

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ ИМ. А.А. БЛАГОНПРАВОВА РОССИЙСКОЙ  
АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



Гарин Олег Анатольевич

**Разработка и исследование механизмов с шестью степенями свободы,  
имеющих ортогонально расположенные пары двигателей  
с попарно параллельными осями**

Специальность 2.5.2

Машиноведение (технические науки)

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук, доцент  
Хейло Сергей Валерьевич

Москва – 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
Глава 1. Обзор пространственных механизмов параллельной структуры.....	8
1.1. Применение механизмов параллельной структуры в различных областях техники.....	8
1.2. Поступательные и сферические механизмы параллельной структуры .....	15
1.3. Механизмы параллельной структуры с особыми свойствами (кинематической развязкой, изоморфностью, постоянством передаточного отношения).....	23
Результаты и выводы по главе .....	37
Глава 2. Структурный синтез, задача о положении механизмов с шестью степенями свободы, имеющих ортогонально расположенные пары двигателей с попарно параллельными осями.....	38
2.1. Использование групп винтов для проведения структурного анализа механизмов .....	38
2.2. Структурный синтез новых механизмов .....	44
2.3. Решение задачи о положении.....	48
2.4. Определение рабочей зоны механизма.....	50
2.5. Кинематическая точность механизма.....	61
Результаты и выводы по главе.....	65
Глава 3. Кинематический и силовой анализ механизма.....	67
3.1. Задача о скоростях и особых положениях.....	67
3.2. Исследование области особых положений .....	71
3.3 Силовой анализа механизма с шестью степенями свободы .....	74
Результаты и выводы по главе .....	87
Глава 4. Экспериментальное исследование механизма и перспективы его использования.....	88

4.1. Описание конструкции механизма с шестью степенями свободы..	88
4.2. Экспериментальное исследование механизма.....	98
4.3. Возможные применения механизмов.....	101
Результаты и выводы по главе .....	104
Основные результаты и выводы.....	106
Список литературы .....	108
Приложение 1 .....	119
Приложение 2.....	122

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы диссертации**

Развитие современных производств и технологий требует создания нового технологического, вспомогательного и транспортного оборудования. Одним из основных направлений в проектировании оборудования и машин является синтез новых пространственных робототехнических систем и комплексов, основанных на механизмах параллельной структуры.

Механизмы параллельной структуры обладают рядом преимуществ по сравнению с механизмами последовательной структуры. Они обладают большей грузоподъемностью, жесткостью, быстродействием. Однако механизмам этого класса присущи и недостатки, такие как взаимовлияние приводов, наличие особых положений, связанных с потерей степеней свободы или управляемости.

Для решения указанных проблем механизмов параллельной структуры необходимо использовать подходы, позволяющие упростить задачи кинематики, динамики, управления. Это связано с использованием свойств кинематической развязки движений, изоморфности, постоянства передаточного отношения между приводами и выходным звеном. Для механизмов с большим числом степеней свободы развязка позволяет разложить системы уравнений кинематики, динамики и управления на независимые подсистемы уравнений меньшего порядка, либо выделить независимые подсистемы.

Большинство существующих механизмов с шестью степенями свободы, обладающих свойством развязки движений, имеют три кинематические цепи. При этом в каждой цепи расположены по два привода. Первый привод расположен на неподвижном основании, второй привод – на подвижном звене кинематической цепи. Схемы с таким расположением приводов снижают жесткость и грузоподъемность технических устройств.

Таким образом, данная диссертационная работа, посвященная синтезу и исследованию новых пространственных механизмов с шестью степенями свободы, с

шестью кинематическими цепями и шестью приводами, расположенными на неподвижном основании, со свойствами развязки, изоморфности и постоянства передаточного отношения при поступательных движениях, является актуальной с точки зрения научной и практической значимости.

### **Цель работы**

Разработка и исследование новых механизмов с шестью степенями свободы, имеющих ортогонально расположенные пары двигателей с попарно параллельными осями, свойствами изоморфности и кинематической развязки.

### **Задачи научного исследования**

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Провести структурный синтез новых механизмов параллельной структуры с шестью степенями свободы с ортогонально расположенными парами приводов на основании на параллельных осях.
2. Разработать методику кинематического анализа нового механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы.
3. Исследовать рабочую зону нового механизма и определить влияние размеров промежуточных звеньев на ее размеры и форму.
4. Разработать методику кинематической точности механизма.
5. Разработать методику силового анализа механизма.
6. Изготовить физический прототип синтезированного механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы и экспериментально подтвердить его свойства и работоспособность.

### **Научная новизна**

1. Синтезированы новые механизмы параллельной структуры с шестью степенями свободы, обладающие свойствами изоморфности, постоянства передаточного отношения при поступательных движениях и частичной развязки.
2. Предложены методики структурного синтеза, кинематического анализа механизма и оценки точности позиционирования.

3. Предложен метод силового анализа механизма с шестью степенями свободы с применением аппарата винтового исчисления.
4. Получены результаты экспериментальных исследований синтезированного механизма на действующей модели, подтверждающие теоретические расчеты.

**Теоретическая значимость** заключается в разработке методик структурного синтеза, кинематического и силового анализа механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы с ортогонально расположенными парами двигателей с попарно параллельными осями.

#### **Методы исследования**

Теоретические исследования проводились с использованием теории матричного исчисления, дифференциального исчисления, теории винтового исчисления, теории машин и механизмов, теоретической механики, компьютерного моделирования.

**Практическая значимость** заключается в том, что синтезированы новые механизмы с ортогонально расположенными парами двигателей с попарно параллельными осями, обладающие свойствами развязки, изоморфности и постоянства передаточного отношения при поступательных движениях. Полученные механизмы параллельной структуры могут быть использованы в различных отраслях промышленности, в ориентирующих устройствах, в испытательных и измерительных устройствах. Разработанные алгоритмы и программы кинематического и динамического анализа могут быть использованы при исследовании других механизмов в научных и учебных задачах.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

- кинематические схемы новых синтезированных механизмов с ортогонально расположенными парами двигателей с попарно параллельными осями;
- методика структурного синтеза новых механизмов;
- методика кинематического и силового анализа;
- действующая модель механизма, подтверждающая его работоспособность и свойства, полученные экспериментальные результаты.

**Достоверность результатов** обусловлена строгостью математических выкладок, корректностью использованных допущений, сопоставлением теоретических и экспериментальных результатов.

### **Личный вклад автора**

Гариним О.А. разработана методика структурного синтеза силового анализа, решены задачи о положении и скоростях механизма с шестью степенями свободы с ортогонально расположенными парами двигателей с попарно параллельными осями, создана конструкция физической модели механизма для подтверждения его работоспособности.

### **Апробация работы**

Основные результаты были доложены на конференциях:

- Международная научно-технической конференция «ИННОВАЦИИ-2016», Москва, 2016,
- IX международный конгресс «БИОТЕХНОЛОГИЯ: СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ», г. Москва, 2017,
- Международная научно-техническая конференция «ИННОВАЦИИ-2018», г.Москва, 2018,
- Международная научная студенческая конференция «ИНТЕКС-2019», г.Москва, 2019,
- Международный научно-технический симпозиум «Вторые международные Косыгинские чтения», г. Москва, 2019.

### **Публикации**

По результатам работы опубликованы 11 научных работ, в том числе 4 статьи в журналах из списка ВАК, 1 статья из базы Scopus, 2 патента на полезную модель, 1 свидетельство о регистрации программ для ЭВМ.

### **Структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 122 наименований, 2 приложений. Общий объем диссертации составляет 122 страницы, 64 рисунка, 1 таблица.

## **ГЛАВА 1. ОБЗОР ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ**

В настоящей главе рассмотрены механизмы параллельной структуры с различным числом степеней свободы. Особое внимание уделено механизмам с шестью степенями свободы, а также механизмам с тремя степенями свободы, осуществляющим поступательные и вращательные движения. Также рассмотрены пространственные механизмы, обладающие отличительными свойствами, такими как частичная кинематическая развязка, изоморфность, постоянство передаточного отношения. Приведены примеры использования манипуляторов параллельной структуры в отраслях промышленности.

### **1.1. Применение механизмов параллельной структуры в различных отраслях промышленности.**

Пространственные механизмы параллельной структуры представляют одно из направлений в современном машиноведении [9, 11, 13–15, 17, 20–22, 24, 28–32, 35, 36, 41, 42, 46, 50–55, 58, 66, 67, 69, 71, 78, 79, 91, 105, 112, 120]. Они обладают отличительными особенностями по сравнению с традиционными структурами антропоморфных механизмов. Такие механизмы обладают повышенными показателями точности и грузоподъемности. Кроме того, приводы могут быть расположены на основании, что позволяет выбирать их большими по мощности. Т.к. приводы отделены от рабочей среды, то такие устройства могут работать в агрессивных средах.

В данных механизмах выходное звено (исполнительный орган) соединено с основанием несколькими кинематическими цепями [13, 54, 80].

Манипуляционные механизмы параллельной структуры находят широкое применение в различных отраслях промышленности в силу своих преимуществ. Так, оборудование с использованием механизмов с шестью степенями свободы, таких как платформа Гауфа-Стюарта, применяются в координатно-измерительных устройствах (фирма Лапик) (Рисунок 1.1). Такие измерительные комплексы применяются для контроля различных деталей машин (турбинные лопатки, колеса компрессоров, корпусные изделия, блоки цилиндров и редукторов, зубчатые колеса, шестерни в редукторах и коробках передач, валы, рамы и балки, шатуны, ступицы, цапфы, шкивы, диски, шлицевые соединения).

Также координатно-измерительные машины «Лапик» используются для контроля геометрии поверхностей колес подвижного состава. Особо важным представляется контроль контура поверхности круга катания колеса, значений развала и поднутрения, а также многих других допусков поверхностей колеса.



Рисунок 1.1 – Координатно-измерительное устройство ЛАпик (КИМ-500)

Конструкция платформы Гауфа-Стюарта широко используется в авиасимуляторах, особенно в полнопилотажных тренажерах, с шестью степенями свободы (Рисунок 1.2).



Рисунок 1.2 – Авиасимулятор фирмы Lockheed

Также одним из применений механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы является обрабатывающий центр OKUMA (Рисунок 1.3).



Рисунок 1.3 – Обрабатывающий центр OKUMA

Такие механизмы находят применение в ортопедии для коррекции деформации костей и лечения сложных переломов, например пространственная рама Тейлора (Рисунок 1.4) [114].



Рисунок 1.4 - Пространственная рама Тейлора

Одним из применений механизмов с шестью степенями свободы является их использование при позиционировании спутниковых антенн, например радиотелескоп АМіВА (Рисунок 1.5) [84].



Рисунок 1.5 – Радиотелескоп АМіВА

Механизмы с пятью степенями свободы находят применение в обрабатывающих центрах фирмы «Метром» (Рисунок 1.6). Предложенная конструкция может применяться для послойной 3d печати, а также в качестве портативного обрабатывающего устройства (Рисунок 1.7).

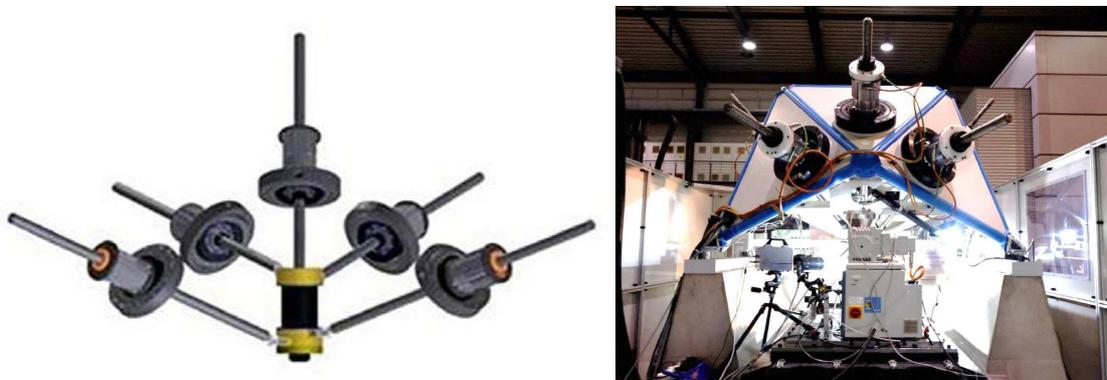


Рисунок 1.6 – Обрабатывающий центр МЕТРОМ



Рисунок 1.7 – Мобильный портативный станок МЕТРОМ

Поступательный механизм с тремя степенями свободы на базе механизма дельта может применяться в быстросействующих операциях на конвейерных линиях: в упаковочной технологии, в фармацевтическом производстве (Рисунок 1.8)



Рисунок 1.8 – Поточная упаковочная линия

Учитывая преимущества механизма дельта, он может применяться в высокоточных операциях сборки электронных компонентов в чистом помещении.

Кинематическая схема механизма дельта адаптирована для 3D-принтеров (Рисунок 1.9).

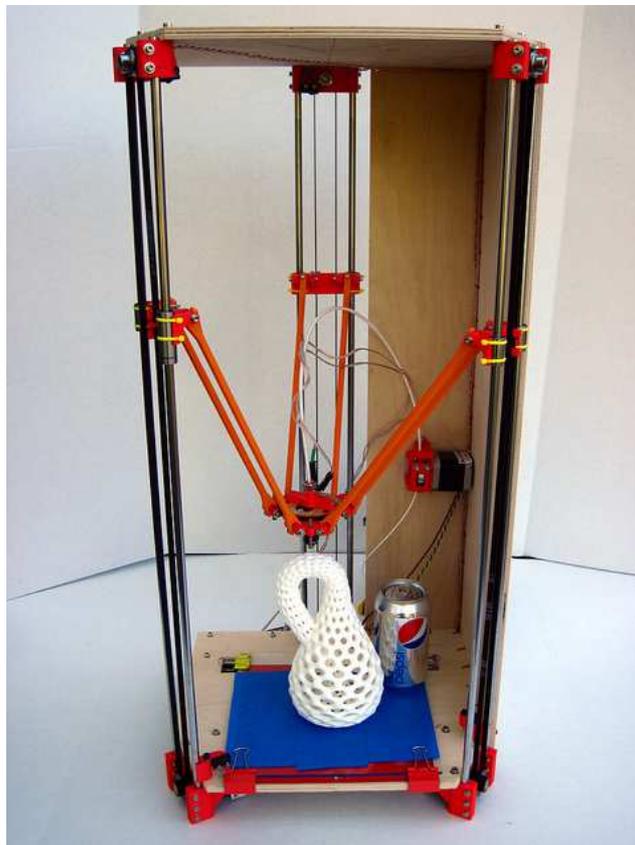


Рисунок 1.9 – Принтер на базе механизма дельта

Механизм дельта может быть использован на мобильной платформе для работ в сельскохозяйственной отрасли при обработке культур фирмы «ecoRobotix SA» (Рисунок 1.10)



Рисунок 1.10 – Сельскохозяйственный робот на базе механизма дельта «ecoRobotix SA»

Таким образом, в параграфе показаны избранные примеры использования робототехнических, транспортных, технологических, тренажерных и медицинских систем, использующих в основе манипуляционные механизмы параллельной структуры.

## 1.2. Поступательные и сферические пространственные механизмы параллельной структуры

В промышленности находят применение механизмы параллельной структуры с различным числом степеней свободы. Интерес исследователей направлен изучение механизмов с тремя, четырьмя, пятью и шестью степенями свободы [13, 41, 46, 47, 51, 58, 63, 69, 71, 72, 76, 79, 88, 90, 92, 93, 98, 100, 113, 115, 118 – 121].

Наибольшее распространение находят механизмы с тремя степенями свободы, осуществляющие поступательное и ориентирующее движения [1, 11, 34, 42, 52, 56, 75, 78, 82, 83, 89, 94–97, 99, 101–103, 106–111, 116]. Эти механизмы интересны тем, что при необходимости дополнительных движений, вводится еще одна степень свободы. При этом не происходит изменение основной конструкции механизма. Таким образом, исследование наиболее простых механизмов с тремя степенями свободы, осуществляющих поступательное и вращательное движение, позволяет усложнять и развивать существующие схемы устройств.

В поступательных механизмах выходное звено имеет только поступательное движение.

Кинематическая цепь может содержать:

- три кинематические пары PPP, PaPP
- четыре кинематические пары PaPaRR, RPPR, RRRP
- пять кинематических пар RPRRR, RRRRR, UPU

где – P – призматическая пара, R – вращательная пара, U – универсальный шарнир, Pa – параллелограмм.

Большой класс поступательных механизмов был разработан Конгом и Госленом, М. Чарригато и В. Паренти-Кастелли [79]. В 1991г. Р. Клавелем был предложен механизм дельта [85]. Механизм Дельта нашел большое применение в различных технических устройствах в силу простоты конструкции (Рисунок 1.11) [53]. В этом механизме приводы расположены на основании. Движение на выходное звено

передается через параллелограммы. Такая конструкция механизма является простой, что обеспечило ее широкое применение.

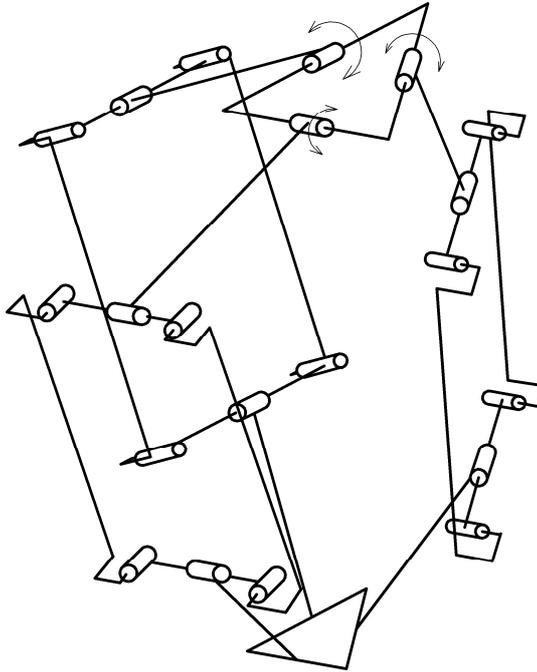


Рисунок 1.11 – Механизм дельта

Одним из устройств данного класса является механизм Ортогляйд (Рисунок 1.12) [53]. Этот механизм –  $3PRPaR$  содержит линейные двигатели, расположенные ортогонально на основании [83]. Преимуществом такого механизма является отсутствие особых положений.

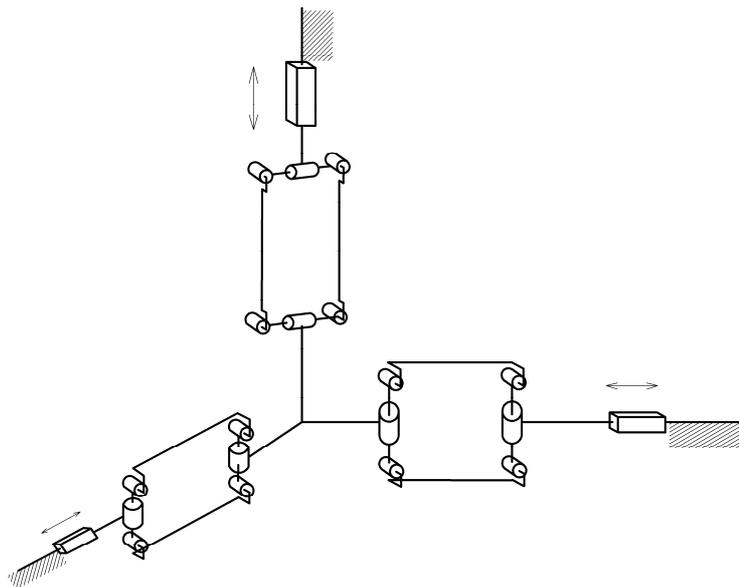
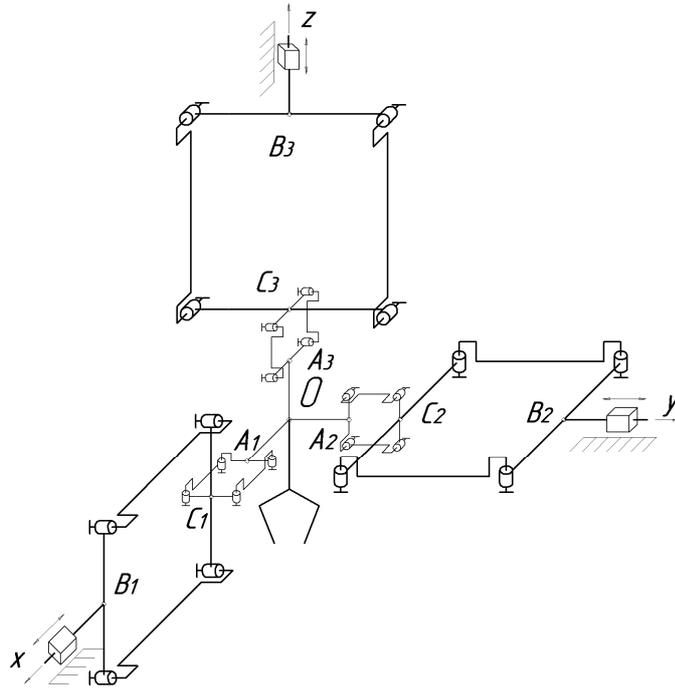


Рисунок 1.12 – Механизм Ортогляйд  $3PRPaR$

Механизм с шарнирными параллелограммами 3РРaPa был предложен Глазунным В.А., Хейло С.В. (Рисунок 1.13) [55].



а)



б)

Рисунок 1.13 – Поступательно-направляющий манипулятор параллельной структуры с тремя степенями свободы 3РРaPa

а – кинематическая схема, б – прототип

Глазуновым В.А., Ларюшкиным П.А. предложен механизм с пятью вращательными парами в каждой цепи – 3RRRRR (Рисунок 1.14) [87]. В механизме содержатся три симметричные кинематические цепи. В этом механизме каждая из цепей накладывает на выходное звено одну связь. Эта связь отнимает одну степень свободы (вращение). В начальном положении все промежуточные звенья кинематических цепей располагаются под прямыми углами друг к другу. Простота конструкции обеспечивает симметричность кинематических цепей, а также наличие только вращательных пар. Механизм обладает симметричной формой пространства рабочей зоны.

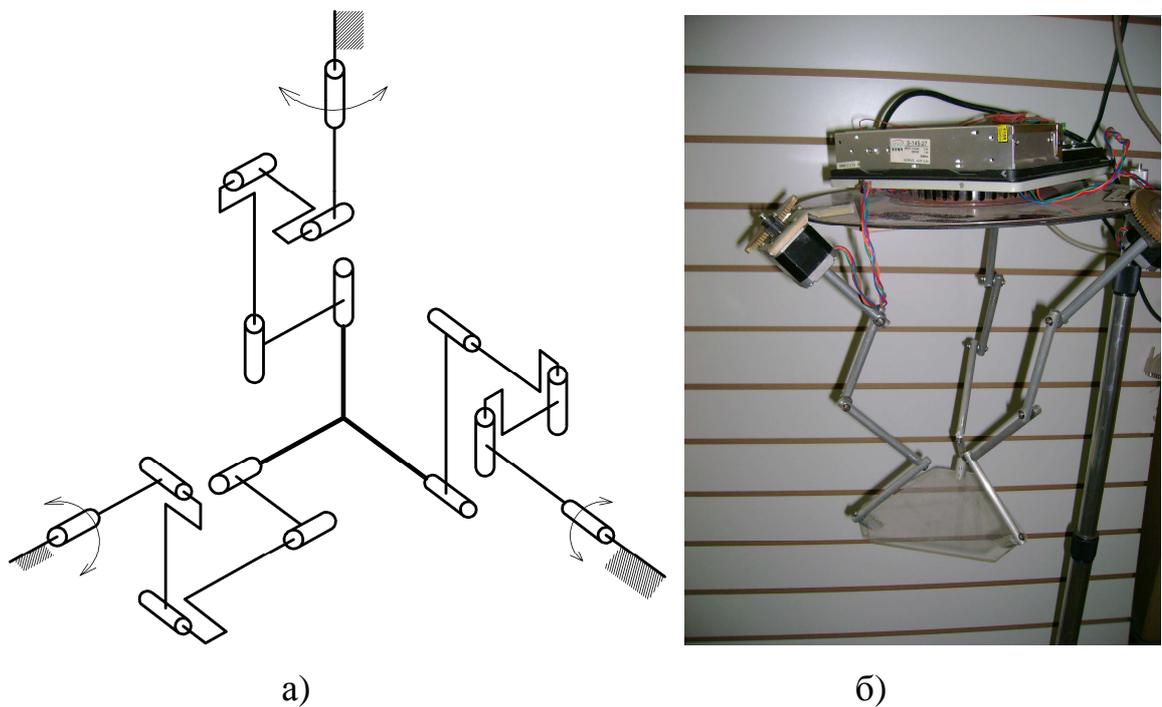


Рис. 1.14. Механизм 3–RRRRR

а– кинематическая схема, б – прототип

В сферических механизмах передача движения осуществляется между взаимопересекающимися осями [16]. Они применяются в устройствах для ориентации движений. Манипуляторы, выполняющие сферические движения, могут быть построены на основе различных конструктивных схем. Оси входных и выходных пар пересекаются в одной точке. Это является их общим свойством.

Кинематическая цепь такого механизма может содержать:

- три вращательные пары, налагающие по три связи: RRR, RU

- пять вращательных пар, налагающих по одной связи: RRRRR, URU [53].

Наиболее известной схемой является механизм с тремя кинематическими цепями, содержащими по три вращательные пары (Рисунок 1.15). Этот механизм состоит из трех кинематических цепей. Все оси кинематических пар пересекаются в одной точке – начале координат под углом  $90^{\circ}$ . Выходное звено соединено с третьими кинематическими парами цепей. Входное звено каждой цепи соединено с вращательным двигателем. В этом механизме каждая цепь налагает по три одинаковых связи [51–53].

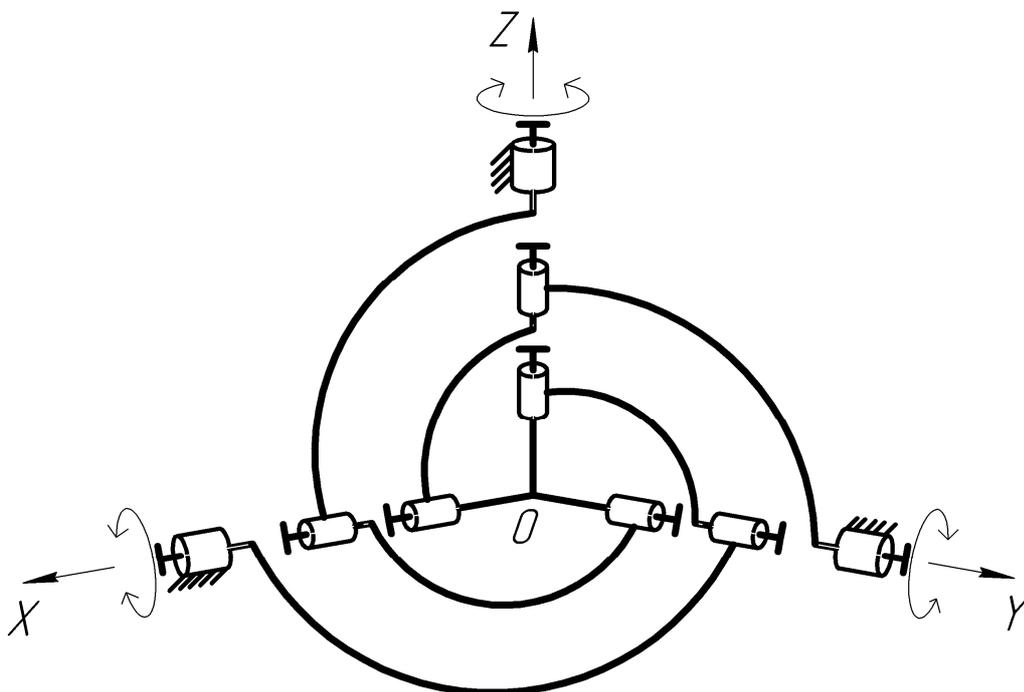


Рисунок 1.15 – Сферический механизм 3RRR

Другой схемой сферического механизма с тремя степенями свободы является механизм, построенный по принципу отбора каждой цепью по одной степени свободы – 3RRRRR (Рисунок 1.16) [53].

В этом механизме начальная вращательная кинематическая пара расположена перпендикулярно оси двигателя, а две промежуточные вращательные пары расположены параллельно оси начальной пары. Конечная вращательная пара расположена перпендикулярно оси второй промежуточной пары и сопряжена с выходным звеном.

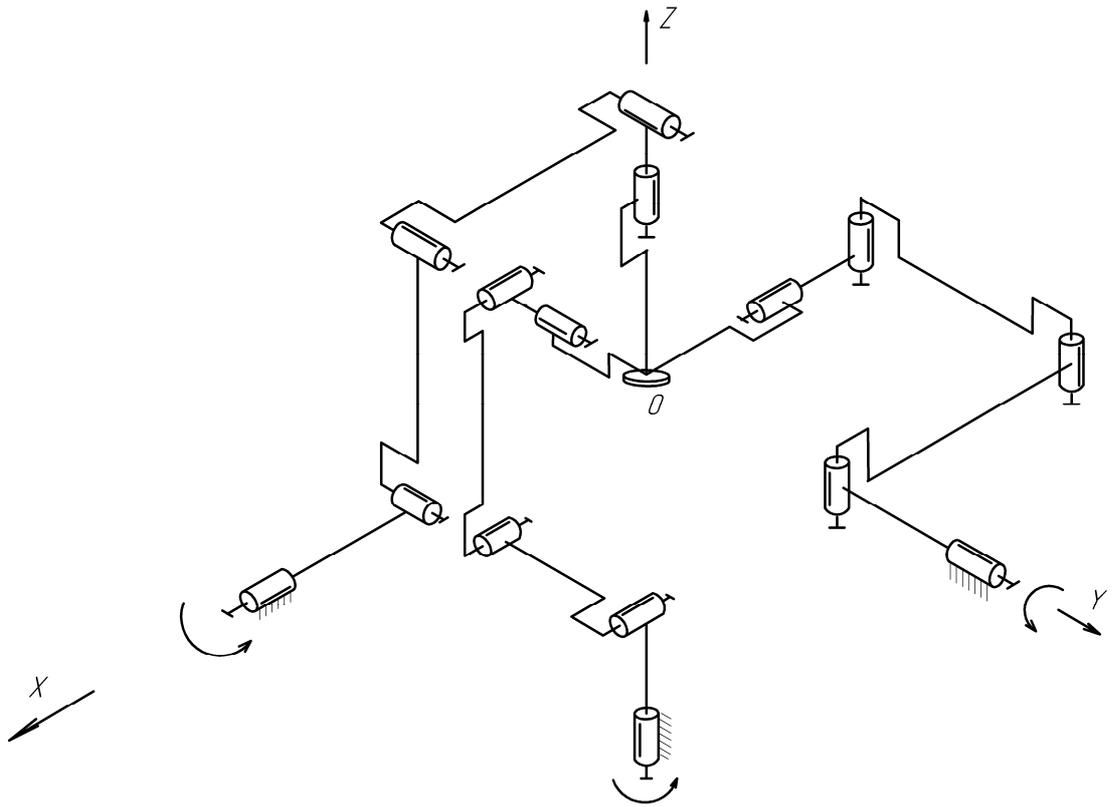
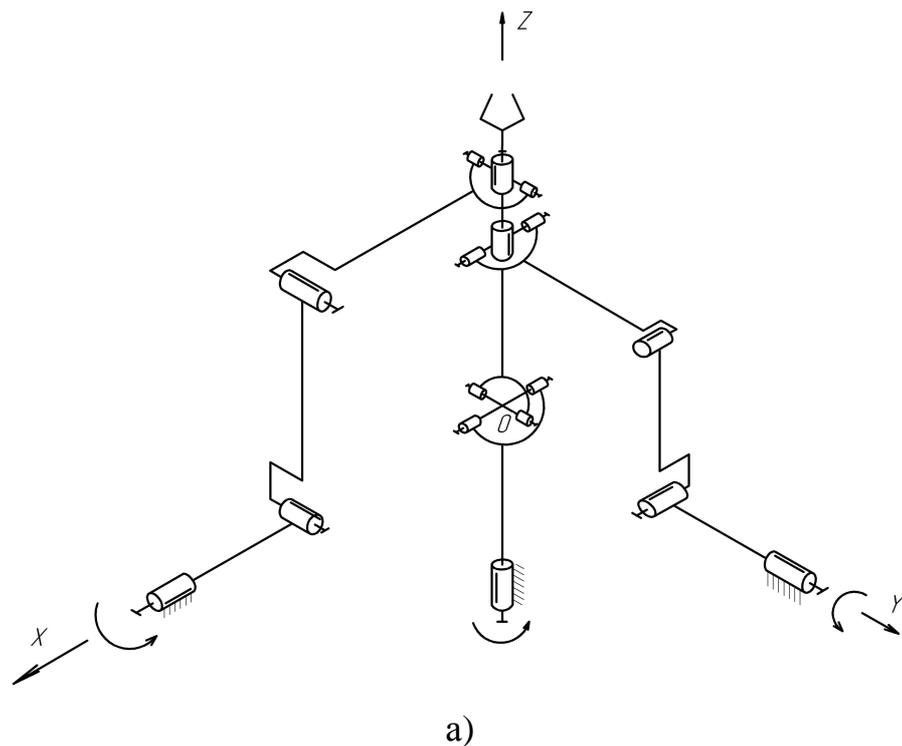


Рисунок 1.16 – Сферический механизм 3RRRRR

Схема механизма, предложенная Хейло С.В. (2RRRU, RU), содержит две одинаковые кинематические цепи, третья обеспечивает вращение вокруг собственной оси (Рисунок 1.17) [54].





б)

Рисунок 1.17 – Сферический механизм с тремя кинематическими цепями  
2RRRU, RU

В работе П.А. Ларюшкина с соавторами рассматривается сферический манипулятор параллельной структуры, состоящий из трех одинаковых соединительных кинематических цепей, каждая из которых содержит по пять вращательных кинематических пар (Рисунок 1.18) [108]. Отличительной особенностью является то, что приводы расположены вдоль одной вертикальной оси. В другой кинематической схеме, приводы расположены на круговой направляющей (Рисунок 1.19).

