performance of the Roll-Out Solar Array / M.K. Chamberlain, S.H. Kiefer, J.A. Banik [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2018-1942> (07.02.2022).
- 104 Sadowski, T. Non-symmetric thermal shock in ceramic matrix composite (CMC) materials / T. Sadowski // Solid Mechanics and Its Applications. – 2009. – Vol. 154. – P. 99–148.
- 105 Burlayenko, V.N. Modelling Thermal Shock in Functionally Graded Plates with Finite Element Method / V.N. Burlayenko // Advances in Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol. 2016. – Article ID 7514638.
- 106 Ivanov, I.V. Crack propagation in functionally graded strip under thermal shock / I.V. Ivanov, T. Sadowski, D. Pietras // The European Physical Journal: Special Topics. – 2013. – Vol. 222. – № 7. – P. 1587–1595.
- 107 Burlayenko, V.N. Computational simulations of thermal shock cracking by the virtual crack closure technique in a functionally graded plate / V.N. Burlayenko, H. Altenbach, T. Sadowski, S.D. Dimitrova // Computational Materials Science. – 2016. – Vol. 116. – P. 11–21.

- 108 Jackson, H.F. Properties and Characteristics of ZrC / H.F. Jackson, W.E. Lee // Comprehensive Nuclear Materials. – 2012. – Vol. 2. – P. 339–372.
- 109 Birman, V. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L.W. Byrd // Applied Mechanics Reviews. – 2007. – Vol. 60. – № 1–6. – P. 195–216.
- 110 El-Wazery, M.S. A review on functionally graded ceramic-metal materials / M.S. El-Wazery, A.R. El-Desouky // Journal of Materials and Environmental Science. – 2015. – Vol. 6. – № 5. – P. 1369–1376.
- 111 Krueger, R. Virtual crack closure technique: history, approach, and applications / R. Krueger // Applied Mechanics Reviews. – 2004. – Vol. 57. – № 2. – P. 109–143.
- 112 Zhou, H.L. Implementation of crack problem of functionally graded materials with ABAQUS™ / H.L. Zhou // Advanced Materials Research. – 2011. – Vol. 284–286. – P. 297–300.
- 113 Fujimoto, T. Influence of the Compositional Profile of Functionally Graded Material on the Crack Path under Thermal Shock / T. Fujimoto, N. Noda // Journal of the American Ceramic Society. – 2001. – Vol. 84. – № 7. – P. 1480–1486.
- 114 Spence, B.R. International Space Station (ISS) Roll-Out Solar Array (ROSA) Spaceflight Experiment Mission and Results / B.R. Spence, S. White, M. LaPointe et al. // 2018 IEEE 7th World Conference on Photovoltaic Energy Conversion (WCPEC) (A Joint Conference of 45th IEEE PVSC, 28th PVSEC & 34th EU PVSEC). – Waikoloa Village, HI, 2018. – P. 3522–3529.
- 115 Akhmetov, R. “AIST-2D”: Results of flight tests and application of earth remote sensing data for solving thematic problems. / R. Akhmetov, A. Filatov, R. Khalilov et al. // The Egyptian Journal of Remote Sensing and Space Science. – 2023. – Vol. 26. – № 3. – P. 427–454.
- 116 Sedelnikov, A.V. The problem of ensuring and controlling microaccelerations in the internal environment of a small technological spacecraft / A.V. Sedelnikov, E.V. Eskina, A.S. Taneeva et al. // Journal of Current Science and Technology. – 2023. – Vol. 13. – № 1. – P. 1–11.