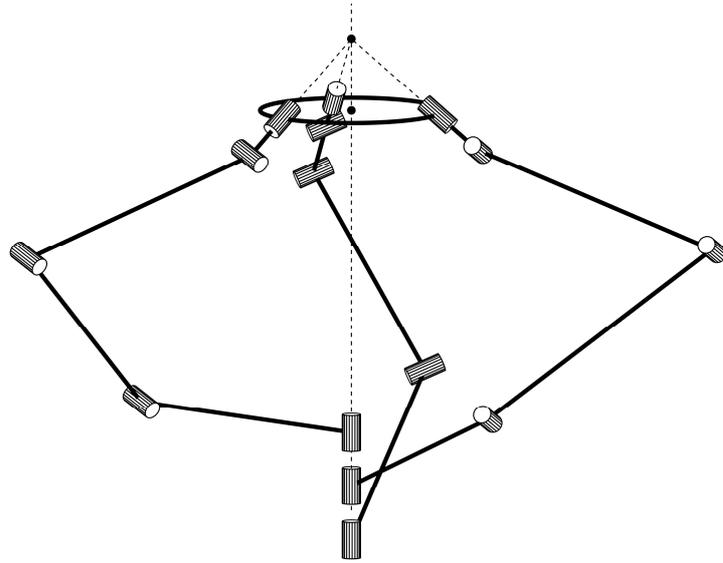


Рисунок 1.18 – Сферический механизм с соосно расположенными приводами

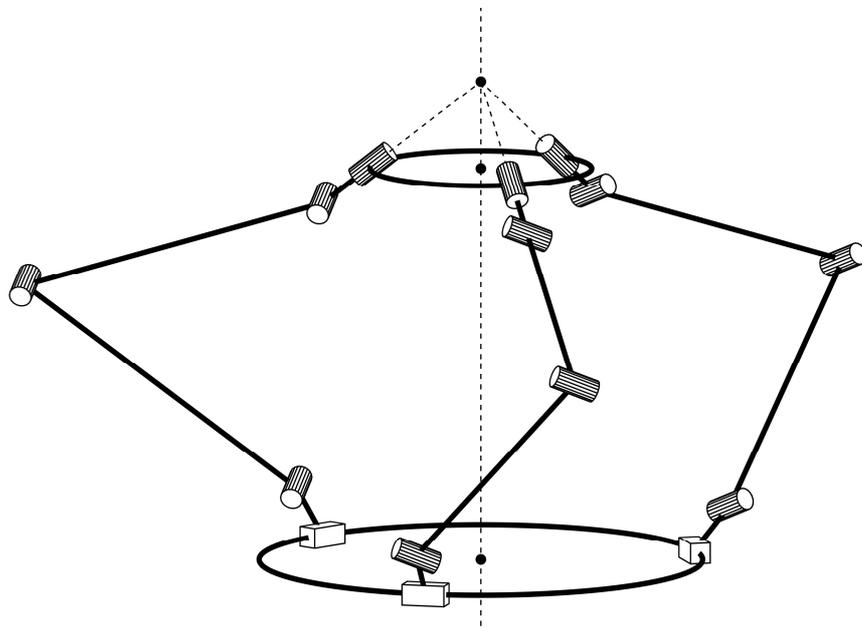


Рисунок 1.19 – Сферический механизм с приводами на круговой направляющей

В данном параграфе рассмотрены примеры механизмов с тремя степенями свободы, осуществляющих поступательное и вращательное движения. В механизмах такого класса для получения дополнительных движений можно добавить еще одну степень свободы, не меняя кинематическую схему, а дополняя ее.

### **1.3. Механизмы параллельной структуры с особыми свойствами (кинематической развязкой, изоморфностью, постоянством передаточного отношения)**

Механизмы параллельной структуры являются пространственными устройствами с большим числом степеней свободы. В этих механизмах имеются области особых положений, также присутствует взаимовлияние приводов. Поэтому при синтезе таких пространственных устройств целесообразно использовать некоторые особенности (свойства), позволяющие упростить кинематическую схему.

Кинематическая развязка позволяет упростить решение задачи о положении, и как следствие, задачи динамики и управления.

Также интересным свойством является изоморфность, когда каждый привод управляет своей координатой выходного звена. А постоянство передаточного отношения между приводом и выходным звеном обеспечивает точность и жесткость позиционирования.

Такие решения были предложены Инносенти, Брио, а также научной школой ИМАШ РАН, возглавляемой Глазуновым В.А. [11].

В ИМАШ РАН Тывесом Л.И. были предложены научные основы построения манипуляционных механизмов с развязкой движений [50].

В манипуляторе ПАМИНСА с тремя кинематическими цепями вертикальное перемещение и уравнивание веса выполняется одним приводом, а остальные приводы выполняют движения в плоскости. Развязка движений может быть осуществлена с использованием шарнирных параллелограммов, обеспечивающих взаимные поступательные движения звеньев (рис.1.20). Так, 3 привода обеспечивают 3 степени свободы – перемещение в плоскости, а 4-й привод осуществляет вертикальное перемещение [72–74, 77].

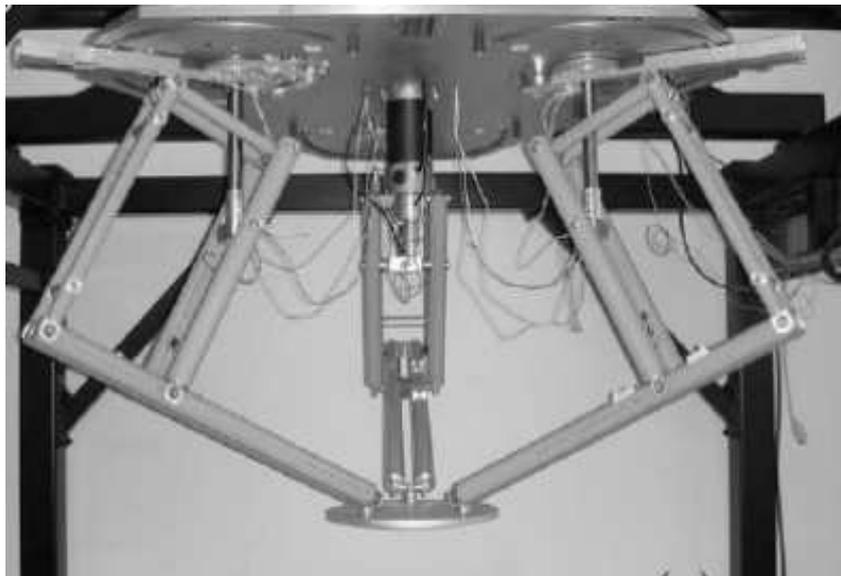
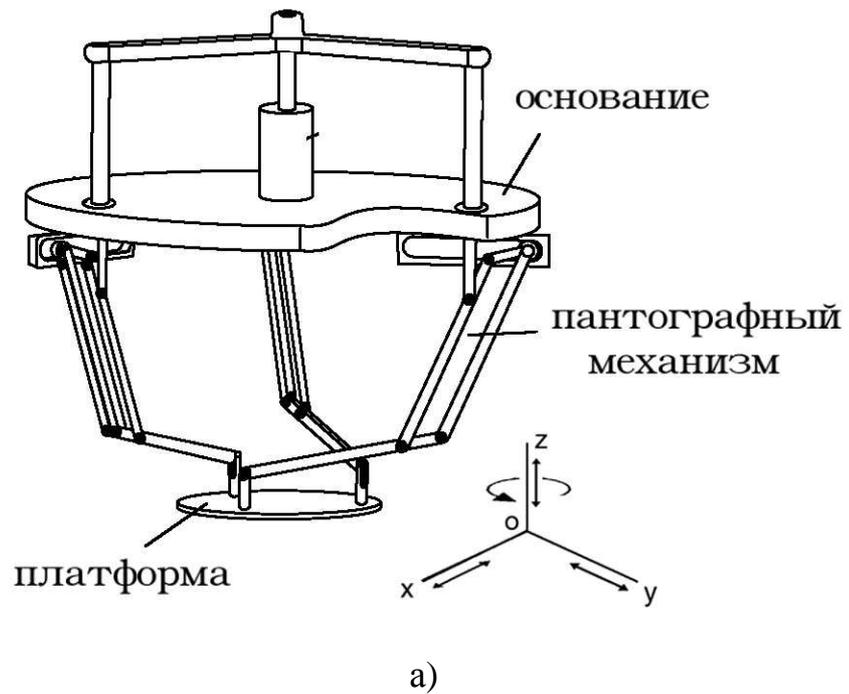
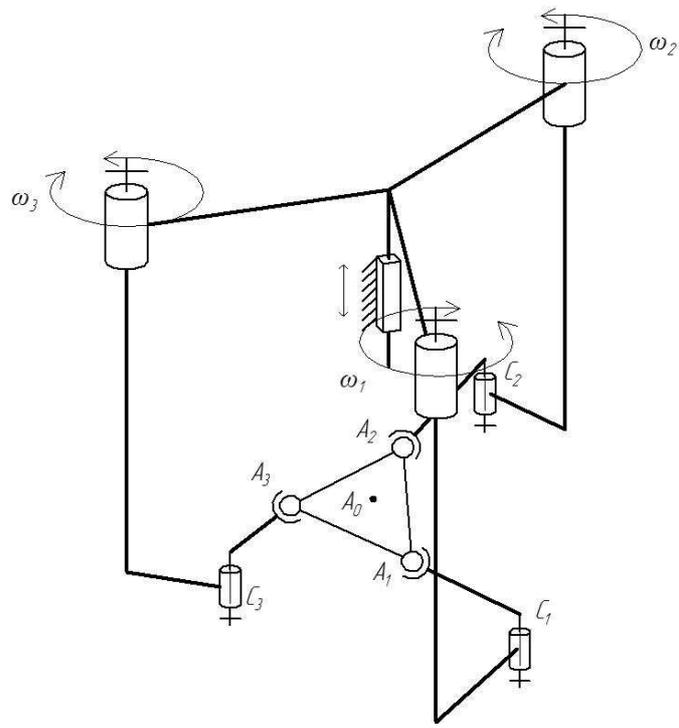


Рисунок 1.20 – Механизм ПАМИНСА  
(а- кинематическая схема, б- физическая модель)

На основании схемы ПАМИНСА Ширинкиным М.А. была предложена кинематическая схема механизма, в котором три привода обеспечивали перемещение в плоскости, а четвертый привод – вертикальное перемещение (Рисунок 1.21) [69, 70].



а)



б)

Рисунок 1.21 – Механизм с четырьмя степенями свободы  
а – кинематическая схема, б – прототип

Ряд оригинальных решений был получен К. Миановски [113]. В механизме POLMAN 2x3 вращательные и поступательные двигатели установлены на основа-

нии с совмещением их осей (Рисунок 1.22). Таким образом, были получены две схемы механизмов с тремя степенями свободы в каждом. При этом осуществляется развязка движений и поступательных, и вращательных.

Носовой Н.Ю. предложены новые схемы механизмов с четырьмя, пятью и шестью степенями свободы, в которых вращательное движение осуществляется с помощью шарнирных параллелограммов (Рисунок 1.23) [41]. Предложенные схемы развиты на базе механизма Ортогляйд.

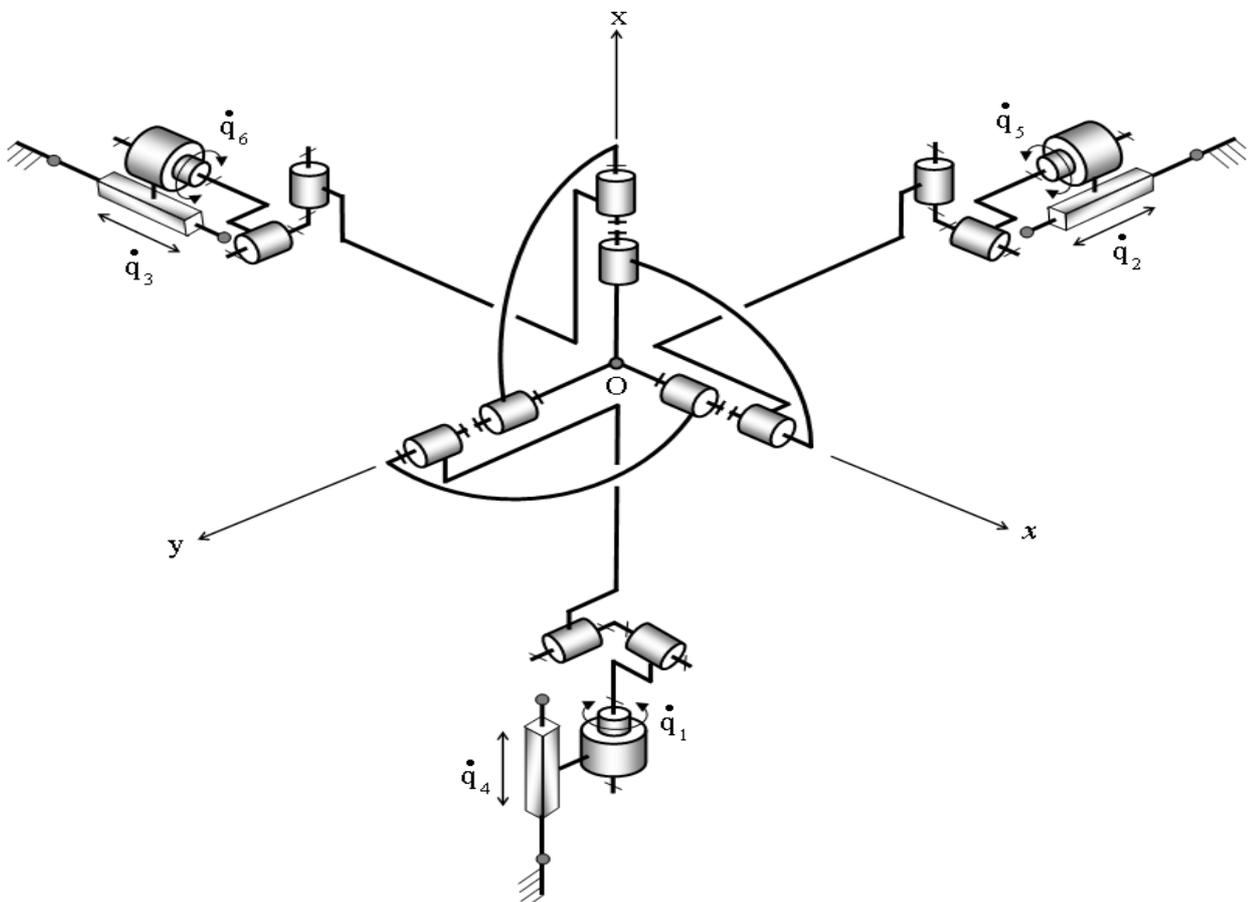
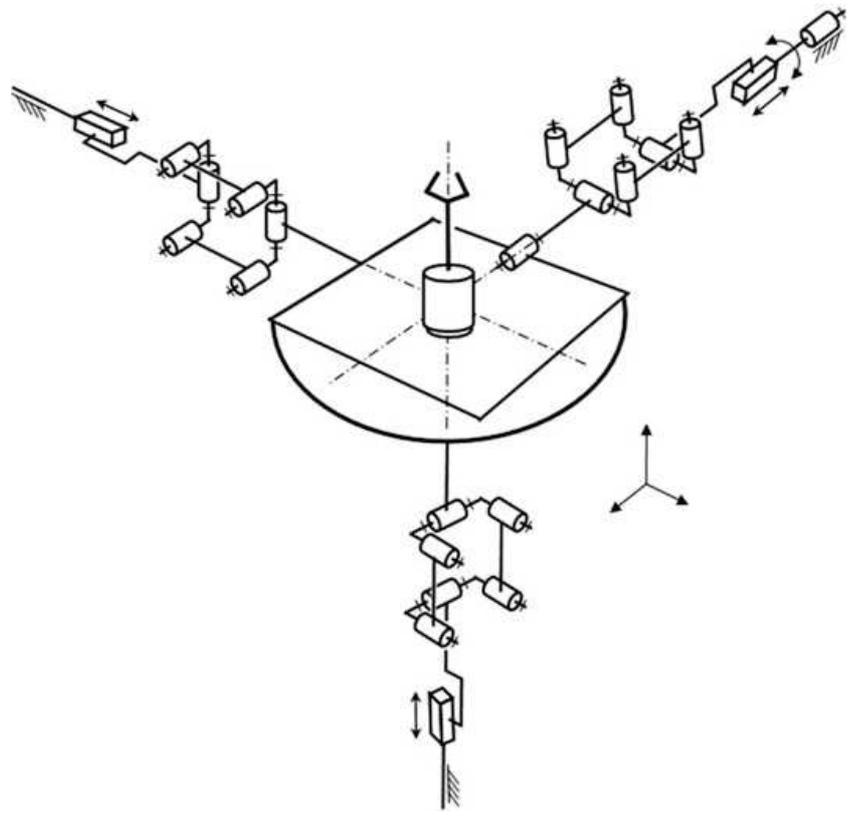
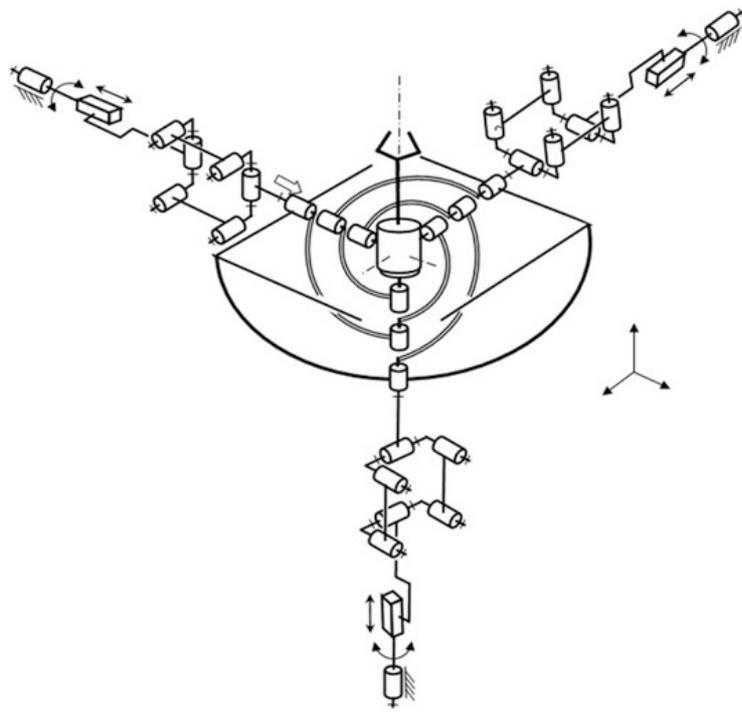


Рисунок 1.22 – Манипулятор POLMAN 2x3



a)



b)



в)

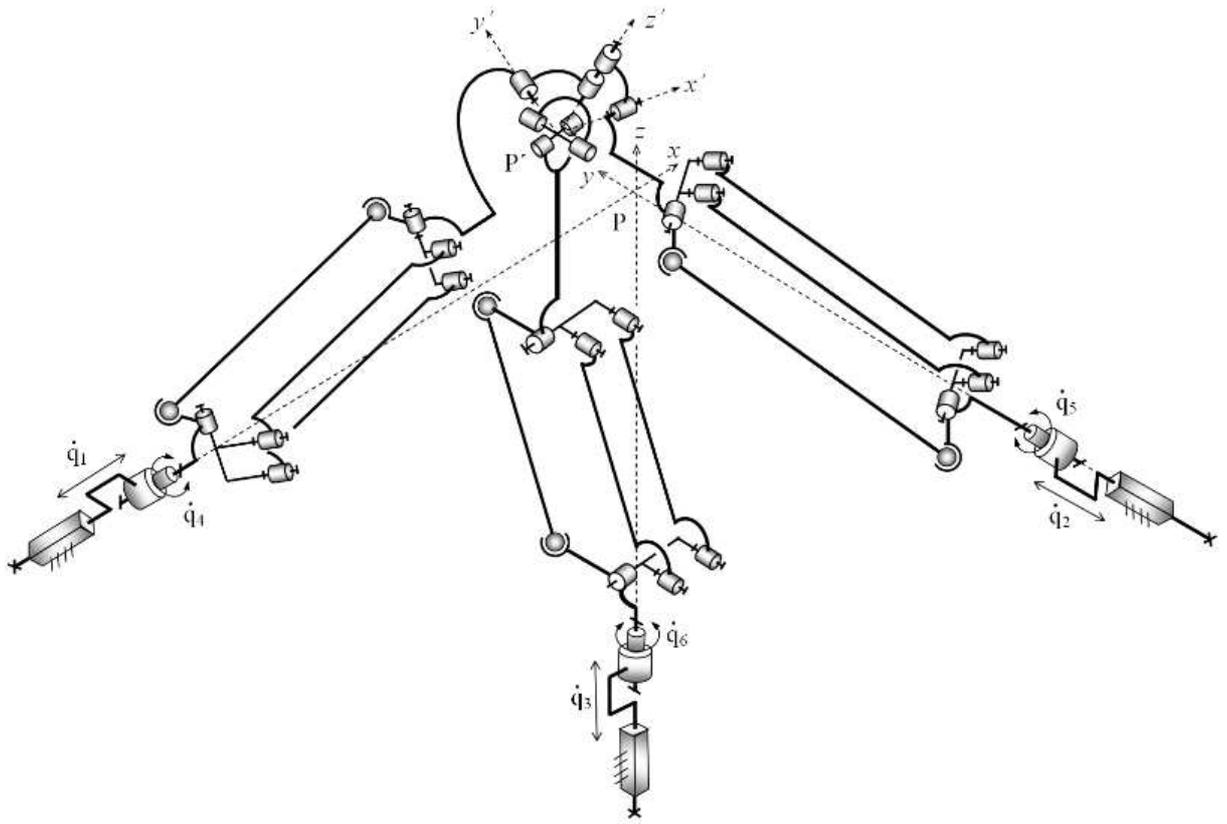
Рис. 1.23 – Механизмы

а – кинематическая схема механизма с 4-мя степенями свободы,

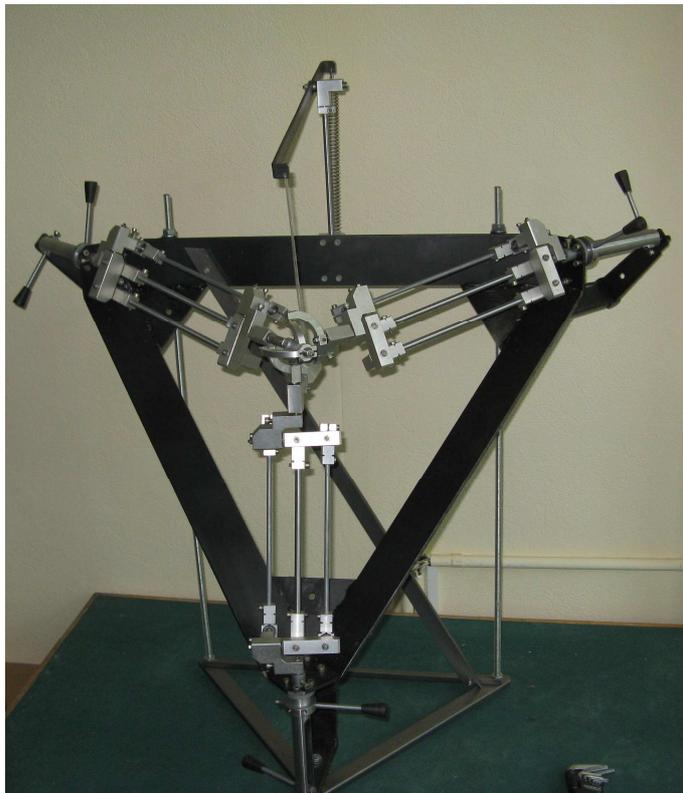
б – кинематическая схема механизма с 6-ю степенями свободы,

в – прототип механизма с 4-мя степенями свободы

Тывесом Л.И., Данилиным П.О. был предложен трипод  $3 \times 2$  с приводами на основании (Рисунок 1.24) [17, 50]. Поступательное движение осуществляют вращательное движение выходного звена. В этом устройстве используются универсальные шарниры, соединяющие входной и выходной валы. Поступательное движение обеспечивается параллельностью внешних осей крестовин шарниров и параллельностью входных и выходных валов.



а)

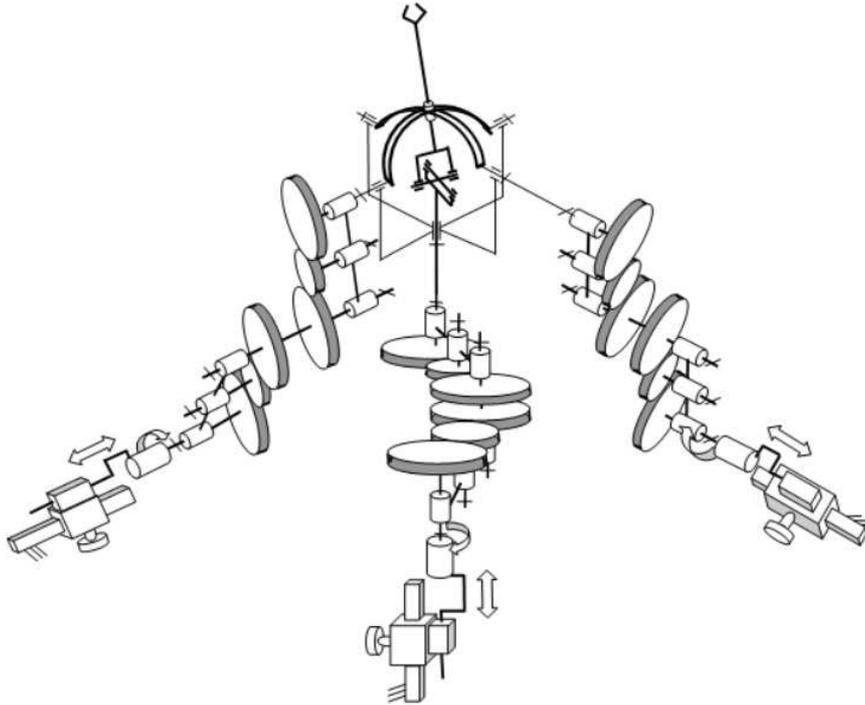


б)

Рисунок 1.24 – Трипод 2x3

а– кинематическая схема, б – прототип

Шалюхиным К.А. предложен механизм с выходным звеном, представляющим стержень с схватом на конце (Рисунок 1.25) [67]. Отклонение производится по направляющим дугам. Поступательное движение осуществляется зубчатыми передачами, заменяющими шарнирные параллелограммы.



а)



б)

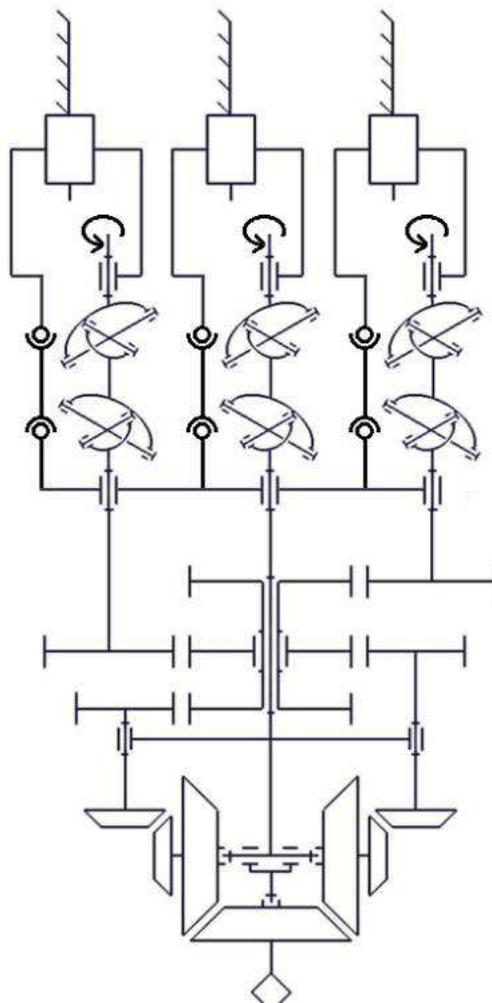
Рисунок 1.25 – Механизм с шестью степенями свободы с зубчатыми передачами

а – кинематическая схема механизма, б – прототип

Романовым А.Н. получена новая конструкция механизма, объединяющая позиционирующий, передаточный и ориентирующий механизмы (Рисунок 1.26) [46].

Этот механизм обладает свойствами кинематической развязки поступательных и вращательных движений, постоянства передаточного отношения при вращательных движениях и отсутствием особых положений ориентирующего механизма.

За основу был взят механизм дельта. В каждую цепь были добавлены карданные шарниры вместо параллелограммов. Ориентирующие движения реализованы добавлением дифференциального механизма с коническими зубчатыми колесами. Вращательные движения получены за счет объединения пространственного рычажного механизма, содержащего карданные шарниры, плоского, сферического и зубчатых механизмов, содержащих подвижные оси. При этом механизм не имеет особых положений.



а)



б)

Рисунок 1.26 – Механизм с 6-ю степенями свободы на базе механизма дельта  
а – кинематическая схема механизма, б – прототип

Новый механизм был предложен Едакиной Т.В. [21]. Автором разработан изоморфный поступательно-направляющий механизм с кинематическими цепями, не содержащими поступательных пар и имеющий дополнительную цепь для передачи вращательных движений (Рисунок 1.27).

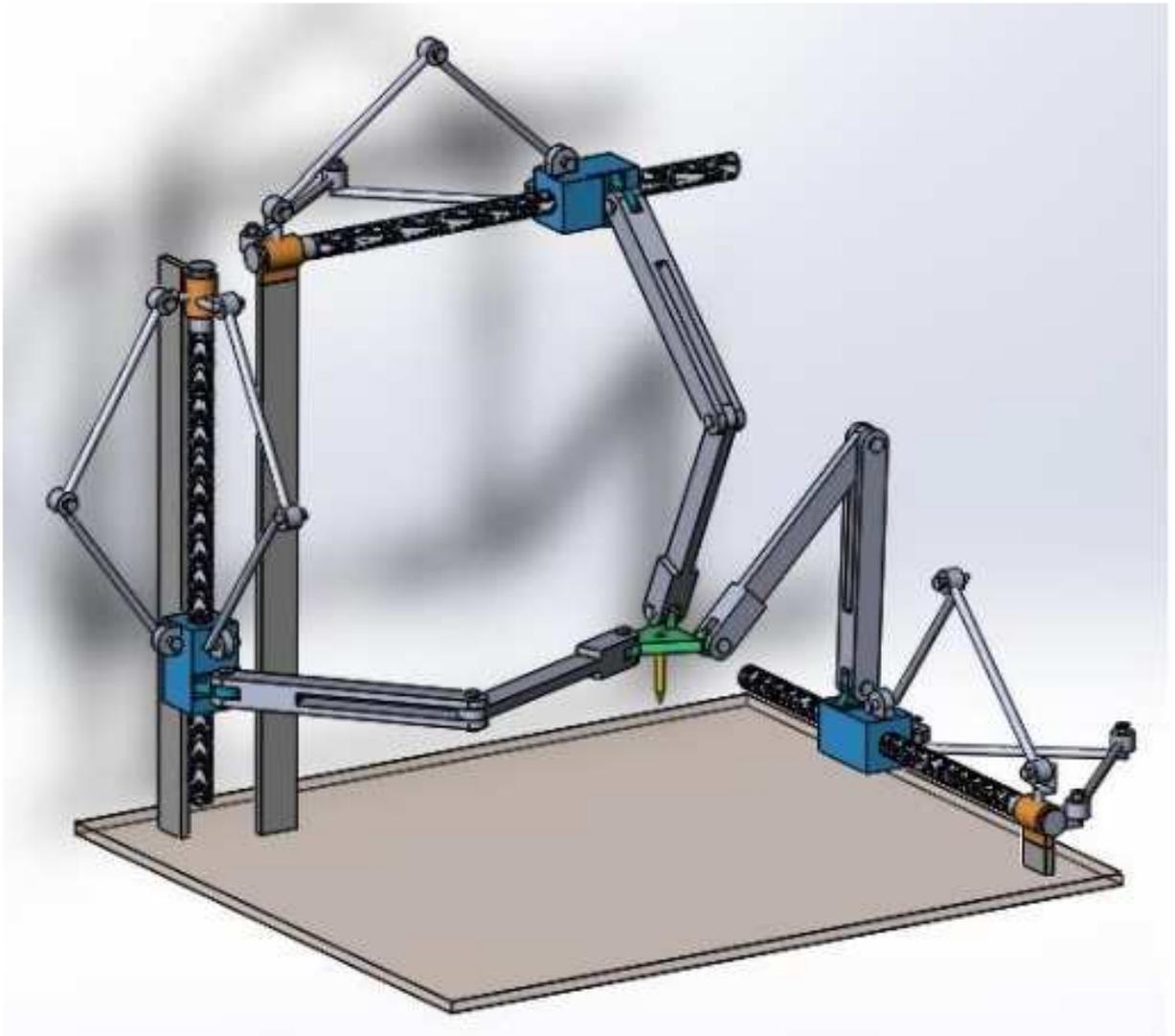


Рисунок 1.27 – Изоморфный механизм

Другим решением с использованием свойства частичной развязки движений является манипулятор, предложенный И Минг Ченом с соавторами (Рисунок 1.28) [122]. В нем поступательные и вращательные приводы с совмещенными осями размещены на основании.

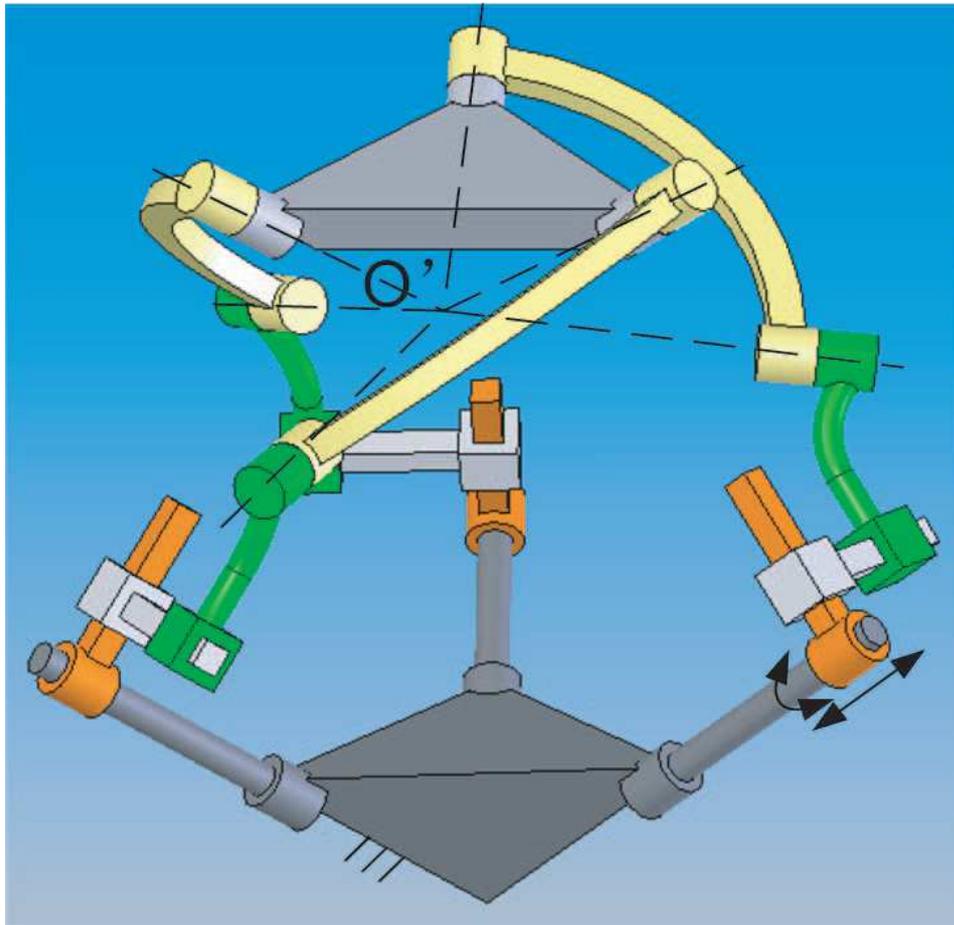
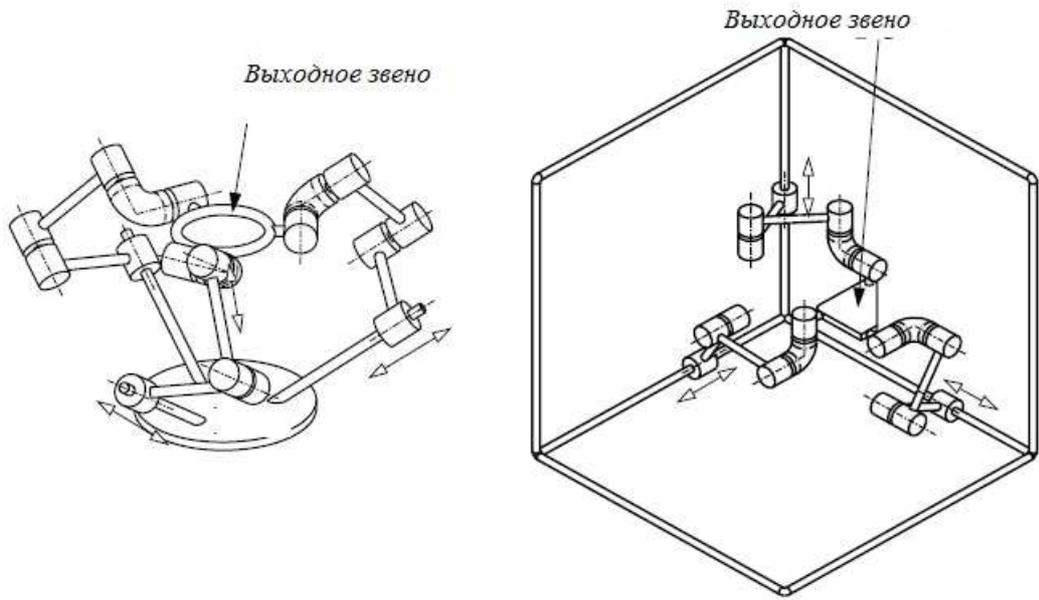
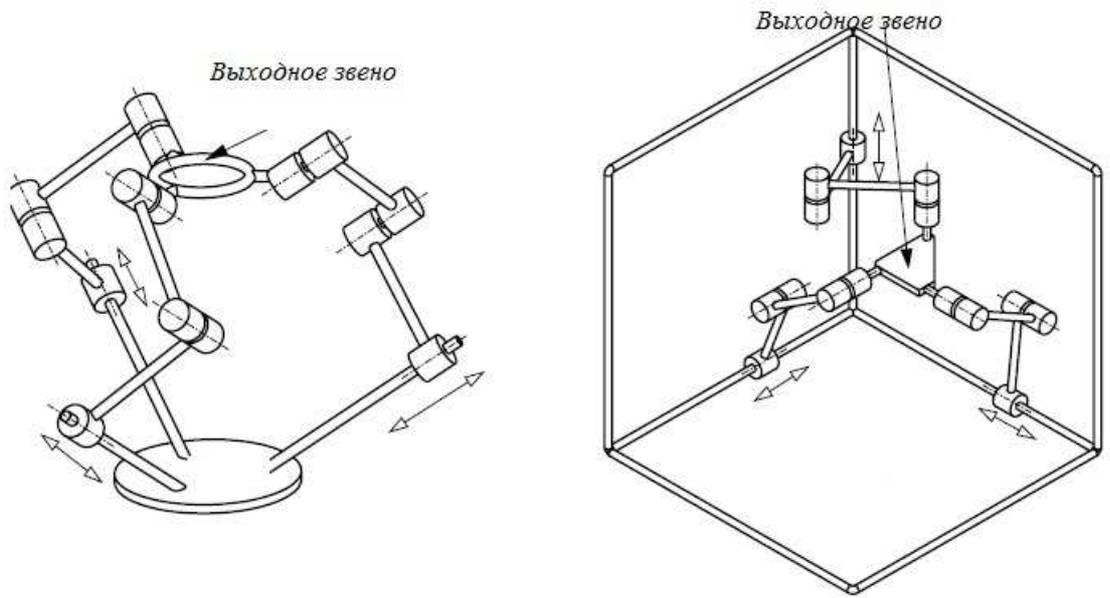


Рисунок 1.28 – Манипулятор И. Минг Чена

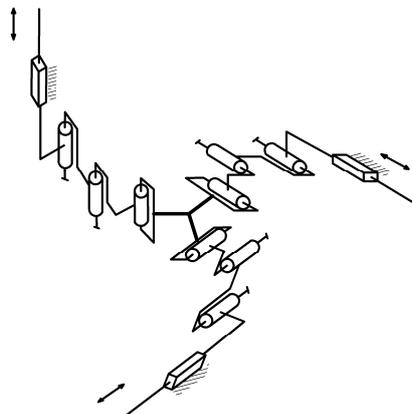
Аналогичные результаты были описаны в публикациях [78, 79, 97, 106, 111]. Некоторые примеры таких структур представлены на Рисунке 1.29. Для этих механизмов общими свойствами являются изоморфность механизма, когда каждый привод управляет своей координатой, и постоянство передаточного отношения. Передаточное отношение равно единице.



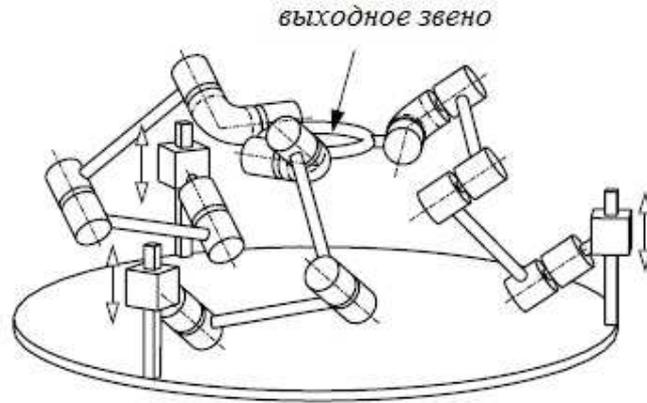
а)



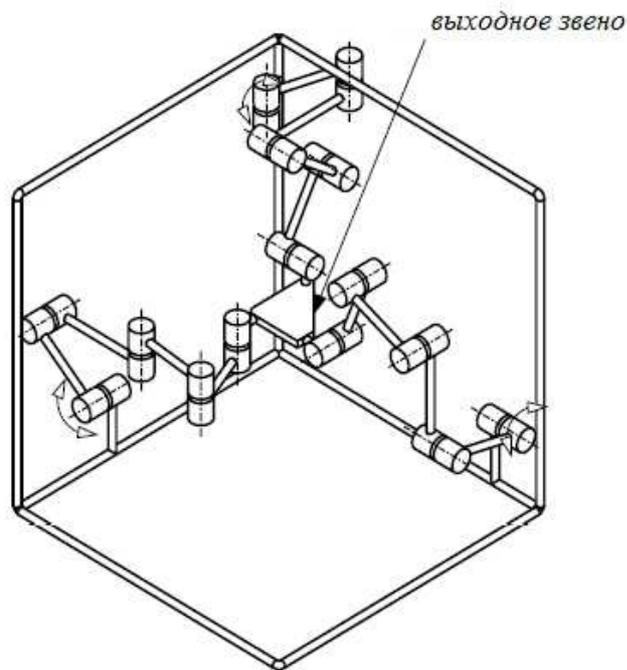
б)



в)



г)



е)

Рис. 1.29 Механизмы со свойством изоморфности  
 а– манипуляторы 3-PRRRR, б – 3-PRRR, в – 3-PRRR, г – 3-PRRRR,  
 д – 3-PRRRR, е – 3-RRRR

Таким образом, показаны механизмы параллельной структуры, обладающие свойствами частичной развязки движений, изоморфностью и постоянством передаточного отношения. Эти свойства позволяют упростить решение задач кинематики, динамики и его систему управления.

## Результаты и выводы по главе

1. Проведенный анализ показывает, что механизмы параллельной структуры находят применение в различных отраслях промышленности в силу своих преимуществ, таких как точность, жесткость, высокие скорости перемещения.
2. Наиболее применяемые механизмы параллельной структуры в технических устройствах это механизмы с шестью степенями свободы, а также поступательные и сферические механизмы с тремя степенями свободы.
3. Механизмы с шестью степенями свободы являются сложными техническими устройствами. Для упрощения системы уравнений, описывающих кинематическую и динамическую взаимосвязь между приводами и выходным звеном возможно использовать свойства кинематической развязки.
4. Механизмы параллельной структуры могут обладать дополнительными свойствами изоморфности и постоянства передаточного отношения. Такие свойства позволяют упростить систему управления, повысить точность и жесткость.
5. Одним из направлений исследований механизмов параллельной структуры является синтез механизмов с шестью степенями свободы, обладающих свойствами кинематической развязки, изоморфности и постоянства передаточного отношения. Такие механизмы позволяют получать отдельно поступательные или вращательные движения или их комбинацию.

## ГЛАВА 2. СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ, ЗАДАЧА О ПОЛОЖЕНИИ МЕХАНИЗМОВ С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ, ИМЕЮЩИХ ОРТОГОНАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ ПАРЫ ДВИГАТЕЛЕЙ С ПОПАРНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ

В главе представлены новые механизмы с шестью степенями свободы. Показан их структурный синтез и кинематический анализ. Представлено решение задачи о положении. На основе задачи о положении исследована рабочая зона механизмов. Представлено решение задачи кинематической точности механизма.

### 2.1. Использование групп винтов для проведения структурного анализа механизмов

В параграфе показан структурный синтез пространственных механизмов, основанный на аппарате замкнутых групп винтов.

Теория винтов была развита трудами исследователей [8, 11, 19, 20, 81, 87, 105].

При синтезе новых пространственных механизмов применяется подход, основанный на применении замкнутых групп винтов. Известно, что одночленная группа винтов может быть представлена либо одной вращательной, либо поступательной парой, либо винтовой парой. Движение описывается одним кинематическим винтом. Так, для вращательной пары кинематический винт имеет координаты  $\Omega_1 (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ , для поступательной  $\Omega_1 (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ , для винтовой  $\Omega_1 (1, 0, 0, p, 0, 0)$ . Одному кинематическому винту взаимны пять силовых винтов  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ .

Двухчленные группы винтов могут быть представлены либо одной цилиндрической  $\Omega_1 (1, 0, 0, 1, 0, 0)$ , либо двумя поступательными парами с координатами кинематических винтов  $\Omega_1(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $\Omega_2 (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ , либо двумя вращательными парами с координатами кинематических винтов  $\Omega_1 (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $\Omega_2 (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ . Этим двум кинематическим винтам взаимны четыре силовых винта  $R_1, R_2, R_3, R_4$ .

Рассмотрим трехчленные группы винтов. Трехчленные группы винтов могут быть представлены тремя винтами бесконечного или нулевого параметра. В этом случае представляется либо поступательный, либо сферический механизмы. Поступательный механизм представлен тремя винтами бесконечного параметра (чистый момент) соответственно  $\Omega_1 (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $\Omega_2 (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ ,  $\Omega_3 (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ , что соответствует трем поступательным парам. Сферический механизм представлен тремя винтами нулевого параметра (чистый вектор)  $\Omega_1 (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $\Omega_2 (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $\Omega_3 (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ , что соответствует трем вращательным парам с осями, пересекающимися в одной точке.

Плоский механизм с тремя степенями свободы также может быть представлен трехчленной группой винтов: двумя винтами бесконечного параметра и одним - нулевого.

При рассмотрении поступательных механизмов каждая кинематическая цепь может содержать одну приводную поступательную пару и две неприводные поступательные пары (Рисунок 2.1). Причем, поступательные пары могут быть выполнены в виде шарнирных параллелограммов.

В этом случае единичные винты имеют координаты:

$$\begin{array}{lll} E_{11}(0, 0, 0, 1, 0, 0) & E_{12} (0, 0, 0, 0, 0, 1) & E_{13}(0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ E_{21}(0, 0, 0, 0, 0, 1) & E_{22}(0, 0, 0, 0, 1, 0) & E_{23}(0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ E_{31}(0, 0, 0, 0, 1, 0) & E_{32}(0, 0, 0, 1, 0, 0) & E_{33}(0, 0, 0, 0, 0, 1). \end{array}$$

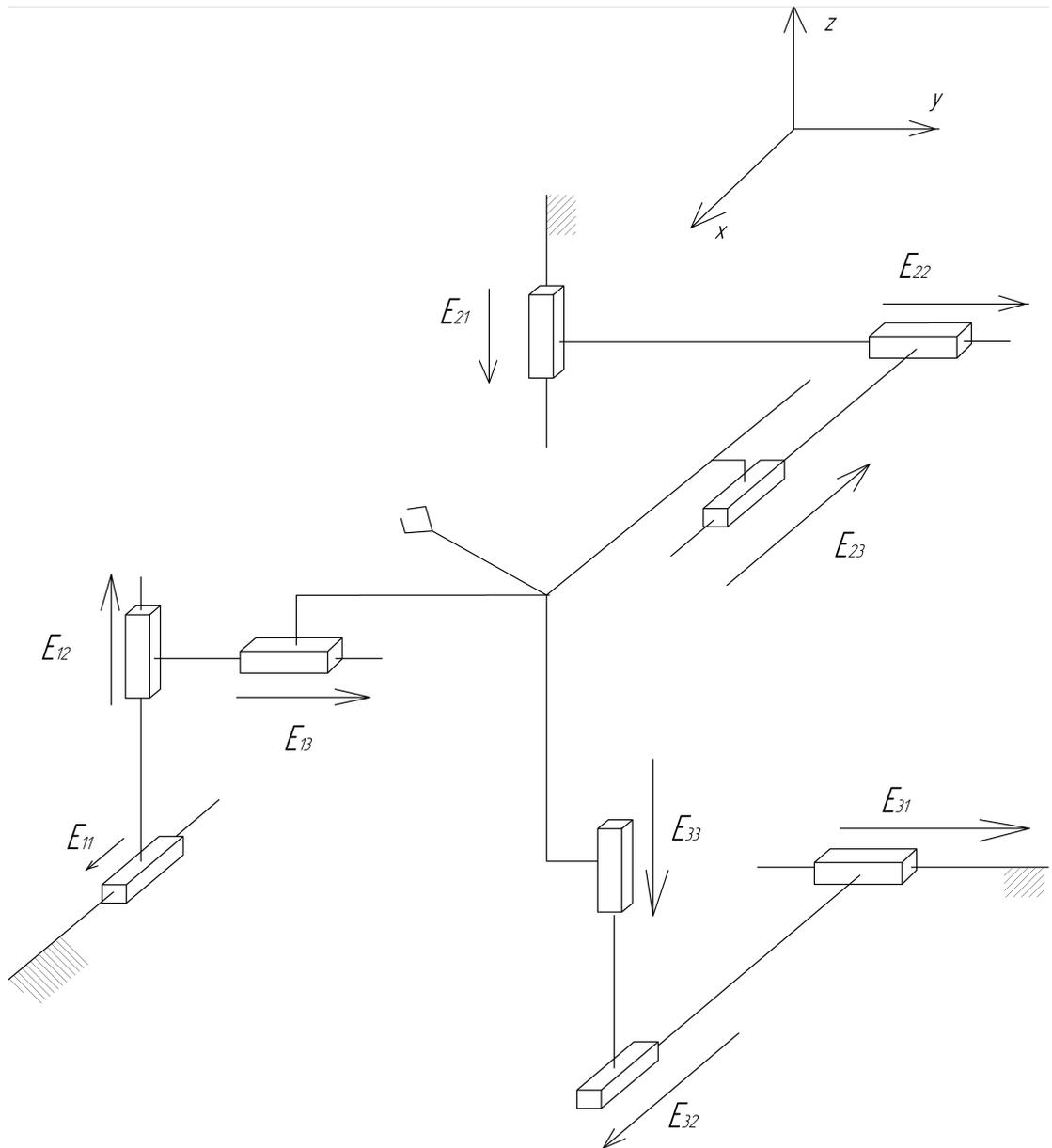


Рисунок 2.1 Поступательный механизм с тремя степенями свободы

Все три кинематические цепи налагают одинаковые связи. Силовые винты имеют координаты:  $\mathbf{R}_1(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{R}_2(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{R}_3(0, 0, 0, 0, 1, 0)$ .

Трехчленная группа винтов, представленная тремя винтами бесконечного параметра, характеризует поступательный механизм.

Рассмотрим сферический механизм (Рисунок 2.2.). Каждая кинематическая цепь содержит одну приводную вращательную пару и четыре неприводные вращательные пары. Оси входных и выходных пар пересекаются в одной точке. Оси трех промежуточных пар параллельны.

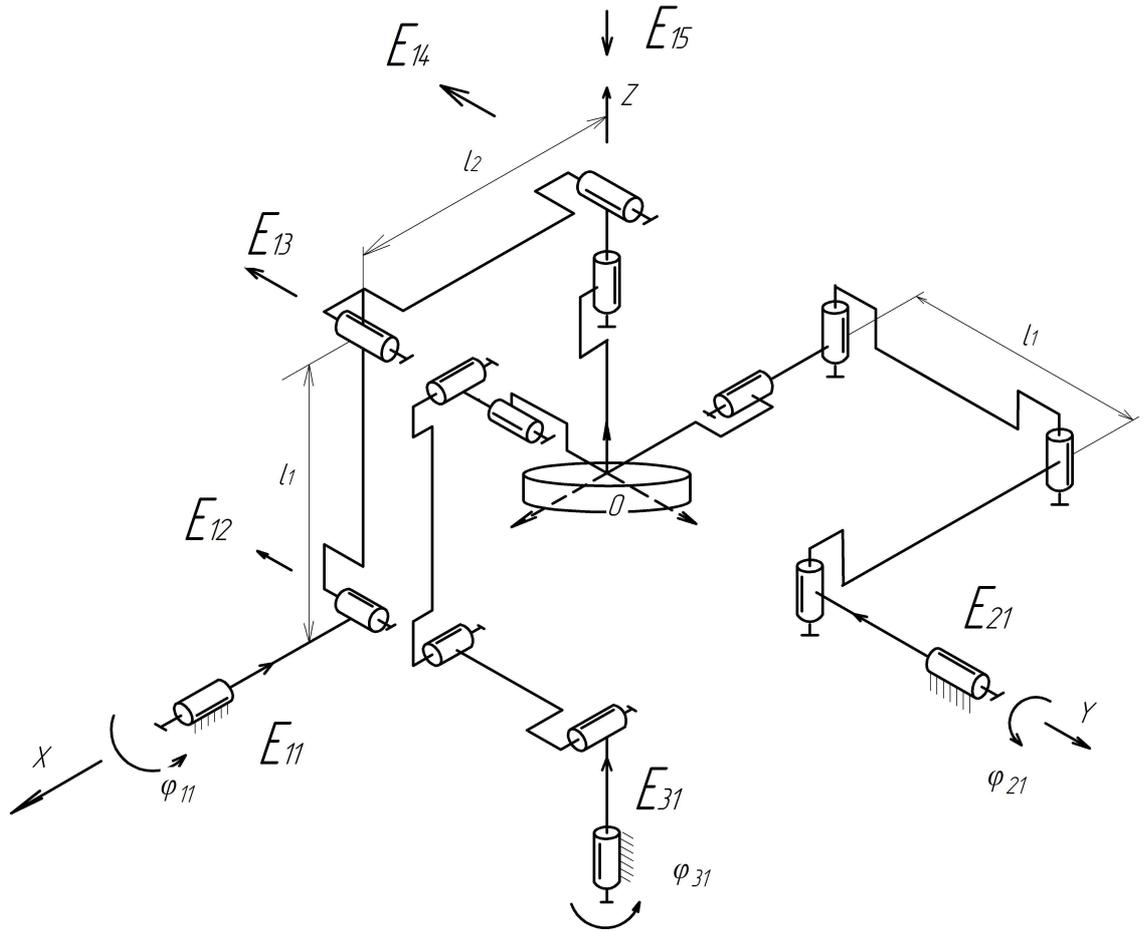


Рисунок 2.2. Сферический механизм с тремя степенями свободы

Все три кинематические цепи налагают одинаковые связи. Единичные винты имеют координаты:

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{E}_{11}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{E}_{12}(e_{12x}, e_{12y}, e_{12z}, 0, 0, 0), \quad \mathbf{E}_{13}(e_{13x}, e_{13y}, e_{13z}, 0, 0, 0), \\
 & \mathbf{E}_{14}(e_{14x}, e_{14y}, e_{14z}, 0, 0, 0), \quad \mathbf{E}_{15}(e_{15x}, e_{15y}, e_{15z}, 0, 0, 0), \\
 & -\mathbf{E}_{21}(0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{E}_{22}(e_{22x}, e_{22y}, e_{22z}, 0, 0, 0), \quad \mathbf{E}_{23}(e_{23x}, e_{23y}, e_{23z}, 0, 0, 0), \\
 & \mathbf{E}_{24}(e_{24x}, e_{24y}, e_{24z}, 0, 0, 0), \quad \mathbf{E}_{25}(e_{25x}, e_{25y}, e_{25z}, 0, 0, 0), \\
 & -\mathbf{E}_{31}(0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{E}_{32}(e_{32x}, e_{32y}, e_{32z}, 0, 0, 0), \quad \mathbf{E}_{33}(e_{33x}, e_{33y}, e_{33z}, 0, 0, 0), \\
 & \mathbf{E}_{34}(e_{34x}, e_{34y}, e_{34z}, 0, 0, 0), \quad \mathbf{E}_{35}(e_{35x}, e_{35y}, e_{35z}, 0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Все три кинематические цепи налагают одинаковые связи. Силовые винты имеют координаты:

$$\mathbf{R}_1(1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{R}_2(0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{R}_3(0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Трехчленная группа винтов, представляемая тремя винтами нулевого параметра, соответствует сферическому механизму.

Рассмотрим механизмы с шестью степенями свободы. Шестичленная группа винтов соответствует пространственному механизму с шестью степенями свободы (Рисунок 2.3). Рассматриваемый механизм обладает свойством развязки движений. Единичные винты осей кинематических пар:

$$\begin{aligned}
& -E_{11}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad E_{12}(0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad E_{13}(0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
& E_{14}(e_{14x}, e_{14y}, e_{14z}, 0, 0, 0), \quad E_{15}(e_{15x}, e_{15y}, e_{15z}, 0, 0, 0), \quad E_{16}(e_{15x}, e_{15y}, e_{15z}, 0, 0, 0); \\
& -E_{21}(0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad E_{22}(0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad E_{23}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& E_{24}(e_{24x}, e_{24y}, e_{24z}, 0, 0, 0), \quad E_{25}(e_{25x}, e_{25y}, e_{25z}, 0, 0, 0), \quad E_{26}(0, 0, 1, 0, 0, 0); \\
& -E_{31}(0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad E_{32}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad E_{33}(0, 0, 1, 0, 0, 0), \\
& E_{34}(e_{34x}, e_{34y}, e_{34z}, 0, 0, 0), \quad E_{35}(e_{35x}, e_{35y}, e_{35z}, 0, 0, 0), \quad E_{36}(e_{36x}, e_{36y}, e_{36z}, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Винты  $E_{i1}$ ,  $E_{i2}$ ,  $E_{i3}$  – бесконечно большого параметра. Винты  $E_{i4}$ ,  $E_{i5}$ ,  $E_{i6}$  – нулевого параметра.

Кинематические винты могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \Omega_1 (1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \Omega_2 (0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \Omega_3 (0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad \Omega_4 (0, 0, 0, 1, 0, 0), \\
& \Omega_5 (0, 0, 0, 0, 1, 0), \quad \Omega_6 (0, 0, 0, 0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Наличие особых положений в механизме возможно в случае, если все шесть единичных винтов  $E_{i1}$ ,  $E_{i2}$ ,  $E_{i3}$ ,  $E_{i4}$ ,  $E_{i5}$ ,  $E_{i6}$  линейно зависимы.

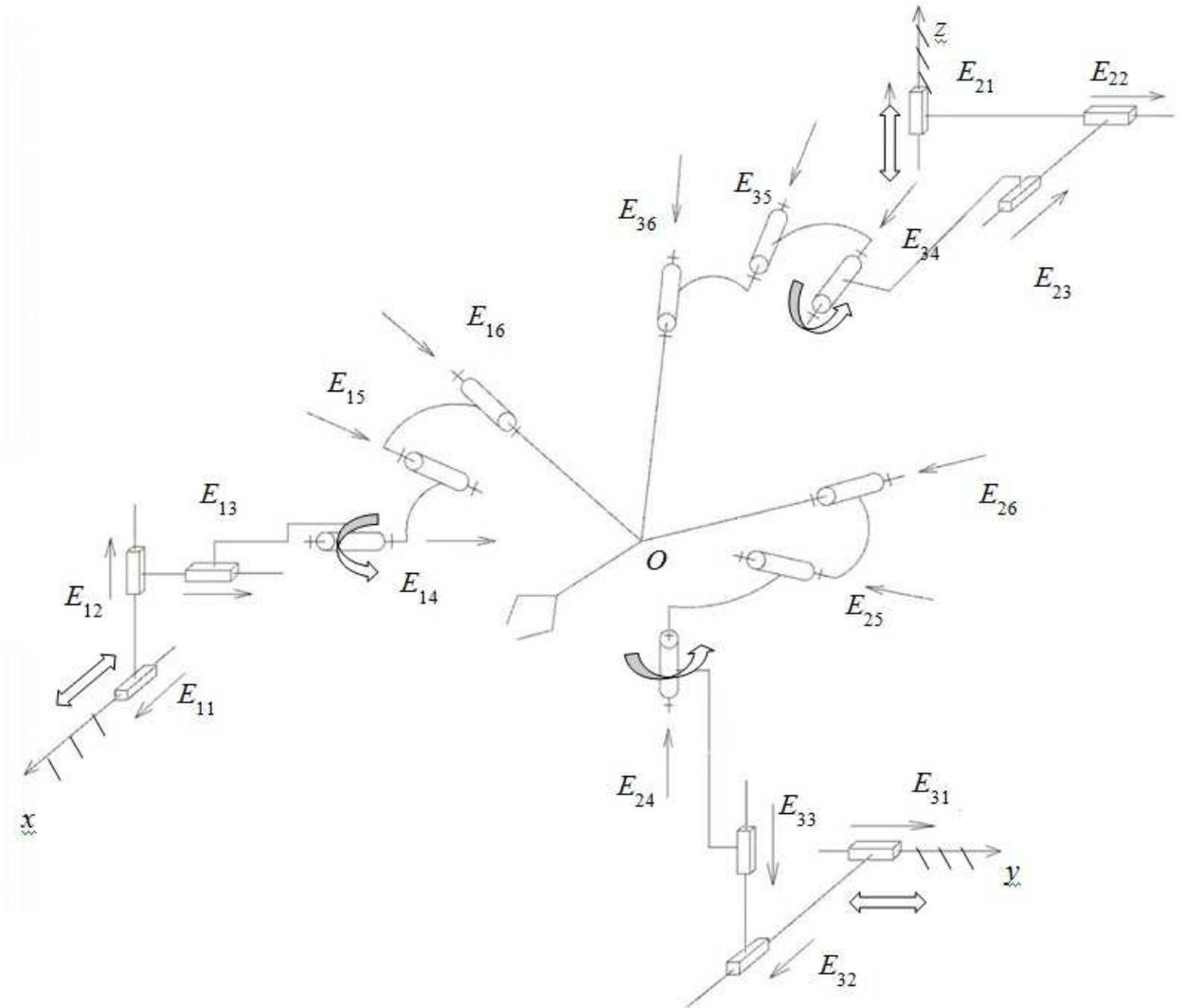


Рисунок 2.3. Пространственный механизм с шестью степенями свободы

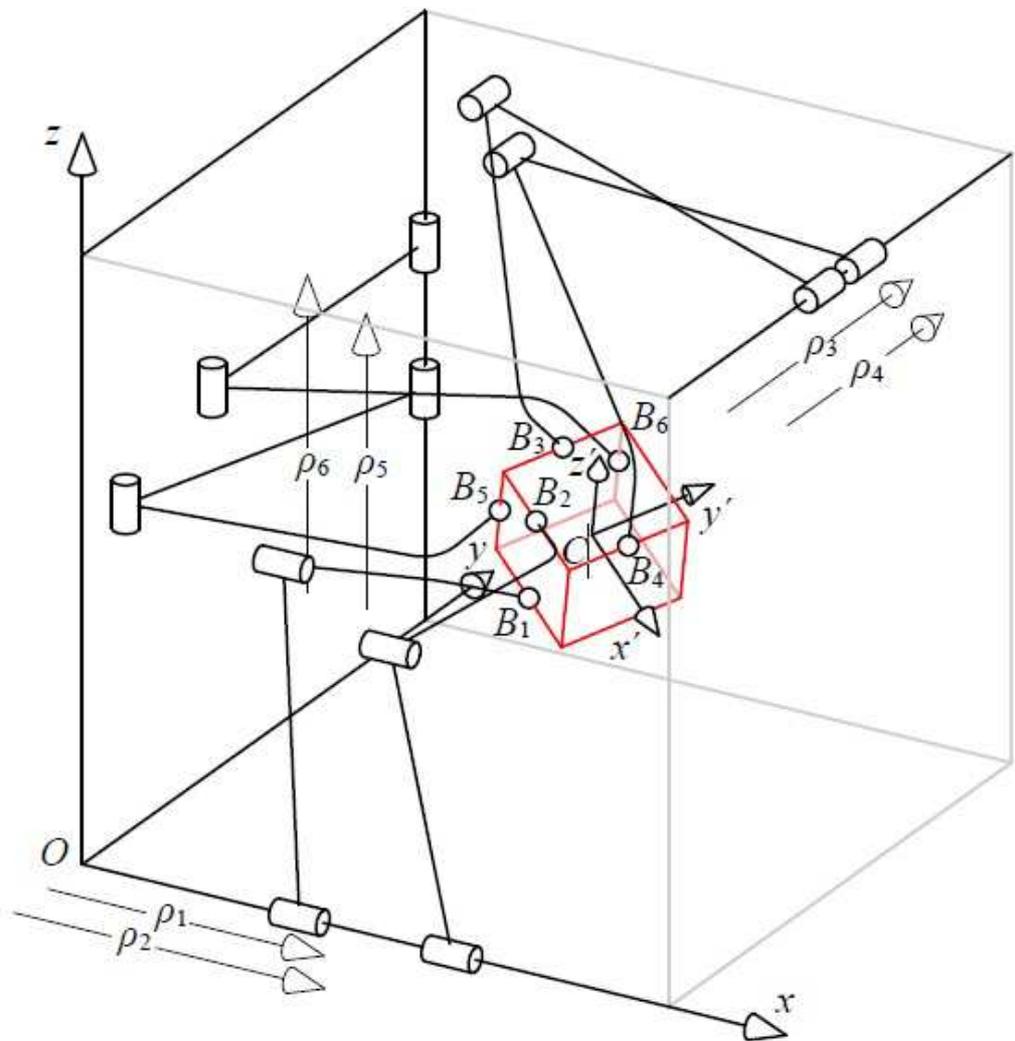
На этом аппарате замкнутых групп винтов показаны принципы построения новых механизмов. Также на основе такого подхода можно проводить их классификацию.

В дальнейшем применение аппарата винтового исчисления будет использовано для решения задачи силового анализа исследуемых механизмов.

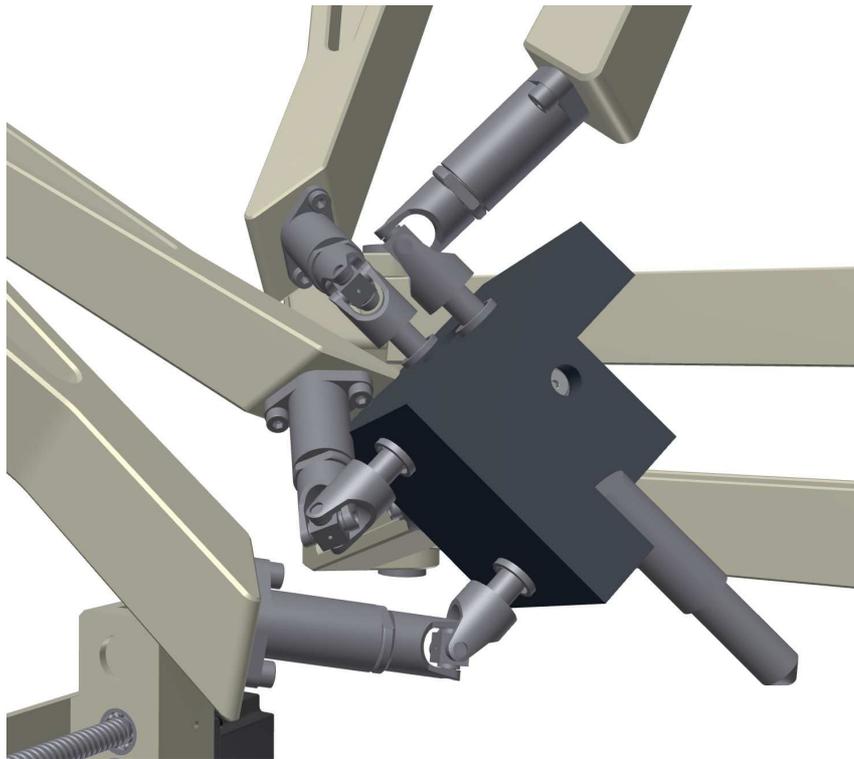
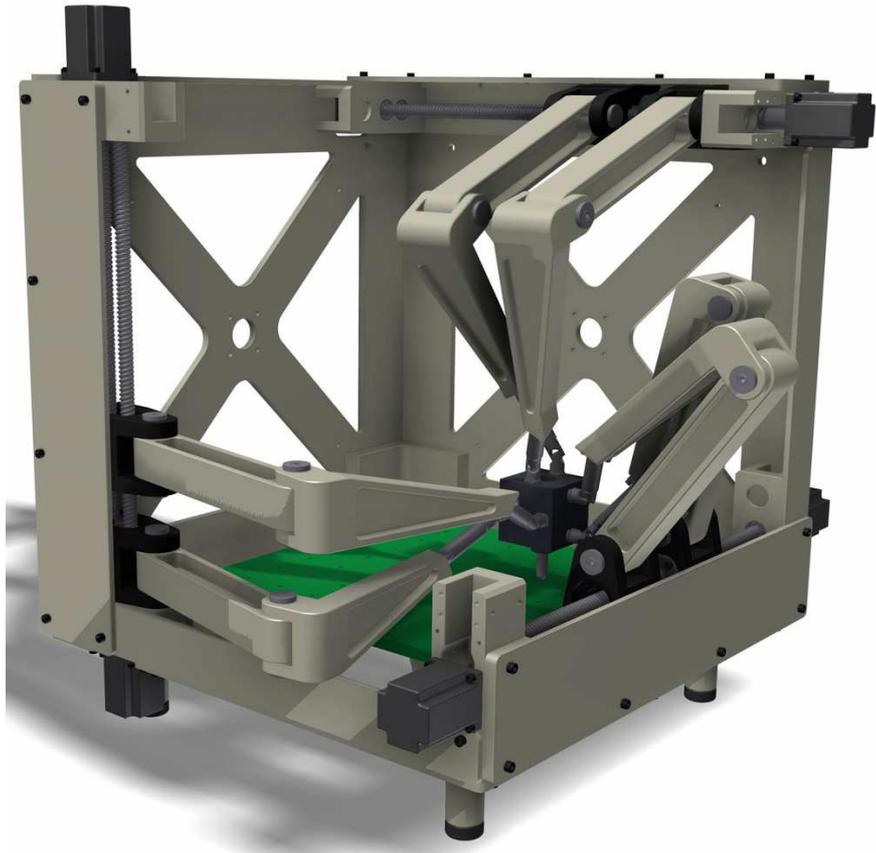
## 2.2. Структурный синтез новых механизмов

В параграфе показан структурный синтез механизмов с шестью степенями свободы.