- 117 Седельников, А.В. Проблема обеспечения и контроля требований по микроускорениям на борту малого космического аппарата технологического назначения / А.В. Седельников, Е.В. Еськина, А.С. Танеева и др. // Омский научный вестник. Серия авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. – 2022. – Т. 6. – № 2. – С. 90–98.
- 118 Anshakov, G.P. Analysis of micro-acceleration requirements in the context of designing a small technological spacecraft / G.P. Anshakov, A.I. Belousov, A.V. Sedelnikov et al. // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1791. – 012001.
- 119 Седельников, А.В. Исследование возмущающего воздействия на малый космический аппарат «Аист» по данным измерений магнитного поля Земли / А.В. Седельников, А.С. Танеева, **В.В. Сердакова** и др. / Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2022. – № 4. – С. 5–10.
- 120 Sedelnikov, A.V. Modeling the disturbing effect on the Aist small spacecraft based on the measurements data / A.V. Sedelnikov, V.V. Salmin // Scientific Reports. – 2022. – Vol. 12. – 1300.
- 121 Седельников, А.В. Формирование проектного облика малого космического аппарата технологического назначения на основе опыта проектирования и эксплуатации космических аппаратов технологического назначения других классов / А.В. Седельников, А.С. Танеева, Д.И. Орлов // Вестник Московского авиационного института. – 2020. – Т. 27. – № 3. – С. 84–93.
- 122 Мануйлов, С.А. Космический мусор – угроза безопасности космических полетов / С.А. Мануйлов // Проблемы безопасности полетов. – 2021. – № 9. – С. 35–53.
- 123 Миронов, В.В. Ретроспектива проблемы космического мусора. Часть 1. Техногенное засорение космического пространства и средства его контроля / Миронов В.В., Усовик И.В. // Космические исследования. – 2020. – Т. 58. – № 2. – С. 117–130.

- 124 Aslanov, V.S. Detumbling of axisymmetric space debris during transportation by ion beam shepherd in 3D case / V.S. Aslanov, A.S. Ledkov // *Advances in Space Research*. – 2022. – Vol. 69. – № 1. – P. 570–580.
- 125 Priyant, C.M. Review of Active Space Debris Removal Methods / C.M. Priyant, K. Surekha // *Space Policy*. – 2019. – Vol. 47. – P. 194–206.
- 126 Trushlyakov, V.I. Rotary space tether system for active debris removal / V.I. Trushlyakov, V.V. Yudin // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2020. – Vol. 43. – № 2. – P. 354–364.
- 127 Прусов, И.А. Некоторые задачи термоупругости / И.А. Прусов, Минск: Изд-во Белорусского ун-та, 1972. – 200 с.
- 128 Узделов, А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела / А.И. Узделов, Саратов: Изд-во СГУ, 1967. – 167 с.
- 129 Alfrey, T. Methods of representing the properties of viscoelastic materials / T. Alfrey // *Geology, Engineering*. – 1945. – Vol. 3. – № 2. – P. 143–150.
- 130 Hilton, H.H. Elastic and Viscoelastic Poisson's Ratios: The Theoretical Mechanics Perspective / H.H. Hilton // *Materials Sciences and Applications*. – 2017. – Vol. 8. – № 4. – P. 291–332.
- 131 Sternberg, E. On the analysis of thermal stresses in viscoelastic solids / E. Sternberg // *High Temperature Structures and Materials, Proceedings of the Third Symposium on Naval Structural Mechanics Held at Columbia University*. – 1964, New York. – P. 348–382.
- 132 Орлов, Д.И. Алгоритм управления малым космическим аппаратом технологического назначения для создания благоприятных условий по микроускорениям: дисс. канд. техн. наук: 05.13.01 / Орлов Денис Игоревич. – Казань, 2021. – 125 с.
- 133 Belousova, D.A. Modeling the temperature shock of elastic elements using a one-dimensional model of thermal conductivity / D.A. Belousova, **V.V. Serdakova** // *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. – 2020. – Vol. 11. – № 6. – 2050060.