Одним из механизмов с указанными выше свойствами был механизм, предложенный Боневым - Нехартерон [115]. Этот механизм содержит шесть кинематических цепей (Рисунок 2.4). Каждые два привода расположены на осях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно. Этот механизм обладает кинематической развязкой поступательных и вращательных движений.



a)



б)

Рисунок 2.4 Механизм И. Бонева (Hexapteron)

а – кинематическая схема; б – прототип

Механизм И. Бонева выбран прототипом разработанных новых манипуляционных механизмов (Рисунок 2.5, 2.6) [43, 44]. Новые механизмы обладают шестью степенями свободы. Каждая кинематическая цепь содержит по одной приводной поступательной паре. Приводы могут быть выполнены с вращательными двигателями либо поступательными. Особенностью этих механизмов является то, что пары приводов движутся параллельно ортогональным осям, приводы в парах расположены взаимно противоположно. Предложенные схемы обеспечивают большую жесткость, точность и грузоподъемность.

Каждая кинематическая цепь содержит одну приводную поступательную пару [43, 104]. Схему механизма можно записать в виде 6PRRS (Рисунок 2.5).

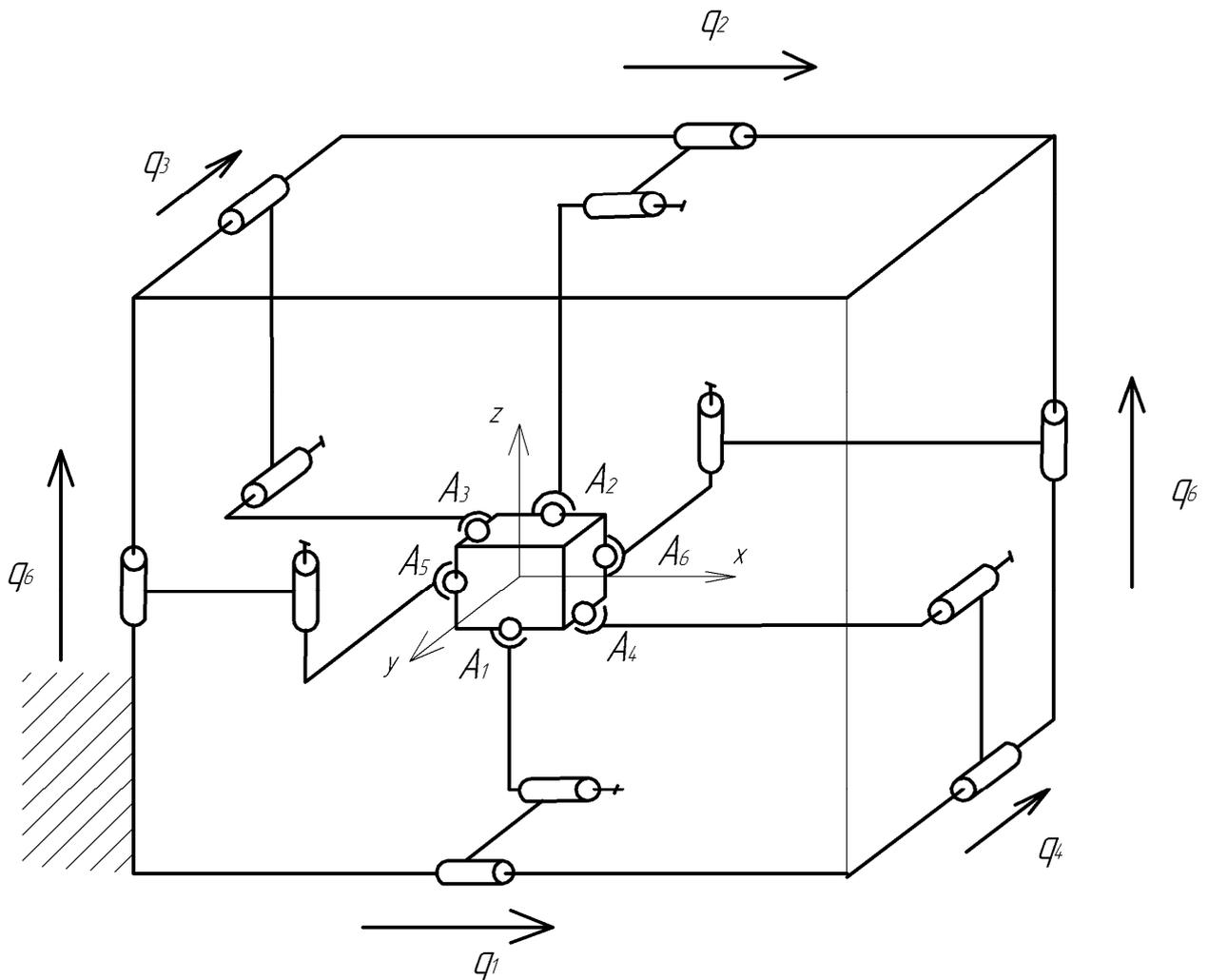


Рисунок 2.5 Механизмы 6PRRS

Применив формулу Сомова-Мальшева, получаем число степеней свободы:

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 - 4 \cdot p_4 - 3 \cdot p_3 = 6 \cdot (14 - 1) - 5 \cdot 6 - 6 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 6$$

где  $n$  – число звеньев;  $p_5$  – число пар пятого класса (одноподвижных пар);  $p_4$  – число пар четвертого класса (двухподвижных пар),  $p_3$  – число пар третьего класса (трехподвижных пар).

Основание выполнено в виде ребер куба. Выходное звено выполнено также в виде куба. Механизм содержит шесть кинематических цепей. Каждая цепь содержит входную двухподвижную цилиндрическую кинематическую пару, расположенную параллельно одной из осей декартовой системы координат. Ось промежуточной цилиндрической кинематической пары параллельна оси входной пары. Конечная сферическая пара сопряжена с выходным звеном в центре соответствующего ребра куба выходного звена.

Оси входных двухподвижных цилиндрических пар попарно параллельные друг другу и расположены на диагонально противоположных ребрах куба основания, а центры соответствующих конечных сферических кинематических пар расположены на параллельных диагонально противоположных ребрах куба выходного звена.

Другим вариантом исполнения механизма может быть схема 6PRPS (Рисунок 2.6) [44]. Этот механизм содержит шесть кинематических цепей и шесть приводов. Каждая цепь содержит входную двухподвижную цилиндрическую кинематическую пару, расположенную параллельно одной из осей декартовой системы координат. Оси входных двухподвижных цилиндрических пар попарно параллельные друг другу и расположены на диагонально противоположных ребрах куба основания. Этот механизм отличается от предыдущего тем, что в каждой кинематической цепи содержится промежуточная поступательная пара.

Число степеней свободы этого механизма определяется по формуле:

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 - 4 \cdot p_4 - 3 \cdot p_3 = 6 \cdot (14 - 1) - 5 \cdot 6 - 6 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 6$$

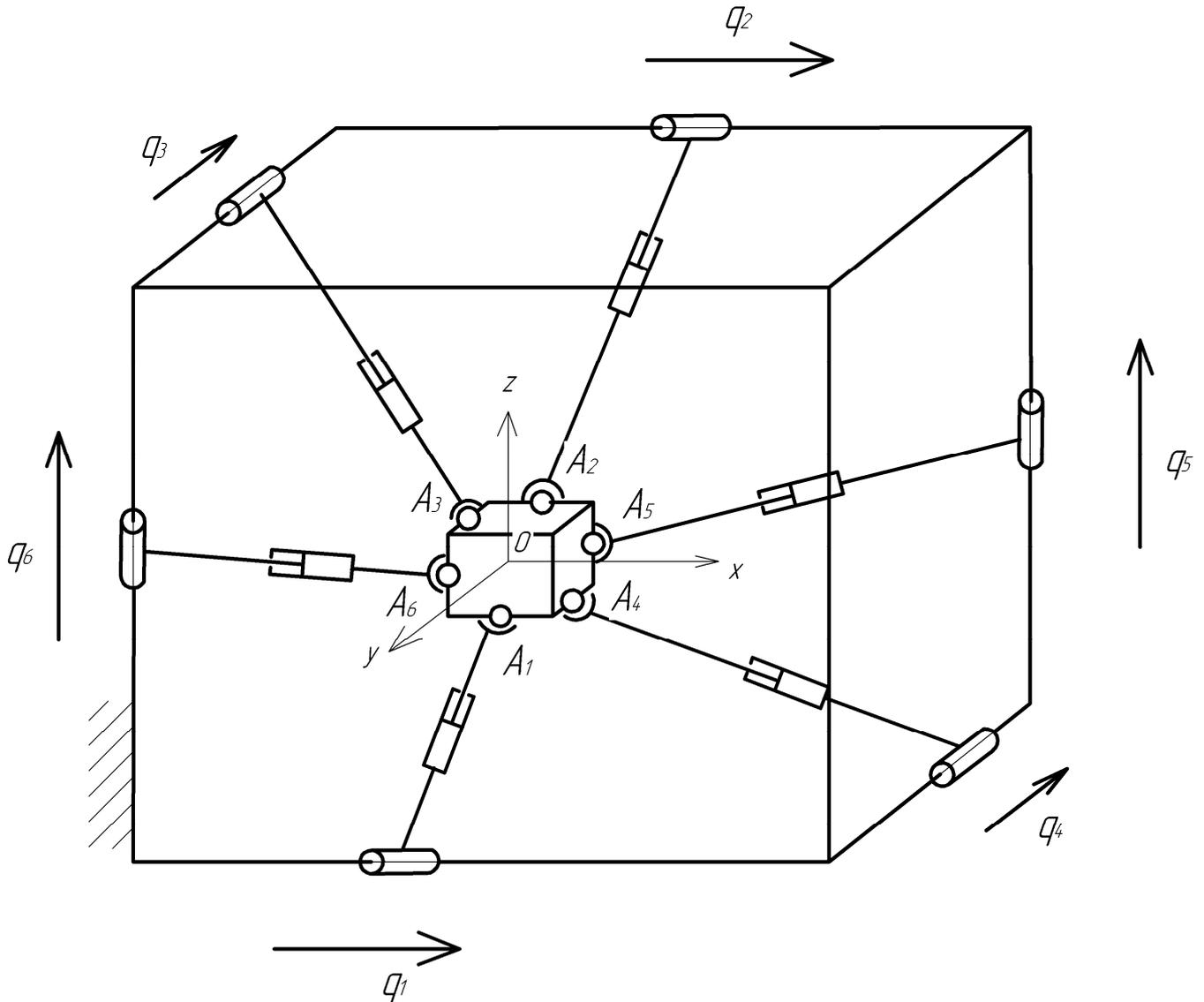


Рисунок 2.6 Механизмы 6PRPS

### 2.3. Решение задачи о положении

Одной из главных задач является задача о положении. Выходное звено имеет форму куба со стороной  $2a$ . Координаты точек сферических кинематических пар куба выходного звена:  $A_1(0, a, -a)$ ,  $A_2(0, -a, a)$ ,  $A_3(-a, 0, a)$ ,  $A_4(a, 0, -a)$ ,  $A_5(-a, a, 0)$ ,  $A_6(a, -a, 0)$ .

Центр подвижной системы координат в неподвижной системе координат определим как  $(x_0, y_0, z_0)$ . Координаты осей приводов:  $q_1(x_1, 0, 0)$ ,  $q_2(x_2, 0, 0)$ ,  $q_3(0, y_1, 0)$ ,  $q_4(0, y_2, 0)$ ,  $q_5(0, 0, z_1)$ ,  $q_6(0, 0, z_2)$ . При движении привода изменяется только одна координата, вдоль оси которой он перемещается. Тогда уравнения для определения этой координаты можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A1} \\ y_{A1} \\ z_{A1} \end{pmatrix} \right), \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A2} \\ y_{A2} \\ z_{A2} \end{pmatrix} \right) \\
 q_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A3} \\ y_{A3} \\ z_{A3} \end{pmatrix} \right), \quad q_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A4} \\ y_{A4} \\ z_{A4} \end{pmatrix} \right) \\
 q_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A5} \\ y_{A5} \\ z_{A5} \end{pmatrix} \right), \quad q_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A6} \\ y_{A6} \\ z_{A6} \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\mathbf{R}$  – матрица поворота вокруг осей  $x, y, z$ .

Матрицу  $\mathbf{R}$  можно представить формулой  $\mathbf{R} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1$ , где

$$\mathbf{A}_1 - \text{матрица поворота вокруг оси } x \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2 - \text{матрица поворота вокруг оси } y \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_3 - \text{матрица поворота вокруг оси } z \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу  $\mathbf{R}$  можно записать в виде:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta & \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \gamma & \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \cdot \sin \alpha & \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Пример решения обратной задачи о положении.

Зададим координаты выходного звена т.О (3,0; 3,5; 4,0), углы  $\alpha=20^0$ ,  $\beta=10^0$ ,  $\gamma=10^0$ . Тогда координаты приводов будут равны:  $q_1=3,325$ ,  $q_2=2,675$ ,  $q_3=3,979$ ,  $q_4=3,021$ ;  $q_5=3,857$ ;  $q_6=4,163$ .

Предложенный механизм обладает свойством частичной кинематической развязки (возможность получения только поступательных, только вращательных движений или их комбинации). Поэтому система уравнений кинематики распадается на независимые подсистемы уравнений меньшего порядка. Это дает возможность упростить решение задачи кинематики, а динамическая развязка позволяет уменьшить взаимовлияние приводов. Так, для получения поступательных движений необходимо одновременное однонаправленное движение приводов, управляющих одной координатой выходного звена ( $q_1, q_2$  управляют координатой  $x$ ;  $q_3, q_4$  управляют  $y$ , а  $q_5, q_6$  координатой  $z$ ). Для получения только вращательных движений необходимо разнонаправленное перемещение с одинаковой скоростью приводов  $q_1, q_2$ ; приводов  $q_3, q_4$ ; приводов  $q_5, q_6$ .

## 2.4. Рабочая зона

Одной из важных характеристик манипуляционных механизмов является рабочая зона. Рабочая зона определяется множеством точек, которых достигает выходное звено робота. Положение выходного звена определяется решением прямой задачи о положении. Значения обобщенных координат манипулятора  $q_i$ ,  $i=1, \dots, N$  находятся в пределах, обусловленных конструкцией механизма:

$$q_{i \min} \leq q_i \leq q_{i \max} .$$

Каждому значению обобщенных координат соответствует определенное положение выходного звена [59]. Кинематическая схема определяет границу рабочего пространства. Оценка размера и формы рабочей зоны определяется решением задачи о положении. При этом используются итерационные алгоритмы. Для механизма в любой точке его рабочего пространства уравнения связи должны об-

ращаться в тождества. В каждой точке рабочей зоны механизма существуют решения прямой и обратной задачи о положении. Вне рабочей зоны, соответственно, решить уравнения связи невозможно.

Полученные точки составляют рабочую зону. Объем рабочего пространства определяется решением задачи о положении численным методом по разработанному алгоритму (Рисунок 2.7). Программа приведена в Приложении 1.

При исследовании рабочей зоны механизма необходимо учитывать ограничения – длины промежуточных звеньев цепей механизма.

Геометрические ограничения будут описываться следующей системой уравнений:

Длины первого и второго звена для каждой цепи соответственно  $L_1, L_2$  ( $L_1 > L_2$ )

Ограничения для 1-й цепи:

$$- 1) \sqrt{(A - y_{A1})^2 + (A + z_{A1})^2} \leq L_1 + L_2$$

$$- 2) \sqrt{(A - y_{A1})^2 + (A + z_{A1})^2} \geq L_1 - L_2$$

Координаты  $y_{A1}, z_{A1}$

$$\begin{pmatrix} x_{A1} \\ y_{A1} \\ z_{A1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Ограничения для 2-й цепи:

$$- 3) \sqrt{(A + y_{A2})^2 + (A - z_{A2})^2} \leq L_1 + L_2$$

$$- 4) \sqrt{(A + y_{A2})^2 + (A - z_{A2})^2} \geq L_1 - L_2$$

Координаты  $y_{A2}, z_{A2}$

$$\begin{pmatrix} x_{A2} \\ y_{A2} \\ z_{A2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ограничения для 3-й цепи:

$$- 5) \sqrt{(A + x_{A3})^2 + (A - z_{A3})^2} \leq L_1 + L_2$$

$$- 6) \sqrt{(A + x_{A3})^2 + (A - z_{A3})^2} \geq L_1 - L_2$$

Координаты  $x_{A3}, z_{A3}$

$$\begin{pmatrix} x_{A3} \\ y_{A3} \\ z_{A3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Ограничения для 4-й цепи:

$$- 7) \sqrt{(A - x_{A4})^2 + (A + z_{A4})^2} \leq L_1 + L_2$$

$$- 8) \sqrt{(A - x_{A4})^2 + (A + z_{A4})^2} \geq L_1 - L_2$$

Координаты  $x_{A4}, z_{A4}$

$$\begin{pmatrix} x_{A4} \\ y_{A4} \\ z_{A4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ограничения для 5-й цепи:

$$- 9) \sqrt{(A + x_{A5})^2 + (A - y_{A5})^2} \leq L_1 + L_2$$

$$- 10) \sqrt{(A + x_{A5})^2 + (A - y_{A5})^2} \geq L_1 - L_2$$

Координаты  $x_{A5}, z_{A5}$ ,

$$\begin{pmatrix} x_{A5} \\ y_{A5} \\ z_{A5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Ограничения для 6-й цепи:

$$- 11) \sqrt{(A - x_{A6})^2 + (A + y_{A6})^2} \leq L_1 + L_2$$

$$- 12) \sqrt{(A - x_{A6})^2 + (A + y_{A6})^2} \geq L_1 - L_2$$

Координаты  $x_{A6}, z_{A6}$

$$\begin{pmatrix} x_{A6} \\ y_{A6} \\ z_{A6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

где  $A$  – длина ребра неподвижного куба основания.

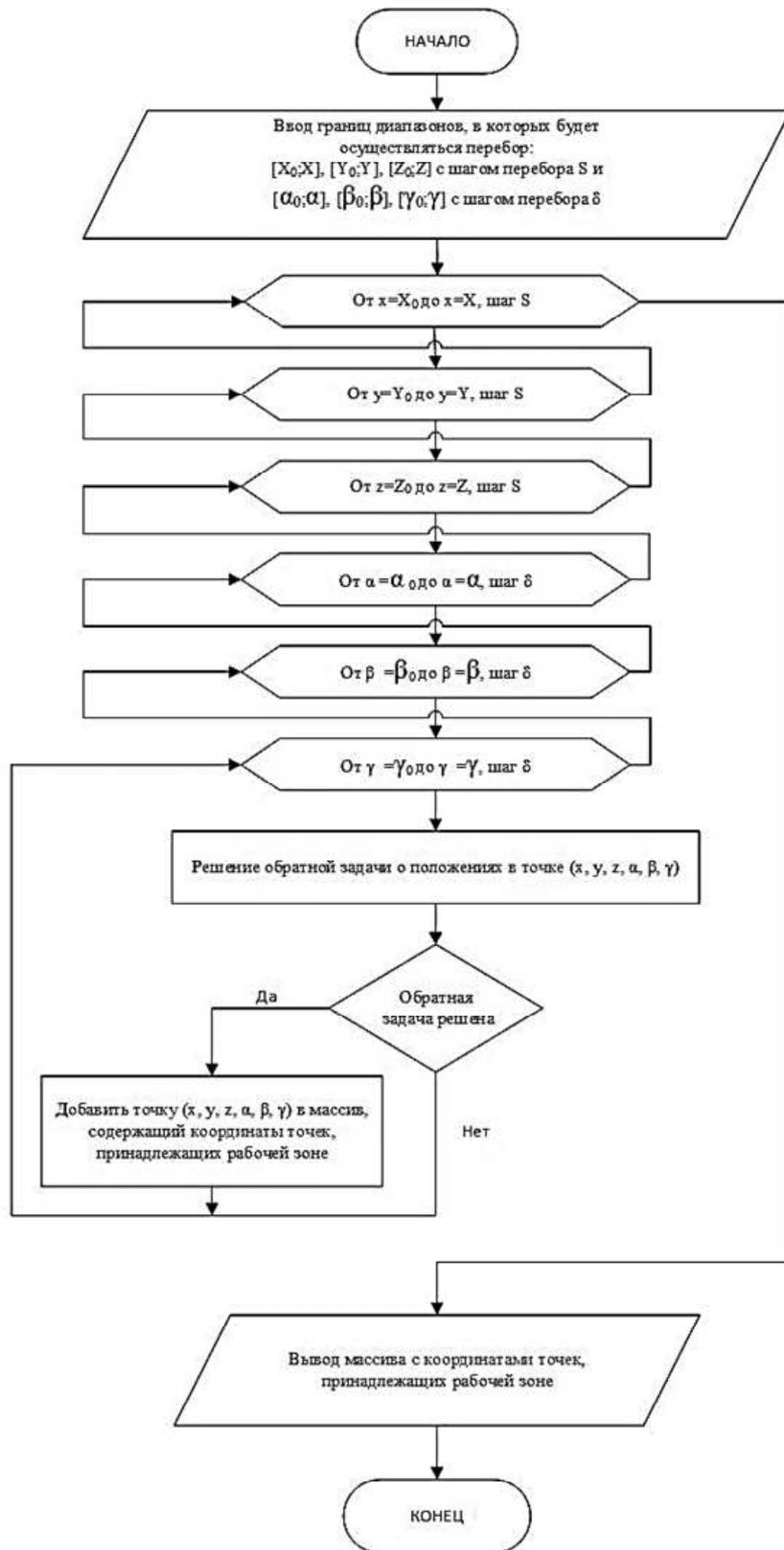


Рисунок 2.7 Блок-схема определения рабочей зоны

Форма и размеры рабочей зоны механизма зависят не только от соотношения размеров ребер входного и выходного звеньев и ориентации выходного звена, но и от длин звеньев  $L_1$  и  $L_2$ . Исследуем рабочую зону механизма с основанием в форме куба с длиной ребра, равной  $2A$  ( $A=10$ ), и выходным звеном в форме куба с ребром, равным  $2a$  ( $a=1$ ), со всеми промежуточными звеньями одинаковой длины ( $L_1=L_2=A$ ).

Рабочая зона механизма ограничена поверхностью, которую образует множество точек крайних положений центра выходного звена. Реализуя поступательное движение, приводы движутся вдоль осей координат в диапазоне  $[(-A+a); (A-a)]$ . Размер диапазона  $h$  можно записать в виде:

$$h = 2(A - a).$$

В каждой из шести кинематических цепей максимально удаленное от оси привода положение центра выходного звена определяется наибольшим радиусом окружности, образованной вращением вокруг оси соответствующего привода. Очевидно, наибольшее значение радиуса такого вращения достижимо при «разворачивании» звеньев  $L_1$  и  $L_2$  в прямую линию (угол между  $L_1$  и  $L_2$  равен  $180^\circ$ ) и определяется суммой длин звеньев  $L_1$  и  $L_2$  и половины диагонали грани куба выходного звена:

$$L_1 + L_2 + a\sqrt{2}.$$

или с учетом  $L_1 = L_2 = A$ :

$$2A + a\sqrt{2},$$

Пересекающиеся цилиндры, построенные вокруг осей каждой пары приводов, пересекаясь, образуют фигуру, имеющую ось, параллельную соответствующей оси системы координат. Каждая такая фигура накладывает свои ограничения на рабочую зону. Приводы  $q_1$  и  $q_2$  движутся вдоль оси  $x$ . Ограничения работы этих приводов представляет собой фигуру с пересекающимися цилиндрами с осью, параллельной оси  $x$  (рис. 2.8).

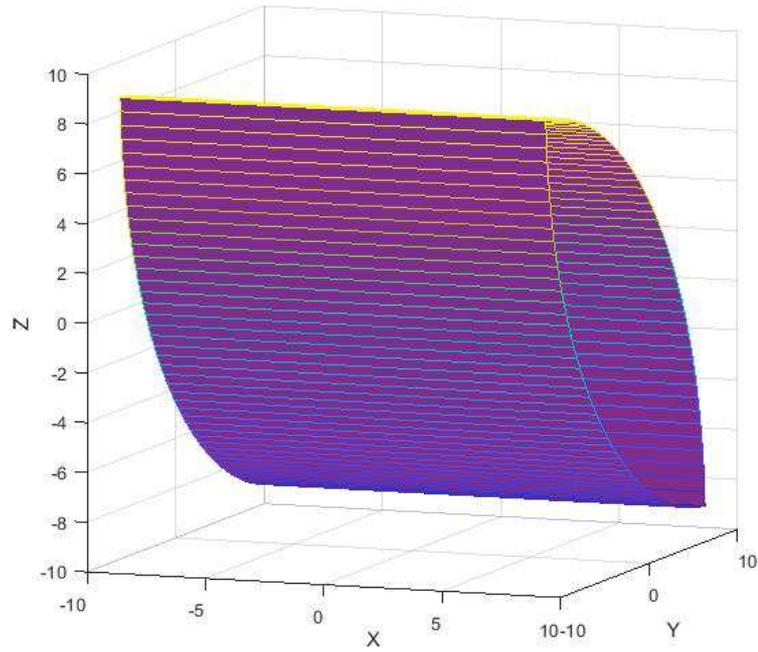


Рисунок 2.8 Фигура с пересекающимися цилиндрами с осью, параллельной оси  $x$

Ограничения работы приводов  $q_3, q_4$  образуют фигуру пересечения цилиндров с осью, параллельной оси  $y$  (Рисунок 2.9), а приводов  $q_5, q_6$  – фигуру с осью параллельной оси  $z$  (Рисунок 2.10).

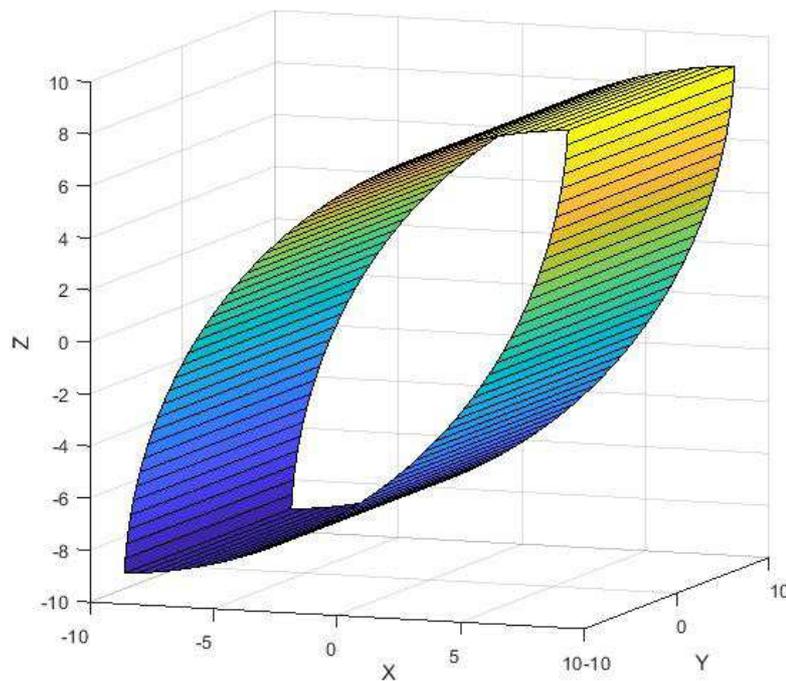


Рисунок 2.9 Фигура с пересекающимися цилиндрами с осью, параллельной оси  $y$

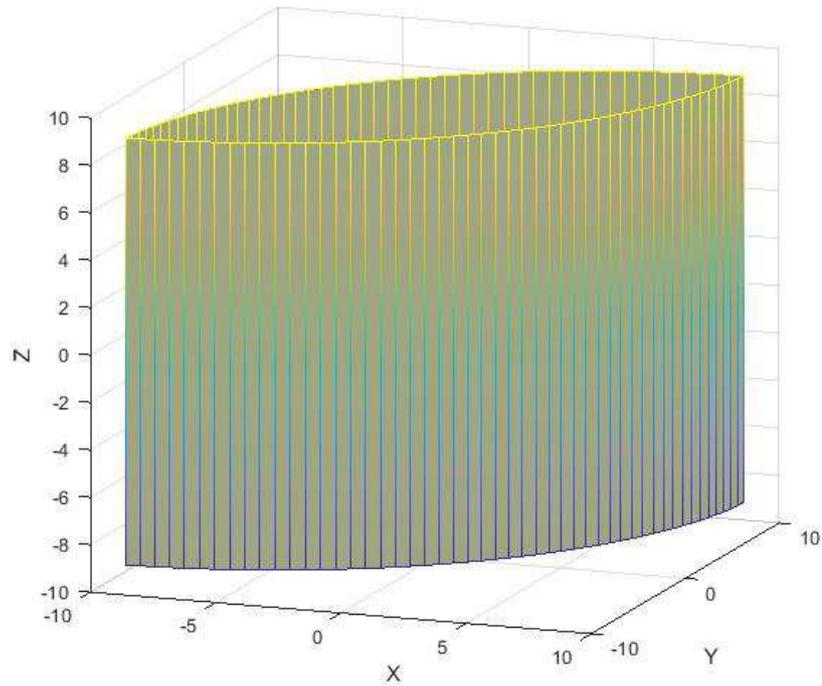


Рисунок 2.10 Фигура с пересекающимися цилиндрами с осью, параллельной оси  $z$

Последовательно добавим к первой паре цилиндрических поверхностей две другие пары, ограничивающие рабочую зону механизма (Рисунок 2.11, 2.12).

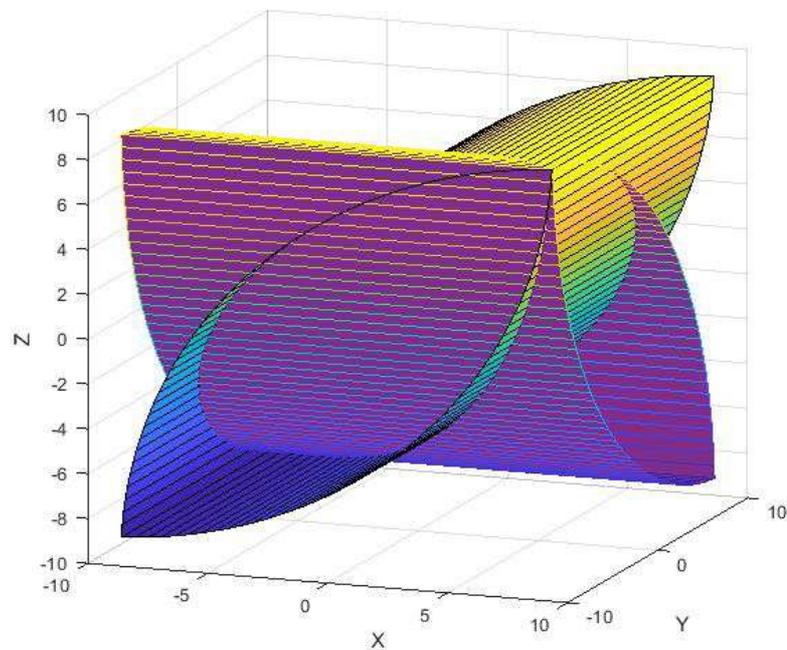


Рисунок 2.11 Фигура с пересекающимися цилиндрами с осями параллельными осям  $x$  и  $y$

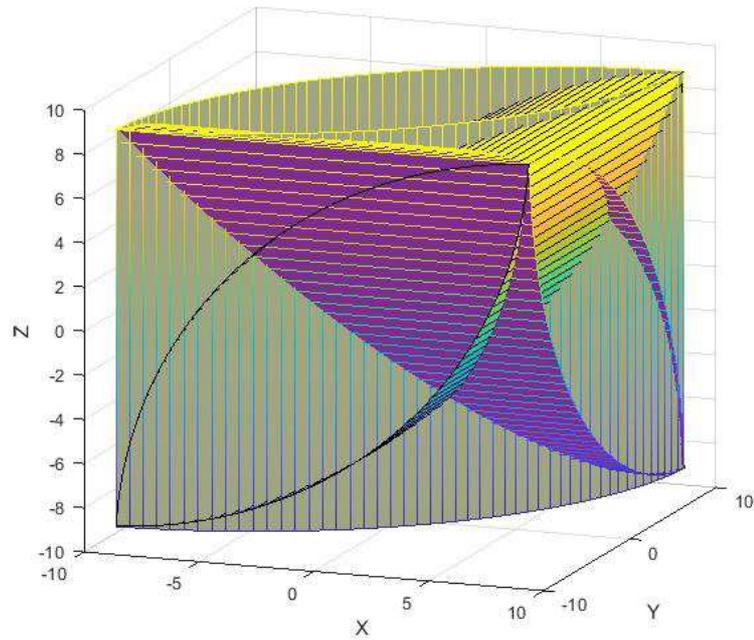


Рисунок 2.12 Рабочая зона - фигура с пересекающимися цилиндрами с осями параллельными осям  $x$ ,  $y$  и  $z$

Форма рабочей зоны представлена на Рисунке 2.13 (Приложение 1).

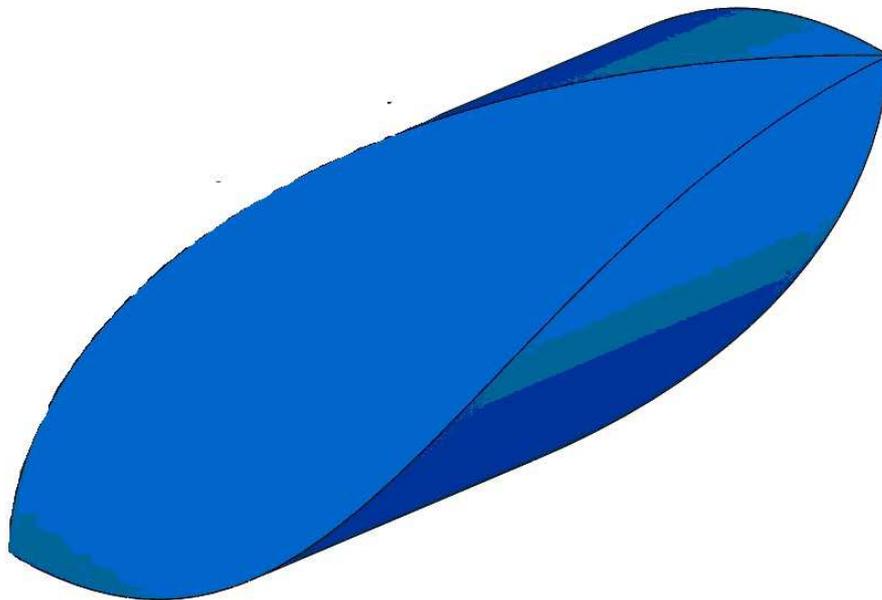


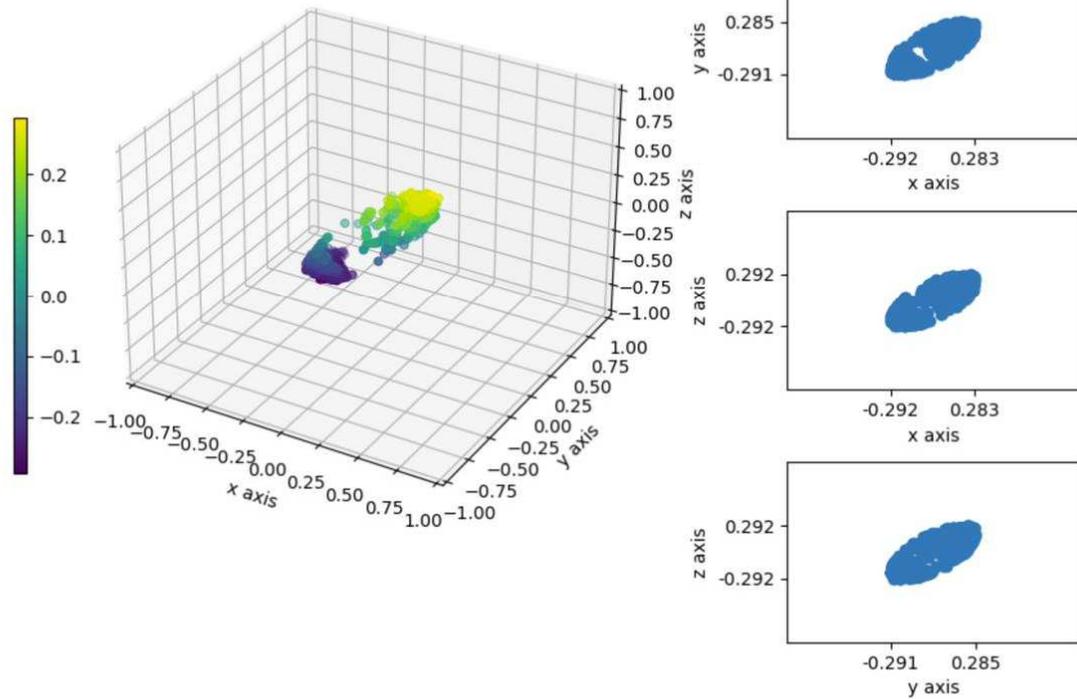
Рисунок 2.13 Форма рабочей зоны

Важной задачей при разработке манипуляционного механизма является определение максимальной рабочей зоны при различных длинах промежуточных

звеньев. Решение задачи позволяет оптимально выбрать размеры промежуточных звеньев для получения заданной рабочей зоны [23, 61].

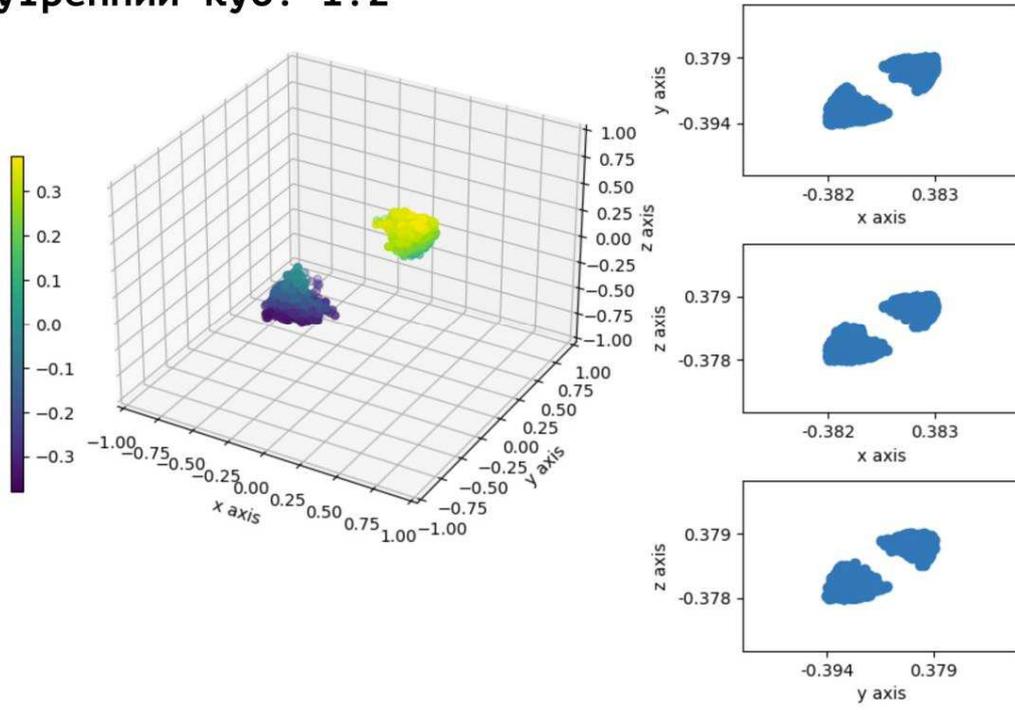
Примеры решения задачи с различными длинами промежуточных звеньев представлены на Рисунке 2.14. Расчеты проводились в MatLab, обозначения осей на графиках приведены на английском языке [48].

**Внешний куб: 2**  
**Внутренний куб: 1.4**



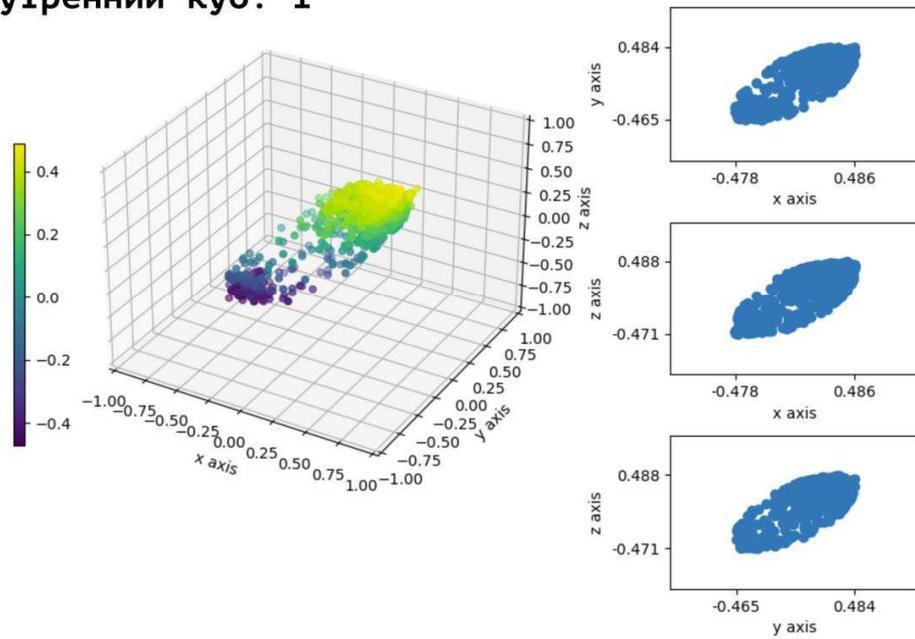
a)

**Внешний куб: 2**  
**Внутренний куб: 1.2**



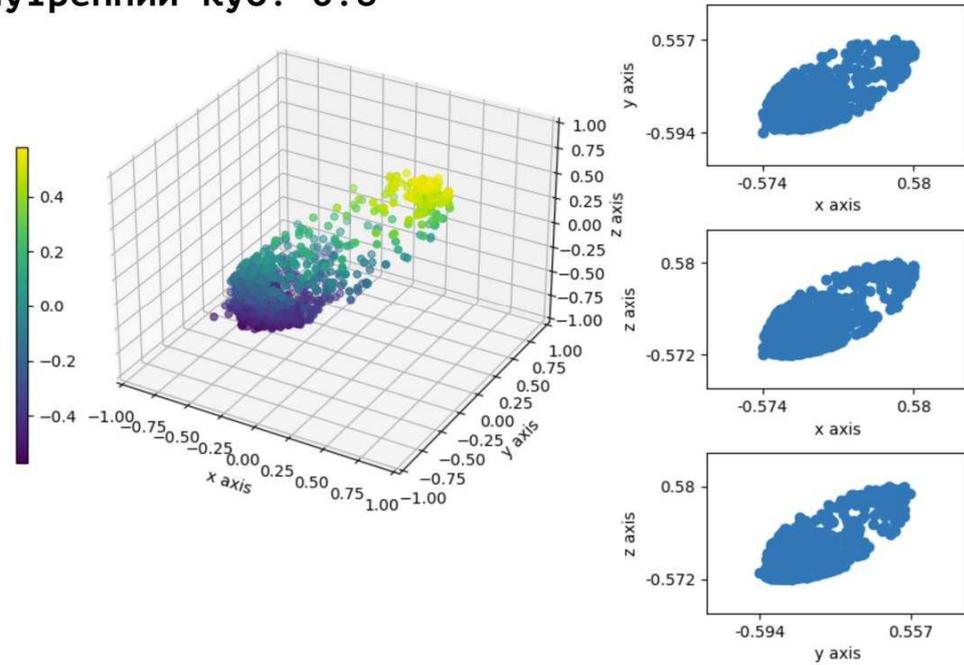
б)

**Внешний куб: 2**  
**Внутренний куб: 1**



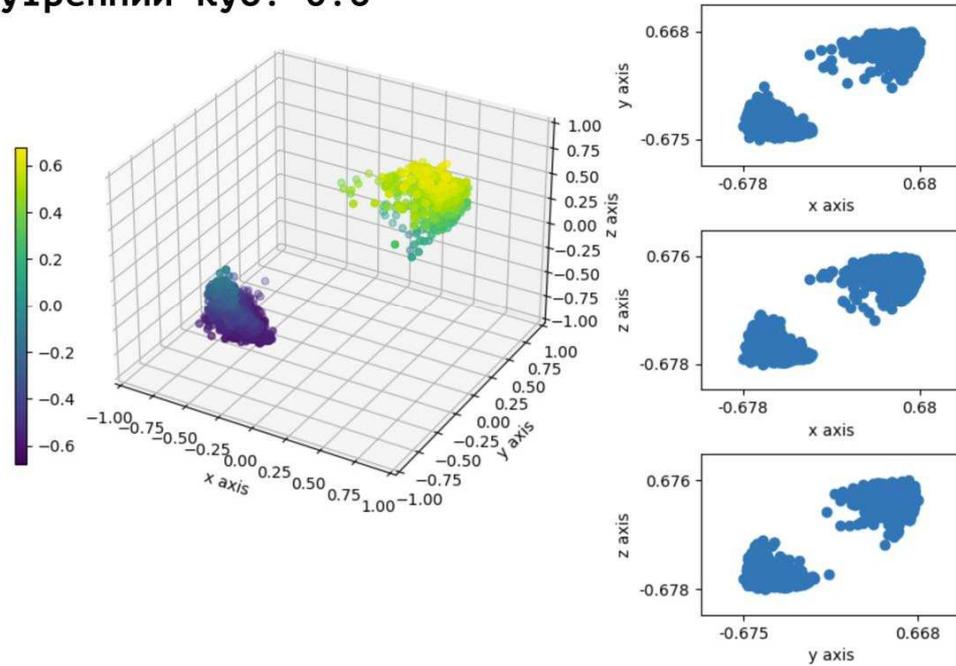
в)

Внешний куб: 2  
Внутренний куб: 0.8



г)

Внешний куб: 2  
Внутренний куб: 0.6



д)

Рисунок 2.14 Размер рабочей зоны при соотношениях внешнего (неподвижного) основания и подвижного куба

а) 2-1,4; б) 2-1,2; в) 2-1; г) 2-0,8; д) 2-0,6

## 2.5. Кинематическая точность механизма

Одна из характеристик оценки качества функционирования манипуляционных механизмов – точность позиционирования. Задача обеспечения точности должна решаться на этапе проектирования машин и оборудования [6, 7, 38, 62]. Большая часть производств нуждается в промышленных роботах высокой точности до 0,05 мм.

Погрешность позиционирования определяется ошибками:

- систематическими (неточность работы системы управления, отклонения от номинала размеров звеньев)

- случайными составляющими (зазоры в шарнирах, ослабление затяжки в креплениях, колебания температуры, вибрации робота, вызванные смежным оборудованием, остаточные колебания, усталостные деформации звеньев).

Систематические ошибки могут быть частично скомпенсированы. Уменьшение влияния случайных ошибок должно учитываться при проектировании и эксплуатации.

В работе была исследована систематическая составляющая – неточность изготовления звеньев механизма.

Для решения поставленной задачи применен классический подход к оценке линейной точности [62].

Для решения задачи нахождения отклонения положения выходного звена от расчетной схемы при отклонении размеров звеньев механизма используем систему шести линейно независимых уравнений. Решение этой системы уравнений позволяет определить ошибку позиционирования.

Рассмотрим подвижное звено в общем виде – в виде прямоугольника с размерами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . При этом координаты точек крепления будут иметь вид:  $A_1(0, b, -c)$ ,  $A_2(0, -c, b)$ ,  $A_3(-a, 0, c)$ ,  $A_4(a, 0, -c)$ ,  $A_5(-a, b, 0)$ ,  $A_6(a, -b, 0)$ .

Из уравнений (2.1) задачу о положении можно записать в виде неявных функций:

$$\begin{aligned}
F_1 &= q_1 - \\
&- (x_0 - b \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) - c \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha)) = 0 \\
F_2 &= q_2 - \\
&- (x_0 + b \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) + c \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)) = 0 \\
F_3 &= q_3 - (y_0 - c \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) - a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta) = 0 \\
F_4 &= q_4 - (y_0 + a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) + c \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta) = 0 \\
F_5 &= q_5 - (z_0 + a \cdot \sin \beta + b \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha) = 0 \\
F_6 &= q_6 - (z_0 - a \cdot \sin \beta - b \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha) = 0
\end{aligned}$$

Полный дифференциал функции можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_i}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_i}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_i}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial F_i}{\partial a} \delta a + \frac{\partial F_i}{\partial b} \delta b + \frac{\partial F_i}{\partial c} \delta c + \frac{\partial F_i}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial F_i}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial F_i}{\partial z_0} \delta z_0 \\
&+ \frac{\partial F_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial F_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial F_i}{\partial q_3} \delta q_3 + \frac{\partial F_i}{\partial q_4} \delta q_4 + \frac{\partial F_i}{\partial q_5} \delta q_5 + \frac{\partial F_i}{\partial q_6} \delta q_6 = 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $i=1, 6$

Принимаем приращения в приводах равными нулю  $\delta q_1 = \delta q_2 = \delta q_3 = \delta q_4 = \delta q_5 = \delta q_6 = 0$ . Уравнения неявных функций (2.2) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial F_1}{\partial b} \delta b + \frac{\partial F_1}{\partial c} \delta c + \frac{\partial F_1}{\partial x_0} \delta x_0 = 0 \\
&\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial F_2}{\partial b} \delta b + \frac{\partial F_2}{\partial c} \delta c + \frac{\partial F_2}{\partial y_0} \delta y_0 = 0 \\
&\frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial F_3}{\partial c} \delta c + \frac{\partial F_3}{\partial a} \delta a + \frac{\partial F_3}{\partial y_0} \delta y_0 = 0 \\
&\frac{\partial F_4}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_4}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_4}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial F_4}{\partial c} \delta c + \frac{\partial F_4}{\partial a} \delta a + \frac{\partial F_4}{\partial y_0} \delta y_0 = 0 \\
&\frac{\partial F_5}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_5}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_5}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial F_5}{\partial b} \delta b + \frac{\partial F_5}{\partial a} \delta a + \frac{\partial F_5}{\partial z_0} \delta z_0 = 0 \\
&\frac{\partial F_6}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_6}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_6}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial F_6}{\partial b} \delta b + \frac{\partial F_6}{\partial a} \delta a + \frac{\partial F_6}{\partial z_0} \delta z_0 = 0
\end{aligned}$$

Частные производные будут иметь вид:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_0} = -1;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial c} = \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial b} = \sin \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = c \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) - b \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha);$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta} = c \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha - b \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = b \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) + c \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_0} = -1;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial b} = (\sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial c} = \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = c \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) - b \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha);$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta} = c \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta) - b \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha);$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} = b \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha) - c \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \gamma \cdot \cos \alpha) \frac{\partial F_3}{\partial y_0} = -1;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial c} = (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial a} = \sin \gamma \cdot \cos \beta$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha} = c \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha);$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \beta} = -a \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta - c \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \gamma} = a \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta - c \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta);$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial y_0} = -1;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial a} = (\sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha);$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial c} = -\sin \gamma \cdot \cos \beta$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial \alpha} = -a \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha); \quad \frac{\partial F_4}{\partial \beta} = c \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta + a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial \gamma} = a \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) - c \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta;$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial z_0} = -1; \quad \frac{\partial F_5}{\partial a} = -(\sin \beta); \quad \frac{\partial F_5}{\partial b} = -\cos \beta \cdot \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial \alpha} = -b \cdot (\cos \beta \cdot \cos \alpha); \quad \frac{\partial F_5}{\partial \beta} = b \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta) - a \cdot \cos \beta; \quad \frac{\partial F_5}{\partial \gamma} = 0;$$

$$\frac{\partial F_6}{\partial z_0} = -1; \quad \frac{\partial F_6}{\partial b} = (\cos \beta \cdot \sin \alpha); \quad \frac{\partial F_6}{\partial a} = \sin \beta;$$

$$\frac{\partial F_6}{\partial \alpha} = b \cdot (\cos \beta \cdot \cos \alpha); \quad \frac{\partial F_6}{\partial \beta} = a \cdot \cos \beta - b \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha; \quad \frac{\partial F_6}{\partial \gamma} = 0.$$

Из уравнений (2.2) можно получить значения отклонения позиционирования исполнительного органа.

Зададим отклонения размеров выходного звена  $\delta x=0,15$ ,  $\delta y=0,015$ ,  $\delta z=0,01$ , размеры подвижного куба  $a=20$ ,  $b=20$ ,  $c=20$ .

Значения отклонения координат выходного звена представлены в Таблице 2.1.

Таблица 2.1 Значения отклонения углов выходного звена

Координаты выходного звена $\alpha, \beta, \gamma$ , град	$\Delta \alpha$ , град.	$\Delta \beta$ , град	$\Delta \gamma$ , град
3; 3; 5	0,067	0,035	0,15
7; 8; 5	0,037	0,025	0,18

Используя данный подход, можно определить отклонения выходного звена при неточностях изготовления промежуточных звеньев в различных положениях.

### **Результаты и выводы по главе**

1. В результате проведенного структурного синтеза предложены новые кинематические схемы пространственных механизмов параллельной структуры с шестью степенями свободы с постоянным передаточным отношением при поступательных движениях.
2. Для разработанных схем механизмов получены уравнения связи между обобщенными (независимыми) координатами, описывающими изменение положения входных звеньев механизма, и абсолютными координатами его выходного звена.
3. Разработаны математические модели и программы для решения обратной задачи о положении и определения параметров рабочего пространства манипулятора.
4. Полученное аналитическое решение обратной задачи о положениях позволяет проводить дальнейшие кинематические и динамические исследования манипулятора.
5. В результате проведенного компьютерного моделирования и анализа рабочего пространства манипулятора получена геометрическая фигура рабочей зоны в трехмерном пространстве.
6. Установлены зависимости размеров и формы рабочего пространства механизма от размеров длин промежуточных звеньев.
7. Разработанные программы графического определения рабочего пространства манипулятора позволяют оценить габариты манипулятора и размеры и форму его рабочей зоны.

8. Установлены зависимости неточности изготовления звеньев на точность позиционирования выходного звена.
9. Приведены численные примеры отклонения положения выходного звена от неточности изготовления звеньев.

### ГЛАВА 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА

В данной главе исследуются динамические и силовые характеристики механизма с шестью степенями свободы. Представлено решение обратной задачи о скоростях. Анализ динамики позволяет определять силовые и скоростные характеристики приводов, а также использовать их в дальнейшем для построения схемы управления роботом.

#### 3.1. Задача о скоростях и особых положениях

Для решения задачи о скоростях запишем функцию положения (2.1) механизма в неявном виде:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= q_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A1} \\ y_{A1} \\ z_{A1} \end{pmatrix} \right), & F_2 &= q_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A2} \\ y_{A2} \\ z_{A2} \end{pmatrix} \right), \\
 F_3 &= q_3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A3} \\ y_{A3} \\ z_{A3} \end{pmatrix} \right), & F_4 &= q_4 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A4} \\ y_{A4} \\ z_{A4} \end{pmatrix} \right), \\
 F_5 &= q_5 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A5} \\ y_{A5} \\ z_{A5} \end{pmatrix} \right), & F_6 &= q_6 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \left( \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A6} \\ y_{A6} \\ z_{A6} \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Уравнения связей имеют вид:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= q_1 - (x_0 + a \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)) = 0 \\
 F_2 &= q_2 - (x_0 + a \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)) = 0 \\
 F_3 &= q_4 - (y_0 + a \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \beta)) = 0 \\
 F_4 &= q_3 - (y_0 + a \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \beta + \cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta)) = 0
 \end{aligned}$$

$$F_5 = q_5 - (z_0 + a \cdot (\sin \beta + \cos \beta \cdot \sin \alpha)) = 0$$

$$F_6 = q_6 - (z_0 - a \cdot (\sin \beta + \cos \beta \cdot \sin \alpha)) = 0$$

где,  $a$  – сторона подвижного куба

Решение задачи о скоростях решаем дифференцированием уравнений связей:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = -\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \frac{\partial F_1}{\partial y_0} & \frac{\partial F_1}{\partial z_0} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_0} & \frac{\partial F_2}{\partial y_0} & \frac{\partial F_2}{\partial z_0} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_0} & \frac{\partial F_3}{\partial y_0} & \frac{\partial F_3}{\partial z_0} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_0} & \frac{\partial F_4}{\partial y_0} & \frac{\partial F_4}{\partial z_0} & \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial \beta} & \frac{\partial F_4}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_5}{\partial x_0} & \frac{\partial F_5}{\partial y_0} & \frac{\partial F_5}{\partial z_0} & \frac{\partial F_5}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_5}{\partial \beta} & \frac{\partial F_5}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_6}{\partial x_0} & \frac{\partial F_6}{\partial y_0} & \frac{\partial F_6}{\partial z_0} & \frac{\partial F_6}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_6}{\partial \beta} & \frac{\partial F_6}{\partial \gamma} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial q_2} & \frac{\partial F_1}{\partial q_3} & \frac{\partial F_1}{\partial q_4} & \frac{\partial F_1}{\partial q_5} & \frac{\partial F_1}{\partial q_6} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & \frac{\partial F_2}{\partial q_3} & \frac{\partial F_2}{\partial q_4} & \frac{\partial F_2}{\partial q_5} & \frac{\partial F_2}{\partial q_6} \\ \frac{\partial F_3}{\partial q_1} & \frac{\partial F_3}{\partial q_2} & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} & \frac{\partial F_3}{\partial q_4} & \frac{\partial F_3}{\partial q_5} & \frac{\partial F_3}{\partial q_6} \\ \frac{\partial F_4}{\partial q_1} & \frac{\partial F_4}{\partial q_2} & \frac{\partial F_4}{\partial q_3} & \frac{\partial F_4}{\partial q_4} & \frac{\partial F_4}{\partial q_5} & \frac{\partial F_4}{\partial q_6} \\ \frac{\partial F_5}{\partial q_1} & \frac{\partial F_5}{\partial q_2} & \frac{\partial F_5}{\partial q_3} & \frac{\partial F_5}{\partial q_4} & \frac{\partial F_5}{\partial q_5} & \frac{\partial F_5}{\partial q_6} \\ \frac{\partial F_6}{\partial q_1} & \frac{\partial F_6}{\partial q_2} & \frac{\partial F_6}{\partial q_3} & \frac{\partial F_6}{\partial q_4} & \frac{\partial F_6}{\partial q_5} & \frac{\partial F_6}{\partial q_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$  – матрица частных производных от неявной функции по  $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$ ;

$\mathbf{B}$  – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ ;

$\mathbf{R}$  – матрица вращения;

$\mathbf{V}$  – матрица скоростей поступательного движения  $V_x, V_y, V_z$  и вращательного движения выходного звена  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ , причем угловые скорости разложены на базис не перпендикулярных друг другу осей, которые определяются углами  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Частные производные функций равны:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_5}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_6}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_0} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_0} = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial y_0} = -1; \quad \frac{\partial F_4}{\partial y_0} = -1; \quad \frac{\partial F_5}{\partial y_0} = 0; \quad \frac{\partial F_6}{\partial y_0} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z_0} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z_0} = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial z_0} = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial z_0} = 0; \quad \frac{\partial F_5}{\partial z_0} = -1; \quad \frac{\partial F_6}{\partial z_0} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \gamma \cdot \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \gamma \cdot \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha} = -\cos \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha; \quad \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} = \cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial \alpha} = \cos \beta \cdot \cos \alpha; \quad \frac{\partial F_1}{\partial \beta} = \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta} = -\cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \beta} = \sin \gamma \cdot \sin \beta + \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha; \quad \frac{\partial F_4}{\partial \beta} = -\sin \gamma \cdot \sin \beta - \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial \beta} = -\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \beta; \quad \frac{\partial F_6}{\partial \beta} = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \beta;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = \cos \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \gamma - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} = \cos \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \gamma} = \cos \gamma \cdot \cos \beta - \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial \gamma} = \cos \gamma \cdot \cos \beta - \sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta; \quad \frac{\partial F_5}{\partial \gamma} = 0; \quad \frac{\partial F_6}{\partial \gamma} = 0$$

Скорость выходного звена может быть разложена на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и на подвижные оси  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Для решения задачи о скоростях необходимо найти соотношение проекций скоростей на оси  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Обозначив скорости  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$  вокруг

осей  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , а скорости  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  вокруг осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , можно получить их соотношение [54]:

$$\omega_x = \dot{\alpha} \cdot x_\alpha + \dot{\beta} \cdot x_\beta + \dot{\gamma} \cdot x_\gamma;$$

$$\omega_y = \dot{\alpha} \cdot y_\alpha + \dot{\beta} \cdot y_\beta + \dot{\gamma} \cdot y_\gamma;$$

$$\omega_z = \dot{\alpha} \cdot z_\alpha + \dot{\beta} \cdot z_\beta + \dot{\gamma} \cdot z_\gamma.$$

где  $x_\gamma$ ,  $y_\gamma$ ,  $z_\gamma$  – координаты единичного вектора оси первой кинематической пары

фиктивной кинематической цепи, расположенной вдоль оси  $z$  
$$\begin{pmatrix} x_\gamma \\ y_\gamma \\ z_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$x_\beta$ ,  $y_\beta$ ,  $z_\beta$  – координаты единичного вектора второй кинематической пары фиктивной кинематической цепи, равные произведению матрицы поворота на угол  $\gamma$  вокруг оси  $z$  и умноженные на координаты единичного вектора второй пары в начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix};$$

$x_\alpha$ ,  $y_\alpha$ ,  $z_\alpha$  – координаты единичного вектора третьей кинематической пары фиктивной кинематической цепи, равные произведению матрицы поворота выходного звена на координаты единичного вектора третьей пары в начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} = (\mathbf{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}$$

Пример решения обратной задачи о скоростях.

Зададим ориентацию выходного звена:  $\alpha=45.5^0$ ;  $\beta=42.0^0$ ;  $\gamma=40^0$  и скорости движения выходного звена  $V_x=1.2$  м/с;  $V_y=1.3$  м/с;  $V_z=1.0$  м/с;  $\dot{\alpha} = 1.0$  рад/с;  $\dot{\beta} = 1.1$  рад/с;  $\dot{\gamma} = 1.2$  рад/с.

Решая задачу, можно определить скорости в приводах

$$q_1 = -0.214 \text{ м/с}; \quad q_2 = -1.756 \text{ м/с}; \quad q_3 = -2.866 \text{ м/с};$$

$$q_4 = 0.466 \text{ м/с}; \quad q_5 = -1.494 \text{ м/с}; \quad q_6 = -1.106 \text{ м/с};$$

### 3.2. Исследование области особых положений

Особые положения можно определить, используя свойства матриц **A** и **B** [2, 18, 56, 65, 73, 96, 113]. Особенно важно исследовать область особых положений при их переходе [12]. Равенство нулю определителя матриц **A** или **B** показывает наличие особых положений. Область особых положений представляет собой сложную пространственную фигуру (Рисунок 3.1). Для исследования области особых положений построены сечения при различных углах  $\alpha$ ;  $\beta$ ;  $\gamma$  (Рисунок. 3.2).

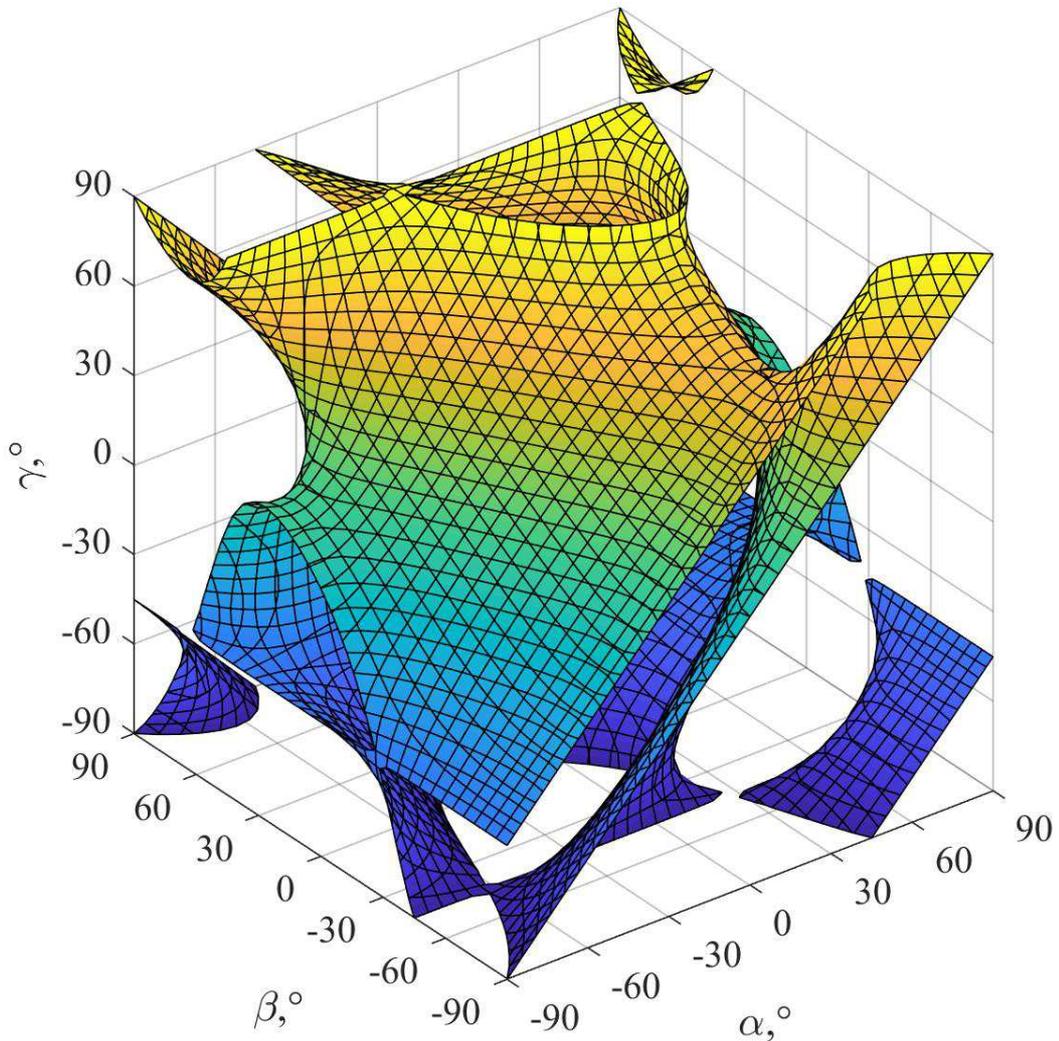
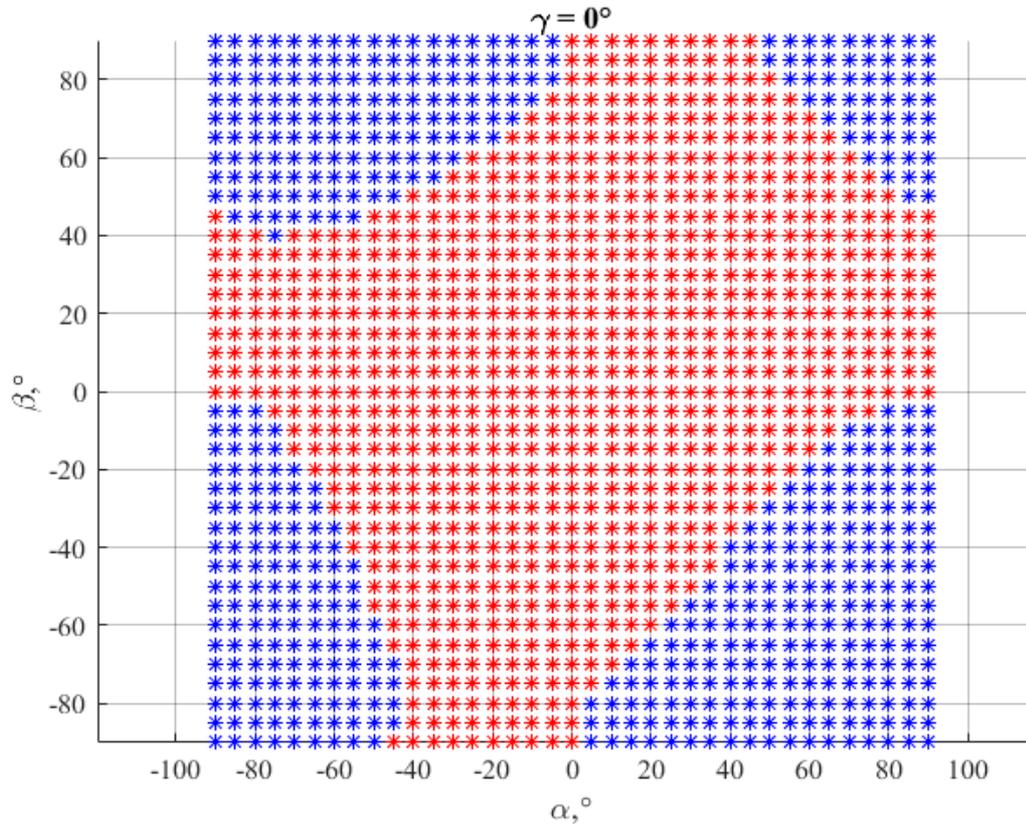
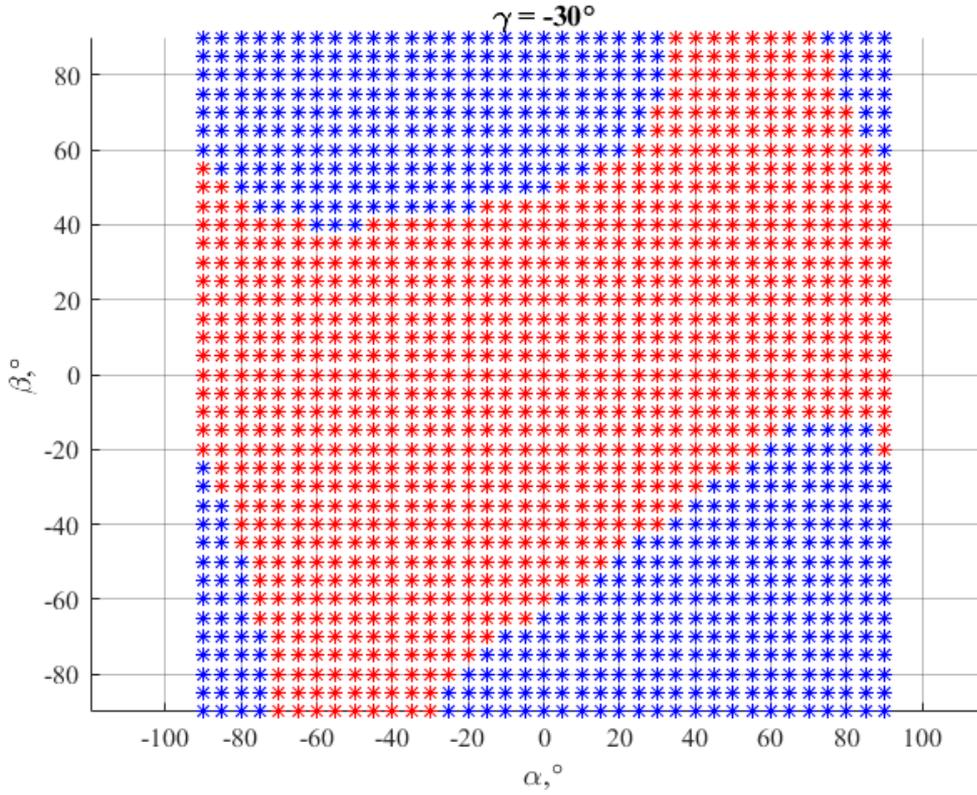


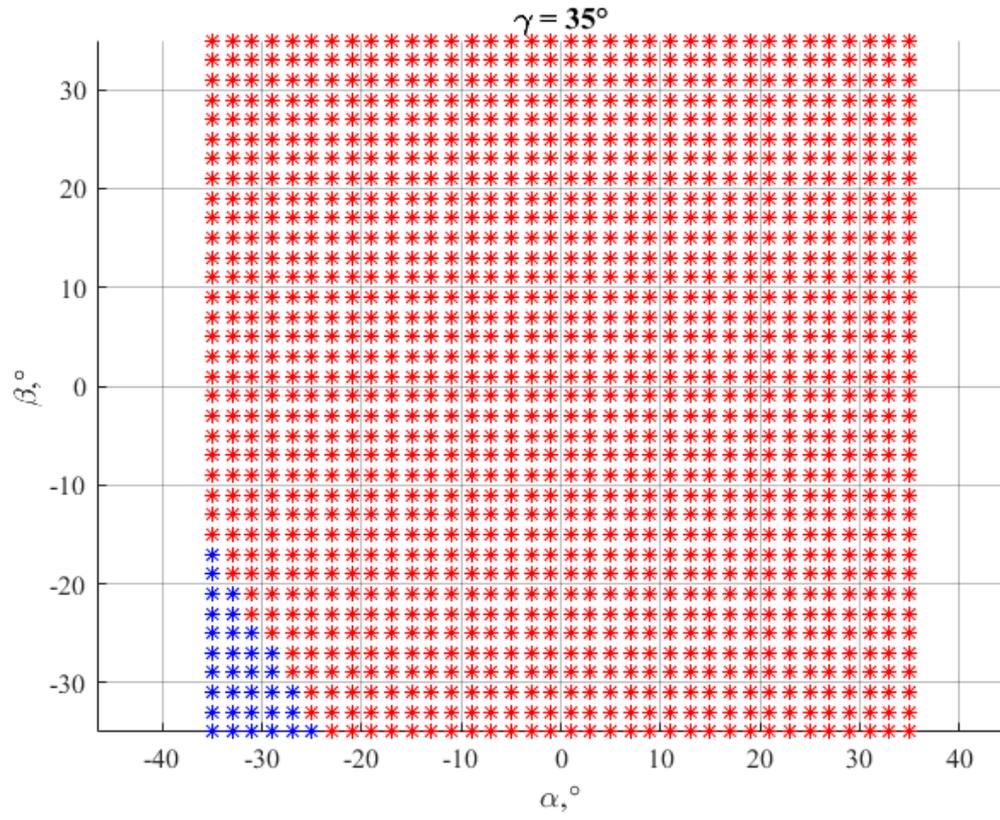
Рисунок 3.1 Область сингулярностей, общий вид



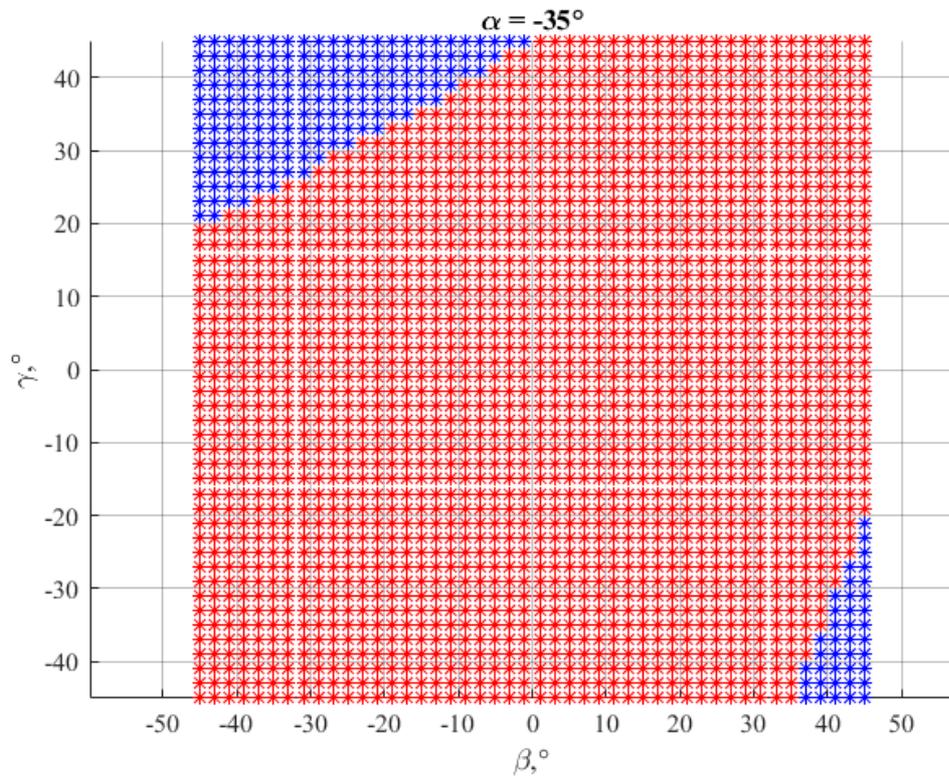
a)



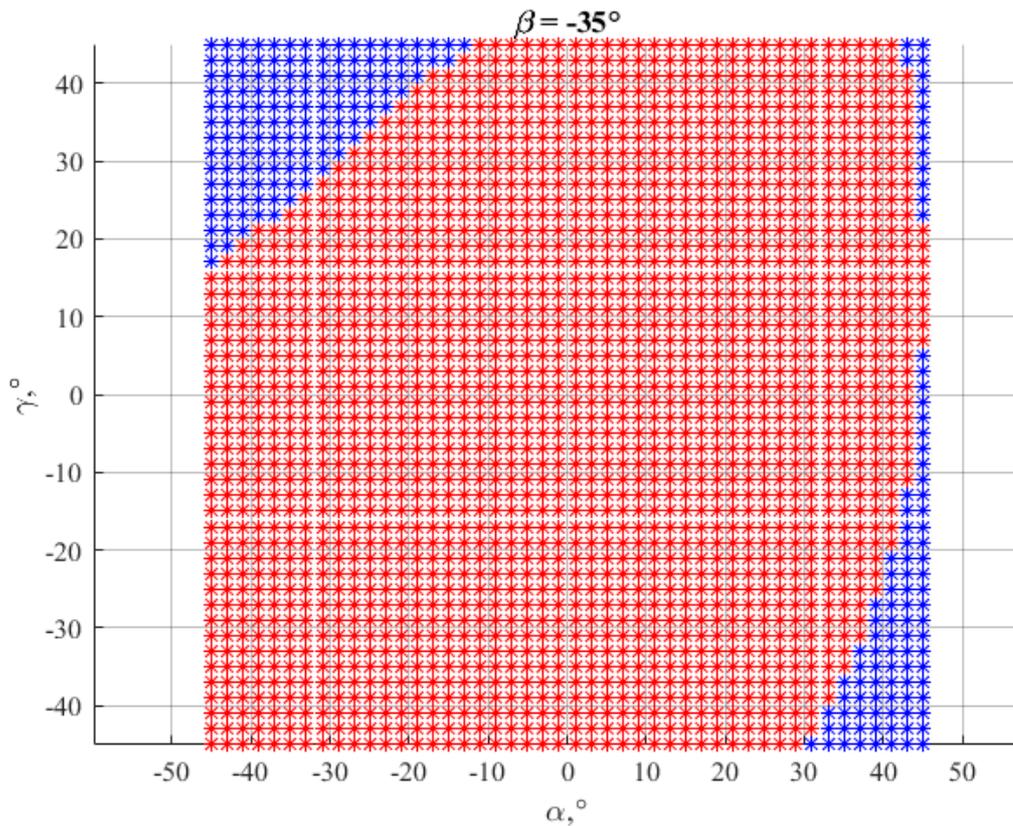
b)



B)



Г)



д)

Рисунок 3.2 Сечения области особых положений при постоянных углах

а –  $\gamma=0^0$ ; б –  $\gamma=-30^0$ ; в –  $\gamma=35^0$ ; г –  $\alpha=35^0$ ; д –  $\beta=-35^0$

Таким образом, проанализировав область особых положений, можно определить область, в которой не наблюдаются особые положения – это область с изменением углов  $-30^0 < \alpha < 30^0$ ,  $-30^0 < \beta < 30^0$ ,  $-30^0 < \gamma < 30^0$ .

### 3.3. Силовой анализа механизма с шестью степенями свободы

К силовому анализу относится исследование поведения механизма с приложенной к нему нагрузкой [3–5, 9, 12, 22, 24, 25–27, 33, 37–39, 45, 49, 57, 66, 68, 80, 86, 89]. Эти исследования проводятся на различных этапах проектирования

механизма. Результаты расчетов позволяют скорректировать конструкцию механизма с целью улучшения динамических показателей механической части робота.

Расчеты состоят из следующих элементов:

- составление математической модели (составление уравнений) с учетом действующих сил,
- решение расчетных уравнений.

Важным этапом исследования является переход от конструкции к его динамической модели.

Адекватность модели зависит не только от механизма и законов его движения, но и от задач исследования.

При проведении силового анализа примем следующие допущения:

- все звенья абсолютно твердые,
- все кинематические пары идеальные (отсутствует трение),
- к механизму приложены обобщенные движущие силы.

При проведении силового анализа решаются две задачи: прямая и обратная. Прямая задача – это определение скоростей и ускорений на исполнительном органе механизма при заданных скоростях и силах (моментах) в приводах механизма. При решении обратной задачи по заданным скоростям и ускорениям выходного звена определяются скорости и силы (моменты), действующие в приводах [64].

Силовой расчет имеет большое практическое значение. Расчет позволяет выбирать двигатели, определять динамические нагрузки, действующие на звенья механизмов и кинематические пары, а также оценивать прочность и жесткость конструкций.

Решение задач силового анализа для рассматриваемых пространственных механизмов приводит к сложным системам уравнений. Это вызывает необходимость применять другие методы решения. Одним из таких решений является подход, оперирующий с группами силовых и кинематических винтов.

В механизме различают кинематические и силовые винты. Силовой винт – винт, к которому приводится система сил, действующих на тело. (Вектор винта –

равнодействующая сила, моментная часть винта – момент всех сил относительно точки приведения). Кинематический винт – характеризует движение (вектор винта – вектор поворота вокруг оси винта, момент – линейное перемещение). Винт определяется шестью плюккеровыми координатами (три – проекции вектора винта на оси, другие три – проекции момента винта на оси).

Относительный момент двух винтов – сумма скалярных произведений вектора первого винта на момент второго и вектора второго винта на момент первого. Относительный момент силового и кинематического винтов – элементарная работа силового винта на малом перемещении.

В работе ставится задача определения силовых винтов, действующих на выходное звено со стороны кинематических цепей. Этот анализ необходим для решения кинематических и динамических задач. Кроме того, решается задача определения моментов силовых винтов относительно главных центральных осей инерции выходного звена. Этот анализ необходим в тех случаях, когда имеет место вращательное движение выходного звена.

Центр неподвижной системы координат  $Oxyz$  поместим в точке пересечения диагоналей параллелепипеда, вдоль ребер которого расположены приводы. Центр связанной с выходным звеном подвижной системы координат  $O^m\xi\eta\zeta$  совпадает с точкой пересечения главных центральных осей инерции выходного звена. Примем, что в начальном положении центры подвижной и неподвижной систем координат совпадают. Координаты центров сферических шарниров, расположенных на выходном звене:  $A_1(0, a, -a)$ ;  $A_2(0, -a, a)$ ;  $A_3(-a, 0, a)$ ;  $A_4(a, 0, -a)$ ;  $A_5(-a, a, 0)$ ;  $A_6(a, -a, 0)$ .

Усилия, создаваемые приводами, направлены параллельно осям неподвижной системы координат и передаются кинематическими цепями без изменения модуля и направления на выходное звено.

Каждый из моментов внешних сил, действующих на выходное звено, можно найти как произведение модуля усилия, передаваемого со стороны приводов и относительного момента единичного силового винта и орта оси мобильной системы координат, приведенных к общему центру.

Пусть некоторое текущее положение выходного звена задано углами поворота  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  системы координат выходного звена  $O^m \xi \eta \zeta$  относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (системы координат основания) соответственно и координатами точки  $O^m(x; y; z)$  в системе  $Oxyz$ .

Координаты точек  $A_1, A_2, \dots, A_6$  – центров сферических пар на выходном звене выражены в подвижной системе координат имеют вид

$$A_1^m = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix}, A_2^m = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix}, A_3^m = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, A_4^m = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, A_5^m = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, A_6^m = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Координаты точек выходного звена в системе координат основания равны

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbf{R} \cdot A_1^m, \\ A_2 &= \mathbf{R} \cdot A_2^m, \\ A_3 &= \mathbf{R} \cdot A_3^m, \\ A_4 &= \mathbf{R} \cdot A_4^m, \\ A_5 &= \mathbf{R} \cdot A_5^m, \\ A_6 &= \mathbf{R} \cdot A_6^m \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1$  матрица поворотов, описывающих вращение выходного звена относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно

$$\mathbf{A}_1 \text{ – матрица поворота вокруг оси } x \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2 \text{ – матрица поворота вокруг оси } y \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_3 \text{ – матрица поворота вокруг оси } z \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее следует определить плюккеровы координаты силовых винтов  $\mathbf{R}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i^0)$ , передаваемых на выходное звено. Векторы силовых винтов первой и второй кинематических цепей действуют вдоль оси  $Ox$ , третьей и четвертой ки-

нематических цепей вдоль оси  $Oy$ , векторы силовых винтов пятой и шестой кинематических цепей действуют вдоль оси  $Oz$ . Таким образом, координаты векторных частей силовых винтов можно представить как

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Плюккеровы координаты моментной части силовых винтов представляют собой векторное произведение радиус-вектора  $\mathbf{r}_{A_i}$  точки  $A_i$  на соответствующий вектор силового винта  $\mathbf{r}_i^0$ , которые выражены в системе координат основания

$$\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_{A_i} \cdot \mathbf{r}_i.$$

Таким образом, моментная часть будет равна:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1^0 &= \mathbf{r}_{A_1} \cdot \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_2^0 = \mathbf{r}_{A_2} \cdot \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{r}_3^0 &= \mathbf{r}_{A_3} \cdot \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_4^0 = \mathbf{r}_{A_4} \cdot \mathbf{r}_4, \\ \mathbf{r}_5^0 &= \mathbf{r}_{A_5} \cdot \mathbf{r}_5, \quad \mathbf{r}_6^0 = \mathbf{r}_{A_6} \cdot \mathbf{r}_6,\end{aligned}\tag{3.2}$$

Радиус-векторы центров сферических пар выходного звена в системе координат основания и моментные части плюккеровых координат силовых винтов в общем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{A_1} &= \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ или} \\ \mathbf{r}_{A_1} &= \begin{pmatrix} x - y_{A_1} \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) + z_{A_1} \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) + x_{A_1} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ y + y_{A_1} \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) - z_{A_1} \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) + x_{A_1} \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ z - x_{A_1} \cdot \sin \beta + y_{A_1} \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha + z_{A_1} \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Так как координаты точки  $A_1 (0, y_{A_1}, z_{A_1})$ , то можно записать:

$$\mathbf{r}_{A1} = \begin{pmatrix} x_0 - y_{A1} \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) + z_{A1} \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \\ y_0 + y_{A1} \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) - z_{A1} \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \\ z_0 + y_{A1} \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha + z_{A1} \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Для точки  $A_1$  с координатами  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{A1} \\ z_{A1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$

$$\mathbf{r}_{A1} = \begin{pmatrix} x_0 - a \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) - a \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \\ y_0 + a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) + a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \\ z_0 + a \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha - a \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Моментная часть определяется из следующих соотношений (3.2):

$$\mathbf{r}_{A1}^0 = \mathbf{r}_{A1} \times \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_{A1x} & r_{A1y} & r_{A1z} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{i}(0) - \bar{j}(-r_{A1z}) + \bar{k}(-r_{A1y}).$$

В общем виде:

$$\mathbf{r}_{A1}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 + y_{A1} \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha + z_{A1} \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ -y_0 - y_{A1} \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) + z_{A1} \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \end{pmatrix}$$

для точки  $A_1$  с координатами  $(0, -a, -a)$

$$\mathbf{r}_{A1}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 + a \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha - a \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ -y_0 - a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) - a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \end{pmatrix}$$

Аналогично определяются радиусы векторы точек  $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ :

$$\mathbf{r}_{A2} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A2} \\ y_{A2} \\ z_{A2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{A3} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A3} \\ y_{A3} \\ z_{A3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{A4} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A4} \\ y_{A4} \\ z_{A4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{A5} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A5} \\ y_{A5} \\ z_{A5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{A6} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_{A6} \\ y_{A6} \\ z_{A6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

И моментная часть:

$$\mathbf{r}_{A2}^0 = \mathbf{r}_{A2} \times \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_{A2x} & r_{A2y} & r_{A2z} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{i}(0) - \bar{j}(-r_{A2z}) + \bar{k}(-r_{A2y}).$$

$$\mathbf{r}_{A3}^0 = \mathbf{r}_{A3} \times \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_{A3x} & r_{A3y} & r_{A3z} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{i}(-r_{A3z}) - \bar{j}(0) + \bar{k}(r_{A3x}).$$

$$\mathbf{r}_{A4}^0 = \mathbf{r}_{A4} \times \mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_{A4x} & r_{A4y} & r_{A4z} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{i}(-r_{A4z}) - \bar{j}(0) + \bar{k}(r_{A4x}).$$

$$\mathbf{r}_{A5}^0 = \mathbf{r}_{A5} \times \mathbf{r}_5 = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_{A5x} & r_{A5y} & r_{A5z} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{i}(r_{A5y}) - \bar{j}(r_{A5x}) + \bar{k}(0).$$

$$\mathbf{r}_{A6}^0 = \mathbf{r}_{A6} \times \mathbf{r}_6 = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_{A6x} & r_{A6y} & r_{A6z} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{i}(r_{A6y}) - \bar{j}(r_{A6x}) + \bar{k}(0).$$

$$\mathbf{r}_{A2} = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) + a \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \\ y_0 - a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) - a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \\ z_0 + a \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha - a \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{A2}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 + a \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha - a \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ -y_0 + a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) + a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{A3} = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha) - a \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ y_0 - a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) - a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ z_0 + a \cdot \sin \beta + a \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_3^0 = \begin{pmatrix} -z_0 - a \cdot \sin \beta - a \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ 0 \\ x_0 + a \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha) - a \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{A4} = \begin{pmatrix} x_0 - a \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha) + a \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ y_0 + a \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) + a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ z_0 - a \cdot \sin \beta - a \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_4^0 = \begin{pmatrix} -z_0 + a \cdot \sin \beta + a \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ 0 \\ x_0 - a \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha) + a \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{A5} = \begin{pmatrix} x_0 - a \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) - a \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ y_0 + a \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) - a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ z_0 + a \cdot \sin \beta + a \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_5^0 = \begin{pmatrix} y_0 + a \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) - a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ -x_0 + a \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) + a \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{A6} = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) + a \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ y_0 - a \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) + a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ z_0 - a \cdot \sin \beta - a \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_6^0 = \begin{pmatrix} y_0 - a \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) + a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ -x_0 - a \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) - a \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Далее найдем плюккеровы координаты  $(\xi, \xi^0)$ ,  $(\eta, \eta^0)$ ,  $(\zeta, \zeta^0)$  ортов осей подвижной системы координат в системе координат основания и относительные моменты единичных силовых винтов и ортов осей  $\xi, \eta, \zeta$ . Каждая из кинематических цепей передает усилие  $P_i$ , задаваемое в  $i$ -м приводе, в точку крепления выходного звена  $A_i$ . Моменты сил  $P_i$  относительно осей подвижной системы координат найдем как относительные моменты вектора  $\mathbf{r}_i$  единичного силового винта  $\mathbf{R}_i$ , задающего направление  $\mathbf{P}_i$ , и ортов осей подвижной системы координат, приведя их к началу неподвижной системы отсчета

$$\begin{aligned} \mathbf{mom}(\mathbf{R}_i, \xi) &= \mathbf{r}_i \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_i^0 \cdot \xi; \\ \mathbf{mom}(\mathbf{R}_i, \eta) &= \mathbf{r}_i \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_i^0 \cdot \eta; \\ \mathbf{mom}(\mathbf{R}_i, \zeta) &= \mathbf{r}_i \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_i^0 \cdot \zeta; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$(i=1, 2, \dots, 6),$$

где  $\mathbf{mom}(\mathbf{R}_i, \xi)$ ,  $\mathbf{mom}(\mathbf{R}_i, \eta)$ ,  $\mathbf{mom}(\mathbf{R}_i, \zeta)$  – относительные моменты единичных силовых винтов  $\mathbf{R}_i$  и ортов осей  $\xi, \eta, \zeta$ .

Найдем плюккеровы координаты ортов осей подвижной системы координат, связанной с выходным звеном. Орты осей в системе координат выходного звена:  $\xi^m(1, 0, 0)$ ,  $\zeta^m(0, 1, 0)$ ,  $\eta^m(0, 0, 1)$ . Координаты начала подвижной системы координат в некотором текущем положении  $O^m(x, y, z)$ , тогда векторные и моментные части плюккеровых координат ортов осей системы координат в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned}\xi &= \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}, \quad \xi^0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}, \\ \eta &= \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \\ \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}, \\ \eta^0 &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \\ \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}, \\ \xi &= \begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ \xi^0 &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Движение рассматриваемых механизмов описывается динамическими уравнениями Ньютона–Эйлера:

$$\begin{aligned}J_\xi \cdot \ddot{\phi}_\xi + \dot{\phi}_\eta \cdot \dot{\phi}_\zeta (J_\zeta - J_\eta) &= M_\xi^E, \\ J_\eta \cdot \ddot{\phi}_\eta + \dot{\phi}_\xi \cdot \dot{\phi}_\zeta (J_\zeta - J_\xi) &= M_\eta^E, \\ J_\zeta \cdot \ddot{\phi}_\zeta + \dot{\phi}_\xi \cdot \dot{\phi}_\eta (J_\eta - J_\xi) &= M_\zeta^E, \\ m\ddot{x} &= R_x^E, \\ m\ddot{y} &= R_y^E, \\ m\ddot{z} &= R_z^E,\end{aligned}\tag{3.4}$$

где  $J_\xi, J_\eta, J_\zeta$  – моменты инерции выходного звена относительно осей  $\xi, \eta, \zeta$  соответственно;

$\ddot{\phi}_\xi, \ddot{\phi}_\eta, \ddot{\phi}_\zeta$  – проекции углового ускорения выходного звена на оси  $\xi, \eta, \zeta$  соответственно;

$\dot{\phi}_\xi, \dot{\phi}_\eta, \dot{\phi}_\zeta$  – проекции угловой скорости выходного звена на оси  $\xi, \eta, \zeta$  соответственно;

$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  – проекции линейного ускорения выходного звена на оси  $x, y, z$  соответственно;

$m$  – масса выходного звена;

$M_\xi^E, M_\eta^E, R_\zeta^E$  – проекции главного момента внешних сил на оси  $\xi, \eta, \zeta$ ;  $R_x^E, R_y^E, R_z^E$  – проекции главного вектора внешних сил на оси  $x, y, z$ .

Динамические уравнения Ньютона–Эйлера (3.4) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 J_\xi \cdot \ddot{\phi}_\xi &= P_1(\mathbf{r}_1 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_1^0 \cdot \xi) + P_2(\mathbf{r}_2 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_2^0 \cdot \xi) + P_3(\mathbf{r}_3 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_3^0 \cdot \xi) + \\
 &+ P_4(\mathbf{r}_4 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_4^0 \cdot \xi) + P_5(\mathbf{r}_5 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_5^0 \cdot \xi) + P_6(\mathbf{r}_6 \cdot \xi^0 + \mathbf{r}_6^0 \cdot \xi) - \dot{\phi}_\eta \cdot \dot{\phi}_\zeta (J_\zeta - J_\eta), \\
 J_\eta \cdot \ddot{\phi}_\eta &= P_1(\mathbf{r}_1 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_1^0 \cdot \eta) + P_2(\mathbf{r}_2 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_2^0 \cdot \eta) + P_3(\mathbf{r}_3 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_3^0 \cdot \eta) + \\
 &+ P_4(\mathbf{r}_4 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_4^0 \cdot \eta) + P_5(\mathbf{r}_5 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_5^0 \cdot \eta) + P_6(\mathbf{r}_6 \cdot \eta^0 + \mathbf{r}_6^0 \cdot \eta) - \dot{\phi}_\xi \cdot \dot{\phi}_\zeta (J_\zeta - J_\xi), \quad (3.5) \\
 J_\zeta \cdot \ddot{\phi}_\zeta &= P_1(\mathbf{r}_1 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_1^0 \cdot \zeta) + P_2(\mathbf{r}_2 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_2^0 \cdot \zeta) + P_3(\mathbf{r}_3 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_3^0 \cdot \zeta) + \\
 &+ P_4(\mathbf{r}_4 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_4^0 \cdot \zeta) + P_5(\mathbf{r}_5 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_5^0 \cdot \zeta) + P_6(\mathbf{r}_6 \cdot \zeta^0 + \mathbf{r}_6^0 \cdot \zeta) - \dot{\phi}_\xi \cdot \dot{\phi}_\eta (J_\eta - J_\xi), \\
 m\ddot{x} &= P_{1x} + P_{2x}, \\
 m\ddot{y} &= P_{3y} + P_{4y}, \\
 m\ddot{z} &= P_{5z} + P_{6z}.
 \end{aligned}$$

Относительные моменты являются коэффициентами, зависящими от положения и ориентации выходного звена.

Используя представленный алгоритм, рассмотрим на конкретном примере решение прямой задачи динамики для рассматриваемых механизмов. На рисунке 3.3 представлена схема первой кинематической цепи механизма.

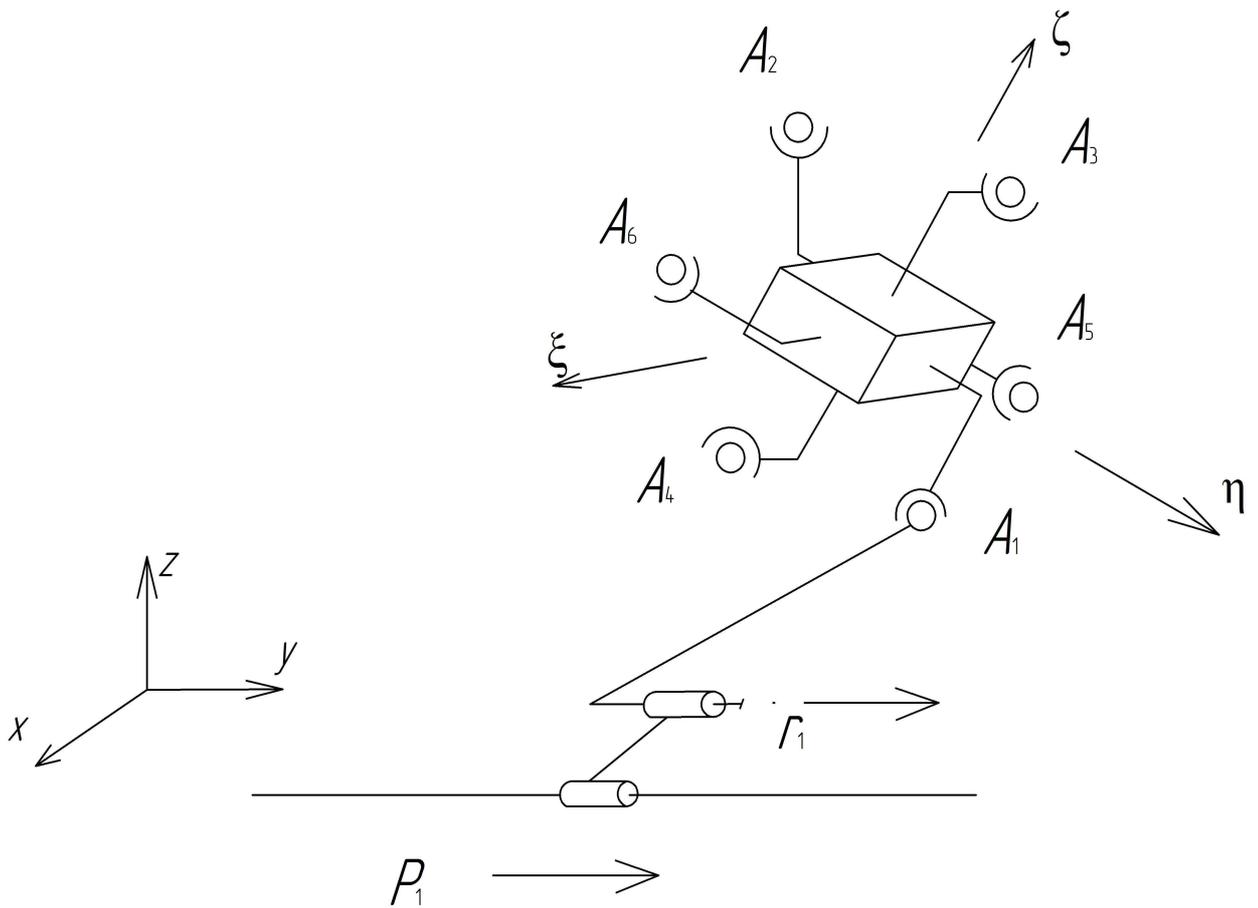


Рисунок 3.3. Схема первой кинематической цепи.

Пусть масса выходного звена  $m = 1$  кг; линейные размеры выходного звена вдоль осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  равны 0,1 м, определяющие координаты точек  $A_1, A_2, \dots, A_6$ ; перемещение выходного звена задано значениями:  $\alpha = \pi/6$  рад.;  $\beta = \pi/6$  рад.;  $\gamma = \pi/6$  рад.,  $x = 0,1$  м;  $y = 0,15$  м;  $z = 0,2$  м; усилия в приводах:  $P_1 = P_2 = 1$  Н,  $P_3 = P_4 = 2$  Н,  $P_5 = P_6 = 3$  Н; проекции угловых скоростей:  $\dot{\phi}_\xi = 3$  рад/с,  $\dot{\phi}_\eta = 2$  рад/с,  $\dot{\phi}_\zeta = 1$  рад/с.

Координаты точек крепления приводов на выходном звене в системе координат выходного звена представим как

$$A_1^m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}, \quad A_2^m = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix},$$

$$A_3^m = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}, A_4^m = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ -0.1 \end{pmatrix},$$

$$A_5^m = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6^m = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Координаты точек выходного звена в абсолютной системе координат имеют вид

$$A_1^m = \begin{pmatrix} 0.0161 \\ 0.259 \\ 0.168 \end{pmatrix}, A_2^m = \begin{pmatrix} 0.184 \\ 0.041 \\ 0.232 \end{pmatrix}$$

$$A_3^m = \begin{pmatrix} 0.088 \\ 0.085 \\ 0.325 \end{pmatrix}, A_4^m = \begin{pmatrix} 0.113 \\ 0.215 \\ 0.075 \end{pmatrix},$$

$$A_5^m = \begin{pmatrix} 0.003 \\ 0.194 \\ 0.293 \end{pmatrix}, A_6^m = \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.106 \\ 0.107 \end{pmatrix}$$

Единичные векторы силовых винтов направлены параллельно осям координат, а моментные части найдены как векторные произведения

$$r_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.168 \\ -0.259 \end{pmatrix}, r_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.232 \\ -0.041 \end{pmatrix},$$

$$r_3^0 = \begin{pmatrix} -0.325 \\ 0 \\ 0.088 \end{pmatrix}, r_4^0 = \begin{pmatrix} -0.075 \\ 0 \\ 0.113 \end{pmatrix},$$

$$r_5^0 = \begin{pmatrix} 0.194 \\ -0.003 \\ 0 \end{pmatrix}, r_6^0 = \begin{pmatrix} 0.106 \\ -0.196 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Плюккерovy координаты ортов осей системы координат выходного звена  $O^m \xi \eta \zeta$  в неподвижной системе координат  $Oxuz$  можно представить как

$$\xi = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.43 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \xi^0 = \begin{pmatrix} -0.16 \\ 0.2 \\ -0.07 \end{pmatrix},$$

$$\eta = \begin{pmatrix} -0.21 \\ -0.87 \\ 0.43 \end{pmatrix}, \eta^0 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ -0.087 \\ 0.12 \end{pmatrix},$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.217 \\ 0.75 \end{pmatrix}, \zeta^0 = \begin{pmatrix} 0.156 \\ 0.05 \\ -0.11 \end{pmatrix}.$$

Относительные моменты единичных силовых винтов и оси  $\xi$  определяются по уравнения (3.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{mom}(\mathbf{R}_1, \xi) &= 0.041; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_2, \xi) = -0.041; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_3, \xi) = -0.088; \\ \mathbf{mom}(\mathbf{R}_4, \xi) &= 0.088; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_5, \xi) = 0.075; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_6, \xi) = -0.041. \end{aligned}$$

Относительные моменты единичных силовых винтов и оси  $\eta$

$$\begin{aligned} \mathbf{mom}(\mathbf{R}_1, \eta) &= -0.075; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_2, \eta) = 0.075; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_3, \eta) = 0.022; \\ \mathbf{mom}(\mathbf{R}_4, \eta) &= -0.022; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_5, \eta) = 0.075; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_6, \eta) = -0.075. \end{aligned}$$

Относительные моменты единичных силовых винтов и оси  $\zeta$

$$\begin{aligned} \mathbf{mom}(\mathbf{R}_1, \zeta) &= -0.075; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_2, \zeta) = 0.075; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_3, \zeta) = -0.088; \\ \mathbf{mom}(\mathbf{R}_4, \zeta) &= 0.088; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_5, \zeta) = 0.0069; \mathbf{mom}(\mathbf{R}_6, \zeta) = -0.0069. \end{aligned}$$

Модули линейного и углового ускорений и их проекций определяются из уравнения (3.4):

$$\begin{aligned} a &= 7.483 \text{ м/с}^2, \ddot{x} = 2 \text{ м/с}^2, \ddot{y} = 4 \text{ м/с}^2, \ddot{z} = 6 \text{ м/с}^2; \\ \ddot{\phi} &= 3.539 \text{ рад/с}^2, \ddot{\phi}_\xi = 1.2 \text{ рад/с}^2, \ddot{\phi}_\eta = 2.4 \text{ рад/с}^2, \ddot{\phi}_\zeta = 2.308 \text{ рад/с}^2. \end{aligned}$$

## Результаты и выводы по главе

1. Полученное аналитическое решение задачи о положении позволяет проводить дальнейшие кинематические, силовые и динамические исследования манипуляторов.
2. Методом дифференцирования уравнений связей решена задача о скоростях. Приведено численное решение обратной задачи о скоростях.
3. Исследование свойств матриц частных производных уравнений связей позволило определить область особых положений.
4. Представлен анализ механизма, учитывающий параллельность осей силовых винтов, передаваемых со стороны кинематических цепей на выходное звено, и осей линейных двигателей.
5. Для получения уравнений динамики, связанных с вращательными движениями выходного звена определены относительный момент между соответствующей осью подвижной системы координат и силовым винтом и моменты силовых винтов, передаваемых на выходное звено.
6. Представлено решение прямой задачи силового анализа, когда в произвольном положении известны абсолютные и обобщенные скорости, действующие в приводах силы, и определяются ускорения выходного звена.
7. Полученные зависимости позволяют выбрать привод с оптимальными характеристиками.

## ГЛАВА 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА И ПЕРСПЕКТИВЫ ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

### 4.1. Описание конструкции механизма с шестью степенями свободы

Представленная экспериментальная модель механизма соответствует разработанному патенту на полезную модель [43].

Модель состоит из основания, выполненного в виде неподвижной рамной конструкции, выходного звена в виде подвижной платформы и шести кинематических цепей [10].

Неподвижное основание выполнено в виде полукуба (Рисунок 4.1).



Рисунок 4.1. Неподвижное основание

Неподвижное основание изготовлено из алюминиевого конструкционного профиля V20x20L с размером паза 6 мм (Рисунок 4.2). Длина стороны неподвижного основания 550 мм.



Рисунок 4.2. Профиль неподвижного основания

Стороны неподвижного основания соединены между собой с помощью пластин (Рисунок 4.3).



Рисунок 4.3. Пластины для сборки неподвижного основания

Подвижное выходное звено выполнено в виде куба. Оно изготовлено из ABS пластика со стороной 55 мм с установленными сферическими парами в центрах ребер (Рисунок 4.4).

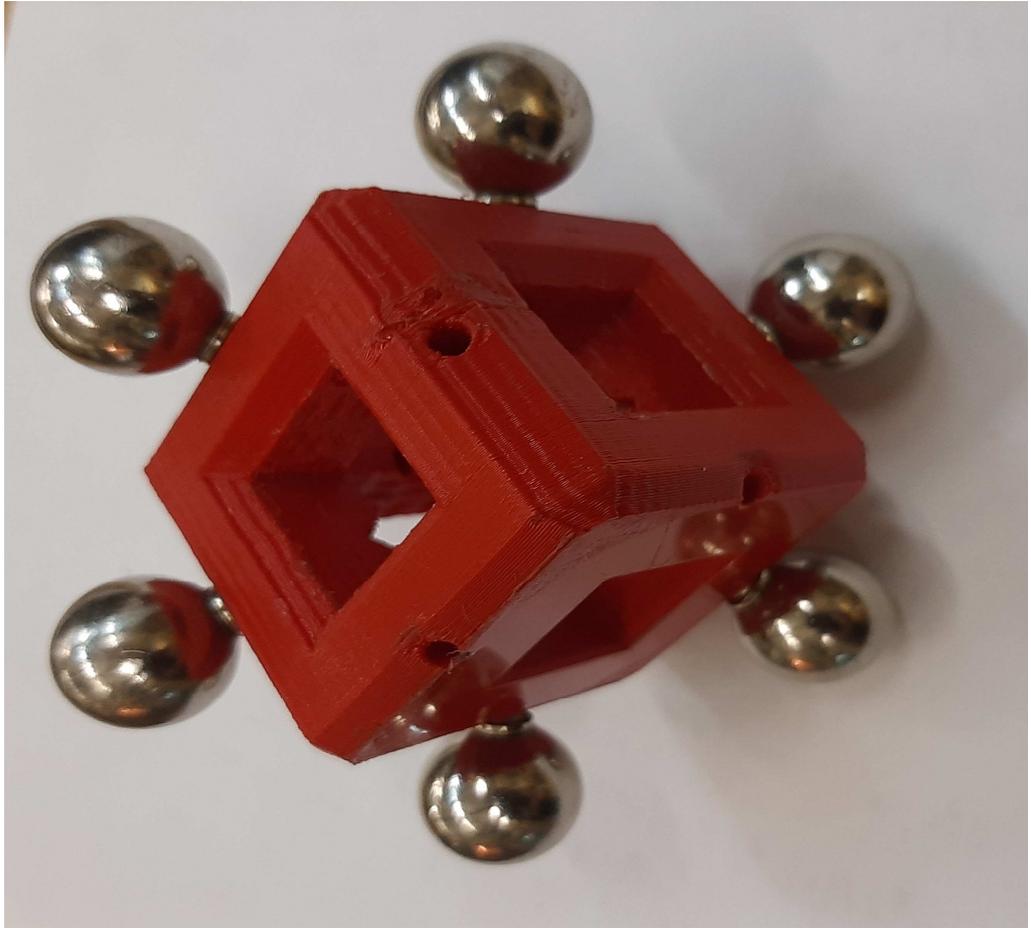


Рисунок 4.4. Выходное звено

На основании установлены шаговые двигатели (Рисунок 4.5).



Рисунок 4.5. Шаговый двигатель на неподвижном основании

**Технические характеристики двигателя:**

Тип: биполярный

Число фаз: 2

Номинальное напряжение: 3.6 В DC

Угловой шаг:  $1,8 \pm 0,09^\circ$  (200 шагов на оборот)

Номинальный ток: 1.5 А

Сопротивление: 2.4 Ом

Индуктивность: 3.7 мГн

Момент удержания:  $\geq 4.2$  кг\*см

Двигатель крепится к пластине (Рисунок 4.6).

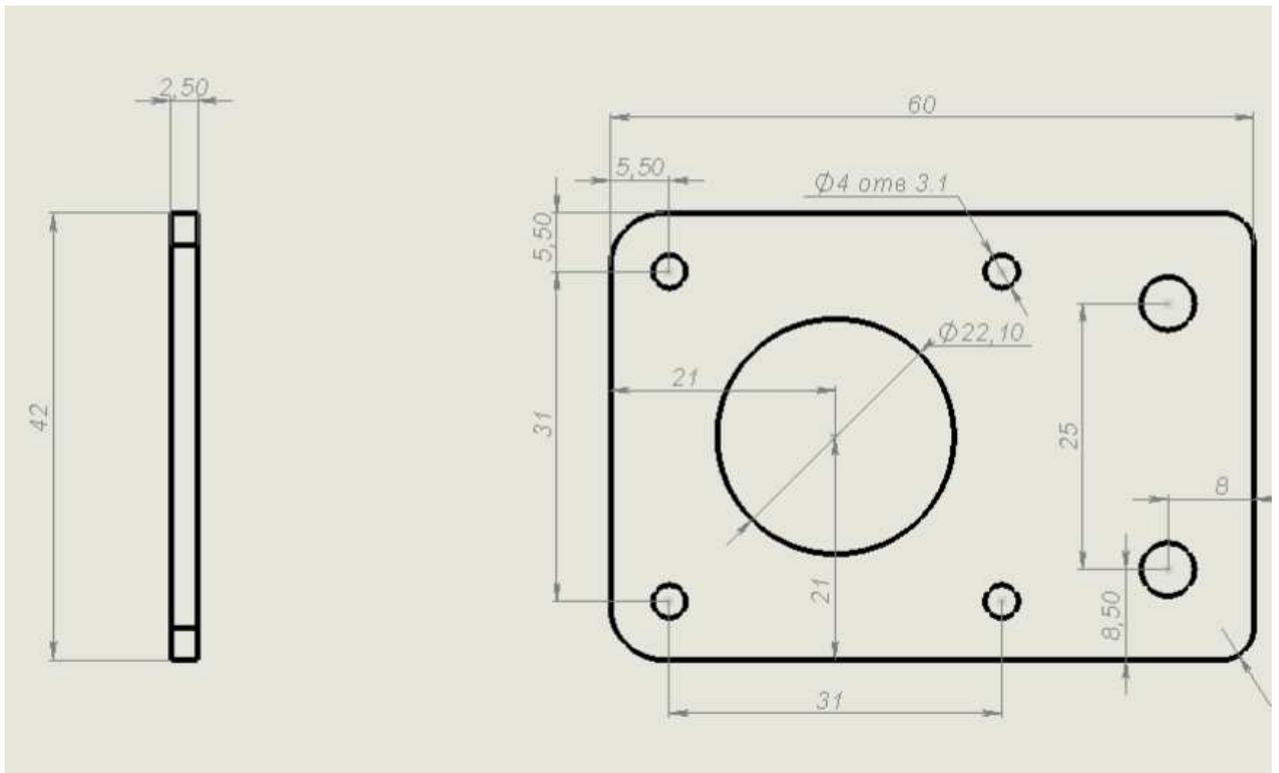


Рисунок 4.6 Пластина крепления двигателя

В механизме установлены шесть кинематических цепей. Звенья механизма изготовлены из ABS пластика прямоугольного сечения. Входное звено длиной 160 мм с поперечным сечением 16x16 мм, промежуточное звено длиной 180 мм с поперечным сечением 13x13 мм (Рисунок 4.7). Вес входного и промежуточного звеньев по 25 гр.

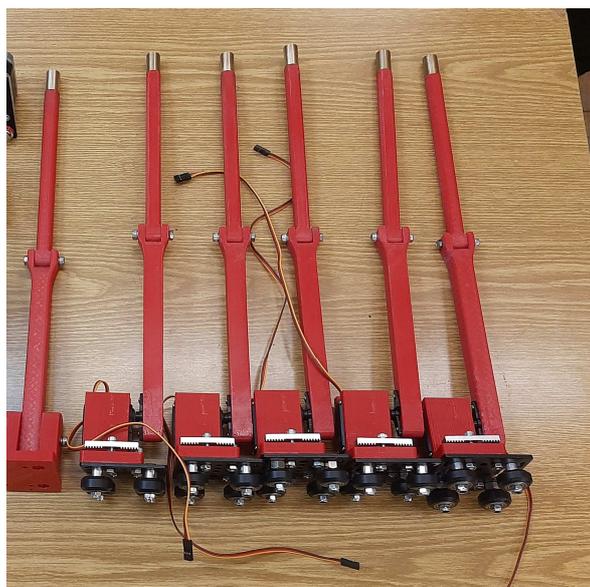




Рисунок 4.7 Входное и промежуточное звенья

Движение от двигателя передается входному звену зубчатой ременной передачи. Межосевое расстояние зубчатой ременной передачи 400 мм, шаг ремня

1,6 мм. Каретка натяжения ремня в зубчатой передаче расположена на неподвижном основании (Рисунок 4.8).

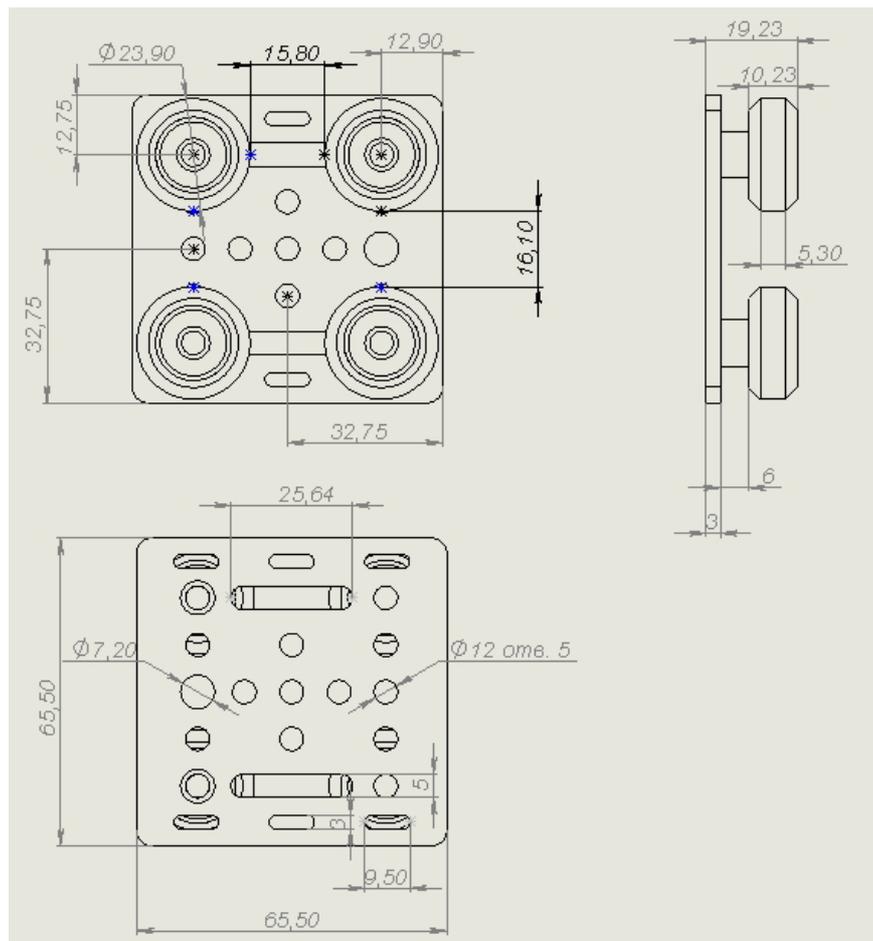


Рисунок 4.8. Каретка натяжения ремня

Вращательная пара входного звена расположена на подвижной каретке, движущейся по направляющей основания с помощью четырех роликов. Причем, для регулирования зазора между роликами и направляющей используется эксцентрик, расположенный на двух осях роликов (Рисунок 4.9).



а)



б)

Рис. 4.9. Подвижная каретка  
а – исполнение, б – чертеж

Каретка для крепления первой вращательной пары (Рисунок 4.10)

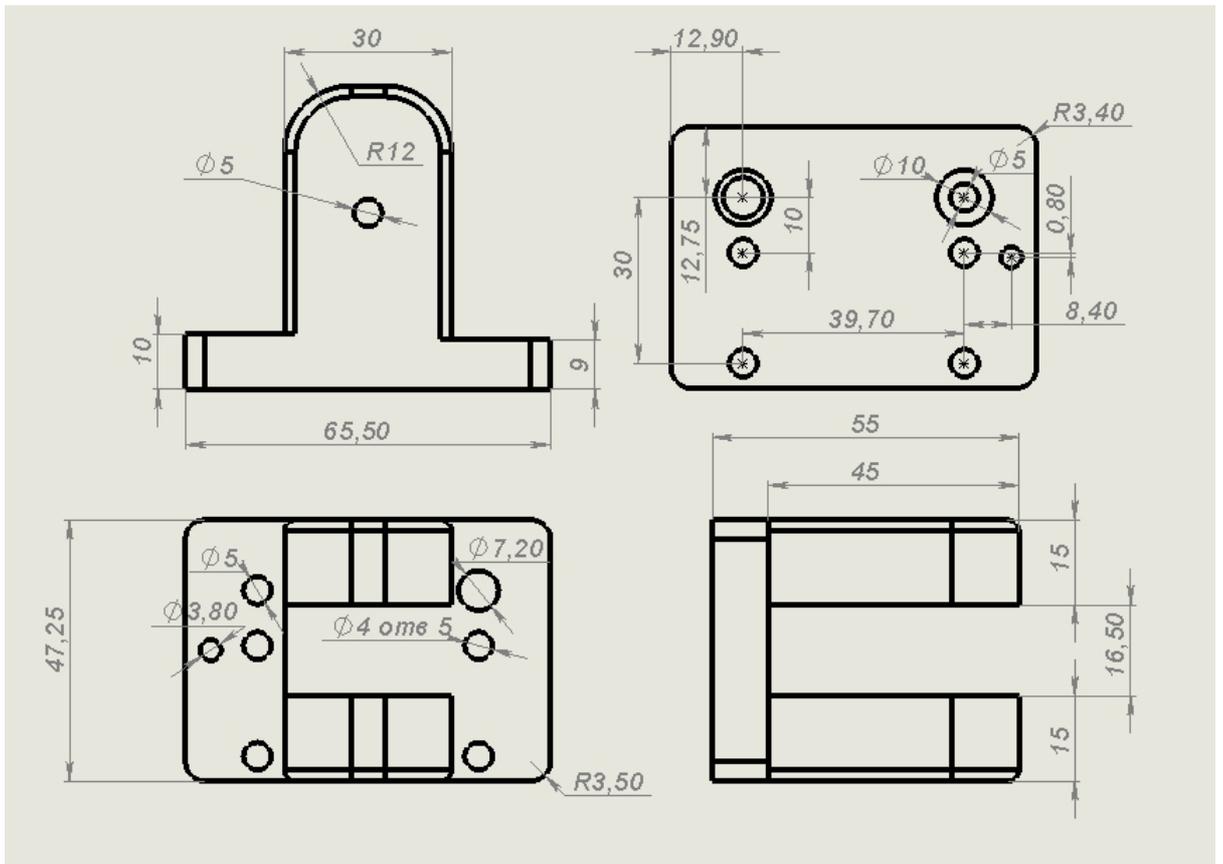


Рисунок 4.10 Каретка-кронштейн

Комплект механизма представлен на Рисунке 4.11.

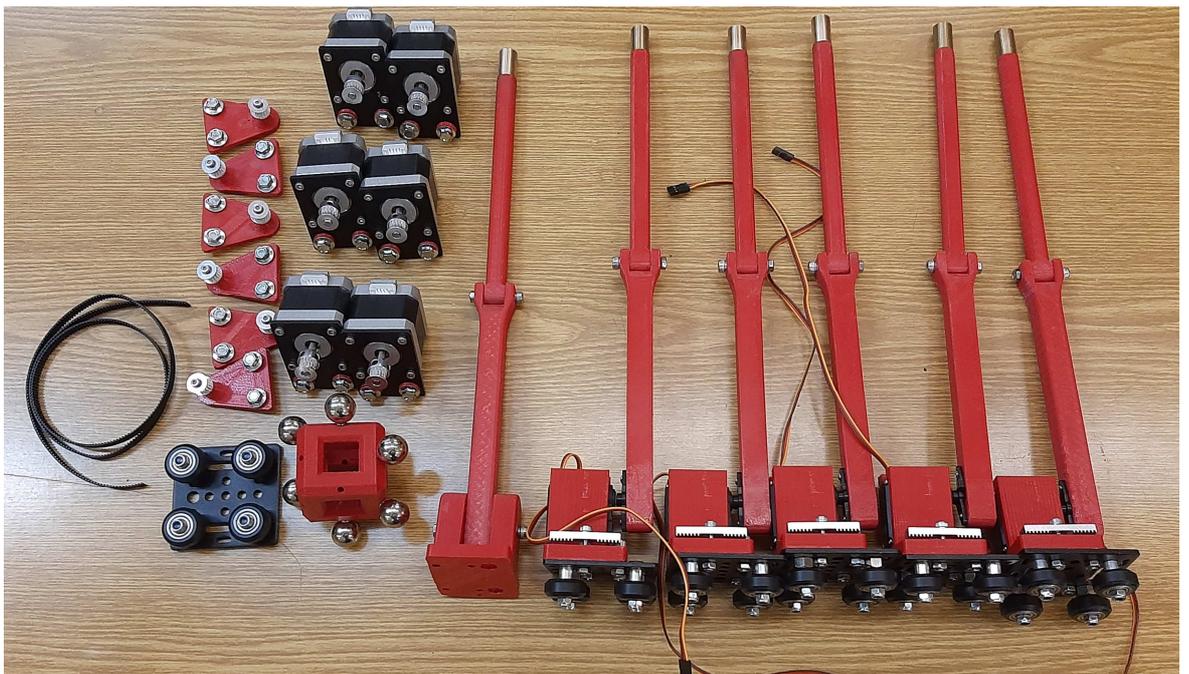


Рисунок 4.11. Комплект механизма

Таким образом, представлена модель синтезированного механизма с шестью степенями свободы и шестью кинематическими цепями 6-PRRS. Показаны составные элементы механизма: основание, комплектующие элементы механизма, двигатели и передачи. Показано, что механизмы параллельной структуры такого класса являются простыми конструкциями. Они обладают возможностями унификации, позволяют изменять длины промежуточных звеньев, а также кинематические пары. В представленном механизме приводы расположены на основании, что позволяет выбирать двигатели с большой мощностью.

#### 4.2. Экспериментальное исследование механизма

В данном параграфе показано исследование свойств механизма. Исходное положение представлено на Рисунке 4.13.

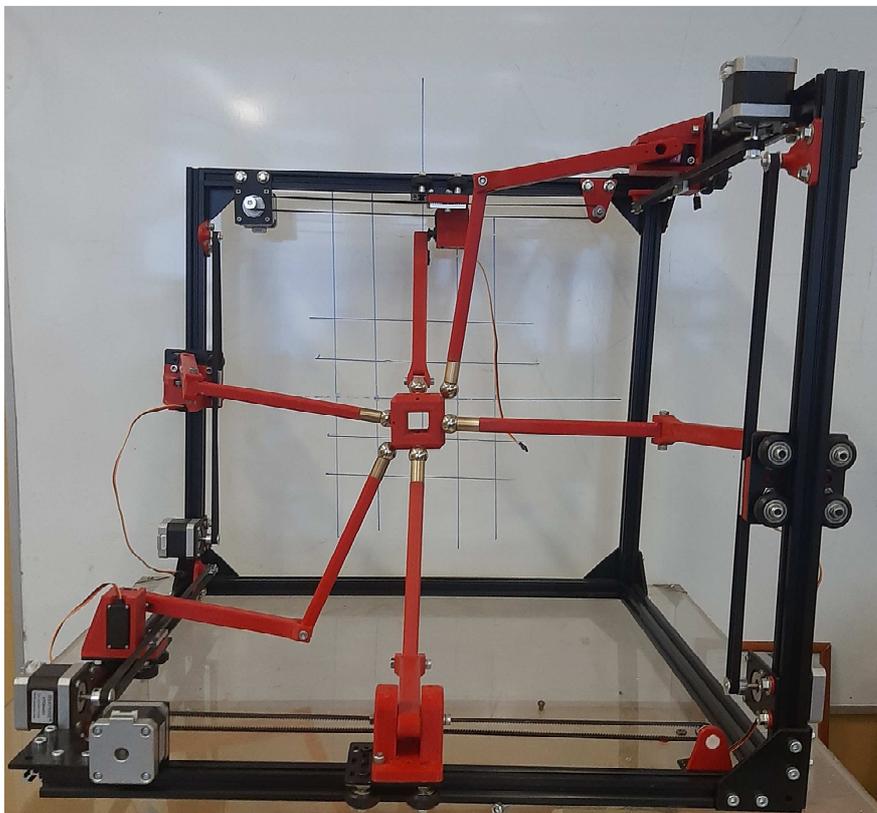
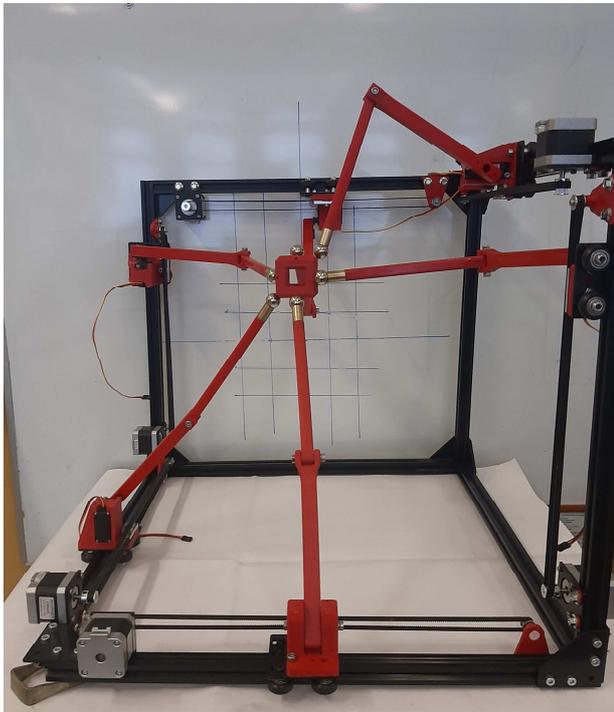
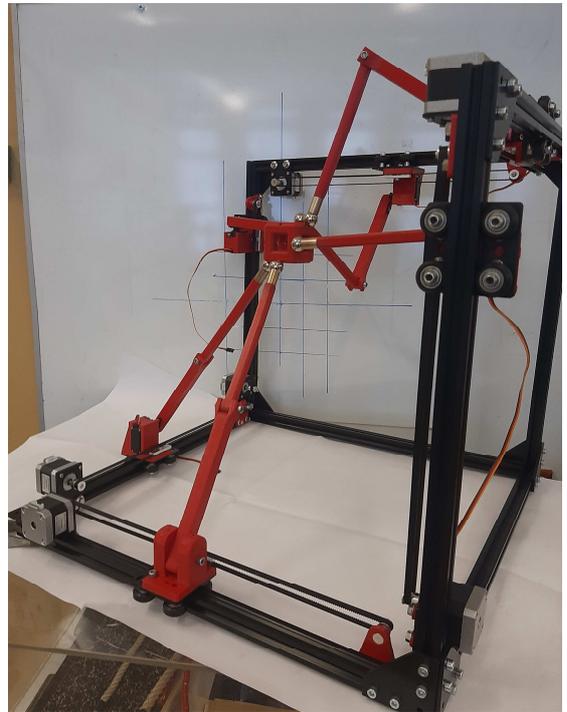


Рисунок 4.13. Исходное положение механизма

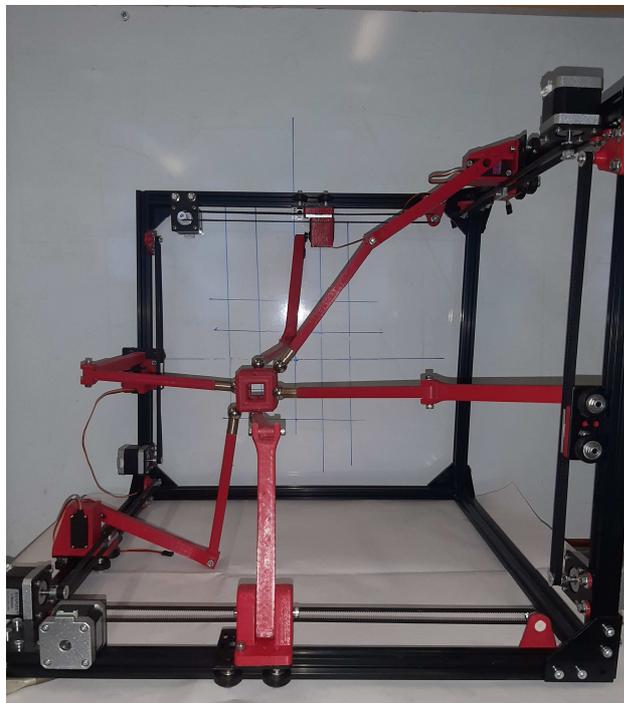
При движении выходного звена возможно достичь границ рабочей зоны (Рисунок 4.14). Получены максимальные углы поворота выходного звена (Рисунок 4.15).



а)

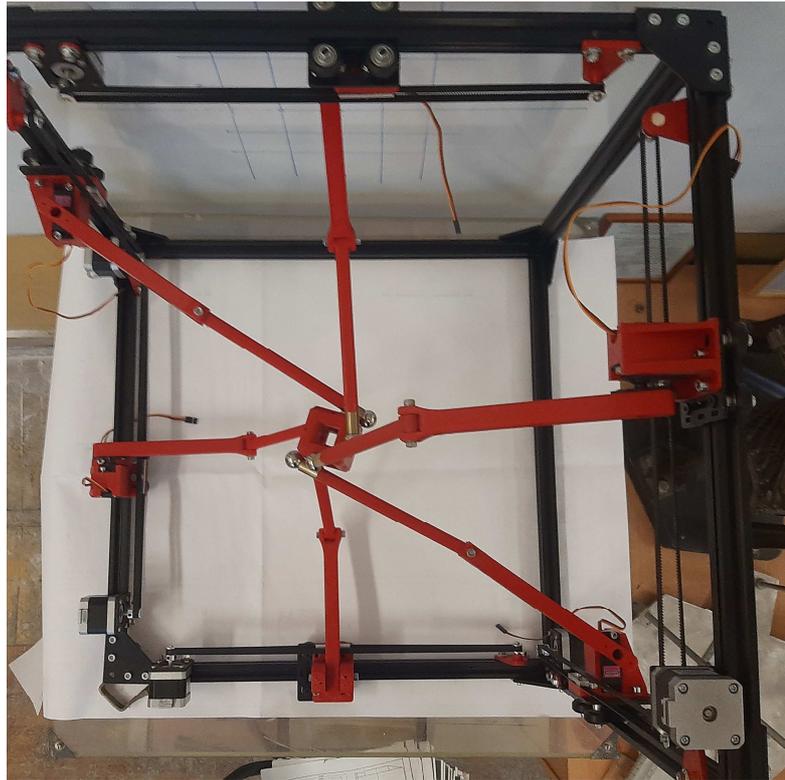


б)

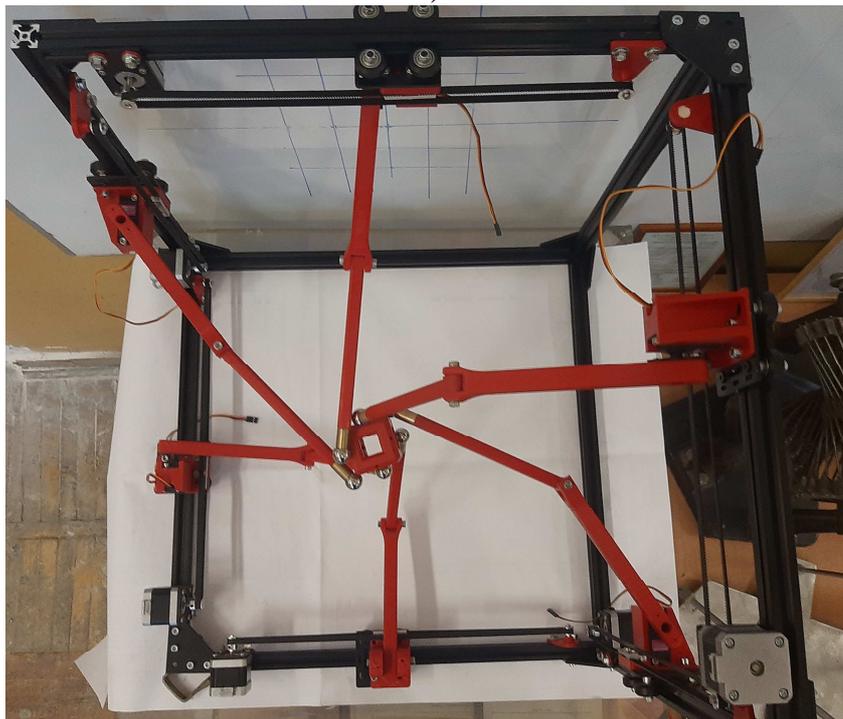


в)

Рисунок 4.14. (а, б, в) Положение выходного звена на границе рабочей зоны механизма



а)



б)

Рисунок 4.15 (а, б) Максимальные углы поворота выходного звена.

В данном параграфе представлена экспериментальная модель механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы и шестью кинематическими цепями. Экспериментальное исследование подтвердило размер рабочей зоны,

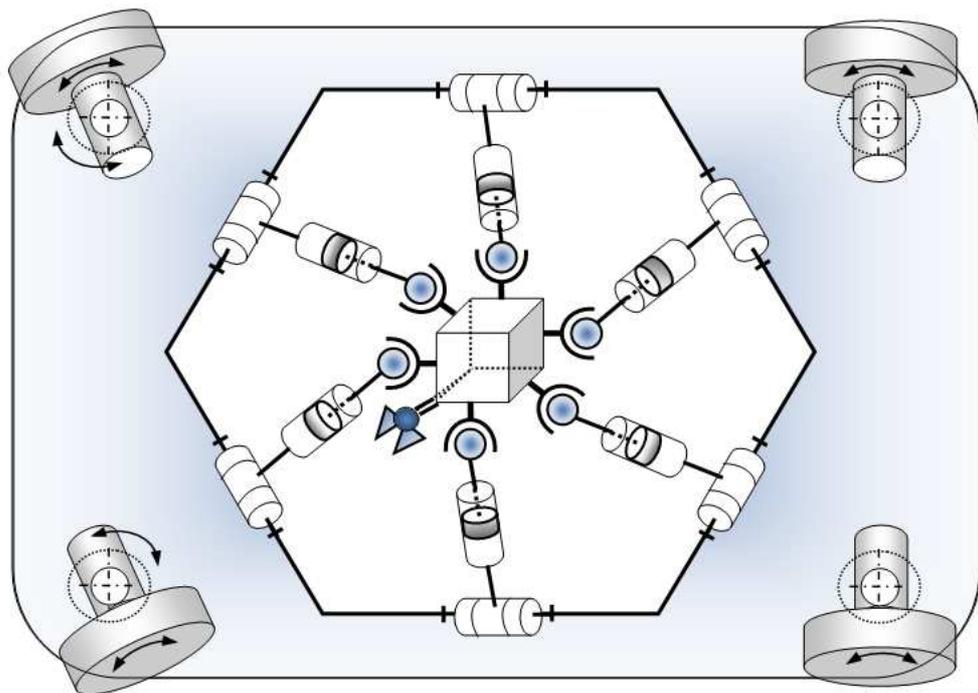
максимальные углы поворота выходного звена, а также особые положения, обусловленные потерей степени свободы.

Кроме того, показана возможность кинематической развязки движений поступательных и вращательных.

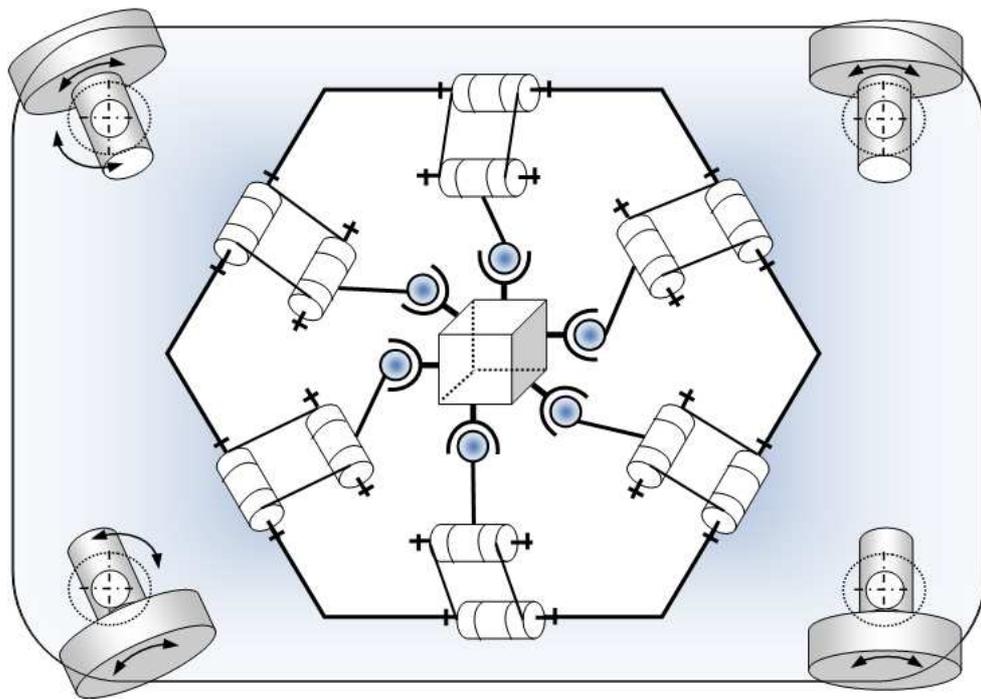
### 4.3. Возможные применения механизмов

Синтезированные механизмы в силу их преимуществ могут иметь большие возможности применения в различных отраслях промышленности [58, 60, 63].

Разработанные механизмы с шестью степенями свободы могут применяться для технологических операций, в измерительных системах. Установленные на монорельсовом пути, механизмы данных классов могут обеспечивать связи между технологическими переходами. Одним из возможных применений может быть подвижная управляемая тележка для обработки сельскохозяйственных культур (Рисунок 4.16).



а)



б)

Рисунок 4.16. Подвижная управляемая платформа с установленной на ней механизмом  
а– 6PRRS; б – 6PRPS

Механизмы параллельной структуры могут быть применены в устройствах телескопов в качестве механизма поворота для наведения и вращения радиолокационных антенн (Рисунок 4.17).

Предложенные механизмы могут применяться в измерительных системах. В этом случае на выходном звене будет установлена измерительная система (Рисунок 4.18). Измерения координат поверхности объекта проводятся посредством датчика (зонда), укрепленного на выходном звене машины. Координатно-измерительные машины могут использоваться для измерения габаритов и размеров, профиля деталей, измерения углов или ориентации, построения карт рельефа.

В данных механизмах приводы расположены на основании и отделены от рабочей зоны, поэтому они могут применяться для работы в особо чистых зонах.

Одним их важных применений механизма может быть его использование в аддитивных технологиях, где выходное звено может не только обеспечивать печать в плоскости, но и выполнять наклон печатающего устройства.

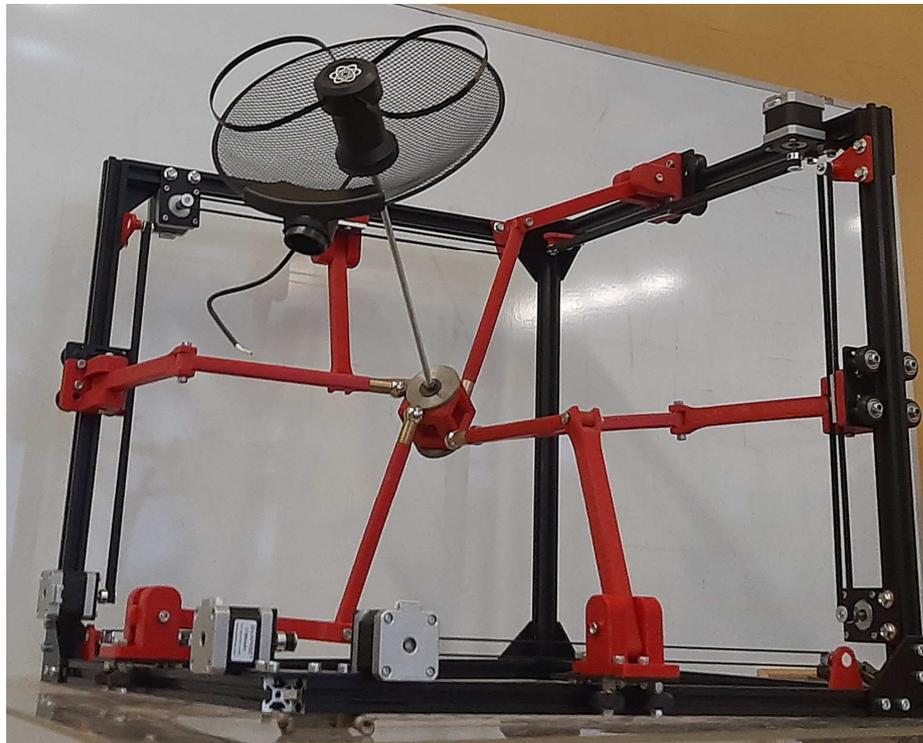


Рисунок 4.17 Устройство ориентации антенны

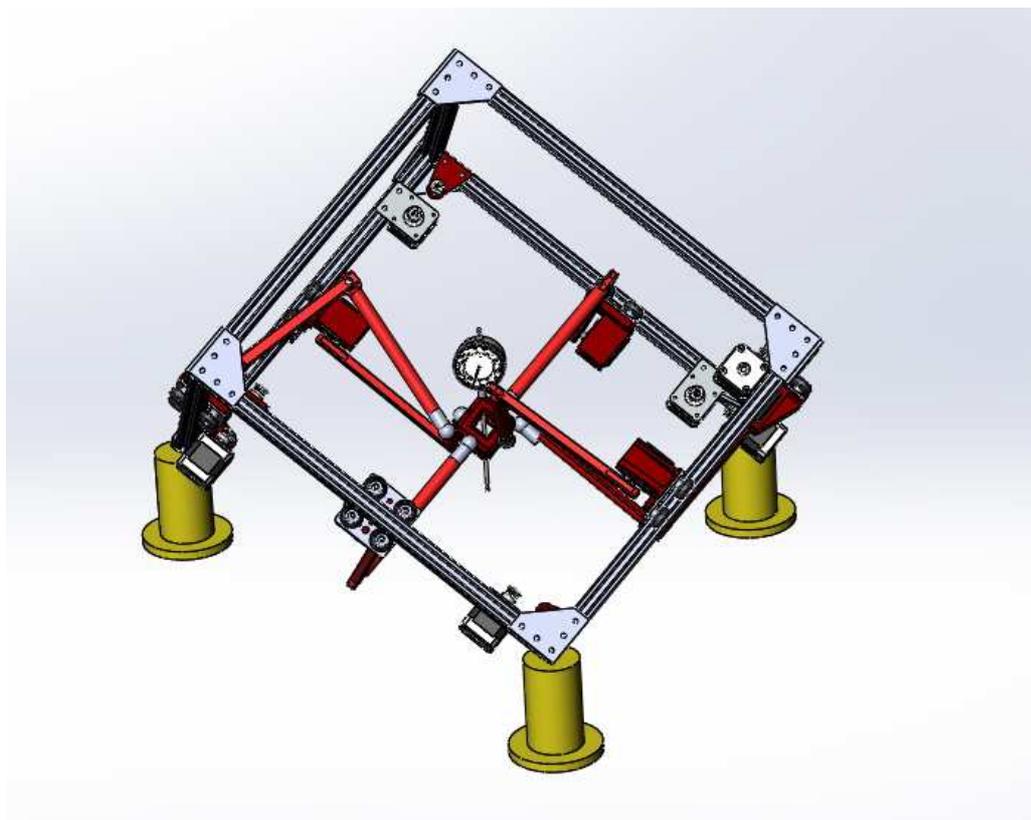


Рисунок 4.18 Измерительный комплекс

Манипуляционные механизмы параллельной структуры, обладающие высокой скоростью, точностью, низкой себестоимостью, простой конструкцией могут обеспечить модернизацию промышленных предприятий. Приведенные примеры показывают возможное широкое применение манипуляторов параллельной структуры на предприятиях в разных отраслях промышленности.

Результаты научных исследований и расчетов могут применять в учебных учреждениях при подготовке учебных дисциплин (Приложение 2).

### **Результаты и выводы по главе**

1. В главе представлены экспериментальная конструкция разработанного механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы, отдельные узлы и элементы.

2. Показано, что механизм параллельной структуры с шестью степенями свободы является простой в изготовлении конструкцией.
3. Проведены исследования свойств механизмов, определены рабочая зона и особые положения.
4. Показано, что синтезированный механизм является работоспособным. Результаты экспериментов совпадают с результатами расчетов.
4. Исследование прототипа позволяет разработать рекомендации по проектированию механизмов данного класса.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. В результате проведенного структурного синтеза предложены новые схемы пространственных механизмов параллельной структуры с шестью степенями свободы, имеющих ортогонально расположенные пары двигателей с попарно параллельными осями.
2. Показано, что синтезированные механизмы обладают свойствами частичной развязки движений, изоморфностью и постоянством передаточного отношения при поступательных движениях.
3. Разработаны математические алгоритмы и программы для решения прямой и обратной задач о положении, определены параметры рабочего пространства механизма.
4. Установлены зависимости между длинами промежуточных звеньев и размером рабочей зоны, что позволяет проводить рациональное проектирование механизма.
5. Установлено, что область особых положений зависит только от ориентации выходного звена и появляется при углах поворота, превышающих конструктивные ограничения.
6. Получены уравнения силового анализа. Определены моменты силовых винтов, передаваемых на выходное звено, относительные моменты между осями подвижной системы координат и силовыми винтами.
7. Решена задача силового анализа для произвольного положения выходного звена при заданных абсолютных и обобщенных скоростях и действующих в приводах силах.
8. Экспериментальное исследование модели подтвердило работоспособность механизма. Определены размер рабочей зоны, максимальные углы поворота выходного звена, наличие особых положений, обусловленных потерей степени свободы. Показана возможность кинематической развязки поступательных и вращательных движений.

9. Показано, что изготовленный механизм параллельной структуры с шестью степенями свободы является простой в изготовлении конструкцией, в которой приводы расположены на основании.
10. Исследование действующей модели позволяет разработать рекомендации по проектированию механизмов данного класса.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ализаде Р.И. Функциональный синтез пространственных трехстепенных манипуляторов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 5. С. 129–133.
2. Аракелян В., Брио С., Глазунов В.А. Исследование особых положений манипулятора с параллельной структурой "Паминса" // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 1. С.80–88.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: учеб. для втузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1988. 640 с.
4. Белянин П.Н. Робототехнические системы для машиностроения. М.: Машиностроение, 1986. 250 с.
5. Брагинский М.А. Промышленные роботы-манипуляторы в кожевенном производстве. М.: Легпромбытиздат, 1985. 64 с.
6. Бруевич Н.Г., Правоторова Е.А., Сергеев В.И. Основы теории точности механизмов. – М.: Наука, 1988. 240 с.
7. Бруевич Н.Г., Сергеев В.И. Основы нелинейной теории точности и надежности устройств. М.: Наука, 1976. 136 с.
8. Воробьев Е.И., Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука, 1991. 262 с.
9. Вукобратович М. , Стокич Д. Управление манипуляционными роботами/ пер. с англ. М.: Наука, 1985. 383 с.
10. Гарин О.А, Хейло С.В., Полетика А.К. Экспериментальное исследование механизма с шестью степенями свободы // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2022. № 7. С.27–31.
11. Глазунов В.А. Структура пространственных механизмов. Группы винтов и структурные группы // Инженерный журнал. Справочник. 2010. №3. С. 1–24.

12. Глазунов В.А., Есина М.Г., Быков Р.Э. Управление механизмами параллельной структуры при переходе через особые положения // Проблемы машиностроения и надежности машин. Машиноведение. 2004. №2. С.78–84.
13. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. М.: Наука, 1991. 95 с.
14. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф., Модель Б.И. Принципы классификации и методы анализа пространственных механизмов с параллельной структурой // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1990. №1. С.41–49.
15. Глазунов В.А., Хейло С.В., Ширинкин М.А., Ларюшкин П.А., Ковальчук А.В. Манипулятор параллельной структуры с четырьмя степенями свободы // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Часть 2, №4. С. 92–94.
16. Давиташвили Н.С. Динамика сферических механизмов. М.: Наука, 1992. 256 с.
17. Данилин П.О. Разработка и анализ механизмов параллельной структуры с групповой кинематической развязкой: дис. ...канд. техн. наук: М. 2011. 141 с.
18. Диментберг Ф.М. Об особенных положениях пространственных механизмов // Машиноведение. 1977. № 5. С. 53 –58.
19. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения, М.: Наука. 1978. 327 с.
20. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов, М.: Наука. 1982. 336 с.
21. Едакина Т.В. Разработка и исследование поступательно-направляющего механизма параллельной структуры, обладающего свойством изоморфности: дис. ...канд. техн. наук: М. 2013. 169 с.
22. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами: учебник для втузов. М.: Изд-во МГТУ им Н.Э.Баумана, 2004. 480 с.
23. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы вдохновленные природой. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 446 с.
24. Кобринский А.А., Кобринский А.Е. Манипуляционные системы роботов: основы устройства, элементы теории. М.: Наука. 1989. 344 с.

25. Козлов В.В., Макарычев В.П., Тимофеев А.В., Юрьевич Е.И. Динамика промышленных роботов. М.: Наука. 1984. 336 с.
26. Коловский М.З., Слоущ А.В. Основы динамики промышленных роботов. М.: Наука. 1988. 240 с.
27. Коловский М.З. Динамика машин. Л.: Машиностроение. 1989. 263 с.
28. Крайнев А.Ф. Функциональная классификация механизмов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1993. № 5. С.10–20.
29. Крайнев А.Ф., Глазунов В.А. Новые механизмы относительного манипулирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. №5. С. 106–117.
30. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. М.: Машиностроение. 1987. 560 с.
31. Крайнев А.Ф., Ковалев Л.К., Васецкий В.Г., Глазунов В.А. Разработка установок для лазерной резки на основе механизмов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. №6. С.84-93.
32. Корендясев А.И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И. и др. Манипуляционные системы роботов / Под ред. А.И. Корендясева. М.: Машиностроение, 1989. 472 с.
33. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 328 с.
34. Ларюшкин П.А., Глазунов В.А., Хейло С.В. Решение задачи о положениях параллельного манипулятора с тремя степенями свободы // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2012. №2. С.16–20.
35. Ларюшкин П.А., Разработка и исследование пространственного манипулятора параллельной структуры с тремя поступательными степенями свободы для робототехнических систем предприятий текстильной и легкой промышленности: дис. ...канд. техн. наук: М. 2013. 169 с.
36. Лебедев П.А. Кинематика пространственных механизмов. М.: Машиностроение, 1987. 280 с.
37. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин: учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1990. 592 с.

38. Леонов Л.П., Кудинов А.А. Роботехнические производственные комплексы в лесной и деревообрабатывающей промышленности. М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2009. 339 с.
39. Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С. Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978. 416 с.
41. Носова Н.Ю. Разработка и исследование пространственных механизмов параллельной структуры с шарнирными параллелограммами с различным числом степеней свободы: дис. ...канд. техн. наук: М. 2020. 169 с.
42. Палочкин С.В., Глазунов В.А., Хейло С.В. Решение задачи о положениях сферического манипулятора параллельной структуры // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2011. №7. С.111–115.
43. Патент РФ №176040. Пространственный механизма с шестью степенями свободы. //Хейло С.В., Глазунов В.А., Гарин О.А. Заявка №2017116667 от 12.05.2017.
44. Патент РФ №182355. Пространственный механизма с шестью степенями свободы. //Хейло С.В., Глазунов В.А., Гарин О.А., Царьков А.В., Разумеев К.Э. Заявка №2017124720 от 12.07.2017.
45. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.П. Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 400 с.
- 46 Романов А.А. Разработка механизма параллельной структуры с кинематической развязкой и постоянным передаточным отношением при осуществлении вращательных движений: дис. ...канд. техн. наук: М. 2022. 169 с.
47. Саркисян Ю.Л., Парибян Т.Ф. Принципы построения пространственных по-ступательно-направляющих механизмов // Машиноведение. 1988. № 4. С.12–20.
48. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2021662355. Определение рабочей зоны механизма с шестью степенями свободы. //Хейло С.В., Богачева С.Ю., Новичков А.Р., Гарин О.А., Гарин Е.О. Заявка №2021661409 от 19.07.2021.
49. Тимофеев А.В. Управление роботами. учеб. пособие. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1985. 240 с.
50. Тывес Л.И. Механизмы робототехники: Концепция развязок в кинематике, динамике и планировании движений. –2-е изд. М.: ЛЕНАНД, 2018. 208 с.

51. Хейло С.В. Синтез сферических манипуляторов параллельной структуры // Справочник. Инженерный журнал. 2012. № 6. С.23–28.
52. Хейло С.В. Структурно-геометрический анализ сферического манипулятора параллельной структуры // Справочник. Инженерный журнал. 2012. №12. С.9–14.
53. Хейло С. В. Разработка научных основ создания манипуляционных механизмов параллельной структуры для робототехнических систем предприятий текстильной и легкой промышленности: дис. ... докт. техн. наук. Москва. 2014. 292 с.
54. Хейло С.В., Глазунов В.А., Палочкин С.В. Манипуляционные механизмы параллельной структуры. Структурный синтез. Кинематический и силовой анализ: монография. М.: ФГБОУВПО “МГТУ им. А.Н. Косыгина”, 2011. 153с.
55. Хейло С.В., Глазунов В.А., Сухоруков Р.Ю. Решение задачи кинематики поступательно-направляющего манипулятора // Машиностроение и инженерное образование. 2011. № 4. С.11–17.
56. Хейло С.В., Глазунов В.А., Во Динь Тунг. Решение задачи о скоростях и особых положениях сферического манипулятора параллельной структуры // Машиностроение и инженерное образование. 2011. № 1. С.2–9.
57. Хейло С.В., Глазунов В.А., Кулемкин Ю.В., Эфрос В.Л. Анализ ускорений и нелинейных колебаний механизма параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. №3. С.9–17.
58. Хейло С.В., Глазунов В.А., Ширинкин М.А., Календарев А.В. Возможные применения механизмов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. №5. С.19–24.
59. Хейло С.В., Ларюшкин П.А. Определение рабочей зоны манипуляторов параллельной структуры // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2013. №2. С.27-31.
60. Хейло С.В., Гарин О.А. Разработка механизма с шестью степенями свободы для аддитивных технологий // Дизайн, технологии и инновации в текстильной и легкой промышленности (ИННОВАЦИИ - 2018): сборник науч. конф. М.: ФГБОУ ВО «РГУ им. А.Н.Косыгина», 2018. С.61-62.

61. Хейло С.В., Разумеев К.Э., Гарин О.А., Ковега М.Н., Каганов Ю.Т. Оптимизация параметров пространственного механизма для аддитивных технологий. //Международный научно-технический симпозиум «Вторые международные Косыгинские чтения, приуроченные к 100-летию РГУ имени А. Н. Косыгина»: Т.2:сборник науч. конф. М.: ФГБОУ ВО «РГУ им. А. Н. Косыгина», 2019. С.197-200.
62. Хейло С.В., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Гарин О.А., Ключерев В.Н. Точность сферического механизма // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2019. № 1 (262). С.29–35
63. Хейло С.В., Разумеев К.Э., Гаврюшин С.С., Гарин О.А., Глазунов В.А., Шарпов И.Б. Роботы параллельной структуры медицинского назначения // IX международный конгресс Биотехнология: Состояние и перспективы развития: сборник науч конф. Москва, 2017. С. 315-318.
64. Хейло С.В., Гарин О.А., Терехова А.Н., Прохорович В.Е., Духов А.В. Решение задач динамики манипуляционного механизма с шестью степенями свободы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2022. №1. С.39–46.
65. Хейло С.В., Гарин О.А., Палочкин С.В., Дорофеев С.Д. Исследование свойств пространственного механизма с шестью степенями свободы // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2021. №3. С.28–33.
66. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.А., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 327 с.
- 67 . Шалюхин К.А. Построение и анализ пространственных механизмов параллельной структуры с кинематической развязкой: дис. ...канд. техн. наук: М. 2013. 169 с.
68. Шахинпур М. Курс робототехники /пер. с англ. М.: Мир, 1990. 527 с.
69. Ширинкин М.А. Исследование и разработка манипуляционных механизмов параллельной структуры для подъёмно-транспортных систем предприятий текстильной промышленности: дис. ...канд. техн. наук: М. 2011. 121 с.
70. Ширинкин М.А., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В. Решение задачи о скоростях и особых положениях манипулятора параллельной структуры. // Известия

тия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2011. №3. С.95–101.

71. Angeles J. The Qualitative Synthesis of Parallel Manipulators // Journal of Mechanical Design. 2004. Vol. 126. P. 617–624.

72. Arakelian V., Guegan S., Briot S. Static and Dynamic Analysis of the PAMINSA // ASME 2005. International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. Long Beach. California. USA. 2005. P. 24–28.

73. Arakelian V., Briot S., Glazunov V. Increase of singularity-free zones in the workspace of parallel manipulators using mechanisms of variable structure // Mechanism and Machine Theory. 2008. Vol. 43. P. 1129–1140.

74. Arakelian V., Briot S., Glazunov V. Improvement of functional performance of spatial parallel manipulators using mechanisms of variable structure // Proceedings of the Twelfth World Congress in Mechanism and Machine Science. (IFTOMM), Besancon, France. 2007. Vol. 5. P. 159–164.

75. Bonev I.A. Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory / I.A. Bonev, D. Zlatanov, C.M. Gosselin // Journal of Mechanical Design. 2003. Vol. 125. № 3. P. 573–581.

76. Briot S. Analyse et Optimisation d'une Nouvelle Famille de Manipulateurs Parallèles aux Mouvements Découplés. These en vue de l'obtention du Doctorat de Genie Mecanique, 2007. 188 p.

77. Briot S. Singularity Analysis of PAMINSA Manipulators / S. Briot, V. Arakelian // Proceedings of 12th IFTOMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. Besançon, France, June 18-21. 2007. P. 752–757.

78. Carricato M., Parenti-Castelli V. On the topological and geometrical synthesis and classification of translational parallel mechanisms // Pr. of the XI World Congress in Mechanism and Machine Science. Tianjin, China. 2004. P. 1624–1628.

79. Carricato M. Fully Isotropic Four-Degrees-of-Freedom Parallel Mechanisms for Schoenflies Motion // International Journal of Robotics Research. 2005. Vol. 24, №5. P. 397–414.

80. Ceccarelli M. *Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulations*. Kluwer Academic Publishers, 2004. 412 p.
81. Ceccarelli M. A Study of Feasibility for a New Wrist // *Proceedings of the World Automation Congress*. Montpellier, France, 1996. P.1-10.
82. Ceccarelli M. A new 3 d.o.f. spatial parallel mechanism // *Mechanism and Machine Theory*. 1997. N 32(8). P.896–902.
83. Chablat D., Wenger P. Architecture Optimization, of a 3-dof parallel mechanism for machining applications, the ortoglide // *IEEE Trans. On Robotics and automation* 19. 2003. №19. P.403–410.
84. Cirillo A., Cirillo P., Maria G. de, Marino A., Natale C., Pirozzi S. Optimal Custom Design of Both Symmetric and Unsymmetrical Hexapod Robots for Aeronautics Applications // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2017. (44). Pp. 1–16.
85. Clavel R. Device for displacing and positioning an element in space / *Brevet N WO 87/03528*. Classification Internationale de brevets: B25J 17/02. Date de publication internationale: 18.06.87.
86. Craig J.J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 2<sup>nd</sup> ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989. 544 p.
87. Glazunov V., Laryushkin P., Kheylo S. 3-DOF Translational and Rotational Parallel Manipulators // *New Trends in Mechanism and Machine Science: Theory and Applications in Engineering*. 2013. P.199–207.
88. Glazunov V. Design of Decoupled Parallel Manipulators by Means of the Theory of Screws // *Mechanism and Machine Theory*. 2010. Vol.45. №2. P. 239–250.
89. Glazunov V., Kheylo S. Dynamics and control of planar, translational, and spherical parallel manipulators / *Dynamic balancing of mechanisms and synthesizing of parallel robots*. Springer, 2016. P. 365–403.
90. Glazunov V., Nosova N., Kheylo S., Tsarkov A. Design and Analysis of the 6-DOF Decoupled Parallel Kinematic Mechanism. In: *Dynamic Decoupling of Robot Manipulators*– Springer. 2018. P.125–170.
91. Gogu G. *Structural Synthesis of Parallel Robots, Part 1: Methodology (Solid Mechanics and Its Applications)*. Springer, 2007. 706 p.

92. Gogu G. Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations // *European Journal of Mechanics, A/Solids*. 2004. Vol. 23. P.1021–1039.
93. Gogu G. Fully-isotropic Parallel Manipulators With Five Degrees of Freedom // *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Orlando. 2006. P.1141–1146.
94. Gosselin C.M., Kong X., Foucault S., Bonev I. A fully decoupled 3-dof translational parallel mechanism // *Parallel Kinematic Machines International Conference*. Chemnitz. Germany. 2004. P. 595–610.
95. Gosselin C., Angeles J. The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator // *Trans. ASME. J. Mech., Trans., and Automat. Design*. 1989. N 2. P. 202–207.
96. Gosselin CM, Wang J Singularity of a special class of spherical three-degree-of-freedom parallel mechanisms with revolute actuators. *Int. J. of Robotics Research*. 2002. Vol.21(7). P.649–659.
97. Gosselin C., Kong X. Type synthesis of three-degree-of-freedom spherical parallel manipulator / *Int. J. of Robotics Research*, 2004. Vol.23(3). P.237–245.
98. Gough V.E. Contribution to Discussion of Papers on Research in Automobile Stability, Control and in Tyre Performance // *Pr. Autom. Div. Inst. Mech. Eng.* 1956/57. P. 392–396.
99. Gregorio R.D. A new family of spherical parallel manipulators // *Robotica*. 2002. Vol. 20 (№ 4). P. 353–358.
100. Hara A. Synthesis of Parallel Micromanipulators / A. Hara, K. Sugimoto // *Transactions of ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*. 1989. №1. P. 34–39.
101. Herve J.M. and Karouia M. The novel 3-RUU wrist with no idle pair // *Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*. Quebec. 2002. P. 3–4.

102. Huda S., Takeda Y. Dimension Synthesis of 3-URU Pure Rotation Parallel Mechanism with Respect to Singularity and Workspace // 12<sup>th</sup> IFToMM World Congress, Besançon. 2007. P. 235–242.
103. Karouia M., Herve J.M. A symmetrical 3-dof spherical parallel mechanism// European journal of mechanic A/solid: 2005. P.57–67.
104. Kheylo S.V., Tsarkov A.V., Garin O.A. Kinematic Analysis of Novel 6-DOF Robot In: Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020. P. 442-450.
105. Kong X., Gosselin C. Type Synthesis of Parallel Mechanisms. Springer, 2007. 275p.
106. Kong X., Gosselin C.M. Type synthesis of linear translational parallel manipulators // Advances in Robot Kinematics – Theory and Applications, Boston: Kluwer Academic Publishers. 2002. P.411–420.
107. Kong X. and Gosselin C. Kinematics and singularity analysis of a novel type of 3-CRR 3-DOF translational parallel manipulator // The International Journal of Robotics Research. 2002. N 21(9). P. 791–798.
108. Laryushkin P., Antonov A., Fomin A., Glazunov V. Novel Reconfigurable Spherical Parallel Mechanisms with a Circular Rail. *Robotics*. 2022. № 11(2). P30.
109. Leguay–Durand S, Reboulet C. Optimal design of a redundant spherical parallel manipulator // Robotica. 1997. v15(4). P.399–405.
110. Li Y., Xu Q. Kinematic analysis and design of a new 3-DOF translational parallel manipulator // ASME J. Mech. Des. 2006. Vol.128, № 4. P. 729–737
111. Liu X.J., Jin Z.L., Gao F. Optimum design of 3-DOF spherical parallel mechanism with respect to the conditioning and stiffness indices. Mechanism and machine Theory. 2000. Vol.35(9). P.257–267.
112. Merlet J. P. Parallel robots. Kluwer Academic Publishers, 2000. 372p.
113. Mianovski K. Singularity analysis of parallel manipulator POLMAN 3×2 with six degrees of freedom // 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), 2007. P.126–132.
114. Patent US6030386. Six axis external fixator strut. Taylor, Harold S. (Memphis, TN). 29/02/2000

115. Seward N., and Bonev I.A., “A new 6-DOF parallel robot with simple kinematic model,” 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Hong Kong, Chine. 2014.
116. Shaoping Bai Optimum design of spherical parallel manipulators for a prescribed workspace // Mechanism and Machine Theory. 2010. Vol.45, №2. P. 200–211.
117. Shoham M. and others . Bone-mounted miniature robot for surgical procedures: concept and clinical applications. IEEE Trans. On Robotics and Automation. 2003. Vol.19, №5. P.893–901.
118. Stewart D. A platform with 6 degrees of freedom // Proc. of the Institution of mechanical engineers. 1965. Vol.180. P.371–386.
119. Tyves L., Glazunov V., Danilin P., Nguyen Minh Thanh Decoupled Parallel Manipulator with Universal Joints and Additional Constraints // ROMANSY–18. Robot Design, Dynamics and Control. Proceedings of the Eighteenth CISM-IFTOMM Symposium. Udine, Italy, 2010. P.65-72.
120. Tsai L.-W. Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators. –John Wiley & Sons, 1999. 505 p.
121. Wenger, P., Chablat. D.: Kinematic analysis of a new parallel machine tool: The orthoglide. In: Proceedings 7th International Symposium on Advances in Robot Kinematics. Portoroz, Slovenia, 2000. P.275-284
122. Yan Jin, I-Ming Chen, Guilin Yang Structure Synthesis and Singularity Analysis of a Parallel Manipulator Based on Selective Actuation // Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, New Orleans, 2004. P.4533–4538.

**РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ**



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о государственной регистрации программы для ЭВМ  
**№ 2021662355**

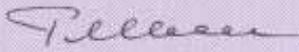
**Определение рабочей зоны механизма с шестью степенями свободы**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина» (Технологии. Дизайн. Искусство) (RU)*

Авторы: *Хейло Сергей Валерьевич (RU), Богачева Светлана Юрьевна (RU), Новичков Артем Романович (RU), Гарин Олег Анатольевич (RU), Гарин Егор Олегович (RU)*

Заявка № **2021661409**  
Дата поступления **19 июля 2021 г.**  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ **27 июля 2021 г.**

*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

 **Г.П. Иванов**



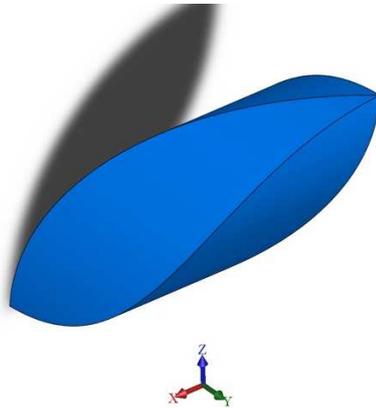
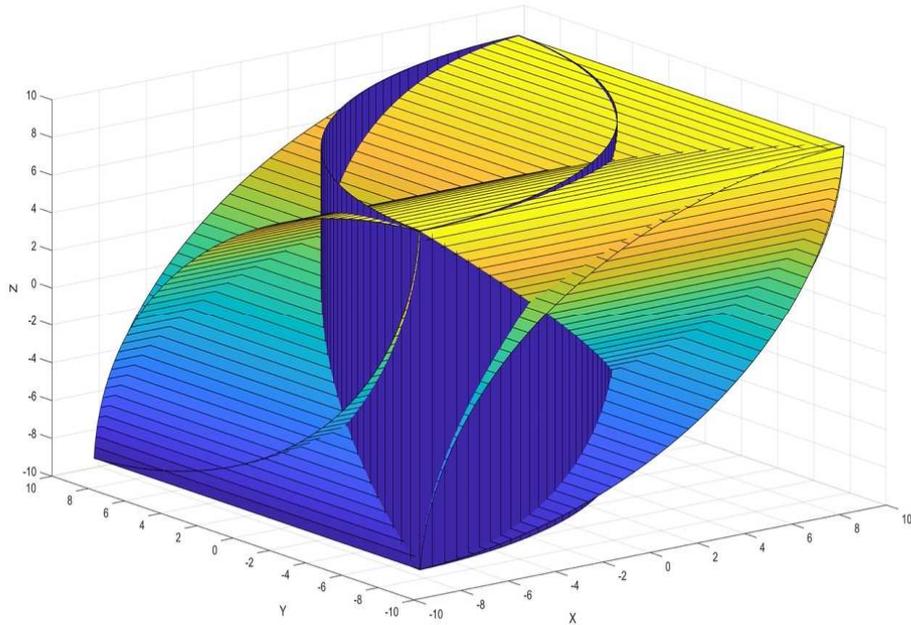
```

%% Example
figure;
r = 1; % radius of cylinder
h = 2; % height of cylinder
circumference_pnts = 100; % number of points in the circumference
theta = linspace(0, 2*pi, circumference_pnts); % angle to compute 'x' and 'y'
x = repmat(r*cos(theta),2,1); % compute coordinates and put in appropriate form
y = repmat(r*sin(theta),2,1); % compute coordinates and put in appropriate form
z = [zeros(1,circumference_pnts); h*ones(1,circumference_pnts)];
% array of 'z' values: first row is basis of cylinder and second row is top of
cylinder
surf(z,x,y)
%%
clear all;
clc;
% Параметры цилиндра ограничивающего рабочую зону
% Радиус и высота цилиндра получены исходя из геометрических построений
r = 9.43; % radius of cylinder
circumference_pnts = 100; % number of points in the circumference
theta = linspace(0, 2*pi, circumference_pnts); % angle to compute 'x' and 'y'
% X,Y coordinates of the center of the circle #1 (Первый цилиндр)
x0_1 = -5;
y0_1 = 5;
x1 = r*cos(theta) + x0_1;
y1 = r*sin(theta) + y0_1;
% X,Y coordinates of the center of the circle #2 (Второй цилиндр)
x0_2 = 5;
y0_2 = -5;
x2 = r*cos(theta) + x0_2;
y2 = r*sin(theta) + y0_2;
% Plot result
figure; hold;
plot(x1,y1); grid on;
plot(x2,y2); grid on;
% Далее ищем точки пересечения двух цилиндров и строим кривую,
% образованную данным пересечением. Данная кривая задает форму цилиндра
% Points of intersection of the circles
[xint,yint] = circirc(x0_1,y0_1,r,x0_2,y0_2,r);
% Plot result
plot(xint(1),yint(1),'r*'); plot(xint(2),yint(2),'b*');
thetalim1 = atan((yint(1)+y0_1)/( xint(1)+x0_1));
thetalim2 = atan((yint(2)+y0_1)/( xint(2)+x0_1));
thetalim3 = pi + thetalim1;
thetalim4 = pi + thetalim2;
l1 = linspace(thetalim1, thetalim2, circumference_pnts/2);
l2 = linspace(thetalim4, thetalim3, circumference_pnts/2);
x3 = r*cos(l1) + x0_1;
y3 = r*sin(l1) + y0_1;
x4 = r*cos(l2) + x0_2;
y4 = r*sin(l2) + y0_2;
x4 = fliplr(x4);
y4 = fliplr(y4);
x_int = repmat([x3 x4],2,1);
y_int = repmat([y3 y4],2,1);
plot(x_int(1,:), y_int(1,:));
legend('Первая окружность', 'Вторая окружность', ...
      '1-ая точка пересечения', '2-ая точка пересечения', 'искомая кривая');
% array of 'z' values: first row is basis of cylinder and second row is top of
cylinder

```

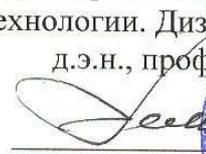
```
z = [-9*ones(1,circumference_pnts); 9*ones(1,circumference_pnts)];  
figure; grid;  
hold;  
surf(z,x_int,y_int); % A2A1  
surf(-x_int, z, y_int) % A3A4  
surf(x_int,-y_int, z) % A5A6  
xlabel('X');  
ylabel('Y');  
zlabel('Z');  
grid on;
```

Результат выполнения программы



## Приложение 2

«Утверждаю»  
 Первый проректор-  
 проректор по образовательной деятельности  
 Федерального государственного бюджетного  
 образовательного учреждения высшего образования  
 «Российский государственный  
 университет им. А.Н. Косыгина  
 (Технологии. Дизайн. Искусство)»,  
 д.э.н., проф. Дембицкий С.Б.

  
 «12» августа 2023 г.  


## СПРАВКА

об использовании результатов диссертационной работы

Гарина Олега Анатольевича

«Разработка и исследование механизмов с шестью степенями свободы, имеющих ортогонально расположенные пары двигателей с попарно параллельными осями»

Результаты научных исследований в области проектирования и синтеза манипуляционных механизмов параллельной структуры с шестью степенями свободы для совершения поступательных и вращательных движений, а также алгоритмы решения задач кинематики, использованы в учебной дисциплине «Новые механизмы в современной робототехнике», читаемой для студентов Института Мехатроники и Робототехники.

Заведующий кафедрой  
 Автоматики и промышленной  
 электроники



д.т.н., проф. Рыжкова Е.А.