- 134 Orlov, D.I. Modeling the Temperature Shock Impact on the Movement of a Small Technological Spacecraft / D.I. Orlov // Proceedings International Conference Problems of Applied Mechanics. AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol. 2340. – № 1. – 050001. DOI: 10.1063/5.0047296.
- 135 Belousov, A.I. A method to calculate vibroprotective systems at random loading on the basis of special materials (of the MK type) / A.I. Belousov, S.V. Shmanev // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenij. Aviatsionnaya Tekhnika. – 1993. – № 4. – P. 54–60.
- 136 Томили́н, А.К. Собственные колебания крыла солнечной батареи космического аппарата / А.К. Томили́н, Г.Р. Зиякаев // Космические исследования. – 2021. – Т. 59. – № 1. – С. 71–77.
- 137 Kong, Y. Performance enhancement of disturbance-free payload with a novel design of architecture and control / Y. Kong, H. Huang // Acta Astronautica. – 2019. – Vol. 159. – № 6. – P. 238–249.
- 138 Shayan, S. On the modelling of initial geometric imperfections of steel frames in advanced analysis / S. Shayan, K.J.R. Rasmussen, H. Zhang // Journal of Constructional Steel Research. – 2014. – Vol. 98. – P. 167–177. DOI: 10.1016/j.jcsr.2014.02.016.
- 139 Седельников, А.В. Космический аппарат «Спот-4» как пример успешной борьбы с квазистатической компонентой микроускорений / А.В. Седельников, Д.П. Подлеснова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2007. – № 4. – С. 44–46.
- 140 Sedelnikov, A.V. Alternative solution to increase the duration of microgravity calm period on board the space laboratory / A.V. Sedelnikov, A.A. Kireeva // Acta Astronautica. – 2011. – Vol. 69. – № 6-7. – P. 480–484.
- 141 Седельников, А.В. Реализация контроля тяги электротермического микродвигателя при снижении микроускорений от температурного удара / А.В. Седельников, А.С. Танеева, Д.И. Орлов, **В.В. Сердакова** и др. // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2021. – № 4. – С. 27–32.
- 142 Keuter, P. A Proposal for a Composite with Temperature-Independent Thermophysical Properties: HfV₂-HfV₂O₇ / P. Keuter, A.L. Ravensburg, M. Hans, S.K.

- Aghda, D.M. Holzapfel, D. Primetzhofer, J.M. Schneider // *Materials*. – 2020. – Vol. 13. – № 21. – 5021. DOI: 10.3390/ma13215021.
- 143 Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
- 144 Quine, B.M. Application of the spectrally integrated Voigt function to line-by-line radiative transfer modelling / B.M. Quine, S.M. Abrarov // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. – 2013. – Vol. 127. – P. 37–48.
- 145 Li, Q. Experimental and Numerical Investigation on Thermal Damage of Granite Subjected to Heating and Cooling / Q. Li, T. Yin, X. Li, R. Shu // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9. – № 23. – 3027.
- 146 Корнеев, В.С. Приближённое аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности деформирующейся пластины с зависящими от времени граничными условиями / В.С. Корнеев, С.А. Корнеев, В.В. Шалай // *Тепловые процессы в технике*. – 2019. – Т. 11. – № 7. – С. 417–425.
- 147 Sedelnikov, A.V. Approximate Solution of Initial Boundary Value Problem of One Dimensional Heat Conduction for the Thermal Shock of Thin Plate / A.V. Sedelnikov, A.S. Nikolaeva, V.V. Serdakova, M.A. Evtushenko // *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. – 2024. – Vol. 19. – P. 200–205.
- 148 Kawano, A. A uniqueness theorem for the determination of sources in the Germain–Lagrange plate equation / A. Kawano // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 2013. – Vol. 402. – № 1. – P. 191–200.
- 149 Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. В 10-ти т. Т. VII Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 2007. – 259 с.
- 150 Serdakova, V.V. Estimation of Maximum Temperature Deformations of Solar Panels of Earth Remote Sensing Small Satellite “Aist-2D” / V.V. Serdakova // *Advances in Machinery, Materials Science and Engineering Application IX*. – 2023. – P. 411–417.
- 151 Betsofen, S. Yu. Texture and anisotropy of the mechanical properties of MA2-1, MA14, AND MG–5LI–3AL ALLOYS / S. Yu. Betsofen, I.A. Grushin, R. Wu et al. // *Russian Metallurgy (Metally)*. – 2022. – Vol. 2022. – № 4. – P. 339–346.

- 152 Седельников, А.В. Проблема микроускорений: от осознания до фрактальной модели / А.В. Седельников. – М.: РАН. Избранные труды Российской школы по проблемам науки и технологий, 2012. – 277 с.
- 153 Аншаков, Г.П. Проблема оценки микроускорений на космическом аппарате «Фотон–М» № 4 / Г.П. Аншаков, А.И. Белоусов, А.В. Седельников // Известия вузов. Авиационная техника. – 2017. – № 1. – С. 80–86.
- 154 Абрашкин, В.И. Определение вращательного движения малого космического аппарата Аист-2Д по данным магнитных измерений / В.И. Абрашкин, К.Е. Воронов, А.С. Дорофеев и др. // Космические исследования. – 2019. – Т. 57, № 1. – С. 61–73.
- 155 Седельников, А.В. Разработка комплексного метода контроля и оценки микроускорений на борту космического аппарата: дисс. докт. техн. наук: 05.07.07 / Седельников Андрей Валерьевич. – Омск, 2015. – 337 с.
- 156 **Serdakova, V.V.** Comparative analysis of problem of thermal shock of elastic elements of small satellite in one-dimensional and two-dimensional formulations / **V.V. Serdakova** // E3S Web of Conferences. – 2023. – Vol. 402. – 11014.
- 157 Sedelnikov, A.V. Investigating the temperature shock of a plate in the framework of a static two-dimensional formulation of the thermoelasticity problem / A.V. Sedelnikov, **V.V. Serdakova**, D.I. Orlov, A.S. Nikolaeva // Aerospace. – 2023. – Vol. 10. – № 5. – 445.
- 158 Sedelnikov, A.V. Numerical simulation of the stress-strain state of a thin plate in the ANSYS package as a two-dimensional formulation of the thermo-elasticity problem / A.V. Sedelnikov, **V.V. Serdakova**, A.S. Nikolaeva, Evtushenko M.A. // Applications of Modelling and Simulation. – 2023. – Vol. 7. – P. 156–167.
- 159 Chamberlain, M.K. On-orbit flight testing of the Roll-Out Solar Array / M.K. Chamberlain, S.H. Kiefer, M. La Pointe, P. La Corte // Acta Astronautica. – 2021. – Vol. 179. – P. 407–414.
- 160 Duan, J. Thermal-dynamic coupling analysis of large space structures considering geometric nonlinearity / J. Duan, Z.H. Xiang, M.D. Xue // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2008. – Vol. 8. – P. 569–596.

- 161 Su, X.M. Experimental investigation of the thermally induced vibration of a space boom section, / X.M. Su, Zhang J.H., Wang J. et al. // Science China Physics, Mechanics & Astronomy. – 2015. – Vol. 58. – № 4. – 044601.
- 162 Седельников, А.В. Проверка адекватности приближённых аналитических зависимостей для прогиба тонкой однородной пластины при температурном ударе / А.В. Седельников, В.В. Сердакова, А.С. Николаева // Труды МАИ. – 2024. – № 134. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178459>.
- 163 Lee, B.H. Experimental Verification of Thermal Structural Responses of a Flexible Rolled-Up Solar Array / B.H. Lee, M. Yamasaki, M. Murozono // Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences. – 2013. – Vol. 56. – № 4. – P. 197–204.
- 164 Ma, J. Random dynamic responses of solar array under thermal-structural coupling based on the isogeometric analysis / J. Ma, C. Dai, B. Wang et al. // Acta Mechanica Sinica. – 2023. – Vol. 39. – № 4. – 722338.
- 165 Sedelnikov, A.V. Method of taking into account influence of thermal shock on dynamics of small satellite and its use in analysis of microaccelerations / A.V. Sedelnikov, **V.V. Serdakova**, A.S. Nikolaeva // Microgravity Science and Technology. – 2023. – Vol. 35. – № 3. – 25.
- 166 Li, Y. Rigid-flexible-thermal analysis of planar composite solar array with clearance joint considering torsional spring, latch mechanism and attitude controller / Y. Li, C. Wang, W. Huang // Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 96. – 2031–2053.
- 167 Мырова, Л.О. Низкоорбитальные спутниковые системы связи Starlink и Oneweb / Л.О. Мырова, О.В. Ментус, А.Б. Давыдов и др. // Труды НИИ Радио. – 2021. – № 2. – 36–45.
- 168 Middleton, E. The Earth Observing One (EO-1) Satellite Mission: Over a Decade in Space / E. Middleton, S. Ungar, D. Mandl et al. // IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing. – 2013. – Vol. 6. – № 2. – 243.
- 169 Седельников, А.В. Оценка выполнимости требований по угловой скорости малого космического аппарата с учётом температурного удара / А.В. Седельников, А.С. Николаева, **В.В. Сердакова** // Труды МАИ. – 2023. – № 132. – 3.

170 Sedelnikov, A.V. Investigation of the Applicability of the Boer Formula for Estimating the Angular Velocity of Rotation Of a Small Spacecraft by Measuring the Components of The Induction Vector of the Earth's Magnetic Field in Evaluating Micro-Accelerations and Forming Control Laws / A.V. Sedelnikov, R.V. Skidanov, A.S. Taneeva, L.A. et al. // Microgravity Science and Technology. – 2024. – Vol. 36. – № 6. – 59.

171 Кирилин, А.Н. Опытнo-технологический малый космический аппарат «Аист–2Д» / А.Н. Кирилин, Р.Н. Ахметов, Е.В. Шахматов и др. – Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2017. – 324 с.

172 Сомов, С.Е. Анализ динамических характеристик кластеров маховиков в системе управления ориентацией космического аппарата / С.Е. Сомов, Т.Е. Сомова // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2021. – Т. 23. – № 6. – С. 119–125.

173 Машиностроение. Энциклопедия (в сорока томах) / Ред совет: К.В. Фролов (пред.) и др. – М.: Машиностроение. Ракетнокосмическая техника. Т. IV-22 / И.П. Абрамов, И.В. Алдашкин, Э.В. Алексеев и др.; под ред. В.П. Легостаева. В 2 кн. Кн. 2. Ч. II. 2014. 548 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ



**АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКИЙ ЦЕНТР «ПРОГРЕСС»
(АО «РКЦ «ПРОГРЕСС»)**

ул. Земеца, д. 18, г. Самара, 443009, тел. (846) 955-13-61, факс (846) 992-65-18, E-mail: mail@samspace.ru
ОКПО 43892776, ИНН 6312139922, КПП 997450001

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель
генерального директора –
генеральный конструктор, д.т.н.



Р.Н. Ахметов

**АКТ
о возможности использования
результатов диссертационных исследований
Сердаковой Валерии Владимировны**

Настоящим актом подтверждается возможность использования в деятельности АО «РКЦ «Прогресс»» результатов научно-исследовательской работы Сердаковой Валерии Владимировны, выполненной в рамках диссертационной работы на соискание учёной степени кандидата технических наук на тему «Исследование напряжённо-деформированного состояния тонкой пластины при температурном ударе в рамках третьей начально-краевой задачи термоупругости».

Разработанные В.В. Сердаковой в ходе исследования:

- метод учёта влияния температурного удара на динамику движения МКА;
- аналитические зависимости для компонентов вектора перемещений, а также поля температур, позволяющие оценивать максимальную значимость влияния температурного удара при решении различных задач

позволяют корректно оценивать влияние температурного удара на качество выполнения целевых задач, например, дистанционного зондирования Земли.

Результаты диссертационного исследования В.В. Сердаковой в части разработки метода учёта влияния напряжённо-деформированного состояния панели солнечной батареи при температурном ударе и математической модели оценки прогиба панелей солнечных батарей могут быть использованы в АО «РКЦ «Прогресс»» при проектировании перспективных МКА с целью повышения точности ориентации при выполнении задач дистанционного зондирования Земли, снижения вибраций при реализации гравитационно-чувствительных процессов на борту МКА.

Заместитель генерального конструктора
по научной работе, к.т.н.



М.В. Борисов

Начальник головного
проектно-конструкторского отдела
по космическим системам



С.С. Paybe

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022665952

**Исследование напряженно-деформируемого состояния
однослойной пластины при температурном ударе в
пакете ANSYS**

Правообладатель: *федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования «Самарский
национальный исследовательский университет имени академика
С.П. Королева» (Самарский университет) (RU)*

Авторы: *Седельников Андрей Валерьевич (RU), Глушков Сергей
Валериевич (RU), Сердакова Валерия Владимировна (RU),
Евтушенко Максим Андреевич (RU), Николаева Александра
Сергеевна (RU)*

Заявка № 2022664501

Дата поступления 02 августа 2022 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 23 августа 2022 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023611366

**Исследование напряженно-деформируемого состояния
многослойной пластины при температурном ударе в
пакете ANSYS**

Правообладатель: *федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования «Самарский
национальный исследовательский университет имени академика
С.П. Королева» (Самарский университет) (RU)*

Авторы: *Седельников Андрей Валерьевич (RU), Глушков Сергей
Валериевич (RU), Сердакова Валерия Владимировна (RU),
Евтушенко Максим Андреевич (RU), Николаева Александра
Сергеевна (RU)*

Заявка № 2023610157

Дата поступления 09 января 2023 г.

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ 19 января 2023 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов