

Ф. Циглер

МЕХАНИКА
ТВЕРДЫХ ТЕЛ
И ЖИДКОСТЕЙ

R&C
Dynamics

R&C
Dynamics

Franz Ziegler

Technische Universität, Wien

Institut für Allgemeine Mechanik (E201)

Wiedner Hauptstrasse 8-10

A-1040 Wien

Austria

Mechanics of Solids and Fluids

Corrected second printing, 1998

Springer-Verlag, New York, Vienna

Франц Циглер

Механика твердых тел и жидкостей

Второе издание

содержит 550 рисунков

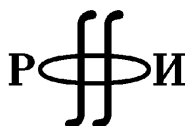
Перевод с английского В.Ю. Кирюхина, М.Ю. Няшина, М.А. Осипенко,
А.Р. Подгайца, Р.М. Подгайца, В.М. Тверье
под редакцией Ю.И. Няшина

R&C
Dynamics

РХД

Москва • Ижевск

2002



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 00-01-14116

Циглер Ф.

Механика твердых тел и жидкостей. Перевод с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2002, 912 стр.

Монография написана известным австрийским ученым Францем Циглером. В этой книге четко и последовательно дается изложение основ механики твердого тела и жидкости.

Отдельно рассмотрены современные приближенные методы решения статических и динамических задач механики (метод Рэлея-Ритца-Галеркина, метод конечных элементов и др.). Важной особенностью монографии является подробное рассмотрение большого числа примеров, имеющих ясную техническую направленность, а также подбор большого числа (374) интересных и разнообразных задач по основным разделам курса, предназначенных для самостоятельного решения.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в различных областях естествознания и техники. Может служить учебником и сборником задач по механике твердого тела и жидкости.

ISBN 5-93972-101-X

© Перевод на русский язык,

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002

<http://rfd.ru>

Посвящено студентам, откликнувшимся на вызов науки,
и моим детям Роберту и Еве

Предисловие

Эта книга в своем втором, исправленном и дополненном издании предлагает общий подход к изложению концепций и большинства применяемых на практике принципов, общих для всех разделов механики твердого тела и жидкости. Книга написана для студентов, изучающих инженерные науки, и может помочь в расширении кругозора как аспирантов так и специалистов-практиков. По мнению автора книги, глубокие знания в области прикладной механики могут помочь в развитии эрудиции, которую должны иметь инженеры в современном мире высоких технологий.

Первое издание книги на английском языке в 1991 году было основано на немецкой версии "Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper", опубликованной издательством Springer-Verlag, Вена в 1985 году.

Хотя эта книга и берет свое начало из трехсеместрового курса лекций для студентов, читавшегося автором и некоторыми коллегами в течение последних 20 лет, работа содержит достаточно материала для последующего двухсеместрового курса для выпускников института. Для освоения курса необходимо владеть лишь основами алгебры и анализа, которые обычно преподаются на первом курсе учебной программы института. Высшая математика как необходимый предмет при изучении механики может читаться параллельно, но введение в теорию проектирования должно быть уже преподано на этом этапе. Книга разделена на 14 глав, которые распределены таким образом, чтобы сохранить естественную последовательность идей и логики в изложении материала. Однако в пределах одной главы изложение, в общем, ведется от уровня студента до более сложного уровня и, наконец, до уровня аспиранта. Во втором издании была добавлена 14-я глава, в которой подобраны задачи для решения.

Первые три главы посвящены основам механического моделирования систем, находящихся в покое или в движении. Затем следует глава об определяющих соотношениях, начиная с закона Гука и ньютоновских жидкостей и заканчивая вязко-пластическими материалами. В изложении используются векторные и тензорные обозначения, записанные в декартовой системе координат, но всегда отдается предпочтение одномерным соотношениям, полученным из испытаний стандартных материалов. Для студентов, владеющих техникой использования полевых переменных, не составит труда следить за развитием логики.

Кинематика материальных точек и системы точек, включающая как траектории движения, так и линии тока, так же как и сохранение массы; статика,

обеспечивающая эксперимент с силами и напряжениями, включая поля гидростатического давления, механическая работа и силовые потенциалы - все это в 5-й главе позволяет быстро подойти к эффективному принципу виртуальных работ. Представляя силу как поток в потенциальном поле, становится очевидным расширение к немеханическим системам с иными ведущими факторами.

В обширной 6-й главе собраны материалы о линеаризованной упругой статике применительно к строительной механике. С целью подготовки студентов к задачам проектирования современных систем в высокотемпературном окружении особое внимание уделяется связи температурных эффектов в балках, пластинах и оболочках с силовыми напряжениями. Принцип соответствия упругих и вязко-упругих решений служит средством применения упругих решений задач для определения стационарной ползучести и решения связанных с ней задач долговечности. На этой стадии вводится преобразование Лапласа, как и в предыдущей главе 4, в форме операционного исчисления. Рассматриваются прямые и искривленные балки, простые рамы, пластины и оболочки вращения; особое внимание уделяется кручению и контактной теории Герца.

Поскольку диски и кольца в стационарном вращении уже рассматривались в упругой статике, отправной точкой главы 7 служат уравнения движения Эйлера-Коши и особое внимание уделяется переходу от статики материальной точки в покое к динамике движения точки. Для движущихся тел, заключенных в материальном объеме, для потока через контрольный объем, фиксированный в пространстве, и для случая, когда контрольная поверхность находится в заданном движении, формулируются законы изменения количества движения и момента количества движения. Основой является кинематика Эйлера и Лагранжа, описанная в главе 1. Концепция контрольного объема применяется непосредственно для определения направляющих сил стационарного потока и для объяснения тяги ракет и реактивных двигателей. Выводится турбинное уравнение Эйлера и определяются сила тяги и сила сопротивления в параллельном вязком основном потоке. Далее вводится вектор момента количества движения для вращающихся твердых тел и выводится общая формула для вычисления производной по времени вектора в промежуточной (вращающейся) системе координат. Также обсуждается уравнение Эйлера для гироскопа. В дополнение к материалу о кинематике твердого тела в главе 1 автор обращается к важной области (нелинейной) динамики нескольких тел (например, транспорт и спутники). В разделах о линейных и нелинейных колебаниях представлены не только полезные способы интегрирования как в частотной так и во временной

областях, но также иллюстрируются чисто динамические феномены типа резонанса и сдвига фазы. Вводится логарифмическая диаграмма Блэйка.

С помощью второго закона Ньютона устанавливаются связанные уравнения движения неразветвленной цепи пружинно-массовых систем и с помощью процедуры Хольцера-Толле определяются модальные свойства их собственных колебаний. В упражнении А 11.11 кратко описывается матричная итерационная схема Стодолы. В главе 7 рассматривается в общем случае практически важная конструкция гасителей колебаний, а в главе 10 рассматриваются крутильные колебания.

Используя уравнения равновесия свободного тела (с учетом сил инерции) для высокого балочного элемента, выводятся дифференциальные уравнения в частных производных для колебаний балки Тимошенко. В эту главу включены плоские волны в теле и сопутствующие линейные проблемы собственных значений и поверхностные волны Рэлея, чтобы улучшить понимание, например, ультразвуковых технологий. Они применяются в тестировании материалов и для медицинской диагностики. В этой главе, также и как в ситуации с гидравлическим ударом в гидравлике, следует обратить внимание на сейсмические волны, а именно на сейсмологические нагрузки. В главах 11 и 12 приведены некоторые иллюстрации.

Для описания движения жидкости и твердого тела полезно знать первый интеграл уравнений движения. Первый пример этого, плоский маятник, уже анализируется по ходу общего изложения в главе 7. Затем в главе 8 с помощью соответствующего интегрирования по материальному объему не только выводится теорема о работе в динамике и ее частный случай в виде закона сохранения механической энергии, но также интегрирование вдоль заданной линии тока, сохраняя постоянным время, позволяет получить обобщенное уравнение Бернулли динамики жидкости. Последнее специализируется к стационарному потоку идеальных жидкостей и приводит к закону сохранения удельной механической энергии частицы, движущейся вдоль линии тока и траектории. С помощью такого исходного вида уравнения Бернулли дается интерпретация гидравлических измерений в стационарном потоке. Более детально обсуждаются обобщения на случай учета подвода энергии к стационарному потоку и затем снижение напора направленного идеального потока через турбину или увеличение напора потока через насос и потеря энергии в вязком потоке. Рассматриваются линии тока относительно стационарно вращающейся отсчетной системы и выводится соответствующая форма уравнения типа Бернулли для облегчения дальнейшего использования в динамике жидкости во вращающихся машинах. Распространение на первый закон термодинамики (материальных и контрольных объемов) позволяет судить об основах закона сохранения энергии, и, можно надеяться, что разрыв

между курсом механики и параллельным курсом термодинамики таким образом сузится в некоторых вопросах. Лишь упоминается неравенство Клаузиуса-Дюгема. Однако устанавливается и применяется в главе 6 закон Фурье теплопроводности как результат необратимого процесса.

Глава 9 об устойчивости начинается с вывода критерия Дирихле в энергетической норме с помощью малых возмущений, приложенных к консервативной механической системе, находящейся в покое. Таким образом, с самого начала подчеркивается динамическая природа неустойчивости. Сохранение механической энергии в возмущенном движении и предположение о минимуме потенциальной энергии в состоянии равновесия дают соответствующие неравенства, которые ограничивают значения кинетической и потенциальной энергий в окрестности положения равновесия. В диаграмме силовой фактор-деформации обсуждены и проиллюстрированы бифуркация, прощелкивание и чувствительность к погрешностям. В общем случае рассматривается выпучивание по Эйлеру тонких стержней и выпучивание пластин, далее в главе 11 даются примеры. Вдобавок для рассмотрения устойчивости основного движения применяется метод малых возмущений.

Обсуждаются пределы устойчивости пластичных структур, и определяются предельные нагрузки в простых балках и рамах. Аналогично сохранению пластических систем формулируется анализ безопасности в рамках строительной механики. Формулируются теоремы о приспособляемости Мелана-Койтера, которые применяются к пластическому толстостенному сферическому сосуду, находящемуся под действием внутреннего давления. Рассмотрение устойчивости потока в открытом канале и неустойчивости как результат флаттера заканчивает этот первый обзор, основанный скорее на феноменологии, чем на математике.

Динамика систем с несколькими степенями свободы рассматривается в главе 10, где представляются уравнения движения Лагранжа (второго рода) и вывод более общего принципа Даламбера. Последний выводится таким же образом, как и принцип виртуальных работ в статике. Рассматриваются только динамические системы с голономными связями, также приводятся несколько примеров колеблющихся систем. Для демонстрации феномена опасного удара рассматриваются некоторые подробности динамики упруго закрепленного фундамента, способного совершать связанные вращательное и поступательное движения. Показано, что в маятнике с точкой подвеса, которая совершает периодические движения, возникают параметрические возмущения. При рассмотрении простой балки с массами, сосредоточенными в ее узлах, имеет место структурная динамика.

Принцип виртуальных работ, описанный в главах 5 и 10, является основой для важных алгоритмов аппроксимации и процедур дискретизации,

связанных с именами Релея, Ритца и Галеркина. В главе 11 предлагается достаточно широкая оценка с точки зрения механики и дается краткое введение в метод конечных элементов (МКЭ). Показывается сходимость по среднеквадратичной норме в методе Галеркина при условии аппроксимации содержащих силы уравнений равновесия или движения. Описывается обобщенная форма, делающая применение таким же удобным, как и оригинальная аппроксимация Ритца. Для применения на практике к сложным системам требуется дополнительное изучение специальной литературы и постепенное накопление опыта в решении подобных задач. В этой работе приоритет отдается примерам, в которых может быть получено дополнительное понимание механики. Например, выпучивание тонких стержней под влиянием основания Винклера указывает на скачок в характере протекания процесса, а также изгибные колебания, вызванные подвижной нагрузкой, указывают на другой тип эффективной изгибной жесткости в добавление к критическим скоростям. Это только две иллюстрации, имеющие инженерную значимость. С помощью аппроксимации Ритца-Галеркина осциллятора Даффинга, с помощью гармонического баланса и с помощью аппроксимации Крылова-Боголюбова показано исключение переменной времени в нелинейном обыкновенном дифференциальном уравнении движения.

В главе 12, которая посвящена динамике удара, большинство материала связано с простейшим возможным моделированием. Изменение количества движения предполагается внезапным, т.е. поле скоростей столкнувшихся масс претерпевает нестационарное, скачкообразное перераспределение. Только два предельных физических случая идеально-упругого удара с условием сохранения полной механической энергии и неупругого удара при полной диссипации тщательно изучены в данном контексте. Для того, чтобы проиллюстрировать и доказать некоторые из этих предположений, рассматривается тонкий стержень конечной длины, при этом принимается в расчет прямая и обратная бегущие волны, следующие за коротким и жестким ударом. Таким образом, дополнительно к скорости волны, определенной в главе 7, вводится скорость звука в стержнях. Подобным образом пересматривается гидравлический удар после внезапного перекрытия трубопровода, учитывая сжимаемость жидкости и упругость стенок цилиндрической трубы. Грубая аппроксимация, введенная в главе 7, для дренажной трубы может быть рассмотрена как ограниченная квазистатическим перекрытием канала. Скорость звука в этом случае зависит от жесткости пружин в последовательном соединении.

Глава 13 в некоторой степени заканчивает обсуждение основ динамики жидкости. Более важно, что подъемная сила, действующая на тело в

идеальном потоке, связана с циркуляцией по теореме Кутта-Жуковского в добавление к тому, что происходит в результате действия поверхностных сил. Исследуются уравнения Навье-Стокса и их безразмерная форма, обеспечивая далее мотивацию для введения чисел Рейнольдса и Фруда. Подобные решения с учетом коэффициента тяги, вязкого потока через трубу и пограничного слоя в потоке вдоль полубесконечной пластины – вот лишь некоторые приложения из-за ограниченного объема данной книги. Поскольку сингулярная природа возмущений идеального потока благодаря вязкости, очевидно, во многих случаях ограничена пограничным слоем, необходимо признать значимость внешнего потока, который можно считать идеальным. Поэтому рассматривается потенциальный поток и вводятся некоторые поля линий тока. Основным инструментом анализа является метод сингулярностей и описывается его основная идея; затем выводятся формулы Блазиуса. Рассчитываются силы, действующие на тело с помощью вихревых дорожек Кармана, и вводится число Струхала. Решается краевая задача кинематики волн, возбуждаемых в полосе жидкости конечной толщины подвижной твердой и линейно упругой стенкой, для того, чтобы продемонстрировать одну из важных проблем взаимодействия и чтобы показать связь мод движения. Обсуждается число Маха и сверхзвуковой поток динамики газа с учетом изэнтропического вытекания газа через отверстие в сосуде давления.

Каждая глава содержит не только более или менее сжатые выводы, но и также отдельно показывает практические применения. Книгу по механике нельзя читать как роман. От читателя требуется, чтобы он поработал над примерами с карандашом и бумагой или на персональном компьютере, хорошо владея удобным ему языком программирования, например, Фортраном. В главе 14 собраны задачи, расположенные по темам в порядке изложения материала. Примеры представлены в приложении для каждой главы от 1 до 13. Некоторые проверяют общие навыки в решении задач, некоторые содержат новый материал. Однако, когда нужно, всегда делаются некоторые указания вместе с полным решением. Следует также посмотреть и другие задачки.

На данную книгу оказали свое влияние стандарты преподавания механики Северо-западного Университета, Университета Станфорда и Университета Корнелла, которые посетил автор несколько раз. Этот учебник разработан для аудиторных занятий или для самообразования, он не является трактатом о новых научных результатах. Автор обязан многим исследованиям за период более чем двести лет, также как и более ранним книгам по механике. Расширенную библиографию можно найти в Физической Энциклопедии, опубликованной издательством Springer-Verlag, Берлин, в различных изданиях по инженерной механике и механике жидкостей. Также источником информации могут послужить регулярные номера журнала Applied Mechanics Reviews,

издаваемого ASME, Нью Йорк. Здесь необходимо упомянуть классические книги профессора С.Тимошенко. Первое издание этой книги, опубликованное в Германии издательством Springer-Verlag, Вена, имело корни в книге Г. Паркуса "Механика твердого тела" (на немецком языке). Большинство из рисунков первого издания было использовано для иллюстрации этой книги. Автор обязан многим коллегам Технического университета Вены, а также ряду бывших аспирантов за пропаганду его книги на занятиях. В первую очередь, это были др. Х. Адам, др. П. Фотью, др. Н. Хампл, др. Р. Хазенцагл, др. Х. Хасслингер, др. Х. Хайек, др. Р. Хейер, др. Ф. Холлингер, др. Х. Иршик (профессор механики, университет Линца), др. Ф. Раммерсторфер (профессор института легких структур и конструкции самолетов), др. В. Шейдл (главный инженер Элина). Их одобрение и полезная критика и множество советов от студентов и практиков строительной и механической инженерии сделали возможной эту книгу, и результаты нашли свое отражение во втором исправленном издании.

Автор благодарен всем рецензентам, которые настойчиво рекомендовали издать книгу в издательстве Springer-Verlag, Нью Йорк, и, наконец, редактору и его персоналу за редактирование и ценные технические консультации в процессе подготовки гранков книги. Последние автор завершил сам, используя Apple Macintosh II, Microsoft Word и Exprissionist. Автор благодарен жене др. Вальтрауд Циглер за ее поддержку и советы по языку. Первая издание было принято хорошо.

Пожалуйста, присылайте любые предложения, которые могли бы улучшить текст, автору или в издательство Springer-Verlag.

Предисловие к русскому изданию

Механика является одной из наиболее важных частей технологического прогресса. Предлагаемая вниманию читателя книга основана на первом немецком издании книги и исправленном варианте второго американского издания. Она представляет собой прикладную механику твердых тел и жидкостей. Сжатое и современное изложение представляет, по мнению автора, интерес для студентов инженерных вузов, аспирантов и инженеров, работающих в различных отраслях техники.

Каждая глава содержит основной материал по различным проблемам механики, что позволяет студентам и аспирантам постепенно перейти к современным проблемам техники. Для инженеров-практиков книга по механике твердых тел и жидкостей дает современное описание принципов механики твердых тел и жидкостей вместе с иллюстративными примерами, имеющими практическое значение. Закон сохранения массы, законы изменения количества движения и энергии рассмотрены для материальной системы и контрольного объема. Также обсуждаются различные определяющие соотношения. Статическая теория упругости включает анализ температурных напряжений и с помощью принципа соответствия распространяются на линейную вязкоупругость. Метод Ритца-Галеркина разработан весьма детально с переходом на метод конечных элементов. Все обсуждения включают теоретические результаты и приложения, простые и сложные системы, классические и современные результаты.

Автор выражает глубокую благодарность переводчикам книги за кропотливую работу, которая в ряде случаев привела к улучшению первоначального текста книги. Автор надеется, что издание книги на русском языке поможет углубить узы дружбы и взаимопонимания между учеными и инженерами различных стран.

*Иностранный член Российской академии наук
Франц Циглер*

Вена, октябрь 2000 года

От редактора перевода

Усиление фундаментальной подготовки студентов и аспирантов технических вузов и технических университетов требует издания учебной литературы, сочетающей строгость изложения и практическую направленность учебного материала. Аналогичные соображения относятся к вопросам повышения квалификации инженеров, работающих в различных отраслях техники.

В области механики сплошных сред на русском языке имеются хорошо известные монографии, рассчитанные, прежде всего, на студентов и аспирантов классических университетов, специализирующихся по механике (Л.И. Седов. Механика сплошной среды. Москва, Наука, 1993. А.А. Ильюшин. Механика сплошной среды. Москва, Издательство Московского университета, 1990 и др.).

Предлагаемая вниманию читателей монография известного австрийского ученого, иностранного члена Российской академии наук Франца Циглера “Механика твердых тел и жидкостей” получила широкую известность прежде всего в технических вузах мира. Первое издание книги вышло в 1985 году на немецком языке в издательстве “Springer”. Последующие издания (1991 г., 1995 г., 1998 г.) вышли на английском языке. В книге четко и последовательно дается изложение основ механики твердого тел и жидкостей. Важной особенностью монографии является подробное рассмотрение большого числа примеров, имеющих ясную техническую направленность, а также подбор большого числа (около 400) интересных и разнообразных задач по основным разделам курса, предназначенных для самостоятельного решения. В пределах каждой главы изложение ведется от уровня студента до уровня аспиранта.

Книга может быть использована как монография, вводящая читателя в современную механику сплошных сред, а также как учебник для студентов и аспирантов технических вузов и университетов.

Ю.И. Няшин

Содержание

Предисловие

1. Кинематика	1
1.1. Кинематика точки	1
1.1.1. Пример: траектория в однородном гравитационном поле над «плоской планетой»	5
1.1.2. Пример: движение точки по траектории	5
1.1.3. Естественные координаты траектории	7
1.2. Кинематика твердого тела	8
(§) Покажем, что ω является свободным вектором	9
(§) Преобразование векторов угловой скорости	9
1.2.1. Частные случаи движения твердого тела	12
(§) Поступательное движение	12
(§) Вращение вокруг неподвижной точки	12
(§) Плоское движение твердого тела	13
(§) Пример: колесо в прямолинейном качении	14
(§) Ускорение	14
1.3. Кинематика деформируемого тела	15
1.3.1. Удлинение и сдвиг	18
1.3.2. Дилатация и девиатор деформаций	21
1.3.3. Линии и трубки тока: локальное и конвективное ускорения	22
1.3.4. Кинематические (геометрические) граничные условия	26
1.4. Дополнения и приложения кинематики точки и твердого тела	28
1.4.1. Диаграмма скоростей при плоском движении	28
1.4.2. Кинематика планетарного передаточного механизма	29
1.4.3. Универсальный шарнир (шарнир Кардана)	30
1.4.4. Центральное движение (задача Кеплера): полярная система координат	31
1.5. Дополнения и приложения кинематики деформации	33
1.5.1. Одноосная однородная деформация	33
1.5.2. Естественные координаты линии тока	34
1.5.3. Тензор деформаций, плоское деформированное состояние	36
(§) Тензорные свойства матрицы деформаций	36
(§) Преобразование главных осей, круг Мора	37
1.6. Сохранение массы: уравнение неразрывности	39
1.6.1. Стационарное течение через конусообразную трубу: представления Эйлера и Лагранжа	45
1.7. Упражнения А 1.1 – А 1.10 и решения	46
2. Статика, системы сил, гидростатика	57
2.1. Силы, объемные силы, поверхностные силы, напряжения, равновесие	57
2.1.1. Напряжения в растягиваемом стержне: круг Мора	59
2.1.2. Плоское напряженное состояние: круг Мора	63
2.1.3. Трехмерное напряженное состояние	67
2.1.4. Среднее нормальное напряжение и девиатор напряжений	71
2.2. Системы сил	73
2.2.1. Плоская система сил: аналитическое и графическое приведение, условия равновесия	79

(§) Пример: реакции опор в плоской нагруженной структуре	81
2.2.2. Симметрия тензора напряжений	82
2.2.3. Система параллельных сил: центр сил, центр тяжести, статические моменты	83
2.3. Гидростатика	87
2.3.1. Жидкость в поле силы тяжести	89
(§) Несжимаемая жидкость	89
(§) Линейная сжимаемость	91
(§) Нелинейная сжимаемость	91
2.3.2. Жидкости под давлением	92
(§) Принцип действия гидравлического насоса	93
(§) Сосуды и трубы	94
2.3.3. Гравитационное гидростатическое давление в открытых контейнерах	96
(§) Плоское горизонтальное основание площади A	96
(§) Плоская удерживающая стенка площади A	97
(§) Круговая цилиндрическая поверхность (рис. 2.23)	99
(§) Гидростатическое давление на сферическую поверхность (рис. 2.24)	100
(§) Гидростатическое нагружение двояко искривленной поверхности	102
(§) Иллюстративный пример: подъемная сила	103
2.3.4. Гидростатическая плавучесть	104
(§) Вертикально плавающий цилиндр: устойчивость (рис. 2.26)	105
(§) Плавающий цилиндр с горизонтальной осью: устойчивость	107
(§) Плавучесть	108
2.4. Моменты инерции плоской фигуры A и правила их преобразования	109
(§) Моменты инерции относительно параллельных осей	110
(§) Моменты инерции относительно повернутых осей (круг Мора)	111
(§) Эллипс инерции	113
(§) Пример: центральный эллипс прямоугольника, $A = B \times H$	113
2.5. Статика простых конструкций	114
2.5.1. Балки и рамы	114
2.5.1.1. Локальное равновесие плоского арочного и плоского балочного элемента (рис. 2.31)	119
2.5.1.2. Прямые балки, силовой и веревочный многоугольники	124
(§) Консольная балка	125
(§) Балка на шарнирах	127
(§) Иллюстративный пример: эксцентричная осевая сила	129
(§) Графическое решение с помощью силового и веревочного многоугольников	130
(§) Непрерывные (многопролетные) балки	134
2.5.1.3. Линии влияния	134
2.5.1.4. Плоские рамы и трехшарнирная арка	138
2.5.1.5. Два статически определенных напряженных состояния	140
(§) Изгибные напряжения в многослойном поперечном сечении	140
(§) Касательные напряжения при кручении тонкостенной трубы	141
2.5.2. Ферменные конструкции	143
2.5.2.1. Плоские фермы	146
2.5.3. Статика гибких тросов (и цепей)	149
2.6. Упражнения А 2.1 – 2.15 и решения	154
3. Механическая работа, мощность, потенциальная энергия	171
3.1. Работа и мощность сосредоточенных сил и пар сил	171

3.1.1.	Пример: Работа сил тяжести	173
3.1.2.	Пример: Работа пары сил	173
3.2.	Плотность мощности, стационарные и безвихревые силы, потенциальная энергия	173
3.3.	Потенциальная энергия внешних сил	177
3.3.1.	Однородные и параллельные силы тяжести, потенциал собственного веса	177
3.3.2.	Центральное поле сил с центральной симметрией	178
3.4.	Потенциальная энергия внутренних сил	178
3.4.1.	Упругий потенциал гукковского твердого тела (линейной пружины)..... (§) Пример: Простая ферма	181 183
3.4.2.	Баротропная жидкость	185
3.5.	Лагранжево представление работы внутренних сил, тензор напряжений Кирхгоффа	185
3.6.	Упражнения А 3.1, А 3.2 и решения	188
4.	Определяющие соотношения	191
4.1.	Упругое тело, закон Гука линейной теории упругости	191
4.1.1.	Линейно упругое тело, закон Гука	192
	(§) Испытание на изгиб	197
	(§) Испытание на кручение	199
4.1.2.	Замечание об анизотропии	201
	(§) Плоское напряженное состояние	201
	(§) Трансверсальная изотропия относительно оси X	202
4.1.3.	Замечание о нелинейности	202
4.2.	Вязко-упругое тело	206
4.2.1.	Ньютоновская жидкость	206
	(§) Иллюстративный пример	208
	(§) Одномерная вязкая модель	210
4.2.2.	Линейная вязко-упругость	210
	(§) Тело Кельвина-Фойгта	211
	(§) Жидкость Максвелла	213
	(§) Многопараметрическое линейно вязко-упругое тело	214
	(§) Общая теория линейной вязко-упругости	216
4.2.3.	Нелинейный вязко-упругий материал	217
	(§) Пример: Разрушение растягиваемого стержня при ползучести	219
4.3.	Пластическое тело	221
4.3.1.	Жёстко-пластическое тело	221
4.3.2.	Упруго-пластическое тело	224
4.3.3.	Вязко-пластическое тело	229
4.4.	Упражнения А 4.1 – А 4.3 и решения	231
5.	Принцип виртуальной работы	235
5.1.	Пример: Трёхшарнирная арка	238
5.2.	Линии влияния статически определимых конструкций	240
5.3.	Консервативные механические системы	243
5.3.1.	Дифференциальное уравнение прогиба линейно упругой балки	244
5.3.2.	Уравнения Кармана для пластины	247
5.4.	Принцип дополнительной виртуальной работы	250
5.4.1.	Теорема Кастильяно и теорема Менабреа	252
	(§) Линейно упругий тонкий прямолинейный стержень	254
	(§) Плоская ферма с одной степенью внутренней статической неопределённости (рис. 5.7)	255

(§) Двухпролетная балка, нагруженная в соответствии с рис. 5.9	256
(§) Прогиб равномерно нагруженной консольной балки	258
(§) Плоский зажим под действием концевых сил	259
5.4.2. Метод Бетти	259
(§) Тонкостенные конструкции, свободные от кручения	260
(§) Консольная балка, изображенная на рис. 5.11	260
(§) Консольная балка с дополнительной подвижной опорой, рис. 5.13	261
5.4.3. Преобразование принципов минимальной потенциальной и дополнительной энергии	262
5.5. Упражнения А 5.1 – А 5.4 и решения	264
6. Избранные вопросы статической теории упругости	268
6.1. Теория континуума в линеаризованной теории упругости	270
(§) Одномерные задачи линейной теории упругости	272
(§) Посадка с натягом	274
6.1.1. Термоупругие деформации	274
(§) Дополнительная энергия термически нагруженного бруса	276
(§) Пример: Однопролетная статически неопределимая балка	278
(§) Формула Майзеля теории термоупругости	279
(§) Полая сфера с центральной симметрией и толстостенный цилиндр с осевой симметрией, формула Майзеля	281
6.1.2. Принцип Сен-Венана	282
6.1.3. Гипотезы напряжений и деформаций	283
(§) Гипотеза главного нормального напряжения	283
(§) Энергетическая гипотеза Генки – Мизеса	284
(§) Гипотеза напряжений Мора – Кулона	284
(§) Концепция допустимого напряжения	285
6.2. Стержни и балки с прямолинейными осями	285
(§) Нормальная сила и изгибающие моменты	286
6.2.1. Касательные напряжения и деформации, возникающие из-за поперечной силы	288
(§) Прямоугольное поперечное сечение	290
(§) Максимальное касательное напряжение в эллиптическом или круговом поперечном сечении	291
(§) Применение соотношения (6.58) к Т-образному поперечному сечению ...	291
(§) Пример: Прогиб консольной балки при поперечном изгибе	295
6.2.2. Метод Мора вычисления перемещений	295
(§) Применение аналитического метода Мора к консольной балке, изображенной на рис. 6.9	297
(§) Применение графического метода Мора к консольной балке, изображенной на рис. 6.9	299
(§) Линии влияния деформаций по методу Мора	299
(§) Метод Мора	300
(§) Многопролетная балка, изображенная на рис. 6.13	301
6.2.3. Температурные напряжения в балках	303
(§) Однопролетная шарнирно опертая балка	305
(§) Статически неопределенная однопролетная балка	306
6.2.4. Кручение	307
6.2.4.1. Тонкостенные одно- и многоячеистые поперечные сечения	307
6.2.4.2. Тонкостенные незамкнутые поперечные сечения	313
(§) Кручение тонкостенного стержня с прямоугольным поперечным сечением	314
(§) Обобщение соотношения (6.134)	317

(§) Стесненная деформация	319
(§) Консольная балка с С-профилем (швеллер), изображенная на рис. 6.17	322
6.2.4.3. Кручение эллиптического и цилиндрического, сплошного и полого цилиндров.....	325
(§) Эллиптическое поперечное сечение	327
6.2.4.4. Кручение круглого вала с канавкой	330
6.2.4.5. Мембранная аналогия Прандтля и электрическая аналогия.....	332
6.3. Многопролетные балки и рамы	334
(§) Метод сил для многопролетной балки.....	334
(§) Метод перемещений.....	335
(§) Применение метода перемещений к рамам	337
6.3.1. Плоская одноярусная рама	339
6.4. Плоские криволинейные балки и арки	340
(§) Дополнительная энергия криволинейной балки	344
6.4.1. Балки и арки малой кривизны	345
(§) Параболическая арка малой кривизны, изображенная на рис. 6.27	345
(§) Слегка изогнутое кольцо.....	347
(§) Вращающиеся кольца	348
6.5. Пластины, нагруженные в своей плоскости	350
6.5.1. Полубесконечная пластина	352
(§) Задача Буссинеска	353
(§) Функция напряжений в случае тангенциальной сосредоточенной силы ..	354
6.5.2. Стационарно вращающиеся диски	355
6.5.3. Бесконечная пластина с круговым отверстием: задача Кирша	357
6.5.4. Температурные мембранные напряжения в пластинах	359
6.6. Изгиб пластин.....	360
6.6.1. Осесимметричный изгиб круглых пластин Кирхгоффа.....	365
6.6.2. Бесконечная плоская полоса.....	365
6.6.3. Прямоугольная пластина с четырьмя шарнирно опертыми краями.....	366
6.6.4. Температурный прогиб пластин.....	367
(§) Квадратная в плане пластина	368
(§) Бесконечная пластина	368
6.7. Тонкие оболочки вращения.....	369
(§) Мембранные напряжения	370
(§) Изгибное возмущение мембранного состояния.....	371
6.7.1. Тонкие круговые цилиндрические оболочки.....	375
(§) Открытый цилиндрический резервуар.....	376
6.7.2. Полусферический купол, изображенный на рис. 6.39.....	377
6.7.3. Температурные напряжения в тонких оболочках вращения.....	379
(§) Радиальное температурное растяжение круговой цилиндрической оболочки	380
6.8. Контактные задачи (теория Герца)	381
6.9. Температурные поля, не вызывающие напряжений, закон теплопроводности Фурье	385
6.10. Упруго-вязко-упругая аналогия.....	387
6.10.1. Ползучесть шарнирно опертой однопролетной балки.....	389
6.10.2. Нагреваемая толстостенная труба (рис. 6.42).....	390
6.11. Упражнения А 6.1 – А 6.23 и решения	392
7. Динамика твердых тел и жидкостей, уравнения количества движения материального и контрольного объемов.....	415
7.1. Изменение количества движения.....	418

7.2.	Изменение момента количества движения	422
7.3.	Примеры применения контрольных объемов	426
7.3.1.	Стационарное течение через колено	426
(§)	Плоское колено	428
(§)	Сопло с прямолинейной осью	428
(§)	Плоское U-образное колено	429
7.3.2.	Тяга реактивного двигателя	429
7.3.3.	Турбинное уравнение Эйлера	432
7.3.4.	Гидравлический удар в прямолинейном трубопроводе	434
7.3.5.	Потеря гидростатического напора Карно	435
7.4.	Приложения к динамике абсолютно твердого тела	436
7.4.1.	Катящееся абсолютно твердое колесо	439
7.4.2.	Канатная передача	440
7.4.3.	Динамика дробильного ролика (рис. 1.3)	443
7.4.4.	Поворотный кран со стрелой	443
7.4.5.	Балансировка вращающихся тел	445
7.4.6.	Гирокомпас	445
7.4.7.	Линейный осциллятор	447
(§)	Периодическая вынуждающая функция $F(t) = F(t + T_e)$	451
(§)	Возбуждение с помощью непериодической вынуждающей функции	455
(§)	Представление движения на фазовой плоскости $(\xi, d\xi/dt)$	456
(§)	Некоторые конструктивные модели линейного осциллятора	460
(§)	Линейные крутильные колебания	461
7.4.8.	Нелинейные колебания	461
(§)	Движение плоского маятника	461
(§)	Система с одной степенью свободы при наличии сухого трения	464
7.4.9.	Линейно упругая цепь осцилляторов	467
(§)	Метод остатков Хольцера и Толле	468
(§)	Формула Данкерлея	470
(§)	Формы собственных колебаний	471
(§)	Функции амплитудно-частотного отклика двухмассовой системы	471
7.5.	Изгибные колебания линейно упругих балок	472
(§)	Собственные и вынужденные колебания тонкой шарнирно опертой однопролетной балки	474
7.6.	Волны в линейно упругом твердом теле	476
(§)	Продольная волна	478
(§)	Поперечная волна	478
7.7.	Упражнения А 7.1 – А 7.12 и решения	479

8.	Первые интегралы уравнений движения, кинетическая энергия	495
8.1.	Теорема мощностей и кинетическая энергия	495
8.2.	Сохранение механической энергии	496
8.3.	Кинетическая энергия твердого тела	497
8.3.1.	Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки O	498
8.3.3.	Вращение вокруг неподвижной оси e_a	498
8.4.	Сохранение энергии в системах с одной степенью свободы	499
8.4.1.	Движение линейного осциллятора после удара (рис. 8.1)	499
8.4.2.	Основная мода колебаний линейно упругой балки	500
8.4.3.	Ускорение тележки с двигателем	502
8.4.4.	Точки поворота нелинейного осциллятора с сухим трением	502
8.5.	Уравнение Бернулли в механике жидкости	503
8.5.1.	Стационарное течение при поглощении или выделении мощности	507

8.5.2.	Скорость истечения жидкости через малое отверстие из открытого сосуда или емкости, находящейся под давлением (рис. 8.5).....	508
8.5.3.	Стационарное обтекание погруженного в жидкость неподвижного твердого тела.....	509
8.5.4.	Течение идеальной жидкости у твердой стенке.....	510
8.5.5.	Измерение давления в трубе с помощью манометрической трубки.....	511
8.5.6.	Трубка Прандтля и трубка Пито.....	512
8.5.7.	Переходное течение в дренажной трубке, перекрываемой краном.....	513
8.5.8.	Свободные колебания жидкости в открытой U-образной трубке.....	514
8.5.9.	Течение без потерь через диффузор.....	516
8.5.10.	Уравнение типа Бернулли во вращающейся системе отсчета.....	517
(§)	Пример: Водяное колесо Сегнера.....	519
8.6.	Замечания о первом начале термодинамики (сохранение энергии).....	520
8.7.	Задачи А 8.1 – А 8.6 и решения.....	522
9.	Задачи устойчивости.....	529
9.1.	Устойчивость положения равновесия.....	529
(§)	Нижнее положение равновесия.....	530
(§)	Верхнее положение равновесия.....	530
9.1.1.	Пример: задача о равновесии тяжелого твердого цилиндра.....	534
9.1.2.	Пример: простая модель выпучивания.....	537
9.1.3.	Пример: устойчивость пологой конструкции при поперечном нагружении.....	541
9.1.4.	Пример: выпучивание тонкого упругого стержня (эйлерово выпучивание).....	543
9.1.5.	Нецентрально нагруженный линейно упругий стержень.....	549
9.1.6.	Выпучивание тонких пластин.....	550
(§)	Прямоугольная шарнирно опертая пластина.....	551
9.2.	Устойчивость движения.....	552
9.2.1.	Пример: центробежный регулятор.....	552
9.2.2.	Устойчивость стационарного состояния вращающегося несимметричного гироскопа.....	556
9.3.	Границы устойчивости равновесия упруго-пластических конструкций: анализ предельной нагрузки.....	557
9.3.1	Предельная нагрузка для одноуровневой упруго-пластической рамы.....	564
9.4.	Устойчивость движения упруго-пластических тел (циклическая пластичность).....	566
9.5.	Устойчивость течения в наклонных открытых каналах, гидравлический скачок.....	570
9.6.	Флаттерная неустойчивость.....	574
9.7.	Упражнения А 9.1 – А 9.8 и решения.....	577
10.	Принцип Д'Аламбера и уравнения Лагранжа.....	585
(§)	Точечная масса m , несущая заряд q ; сила Лоренца.....	589
10.1.	Свободные колебания основания на упругих опорах.....	590
10.2.	Маятник с движущимся подвесом.....	593
10.2.1.	Горизонтальное движение подвеса.....	593
10.2.2.	Вертикальное движение подвеса.....	595
10.3.	Колебательная система с несколькими степенями свободы, состоящая из точечных масс, укрепленных на невесомой нити.....	597
10.4.	Колебательная система с несколькими степенями свободы, состоящая из точечных масс, укрепленных на невесомой балке.....	599
10.5.	Плоская стержневая система с внешним вязким сопротивлением.....	602

10.6. Вибрационные испытания с применением несбалансированного ротора	603
10.7. Упражнения А 10.1 – А10.3 и решения	605
11. Некоторые приближенные методы динамики и статики... 610	
11.1. Приближенный метод Рэлея – Ритца – Галеркина	611
11.1.1. Метод Рэлея-Ритца и уравнения Лагранжа для заменяющей системы с конечным числом степеней свободы	611
11.1.2. Метод Галеркина	612
11.1.3. Полная алгебраизация уравнений Лагранжа	614
11.1.4. Вынужденные колебания нелинейного осциллятора	614
11.2. Примеры линеаризованных упругих систем с большими массами и малыми жесткостями; заменяющая система имеет одну степень свободы	616
11.2.1. Продольные колебания	616
11.2.2. Изгибные колебания	618
11.2.3. Крутильные колебания	619
11.2.4. Одноярусная рама	621
11.2.5. Упругая круглая пластина с точечной массой в центре	622
11.3. Примеры упругих конструкций с абстрактными заменяющими системами	623
11.3.1. Свободные изгибные колебания предварительно нагруженной тонкой балки	623
11.3.2. Нагрузка на выпучивание для эйлера стержня на упругом основании	625
11.3.3. Крутильная жесткость упругого стержня с прямоугольным сечением	626
11.4. Метод конечных элементов (МКЭ)	627
11.4.1. Балочный элемент	628
11.4.2. Плоский треугольный элемент пластины	632
11.5. Линеаризация нелинейных уравнений движения	635
(§) Линеаризация методом гармонического баланса	636
(§) Переходные колебания нелинейных систем	637
11.6. Численное интегрирование нелинейного уравнения движения	639
11.7. Упражнения А 11.1 – А 11.12 и решения	641
12. Удар	660
12.1. Интегральная форма соотношений для количества движения и момента количества движения	661
12.1.1. Пример: удар по абсолютно твердой пластине	663
12.1.2. Пример: продольный удар по упругой колонне	664
12.2. Уравнения Лагранжа для идеализированного удара	666
12.2.1. Пример: удар по маятнику типа цепи (система с несколькими степенями свободы)	666
12.2.2. Пример: поперечное ударное нагружение шарнирно закрепленной на концах упругой балки	668
12.3. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары	669
12.3.1. Абсолютно упругий удар	669
12.3.2. Абсолютно неупругий удар	669
12.3.3. Пример: столкновение двух материальных точек	670
(§) Абсолютно упругий удар	670
(§) Абсолютно неупругий удар	671
12.4. Баллистический маятник и центр удара	672
(§) Идеализированный упругий удар	672
(§) Идеализированный неупругий удар	673
12.5. Внезапное закрепление оси вращения	674
12.6. Коэффициент динамического усиления продольного и поперечного ударов	675

12.7. Продольный удар по тонкому упругому стержню. Распространение волн	676
12.8. Гидравлический удар: распространение волн	679
12.9. Упражнения А 12.1 – 12.4 и решения	684
13. Элементарные приложения гидродинамики	688
13.1. Циркуляция и вектор вихря	688
13.2. Гидродинамическая подъемная сила	692
13.3. Уравнение Навье-Стокса, автономные решения	697
13.3.1. Течение вязкой жидкости в трубе	700
13.3.2. Пограничный слой около пластины	703
13.4. Потенциальное течение, метод сингулярностей	707
13.4.1. Примеры	709
(§) Плоское потенциальное течение по направлению к жесткой стенке	709
(§) Плоские течения в угловом пространстве и вокруг острого края	710
(§) Сингулярные потенциальные течения	710
13.4.2. Метод сингулярностей	712
(§) Суперпозиция линейного источника и параллельного основного потока	712
(§) Суперпозиция потенциальных вихревых линий и параллельного основного потока	715
13.4.3. Гидродинамические силы при плоском стационарном потенциальном течении, формула Блазиуса	716
13.4.4. Вихревая дорожка Кармана, число Струхала	718
13.4.5. Гидродинамическое давление на поверхности движущейся плотины	721
13.4.6. Стационарное истечение газа из резервуара давления	723
13.5. Интегральный метод количества движения для анализа пограничного слоя	725
13.6. Упражнения А 13.1 – А 13.5 и решения	727
14. Избранные задачи	734
Приложение	858
Таблица А. Некоторые средние значения механических параметров материалов	858
Таблица Б. Основные единицы измерения в США и их эквиваленты в системе СИ	859
Список литературы	860
Алфавитный указатель	866

1 Кинематика

Кинематика – раздел механики, описывающий геометрию движения (деформацию) тела, не рассматривая силы и напряжения, причины этого движения. Ключевыми объектами анализа движения точки являются либо радиус-вектор, либо вектор перемещения, либо векторы скорости и ускорения. Поля этих векторов определяют кинематику простого континуума (континуума точек). Градиенты деформации, пространственные производные перемещений задают локальные деформации и, поэтому, описывают деформацию в целом. Таким образом, можно вычислить удлинение волокна, расширение элемента объема и изменение угла между двумя перпендикулярными волокнами. Кинематическая модель твердого (недеформируемого) тела характеризуется постоянным расстоянием между любой парой точек тела в процессе движения. Это основная отсчетная система координат (например, для деформирования), а поле скоростей представлено с помощью вектора угловой скорости. Аксиомы пространственного маятника, центры, связанные с твердым телом в плоском движении, иллюстрируют поле скоростей такой идеализированной модели и вводят понятие контакта при чистом качении.

С другой стороны, линии тока отображают движение жидкости в тех случаях, когда неважно знать путь отдельной частицы жидкости. Завершает данное введение изучение закона сохранения массы твердого тела и жидкости.

1.1. Кинематика точки

Положение отдельной (материальной) точки P тела, находящегося в движении, измеряемое от точки отсчета O (например, фиксированной в инерциальной системе) в любой момент времени t , задается с помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}_P(t)$. Компоненты этого радиуса-вектора являются координатами точки P в системе координат [например, декартовы координаты $x_P(t), y_P(t), z_P(t)$ в направлении взаимно ортогональных единичных векторов $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ и для них $\mathbf{r}_P = x_P(t)\mathbf{e}_x + y_P(t)\mathbf{e}_y + z_P(t)\mathbf{e}_z$]. С помощью нижних индексов единичные векторы переобозначим как $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$, а компоненты \mathbf{r}_P обозначим $x_i(t), i = 1, 2, 3$. Используя матричные обозначения, радиус-вектор представляет собой вектор-столбец $\{x_i(t)\}$, или, после транспонирования, он становится вектором-строкой $\{x_i(t)\}^T$. Конец радиуса-вектора описывает траекторию дви-

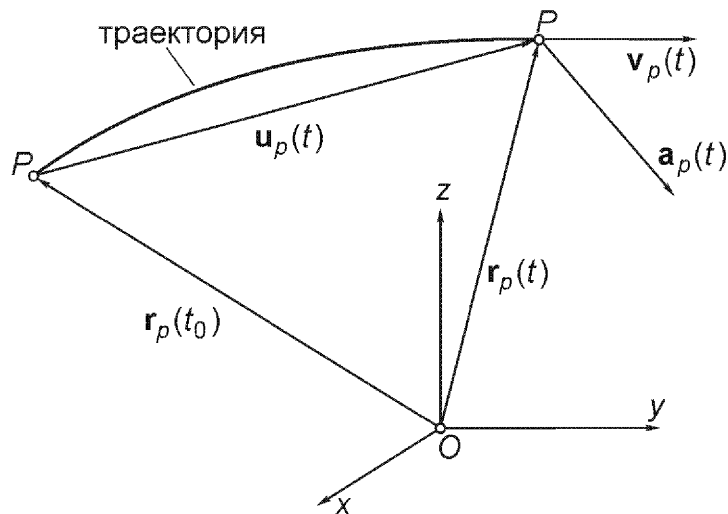


Рис. 1.1. Радиус-вектор, вектор перемещения, векторы скорости и ускорения точки P и ее траектория.

жения точки P как функцию времени (рис. 1.1). Обычно начальное положение и конечную точку связывает гладкая кривая. Каждое мгновенное положение можно рассматривать как отражение начального положения точки в момент времени t_0 . Тогда вектор перемещения $\mathbf{u}_P(t) = \mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_P(t_0)$ также описывает траекторию. Он имеет три компоненты, к примеру в декартовых координатах $\mathbf{u}_P = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$ или $\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i$, $u_i = x_i(t) - x_i(t_0)$, $i = 1, 2, 3$. В случае свободной траектории (без каких либо кинематических ограничений на движение точки P) координаты x_i или перемещения u_i , $i = 1, 2, 3$, независимы между собой, и точка P имеет три степени свободы. Если движение точки P ограничено поверхностью $F(x, y, z; t) = 0$ (направляющая система в заданном движении), количество степеней свободы уменьшается до двух. Например, управляющее условие для z_P может быть установлено как функция x_P и y_P . Криволинейные поверхностные координаты образуют естественную пару независимых обобщенных координат. Дальнейшее ограничение на движение, а именно, то, что приводит к заданной траектории, уменьшает количество степеней свободы до одной. Единственная естественная обобщенная координата есть длина дуги направляющей траектории.

Рассматривая вторую точку Q , движущуюся по траектории $\mathbf{r}_Q(t)$ без каких-либо ограничений, т.е. с тремя степенями свободы, мы видим, что совокупность двух точек P и Q в свободном движении имеет всего шесть степеней свободы. Если в результате управления расстояние $PQ = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q|$ остается постоянным, то для движения пары точек, очевидно, остается только пять степеней свободы. Кинематическая модель твердого тела обеспечивается добавлением третьей неколлинеарной точки R , находящейся на постоянном расстоянии от

точек P и Q , $PR = \text{const}$ и $QR = \text{const}$. Вся система бесконечного числа материальных точек в жестком континууме имеет, таким образом, шесть степеней свободы. В качестве шести независимых координат твердого тела можно выбрать декартовы координаты точки P , и движение точки Q рассматривается как движение по сфере, центром которой является точка P . Таким образом, широта и долгота формируют дополнительную пару угловых координат, и, окончательно, определив эти две позиции, у точки R остается только одна степень свободы. Она только может вращаться вокруг оси, проходящей через P и Q .

В общем, количество степеней свободы системы – это количество независимых обобщенных скалярных координат, необходимых и достаточных для определения конфигурации в любой момент времени. Деформируемое тело имеет бесконечно много материальных точек, находящихся в движении без всяких кинематических ограничений, и поэтому имеет бесконечное число степеней свободы. Связь между мгновенной и начальной конфигурациями определяется вектором перемещений $\mathbf{u}_P(t)$ для всех материальных точек P .

Вектор перемещения между двумя мгновенными положениями на траектории отдельной точки P , $\Delta \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P(t + \Delta t) - \mathbf{r}_P(t)$, отнесенный к соответствующему интервалу времени $(1/\Delta t)$, называется вектором средней скорости. Для гладкой и дифференцируемой траектории (обладающей касательной) существует предел при $\Delta t \rightarrow 0$, определяющий вектор мгновенной скорости точки P в момент t ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Delta \mathbf{r}_P = \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{v}_P.$$

Этот вектор параллелен единичному вектору касательной \mathbf{e}_t к траектории. С помощью длины дуги $s(t)$, измеряемой, например, в метрах, и, замечая, что $d\mathbf{r}_P / ds = \mathbf{e}_t$, $|\mathbf{e}_t| = 1$, цепное правило дифференцирования дает

$$\mathbf{v}_P = d\mathbf{r}_P / dt = (d\mathbf{r}_P / ds)(ds / dt) = v_P \mathbf{e}_t. \quad (1.1)$$

Компонента $v_P(t) = ds / dt$ есть скалярная скорость, имеющая размерность расстояния деленного на время, например, метры в секунду, м/с. Обратная величина носит название замедленности. Вектор скорости определяется также и с помощью производной по времени вектора перемещения

$$\mathbf{v}_P(t) = d\mathbf{u}_P / dt. \quad (1.2)$$

Разность между векторами скоростей точки P для двух различных моментов времени $\Delta \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P(t + \Delta t) - \mathbf{v}_P(t)$, помноженная на величину $(1/\Delta t)$, есть вектор среднего ускорения. Исключая скачки скорости, предел при $\Delta t \rightarrow 0$ определяет вектор ускорения $\mathbf{a}_P(t)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Delta \mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \mathbf{a}_P.$$

Дальнейшую интерпретацию скорости изменения вектора скорости можно легко осуществить в пространстве скоростей. Из начала координат векторы скорости $\mathbf{v}_P(t)$ изображаются таким же образом, что и радиусы-векторы $\mathbf{r}_P(t)$ в пространстве состояний. Конец вектора описывает годограф, и вектор ускорения есть «скорость» образа движущейся точки P и, таким образом, параллелен касательной этой орбиты (см. раздел 1.1.1). Обобщая обычное понимание годографа, производная любого вектора есть «скорость» точки его конца вдоль этой линии.

Из определения скорости следует

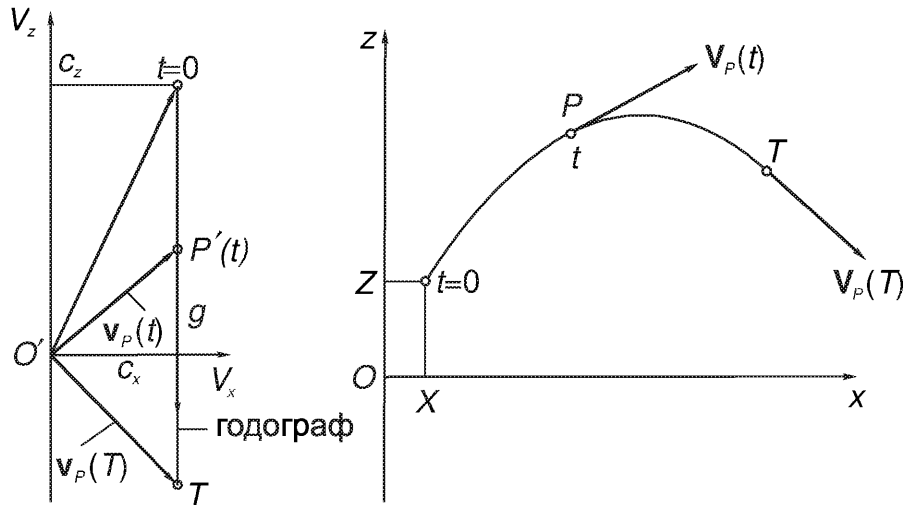
$$\mathbf{a}_P(t) = d\mathbf{v} / dt = d^2\mathbf{r}_P / dt^2 = d^2\mathbf{u}_P / dt^2. \quad (1.3a)$$

Ускорение коллинеарно направлению движения в случае прямолинейной траектории или в момент времени, когда скорость равна нулю. Величина \mathbf{a}_P измеряется в единицах скорости, деленных на время, или, как следствие, в единицах длины, деленных на время в квадрате, например, в метрах за секунду в квадрате, м/с^2 .

Движение сплошного тела можно описать, рассматривая векторы перемещения, скорости и ускорения каждой отдельной частицы. Вместо именных обозначений типа P материальную точку можно идентифицировать с помощью ее начальных или материальных координат, например, в декартовой системе координат с помощью X_i , $i = 1, 2, 3$. Прописные буквы используются для того, чтобы отличать их от координат $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, в момент t . Таким образом, в лагранжевом или материальном представлении, которое чаще всего используется в механике твердого тела, векторные поля становятся

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_P &= \mathbf{u}(t; X_1, X_2, X_3) = \sum_{i=1}^3 u_i(t; X_1, X_2, X_3) \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}(t; X_1, X_2, X_3) = \sum_{i=1}^3 v_i(t; X_1, X_2, X_3) \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{a}_P &= \mathbf{a}(t; X_1, X_2, X_3) = \sum_{i=1}^3 a_i(t; X_1, X_2, X_3) \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Так как материальные координаты X_i , $i = 1, 2, 3$, не зависят от времени, полная производная по времени равна частной, где начальное положение считается постоянным, $\mathbf{v} = d\mathbf{u} / dt = \partial \mathbf{u} / \partial t$, $\mathbf{a} = d\mathbf{v} / dt = \partial \mathbf{v} / \partial t$. Символически, производные по времени обозначаются

Рис. 1.2. Траектория и годограф, ускорение $g = \text{const}$.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (1.36)$$

Векторное поле можно спроектировать на любую подходящую систему координат. О цилиндрических и естественных координатах смотрите разделы 1.4.4 и 1.1.3; о сферической системе координат написано в разделе 1.2.

1.1.1. Пример: траектория в однородном гравитационном поле над «плоской планетой»

Точка P движется с постоянным вертикальным ускорением $\mathbf{a}_P = -g\mathbf{e}_z$ в плоскости (x, z) (движение происходит в вакууме). Ее скорость находится с помощью интегрирования по времени при $g = \text{const}$ ($= 9,81 \text{ м/с}^2$ на Земле), $\mathbf{v}_P = c_x\mathbf{e}_x + (c_z - gt)\mathbf{e}_z$; здесь c_x и c_z – константы интегрирования, которые, по сути, являются компонентами скорости в момент времени $t = 0$. Движение образа точки в пространстве скоростей, прямолинейный годограф, имеет постоянную «скорость», так как вектор ускорения $\mathbf{a}_P = \text{const}$. Повторное интегрирование по времени позволяет получить траекторию, в данном случае параболу, $\mathbf{r}_P = (X + c_x t)\mathbf{e}_x + (Z + c_z t - gt^2/2)\mathbf{e}_z$; начальные значения компонент радиус-вектора обозначены как X и Z (см. рис. 1.2). Исключение времени приводит к соотношению высоты и дальности

$$z_P - Z = (c_z/c_x)(x_P - X) - (g/2c_x^2)(x_P - X)^2.$$

1.1.2. Пример: движение точки по траектории

Использование длины дуги s заданной траектории в качестве естественной координаты приводит к определению скорости $v = ds/dt$ и тангенциального уско-

рения $a_t = d^2s / dt^2$, являющегося одним из основных понятий кинематики. В практических приложениях последнее – заданная функция времени, или скорости, или длины дуги s , соответственно. Вторая ортогональная компонента ускорения обсуждается в разделе 1.1.3.

Скорость и длина дуги находятся с помощью соответствующего интегрирования; начальные условия в момент времени $t = 0$ задаются как $s = s_0$ и $v = v_0$.

(a) $a_t = dv / dt = f(t)$.

Интегрирование по времени дает скорость

$$v(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + v_0.$$

Повторное интегрирование по частям дает интеграл типа свертки

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(\tau) d\tau + s_0 = \int_0^t \left(\int_0^\tau f(\mu) d\mu \right) d\tau + v_0 t + s_0 = \\ &= s_0 + v_0 t + \left[\tau \int_0^\tau f(\mu) d\mu \right]_0^t - \int_0^t \tau f(\tau) d\tau = s_0 + v_0 t + \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Средняя скорость, полученная из функции закона движения, вообще говоря, не равна абсолютному значению средней скорости

$$v_m = \frac{s(t) - s_0}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t v(\tau) d\tau = v_0 + \frac{1}{t} \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

(b) $a_t = dv / dt = f(v)$.

Разделение переменных этого дифференциального уравнения первого порядка дает $dt = dv / f(v)$. Интегрирование обеих частей приводит к «обратному соотношению»

$$t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{du}{f(u)} = F[v(t), v_0],$$

и $v(t)$ находится решением нелинейного уравнения. Закон движения как функция времени определяется подстановкой $d\tau = du / f(u)$ в интеграл по времени

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau = s_0 + \int_{v_0}^{v(t)} \frac{u}{f(u)} du.$$

Средняя скорость равна

$$v_m = \frac{s(t) - s_0}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t v(\tau) d\tau = \frac{1}{F[v(t), v_0]} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{u}{f(u)} du.$$

(с) $a_t = dv / dt = (dv / ds)(ds / dt) = v(dv / ds) = f(s).$

Разделение переменных дает $v dv = f(s) ds$, и интегрирование обеих частей позволяет получить

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^s f(\xi) d\xi,$$

и, следовательно, $v(s)$. Так как $ds / dt = v$, функция, обратная к закону движения, находится интегрированием $dt = ds / v(s)$

$$t = \int_{s_0}^s \frac{d\xi}{v(\xi)}.$$

Обратная величина средней скорости, средняя замедленность, дается соотношением

$$\frac{1}{v_m} = \frac{t}{s(t) - s_0} = \frac{1}{s - s_0} \int_{s_0}^s \frac{d\xi}{v(\xi)}.$$

1.1.3. Естественные координаты траектории

В случае данной (априори заданной) траектории точки P скорость и ускорение удобно проектировать на три ортонормированных вектора естественной системы координат: \mathbf{e}_t – касательная; \mathbf{e}_n – главная нормаль; $\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$ – бинормаль. Если мы используем длину дуги $s(t)$ как аргумент радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ для построения сложной функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}[s(t)]$, тогда, используя цепное правило, выражение для скорости принимает вид

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \mathbf{e}_t.$$

Дифференцирование по времени приводит к появлению двух компонент ускорения

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt}.$$

В течение бесконечно малого промежутка времени dt точка преодолевает путь ds и изменение тангенса угла наклона траектории дает $de_t / ds = [1/r(s)]e_n$, одну из формул Френе. Кривизна траектории $1/r$ есть длина вектора, ортогонального к e_t . Отсюда, с помощью цепного правила получается $de_t / dt = (de_t / ds)(ds / dt) = (v/r)e_n$, и, окончательно, преобразуются касательная (тангенциальная) и нормальная компоненты ускорения

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{r} \mathbf{e}_n.$$

Вектор ускорения лежит в плоскости главной кривизны, задаваемой векторами e_t и e_n . В направлении бинормали компонента вектора ускорения равна нулю. С помощью формулы изменения материального вектора, привязанного к жесткому телу, которое вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (v/\tau)e_t + (v/r)e_m$, непосредственно находится производная по времени от вектора e_t , которая оказывается независимой от второй кривизны $1/\tau$, см. раздел 1.2,

$$\frac{de_t}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_t = \frac{v}{r} (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_t) = \frac{v}{r} \mathbf{e}_n.$$

1.2. Кинематика твердого тела

После выбора двух отдельных точек: отчетной точки A^\square и некоторой точки P , находящейся на расстоянии, заданном материальным вектором \mathbf{r}_{PA} , радиус-вектор точки P относительно точки отсчета O задается суммой векторов: $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{PA}$. Дифференцирование по времени приводит, в общем, к комбинации векторов скорости: $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{PA}$, $\mathbf{v}_{PA} = d\mathbf{r}_{PA} / dt$. Если рассматривать недеформируемое тело, материальный вектор \mathbf{r}_{PA} имеет постоянную длину во время движения $\mathbf{r}_{PA} \cdot \mathbf{r}_{PA} = r_{PA}^2 = \text{const}$, и производная по времени дает $\mathbf{v}_{PA} \cdot \mathbf{r}_{PA} = 0$, т.е. вектор \mathbf{v}_{PA} ортогонален вектору \mathbf{r}_{PA} по определению скалярного произведения. Ортогональность в математическом понимании можно выразить с помощью векторного произведения $\mathbf{v}_{PA} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA}$; размерность $\boldsymbol{\omega}$ должна быть 1/время (например, с^{-1}). Так как $v_{PA} = 0$ для всех материальных точек P на линии действия вектора $\boldsymbol{\omega}$, то прямая линия, проходящая через точку A , должна быть мгновенной осью вращения твердого тела. Поэтому вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется вектором угловой скорости. Поле скоростей твердого тела опре-

[□] В литературе по механике на русском языке эта точка обычно называется полюсом. (Прим. перев.)

деляется двумя векторами, \mathbf{v}_A и $\boldsymbol{\omega}$ и является линейной функцией материального радиуса-вектора \mathbf{r}_{PA}

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA}. \quad (1.4)$$

Поскольку при движении твердое тело имеет шесть степеней свободы, скорость \mathbf{v}_P определяется шестью компонентами векторов \mathbf{v}_A и $\boldsymbol{\omega}$. Угловая скорость выражается в радианах за секунду, рад/с.

(§) Покажем, что $\boldsymbol{\omega}$ является свободным вектором

Для того, чтобы угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ была свободным вектором, $\boldsymbol{\omega}$ должна не зависеть от выбора точки отсчета A . Для этого мы выбираем две пары векторов $(\mathbf{v}_A, \boldsymbol{\omega})$ и $(\mathbf{v}'_A, \boldsymbol{\omega}')$ и дважды применяем основную формулу для поля скоростей твердого тела, приведенную выше,

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA} = \mathbf{v}'_A + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{PA'}, \quad \mathbf{v}'_A = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{AA'}$$

Подставляя $\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}'_{AA'} + \mathbf{r}_{PA'}$ и исключая \mathbf{v}'_A , получим $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{PA'}$ для всех материальных точек P . Поэтому, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$. «Мгновенная угловая скорость твердого тела не зависит от выбора материальной точки отсчета A , а оси вращения, проходящие через точки A и A' , параллельны.» Такое вращение вокруг мгновенной оси можно заменить вращением с той же угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг параллельной оси с добавлением поступательного движения со скоростью $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$ в направлении, ортогональном плоскости, проходящей через обе оси (p это расстояние между осями).

(§) Преобразование векторов угловой скорости

В момент времени t твердое тело, по предположению, совершает мгновенные вращения вокруг различных подвижных осей, проходящих через точки отсчета A_1, A_2, \dots, A_n с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$. После выбора общей отсчетной точки A к ней приписываются положительные и отрицательные вращения $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots, \boldsymbol{\omega}_n, -\boldsymbol{\omega}_1, -\boldsymbol{\omega}_2, \dots, -\boldsymbol{\omega}_n$ без изменения кинематического состояния твердого тела. Результирующая угловая скорость (в точке A) находится как сумма $\boldsymbol{\omega} = \sum_i \boldsymbol{\omega}_i$. Действительные угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_i$ в соответствующих точках приложения A_i и отрицательные двойники $-\boldsymbol{\omega}_i$, приложенные к одной точке A , создают пары векторов. Каждая пара приводит к поступательному движению твердого тела со скоростью $(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{AA_i})$. Суммирование дает результирующую скорость поступательного движения $-\sum_i (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{A_i A})$.

Используя декартовы координаты в основной кинематической формуле, включая векторное произведение $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ и рассматривая квадратную и антисимметричную матрицу угловой скорости

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

имеющую свойство тензора, вводится матричное обозначение

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{PA}, \quad \mathbf{v}_{PA} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_{PA}.$$

Для дальнейшего применения для независимых от времени и малых перемещений $\delta \mathbf{r}$ и малых вращений $\delta \boldsymbol{\alpha}$, $|\delta \boldsymbol{\alpha}| \ll 1$, твердого тела уравнение (1.4) умножается на дифференциал времени dt для того, чтобы получить

$$\delta \mathbf{r}_P = \delta \mathbf{r}_A + \delta \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{PA}. \quad (1.5)$$

«Малое перемещение $\delta \mathbf{r}_P$ точки P твердого тела есть сумма малого перемещения $\delta \mathbf{r}_A$ материальной точки отсчета A и перемещения от вращения на малый угол $\delta \boldsymbol{\alpha}$. Малые углы имеют свойства вектора. Однако большие вращения вокруг различных осей не могут быть, вообще говоря, описаны сложением векторов. Просто доказать, что коммутативный закон не применим, когда изменяется последовательность больших вращений. О соответствующих матричных обозначениях сложений смотрите раздел А 1.4.»

Выбор точки отсчета A в твердом теле все же оставляет переменными по времени векторы \mathbf{v}_A и $\boldsymbol{\omega}$ в течение произвольного движения. Однако в каждый момент времени можно найти особую точку отсчета A' такую, что ее скорость будет коллинеарна вектору $\boldsymbol{\omega}$. Мгновенное поле скоростей твердого тела есть комбинация вращения вокруг «центральной» оси, проходящей через такую особую отсчетную точку, и поступательного движения в направлении этой оси. Такое движение называется скоростным винтом твердого тела. Материальные координаты точки A винта получаются из математического условия параллельности

$$\mathbf{v}_{A'} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_{A'} \parallel \boldsymbol{\omega},$$

с $\mathbf{v}_{A'} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A'A}$, при отыскании перпендикуляра к вектору $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{r}_{A'A} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \times \mathbf{v}_A \right) \omega^{-1}.$$

Использование уравнения (1.4) упрощает производную по времени любого вектора, постоянного по длине. Например, единичный вектор, зафиксированный в

твердом теле, имеющем угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$, изменяет направление со скоростью

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}. \quad (1.6)$$

Если мы рассматриваем систему цилиндрических координат (r, φ, z) , которая вращается мгновенно с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = d\varphi/dt$ вокруг оси z , угол φ есть полярный угол, радиальный и окружной единичные векторы изменяются во время движения со скоростями

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r. \quad (1.7)$$

векторы $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi$ – взаимно перпендикулярны.

В сферической системе координат угол φ обозначает долготу, угол $\theta - \pi/2$ северную широту. Поэтому вектор угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z - \dot{\theta} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta,$$

позволяет вычислить скорости с помощью \mathbf{e}_r как единичного радиуса-вектора

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_r = \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi + \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Векторное поле ускорений твердого тела следует из почленного дифференцирования уравнения (1.4)

$$\mathbf{a}_P = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{PA}, \quad \mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} \quad (1.9)$$

и

$$\mathbf{a}_{PA} = \frac{d\mathbf{v}_{PA}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{PA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{PA} + \omega^2 \mathbf{n}_P, \quad (1.10)$$

где с помощью раскрытия двойного векторного произведения вектор

$$\mathbf{n}_P = \left(\frac{1}{\omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{PA} \right) \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} - \mathbf{r}_{PA} \quad (1.11)$$

преобразуется к нормальному расстоянию точки P до линии действия вектора $\boldsymbol{\omega}$, проходящего через материальную точку отсчета A ; $\omega^2 \mathbf{n}_P$ есть нормальная

составляющая ускорения \mathbf{a}_{PA} . Если ось, проходящая через точку A , зафиксирована в пространстве, то ускорение является центростремительным.

При рассмотрении кинематики относительного движения твердое тело выступает в роли промежуточной отсчетной системы, а уравнения (1.9) и (1.10) определяют переносное ускорение, см. раздел 8.5.10. Приложения встречаются в динамике нескольких тел, таких как, например, робототехника, транспортные средства, динамика летательных аппаратов и т.д.

1.2.1. Частные случаи движения твердого тела

(§) Поступательное движение

В этом случае $\omega = d\omega/dt = 0$, а кинематические поля определяются с помощью скорости $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A$ и ускорения $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A$ одной точки. Траектории движения – одинаковые кривые. На рис. 1.3(a) звено A_1A_2 совершает поступательное движение.

(§) Вращение вокруг неподвижной точки

Пусть материальная точка зафиксирована в пространстве, тогда, принимая за точку отсчета $A = O$ со скоростью $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ и ускорением $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$, получим, что мгновенная ось ω проходит через начало отсчета O . С течением времени линия действия вектора ω описывает два конуса с общей вершиной в точке O : один лежит в пространстве; другой, задаваемый в материальных координатах, движется с твердым телом и катится вдоль мгновенной оси. Эти конусы называются неподвижным и подвижным аксоидами, соответственно.

Хорошей иллюстрацией может послужить твердое колесо, движущееся по круговой траектории, как, например, дробильные ролики или колеса автомобиля при повороте (рис. 1.3(b) и 1.4).

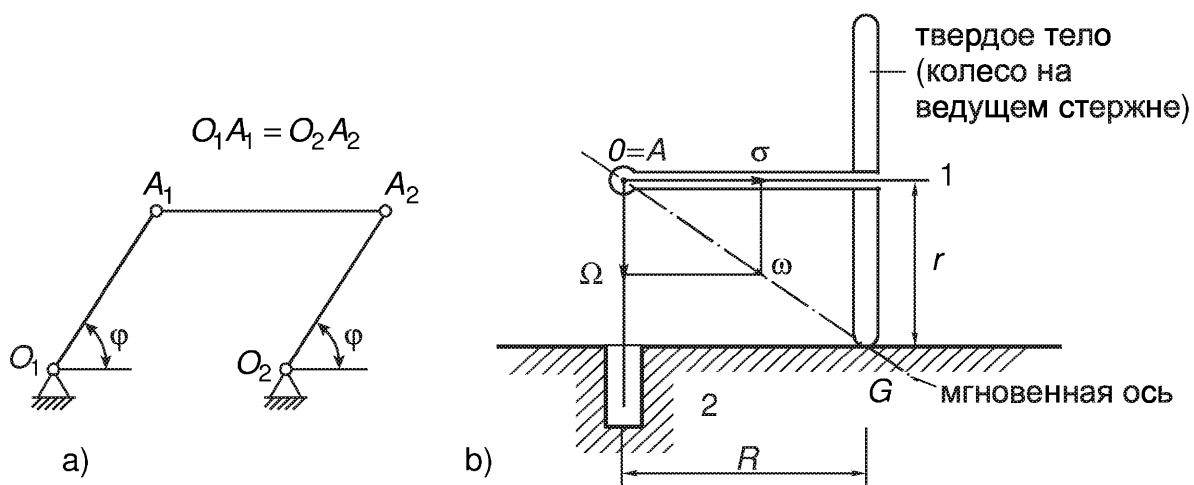


Рис. 1.3. (a) Поступательное движение звена A_1A_2 . (b) Кинематика дробильного ролика.

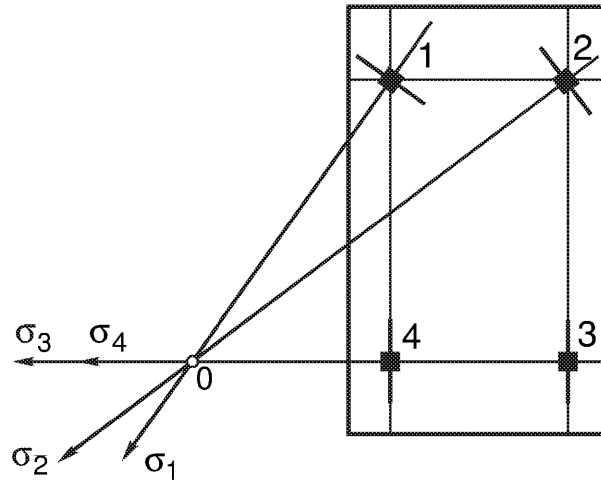


Рис. 1.4. Автомобиль при круговом повороте.

Одна точка линии действия вектора ω – точка $O = A$; другая точка – это точка G контакта между твердым телом и плоской поверхностью, поэтому $v_G = 0$ (условие чистого качения, без проскальзывания). На рисунке 1.3 показано отношение $\sigma/\Omega = R/r$ компонент угловой скорости. Круговые конусы имеют общую вершину в O , радиусы направляющих: R (для неподвижного конуса) и r (для подвижного конуса), соответственно. Фиксируя ось $O1$ в пространстве, получаем косую зубчатую передачу с коэффициентом передачи R/r , а $v_G = r\sigma = R\Omega$ – общая окружная скорость.

В случае с машиной на рис. 1.4 вектор Ω направлен вверх и четыре показанных колеса должны совершать различное вращение σ , чтобы сохранить условие контакта качения.

(§) Плоское движение твердого тела

Если расстояния материальных точек от плоскости (x, y) , которая предполагается фиксированной в пространстве, остаются постоянными, то говорят, что твердое тело совершает плоское движение. Угловая скорость имеет постоянное направление, параллельное нормали e_z ,

$$\omega = \omega e_z, \quad e_z = e_x \times e_y.$$

В матричных обозначениях декартовы компоненты v_{PA} равны

$$v_{PA} = \Omega \cdot r_{PA},$$

где матрица угловой скорости 2×2 имеет простой вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Введение повернутого вектора, ортогонального первоначальному вектору, приводит к краткому обозначению векторного произведения с \mathbf{e}_z

$$\mathbf{v}_{PA} = \omega \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{PA}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_{PA} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{PA},$$

и скорость материальной точки в векторной форме выглядит просто

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \omega \tilde{\mathbf{r}}_{PA}. \quad (1.12)$$

В случае, когда $\omega \neq 0$, существует точка $P = G$ со скоростью равной нулю, то есть точка мгновенного центра вращения твердого тела по отношению к полю скоростей. Вообще говоря, ускорение точки G не равно нулю. Ее положение относительно точки A просто находится из условия

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{0} = \mathbf{v}_A + \Omega \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{GA},$$

с помощью инвертирования матрицы Ω

$$\mathbf{r}_{GA} = -\Omega^{-1} \cdot \mathbf{v}_A, \quad \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-1} \\ -\omega^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Выбирая мгновенное положение точки G за точку отсчета A , получаем поле скоростей в виде мгновенного вращения

$$\mathbf{v}_P = \omega \tilde{\mathbf{r}}_{PG}. \quad (1.14)$$

Последующие положения центра скоростей G в движущемся теле и в плоскости (x, y) представляют собой подвижную и неподвижную центроиды при контакте качения, соответственно. Конусы пространственного вращения вокруг точки становятся цилиндрами, так как в пределе вершина конуса уходит в бесконечность в случае плоского движения.

(§) Пример: колесо в прямолинейном качении

Обод колеса и прямая линия совпадают с подвижной и неподвижной центроидами, соответственно. Точка контакта имеет скорость, равную нулю, если предполагается отсутствие скольжения, и поэтому это есть мгновенный центр скоростей (см. рис. 1.5).

(§) Ускорение

Производная по времени от уравнения (1.12) дает

$$\mathbf{a}_P = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \mathbf{a}_A + \dot{\omega} \tilde{\mathbf{r}}_{PA} + \omega \frac{d\tilde{\mathbf{r}}_{PA}}{dt} = \mathbf{a}_A + \dot{\omega} \tilde{\mathbf{r}}_{PA} - \omega^2 \mathbf{r}_{PA}. \quad (1.15)$$

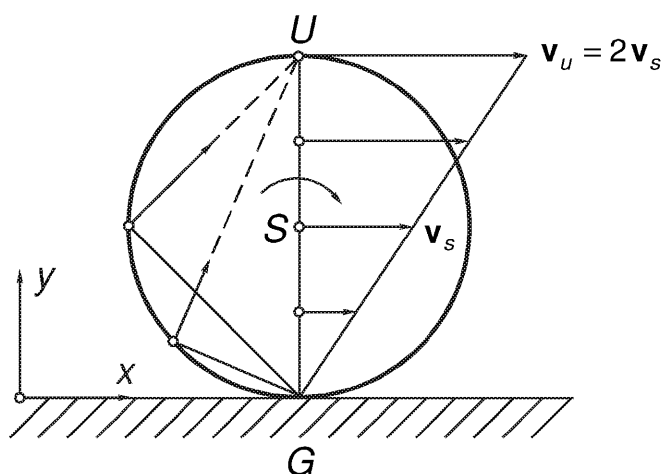


Рис. 1.5. Поле скоростей катящегося колеса.

Плоское поле векторов ускорений

$$\mathbf{a}_{PA} = \dot{\omega} \tilde{\mathbf{r}}_{PA} - \omega^2 \mathbf{r}_{PA} \quad (1.16)$$

имеет тангенциальную компоненту $\dot{\omega} \tilde{\mathbf{r}}_{PA}$ и нормальную компоненту $-\omega^2 \mathbf{r}_{PA}$.

В каждой мгновенной конфигурации имеется точка $P = B$ с нулевым ускорением. Материальные координаты этого центра ускорений следуют сразу из условия $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= (\omega^2 \ddot{x}_A - \dot{\omega} \ddot{y}_A) / (\dot{\omega}^2 + \omega^4), \\ y_B - y_A &= (\omega^2 \ddot{y}_A + \dot{\omega} \ddot{x}_A) / (\dot{\omega}^2 + \omega^4). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Если отсчетная точка выбрана из условия $A = B$, то поле ускорений имеет две компоненты

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{PB} = \dot{\omega} \tilde{\mathbf{r}}_{PB} - \omega^2 \mathbf{r}_{PB}.$$

«Мгновенное плоское состояние ускорений в твердом теле соответствует вращению вокруг центра B .» Скорость точки B , вообще говоря, не равна нулю.

1.3. Кинематика деформируемого тела

Векторное поле перемещений \mathbf{u} поточечно отражает начальную (недеформированную) конфигурацию в текущую и поэтому определяет конфигурацию деформируемого тела в отсчетном пространстве. Деформируемое состояние тела определяется рассмотрением изменения длин элементарных элементов между двумя соседними материальными точками $P(X, Y, Z)$ и $Q(X + dX, Y + dY, Z + dZ)$ в начальном состоянии, где $(dl_0)^2 = (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2$, и $P(x, y, z)$ и $Q(x + dx, y + dy, z + dz)$ в текущей конфигурации в момент времени t , где

$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. Предположение, что точки P и Q остаются при деформации бесконечно близко друг к другу принимается во всем дальнейшем изложении, это ограничение должно выполняться, в частности, при возможных структурных деформациях твердых тел. Рассмотрение ведется в единой декартовой системе координат (e_x, e_y, e_z). Если мы рассмотрим векторы перемещений $u(t; X, Y, Z)$ в точке P и $u(t; X + dX, Y + dY, Z + dZ)$ в точке Q , компоненты малой разности векторов имеют вид:

$$du = dx - dX, \quad dv = dy - dY, \quad dw = dz - dZ.$$

Метрика пространства конфигураций после деформации определяется квадратом длины материального элемента. Изменение этой длины (с коэффициентом $1/2$, вводимым для удобства) имеет вид:

$$\begin{aligned} (dl^2 - dl_0^2)/2 &= du dX + dv dY + dw dZ + \frac{1}{2}(du^2 + dv^2 + dw^2) = \\ &= \varepsilon_{xx}(dX)^2 + \varepsilon_{yy}(dY)^2 + \varepsilon_{zz}(dZ)^2 + 2(\varepsilon_{xy} dX dY + \varepsilon_{yz} dY dZ + \varepsilon_{zx} dZ dX). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Шесть безразмерных коэффициентов ε_{ij} ($i, j = x, y, z$) являются деформациями в теле в точке P . Подставляя дифференциалы u, v, w ,

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial X} dX + \frac{\partial u_i}{\partial Y} dY + \frac{\partial u_i}{\partial Z} dZ, \quad u_x = u, \quad u_y = v, \quad u_z = w,$$

и сравнивая коэффициенты в уравнении (1.18), получим систему шести нелинейных геометрических соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Z} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \right) \right], \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \right], \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Z} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial u}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial v}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial w}{\partial X} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Или в компактной форме

$$2\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j}, \quad (i, j=1, 2, 3), \quad (1.20)$$

где частные производные $\partial u_i / \partial X_j$ называются градиентами деформации $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$. Компоненты деформации ε_{ij} являются функциями времени t и при лагранжевом описании зависят от материальных координат X, Y, Z . Они равны нулю при движении абсолютно твердого тела. В случае деформируемого тела мгновенная конфигурация определяется полем векторов перемещений, поэтому для точки P тремя компонентами. Так как шесть дифференциальных уравнений (1.19) при их интегрировании должны дать перемещения с точностью до произвольного движения абсолютно твердого тела, шесть компонент деформации в точке P не являются независимыми. Условия интегрируемости уравнений (1.19) называются условиями совместности деформаций.

В практически важном случае линейных, или более точно линеаризованных геометрических соотношений, когда имеет место $|\partial u_i / \partial X_j| \ll 1$ и потому $|(\partial u_i / \partial X_j)(\partial u_k / \partial X_l)| \ll |\partial u_m / \partial X_n|$, соотношения (1.20) приводятся к виду

$$2\varepsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial X_j + \partial u_j / \partial X_i), \quad (i, j=1, 2, 3). \quad (1.21)$$

Сен-Венан получил 81 условие совместности из вторых частных производных соотношений (1.21) при условии независимости смешанных производных от порядка дифференцирования. Шесть необходимых условий для линеаризованных компонент деформации (без суммирования по повторяющемуся индексу)

$$2\partial^2 \varepsilon_{ij} / \partial X_i \partial X_j = \partial^2 \varepsilon_{ij} / \partial X_j^2 + \partial^2 \varepsilon_{ij} / \partial X_i^2, \quad i \neq j, \quad (1.22)$$

и

$$\partial^2 \varepsilon_{kk} / \partial X_i \partial X_j = (\partial / \partial X_k) (-\partial \varepsilon_{ij} / \partial X_k + \partial \varepsilon_{jk} / \partial X_i + \partial \varepsilon_{ki} / \partial X_j), \quad i \neq j \neq k. \quad (1.23)$$

Соотношения (1.22) и (1.23) зависимы. Три независимых условия совместности можно получить с помощью производных более высокого порядка. Условия совместности также и достаточны для односвязных (без отверстий) тел.

Рассматривая вектор перемещений \mathbf{u} как функцию текущих координат $P(x, y, z)$ и исключая разность материальных координат соседних точек P и Q в выражении для $(dl_0)^2$, соотношение (1.18), получим формально деформации путем изменения знака плюс на минус перед суммой нелинейных членов в соотношении (1.20) и замены материальных координат X_i на пространственные координаты x_i . Это эйлерово описание деформаций использует текущие координаты точки P , а именно пространственные координаты как независимые пе-

ременные, а затем с помощью обратного преобразования $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z; t)$ можно получить начальную конфигурацию. Большой класс задач механики жидкости формулируется без введения поля вектора перемещений и без рассмотрения индивидуальных материальных точек в этих пространственных координатах. Это эйлерово описание также удобно при рассмотрении законов сохранения и определяющих соотношений. При записи линеаризованных геометрических соотношений (1.21) разница между эйлеровым и лагранжевым описаниями исчезает.

Компоненты деформации могут быть записаны в виде квадратной и симметричной матрицы 3×3 . Из-за особых свойств деформаций при преобразовании жесткого вращения системы отсчета $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ матрица деформаций при лагранжевом описании называется тензором деформаций Грина (она была независимо введена Гринем и Сен-Венаном). Матрица деформаций при эйлеровом описании носит имя тензора деформаций Альманси (ее ввели Альманси и Гамель). Некоторые важные свойства (симметричных) тензоров обсуждаются в разделах 1.5.3. и 2.1 [см. также соотношение (1.50)].

Некоторые авторы не вводят вектор перемещений и определяют деформации непосредственно через градиенты деформаций F_{ij} ,

$$F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j, \quad (1.24a)$$

что эквивалентно соотношению (1.20),

$$\varepsilon_{pq} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 F_{ip} F_{iq} - \delta_{pq} \right), \quad p, q = 1, 2, 3, \quad \delta_{pq} = \begin{cases} 0 \dots p \neq q \\ 1 \dots p = q \end{cases}. \quad (1.24b)$$

Здесь δ_{pq} – символы Кронекера.

Нелинейные геометрические соотношения в основном используются при анализе устойчивости, где лагранжево описание является предпочтительным.

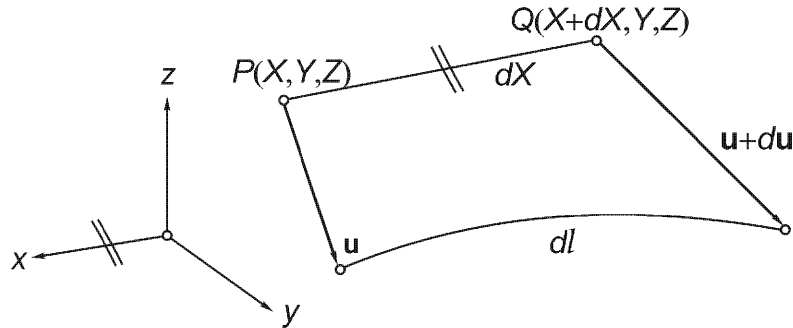
1.3.1. Удлинение и сдвиг

Выбрав первоначально прямой элемент $dl_0 = dX$ направленным вдоль направления \mathbf{e}_x (рис. 1.6), получим путем применения формулы (1.18) его длину после деформации $dl = (1 + 2\varepsilon_{xx})^{1/2} dX$.

Безразмерное удлинение есть приращение длины элемента, деленное на его начальную длину,

$$\varepsilon_x = (dl - dX) / dX = (1 + 2\varepsilon_{xx})^{1/2} - 1. \quad (1.25)$$

Нелинейное соотношение между деформацией ε_{xx} и удельным удлинением имеет вид

Рис. 1.6. Деформация элемента длины $dl_0 = dX$.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x (1 + \varepsilon_x / 2). \quad (1.26)$$

Только для достаточно малых удлинений $|\varepsilon_x| \ll 1$ деформация $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x$. Согласно соотношению (1.26)

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x + o(\varepsilon_x)^2.$$

Удлинения ε_y и ε_z элементарных отрезков $dl_0 = dY$ и $dl_0 = dZ$ определяются аналогично через деформации ε_{yy} и ε_{zz} , соответственно.

При специальной деформации, например, при одноосной деформации или однородном удлинении растягиваемого стержня, линейные элементы до деформации $dX \mathbf{e}_x$ и после деформации $dl \mathbf{e}_x$ параллельны. В этом случае уравнение (1.25) может быть проинтегрировано по конечной начальной длине l_0 , что дает

$$\int_0^{l_0} \varepsilon_x dX = \int_0^l dl - l_0 = l - l_0.$$

В случае однородного удлинения элементов внутри l_0 интеграл имеет величину $\varepsilon_x l_0$, и постоянное удлинение может быть определено через приращение конечной длины

$$\varepsilon_x = (l - l_0) / l_0. \quad (1.27)$$

Большие перемещения, по-видимому, встречаются при одноосной ползучести или пластических деформациях. Они могут быть учтены с помощью интегрирования приращения удельного удлинения, которое в эйлеровом представлении имеет вид $d\varepsilon = \partial(du)/\partial x$. Это позволяет определить меру логарифмической деформации. Сначала перейдем к лагранжевой производной, что дает выражение

$$\frac{\partial}{\partial x}(du) = \frac{\partial}{\partial X}(du) \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)}{\frac{\partial x}{\partial X}} = \frac{d\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)}{1 + \frac{\partial x}{\partial X}},$$

далее проинтегрируем

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int \frac{d\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)}{1 + \frac{\partial u}{\partial X}} = \ln\left(1 + \frac{\partial u}{\partial X}\right) = \ln\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right). \quad (1.28)$$

Для однородного удельного удлинения ε_x «эффективная», или «натуральная», или, как выше, логарифмическая деформация имеет вид

$$\varepsilon = \ln(1 + \varepsilon_x) = \ln(l/l_0). \quad (1.29)$$

Обобщение для трехмерных главных деформаций описано в монографии:

• Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, 1983.

Имеется русский перевод:

• Хилл Р. Математическая теория пластичности. Москва, Гостехиздат, 1956; Москва, Физматгиз, 1965.

Изменение конфигурации системы описывается рассмотрением изменения угла между двумя первоначально ортогональными элементами с общей точкой пересечения, например, элементов dX и dY (см. рис. 1.7). Длины элементов после деформации $(1 + \varepsilon_x)dX$ и $(1 + \varepsilon_y)dY$, соответственно. Изменение прямого угла называется сдвигом γ_{xy} , длина диагонали равна dl после деформации и dl_0 до деформации. Теорема косинусов дает

$$dl^2 = (1 + \varepsilon_x)^2 dX^2 + (1 + \varepsilon_y)^2 dY^2 - 2(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y) dX dY \cos(\gamma_{xy} + \pi/2),$$

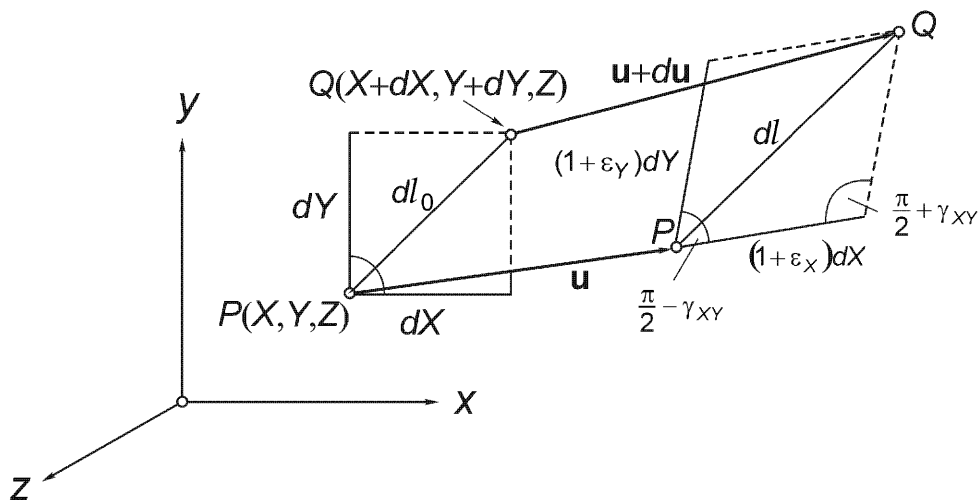


Рис. 1.7. Угол сдвига γ_{xy} .

и

$$(dl_0)^2 = dX^2 + dY^2.$$

Подставляя $dZ = 0$ в соотношение (1.18), получим

$$\begin{aligned} dl^2 &= dX^2 + dY^2 + 2\varepsilon_{xx} dX^2 + 2\varepsilon_{yy} dY^2 + 4\varepsilon_{xy} dX dY = \\ &= (1 + \varepsilon_x)^2 dX^2 + (1 + \varepsilon_y)^2 dY^2 + 4\varepsilon_{xy} dX dY. \end{aligned}$$

Приравнивая dl^2 , получим окончательный результат

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{2\varepsilon_{xy}}{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)}, \quad (1.30)$$

что является нелинейной функцией деформаций ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} согласно соотношениям (1.25). Поэтому сдвиговые деформации ε_{ij} , $i \neq j$, определяют угловые деформации. В случае малых относительных удлинений $|\varepsilon_x| \ll 1$ и $|\varepsilon_y| \ll 1$ и если $|\varepsilon_{xy}| \ll 1$, соотношение (1.30) может быть линеаризовано, что дает угол сдвига пропорциональным ε_{xy}

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}. \quad (1.31)$$

Аналогичные выражения можно вывести путем циклической перестановки индексов X , Y , Z . Для полярных координат см. соотношение (6.204).

1.3.2. Дилатация и девиатор деформаций

Важной мерой деформации является дилатация (изменение удельного объема), которая определяется рассмотрением изменения первоначального объемного элемента $dV_0 = dX dY dZ$,

$$\frac{dV - dV_0}{dV_0} = \det\{F_{ij}\} - 1, \quad (1.32)$$

где «det» обозначает детерминант; F_{ij} определяется соотношением (1.24). Для малых деформаций получаем линеаризованное соотношение для дилатации

$$\frac{dV - dV_0}{dV_0} = e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad (1.33)$$

что определяет так называемый первый инвариант (при повороте системы отсчета) тензора деформаций. Это соотношение определяет деформацию вязкопластических тел, так как пластические деформации, в общем, являются изохорическими (т.е. протекают без изменения объема).

Средняя деформация

$$\varepsilon = e/3 \quad (1.34)$$

есть мера изотропно постоянного деформирования и определяет девиатор деформаций, компоненты девиатора деформаций ε'_{ij} находятся по формуле

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.35)$$

где δ_{ij} есть символ Кронекера. Поэтому $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}$ для сдвиговых деформаций, где $i \neq j$, так как тогда $\delta_{ij} = 0$.

1.3.3. Линии и трубки тока: локальное и конвективное ускорения

Выше были рассмотрены векторы перемещений индивидуальных материальных точек и их траектории от начальной до текущей конфигурации. В некоторых задачах, однако, достаточно рассмотреть поле скоростей в текущей конфигурации тела без рассмотрения перемещений и их пространственных производных. Каждая материальная точка имеет определенное положение в системе отсчета, пространственные координаты x, y, z совпадают с мгновенными координатами материальной точки P , и поле скоростей есть векторная функция этих пространственных координат в момент времени t

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}(x, y, z; t). \quad (1.36)$$

Здесь \mathbf{v} есть вектор скорости той материальной точки P , мгновенные координаты которой $x_p(t), y_p(t), z_p(t)$ принимают значения данных пространственных координат x, y, z . Скорость может изменяться в данной точке пространства нестационарно со временем, так как непрерывный поток частиц через эту точку может принимать различные значения вектора скорости. Эйлерово описание (1.36) вектора скорости во всех точках пространства не учитывает индивидуальные материальные точки (например, по их материальным координатам в начальной конфигурации) при их прохождении по пространству.

При постоянном времени векторные линии поля скоростей согласно соотношению (1.36), линии тока, позволяют визуализировать движение. Эти пространственные кривые с касательными, направленными в направлении скорости, в общем, меняют свою форму со временем. Параметрическое представление такой линии тока при постоянном t может иметь вид $\mathbf{r}(\theta)$; поэтому вектор $d\mathbf{r}/d\theta$ направлен параллельно касательной и по определению определяет вектор скорости $\mathbf{v}[\mathbf{r}(\theta); t]$. Поэтому,

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \times \mathbf{v}[\mathbf{r}(\theta); t] = 0, \quad (1.37)$$

что в декартовых координатах дает три уравнения для компонент радиуса-вектора $\mathbf{r}(\theta) = x(\theta)\mathbf{e}_x + y(\theta)\mathbf{e}_y + z(\theta)\mathbf{e}_z$:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}v_y(x, y, z, t) - \frac{dy}{d\theta}v_x(x, y, z, t) &= 0, \\ \frac{dy}{d\theta}v_z(x, y, z, t) - \frac{dz}{d\theta}v_y(x, y, z, t) &= 0, \\ \frac{dz}{d\theta}v_x(x, y, z, t) - \frac{dx}{d\theta}v_z(x, y, z, t) &= 0.\end{aligned}$$

Эта система дифференциальных уравнений первого порядка может быть проинтегрирована (численно с помощью малых шагов $\square\square$ в направлениях векторов скорости), учитывая граничные условия при $\theta = \theta_0$: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Исключение дифференциала $d\theta$ дает каноническую форму уравнений линии тока

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad t = \text{const.} \quad (1.38)$$

Касательная в каждой точке линии тока есть также касательная к траектории материальной точки, имеющей в данный момент времени те же координаты. При стационарном течении («потоке» при эйлеровом описании) частицы движутся с постоянной скоростью через пространственную точку (x, y, z) , $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$, и линия тока, проходящая через данную пространственную точку, есть траектория всех частиц, находящихся на этой линии тока. Параметр θ может быть идентифицирован со временем t .

Введение трубки тока, поверхность которой состоит из плотно упакованных линий тока, очень удобно. Построение трубки тока довольно просто. После выбора замкнутой кривой C_1 боковая поверхность трубки тока строится из линий тока, проходящих через точки кривой C_1 . Мгновенное движение частиц тела, находящихся в трубке тока, происходит вдоль этих линий, причем в нестационарном случае только мгновенно, а в стационарном случае постоянно. Нет течения частиц через поверхность трубки тока. Трубка тока имеет конечную длину с помощью соответствующей конечной замкнутой кривой C_2 . В случае стационарного потока поверхность может быть представлена как жестко материализованная и части трехмерного течения могут быть визуализированы соответственно одномерному течению через трубу с переменным поперечным сечением. Первое приложение этой концепции будет дано позже при рассмотрении сохранения массы в общем случае течения (раздел 1.6).

Векторное поле \mathbf{a} ускорений в эйлеровом представлении есть векторная функция $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ и, по определению, ускорение находится как полная производная по времени

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}(x, y, z, t)/dt. \quad (1.39)$$

Дифференцирование производится на примере x -компоненты, причем v_x рассматривается как функция четырех переменных

$$a_x = dv_x(x, y, z, t)/dt = \\ = \partial v_x / \partial t + (\partial v_x / \partial x)(dx/dt) + (\partial v_x / \partial y)(dy/dt) + (\partial v_x / \partial z)(dz/dt).$$

Так как, по определению, в декартовых координатах имеют место формулы $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$, может быть введен скалярный пространственный дифференциальный оператор

$$\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

который при действии на функцию $v_x(x, y, z, t)$ описывает пространственное изменение v_x в направлении вектора скорости \mathbf{v} . Такой же дифференциальный оператор появляется при нахождении компонент a_y и a_z . С помощью векторного дифференциального оператора Гамильтона ∇ (del) в декартовых координатах

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.40)$$

можно ввести формальное скалярное произведение, не зависящее от выбора системы координат,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla). \quad (1.41)$$

Поэтому ускорение в эйлеровом представлении принимает вид

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (1.42)$$

что позволяет естественным образом разложить вектор ускорения на локальное ускорение $\partial \mathbf{v} / \partial t$, вычисляемое при фиксированных пространственных координатах, и конвективное ускорение $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, которое находится через пространственную производную. Первое ускорение есть мера нестационарного ускорения, которое имеет частица, проходящая через данное место пространства и которое возникает из-за нестационарного изменения вектора скорости со временем в этой точке пространства. Второе ускорение есть ускорение материальной точки при ее движении в направлении вектора скорости \mathbf{v} к соседнему месту пространства, где она имеет другое значение скорости. Локальное ускорение равно нулю при стационарном движении и поле ускорений в этом случае является чисто конвективным, причем время формально исключается

$$\mathbf{a}_S = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (1.43)$$

Используя декартовы компоненты ускорения, учитывая тождество (например, при вычислении a_x)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial (v_x^2)}{\partial x}$$

и прибавляя $(1/2)\partial(v_y^2 + v_z^2)/\partial x$, а затем вычитая то же выражение $v_y(\partial v_y/\partial x) + v_z(\partial v_z/\partial x)$ (аналогично для других компонент), получим с помощью оператора ∇ соотношение (1.43) в форме Вебера

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \equiv \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (1.44)$$

где $v^2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$.

Действие оператора Гамильтона на скалярную функцию, например, на функцию $v^2(x, y, z, t)$, дает вектор, который известен как градиент, что символически записывается так

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \equiv \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right). \quad (1.45)$$

Формальное векторное умножение оператора ∇ на векторную функцию символически дает ортогональный вектор, который называется ротором, или вихрем и обозначается rot (или иногда curl)

$$\nabla \times \mathbf{v} \equiv \text{rot } \mathbf{v}. \quad (1.46)$$

Декартовы компоненты находятся по формальным правилам для векторного произведения

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z. \quad (1.47)$$

Физическое определение дается соотношением (3.16) по отношению к векторному полю силы. Достоинство соотношения Вебера для \mathbf{a}_S видно при рассмотрении класса задач безвихревого течения, где поле скоростей \mathbf{v} имеет свойство $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ и поэтому

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right), \quad \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (1.48)$$

что сводит конвективное ускорение к простому полю градиента вектора. Термин «безвихревое» течение выводится из кинематической интерпретации вектора $\text{rot } \mathbf{v}$. Если мы рассмотрим z -компоненту этого вектора и компоненты скорости в

четырёх углах прямоугольного элемента в плоскости (x, y) со сторонами dx и dy , то разложение первого порядка компонент скорости достаточно, чтобы описать локальные вращения:

$$\begin{aligned}(x, y): v_x, v_y; \\(x + dx, y): v_x(x + dx, y) = v_x + (\partial v_x / \partial x) dx, \\v_y(x + dx, y) = v_y + (\partial v_y / \partial x) dx, \\(x, y + dy): v_x(x, y + dy) = v_x + (\partial v_x / \partial y) dy, \\v_y(x, y + dy) = v_y + (\partial v_y / \partial y) dy.\end{aligned}$$

Нижняя сторона элемента, которая параллельна оси x , мгновенно вращается подобно жесткому краю с угловой скоростью $[v_y(x + dx, y) - v_y] / dx = \partial v_y / \partial x$ вокруг оси z против часовой стрелки. Левая сторона вращается по часовой стрелке с угловой скоростью $[v_x(x, y + dy) - v_x] / dy = \partial v_x / \partial y$ вокруг той же оси. Поэтому средняя угловая скорость жесткого вращения объемного элемента вокруг оси z равна алгебраическому среднему

$$\frac{1}{2}(\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y) = \omega_z, \quad (1.49)$$

что является z -компонентой так называемого вектора вихря

$$\boldsymbol{\omega} = (1/2) \text{rot } \mathbf{v}. \quad (1.50)$$

Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ описывает в аппроксимации первого порядка среднюю угловую скорость вращения малого материального элемента точечного континуума в пространственной точке (x, y, z) . Так называемые безвихревые течения имеют нулевой вектор вихря согласно условию $\boldsymbol{\omega} = 0$ во всех материальных точках (для сингулярных точек см. раздел 13.4).

Здесь нужно указать, что безвихревые течения являются потенциальными течениями, так как из условия $\boldsymbol{\omega} = (1/2) \text{rot } \mathbf{v} = 0$ следует, что существует потенциал $\Phi(x, y, z, t)$, так что

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi, \quad (1.51)$$

в свою очередь, векторное поле градиента является безвихревым полем (если оно свободно от скачков)

$$\text{rot grad } \Phi \equiv \mathbf{0}.$$

1.3.4. Кинематические (геометрические) граничные условия

Большинство технически важных движений тел имеет ограничения (связи). Подкласс связей, так называемые кинематические, или геометрические гранич-

ные условия, задается в отдельных точках или на некоторых частях поверхностей рассматриваемого тела. Граничные условия на вектор перемещения \mathbf{u} , или на градиент $\partial \mathbf{u} / \partial X_j$, или альтернативно на скорость \mathbf{v} , или на пространственные производные $\partial \mathbf{v} / \partial x_i$ являются кинематическими или геометрическими условиями. Примерами этих граничных условий являются (идеализированные) структурные опоры, где в пространственно фиксированных точках вектор перемещения задается равным нулю, или в частично ограничивающих опорах некоторые компоненты перемещения предполагаются равными нулю. В классе жестко защемляющих опор граничные условия содержат первые производные перемещений; см. рис. 1.8.

Простой пример граничного условия в скоростях есть условие на поверхности течения жидкости с жесткой стенкой, находящейся в покое, где условие непроникновения выражается обращением в нуль нормальной компоненты скорости. Для течения вязкой жидкости частицы находятся в покое у стенки (условие отсутствия скольжения), и поэтому тангенциальная компонента скорости также предполагается равной нулю. Граничное условие записывается в виде $\mathbf{v} = 0$ во всех точках поверхности. Обсуждение этих граничных условий и их влияния на движение тела и деформацию проводится позже по отношению к структурам типа деформируемых стержней, балок, пластин и оболочек, но также и для систем твердых тел, контактирующих в соединениях, где они имеют вид условий контакта и чистого качения.

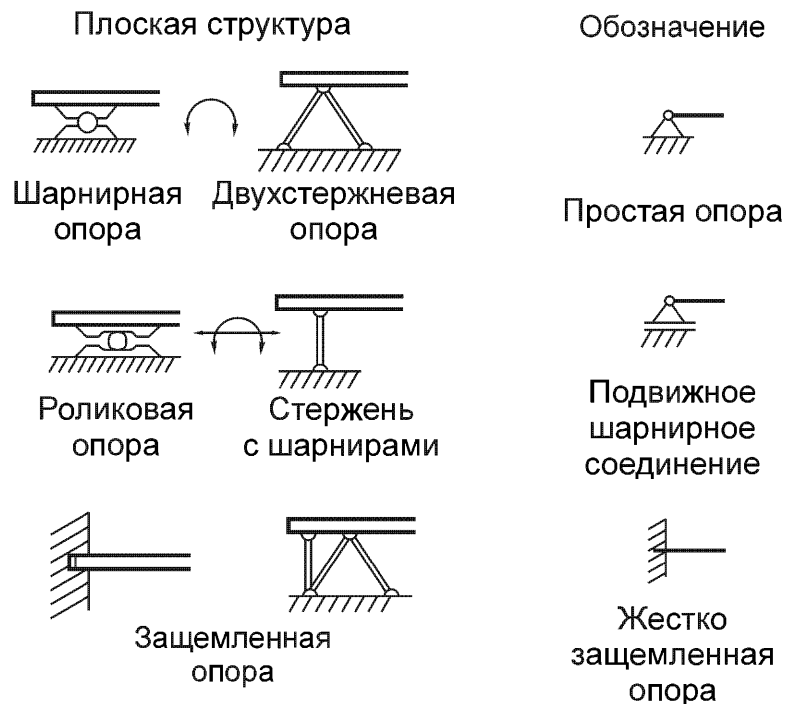


Рис. 1.8. Некоторые символические изображения опор для «плоских структур» (балок).

1.4. Дополнения и приложения кинематики точки и твердого тела

1.4.1. Диаграмма скоростей при плоском движении

Поле скоростей и ускорений твердого тела при плоском движении легко определяется графическими методами. Сначала рассматривается распределение скоростей. Текущая масштабированная плоская конфигурация указана слева на рис. 1.9.

Предполагая, что скорость \mathbf{v}_1 точки P_1 и линия действия вектора скорости другой точки, например, точки P_2 известны, можно построить поле скоростей в момент t . Центр скоростей G в конфигурационной плоскости определяется пересечением перпендикуляров к векторам скоростей точек P_1 и P_2 . Образ G' есть начало отсчета в плоскости скоростей. В дополнение к масштабу длин в конфигурационной плоскости выбирается масштаб скоростей в плоскости скоростей. Векторы скоростей прикладываются к точке G' подобно радиусам-векторам; в частности, может быть проведен вектор \mathbf{v}_1 . Так как вектор \mathbf{v}_{21} (этот вектор ранее назывался \mathbf{v}_{PA}) перпендикулярен к P_1P_2 , то треугольник скоростей определяется в соответствии с основной формулой

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{21},$$

находя пересечение линии действия вектора \mathbf{v}_{21} , проведенного из точки образа P'_1 , и линии действия вектора \mathbf{v}_2 , проведенного из точки G' . Поэтому определяется масштабированная скорость \mathbf{v}_2 , а также и вектор $\mathbf{v}_{21} = -\mathbf{v}_{12}$. Вектор скорости третьей точки твердого тела P_3 находится аналогично. Линия действия этого вектора проводится через точку G' ортогонально к P_3G . Два последовательных приложения основной формулы

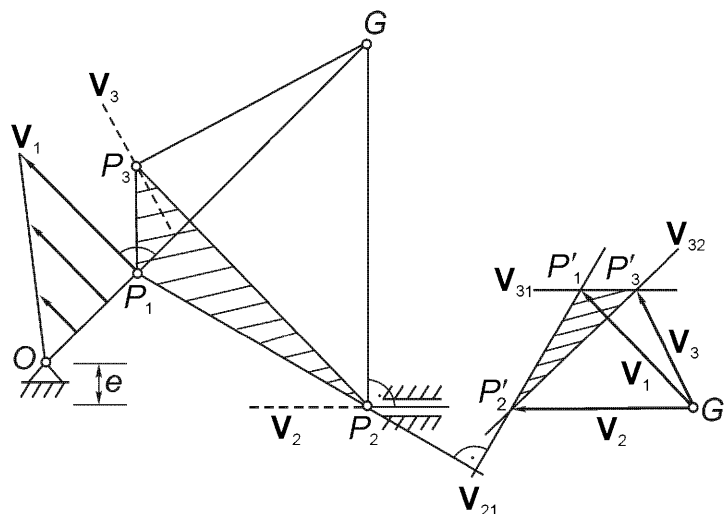


Рис. 1.9. Эксцентричный кривошипный механизм. Твердое тело есть система стержней $P_1 P_2 P_3$.

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{31} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{32},$$

не только позволяет найти вектор \mathbf{v}_3 из пересечения линии действия вектора \mathbf{v}_{31} , который ортогонален к $P_3 P_1$ и проходит через вершину P'_1 вектора \mathbf{v}_1 , и линии действия вектора \mathbf{v}_3 , но также дает положение точки P'_3 независимо от ранее определенного направления вектора \mathbf{v}_3 . Это доказывает точность построения и, что даже более важно, это делает построение диаграммы скоростей независимым от предыдущего определения центра скоростей G в конфигурационной плоскости. Весьма часто определение G ненадежно или невозможно из-за ограниченности места. Заметим, что имеется подобие треугольника $P_1 P_2 P_3$, который, в общем, есть многоугольник в конфигурационной плоскости, с повернутым (на угол $\pi/2$ в направлении ω) треугольником на диаграмме скоростей, образованным точками P'_1, P'_2, P'_3 (см. опять рис. 1.9).

1.4.2. Кинематика планетарного передаточного механизма

Ансамбль сцепленных зубчатых колес, состоящий из центрального колеса (солнце), коаксиального полого цилиндрического колеса и одного или нескольких промежуточных колес (планеты), находящихся на вращающемся валу, имеет многие технические приложения, см. рис. 1.10.

Три коаксиальных вала вращаются с тремя различными угловыми скоростями. Даны радиусы r_1, r_3 , требуется найти передаточные отношения. Ограничения на движения твердых тел без скольжения могут быть выражены в виде наличия общих скоростей в точках контакта. Основная формула применительно к планетам дает

$$v_1 = r_1 \omega_1, v_2 = r_2 \omega_2 = v_1 + r_P \omega_P, v_3 = v_2 + r_P \omega_P = r_3 \omega_3,$$

где

$$r_2 = (r_1 + r_3)/2, r_P = (r_3 - r_1)/2.$$

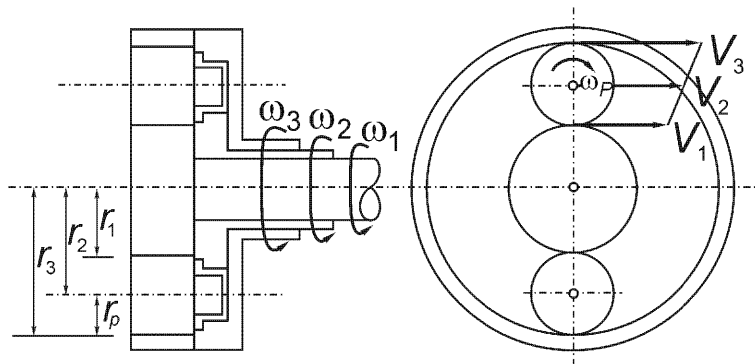


Рис. 1.10. Эпициклическая планетарная зубчатая передача.

Поэтому, составляя два результирующих уравнения,

$$r_2 \omega_2 = r_1 \omega_1 + r_P \omega_P,$$

$$r_3 \omega_3 = r_1 \omega_1 + 2r_P \omega_P,$$

и принимая ω_2 как управляющий параметр, получим передаточные отношения зубчатой передачи

$$\omega_3/\omega_1 = (r_1/r_3)(2r_2 \omega_2/r_1 \omega_1 - 1),$$

$$\omega_P/\omega_1 = (r_1/r_P)(r_2 \omega_2/r_1 \omega_1 - 1).$$

Далее записаны некоторые частные случаи соотношений вход-выход передачи

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_3 = 2r_2 \omega_2/r_3, \quad \omega_P = r_2 \omega_2/r_P,$$

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -r_1 \omega_1/r_3, \quad \omega_P = -r_1 \omega_1/r_P,$$

$$\omega_3 = 0, \quad \omega_2 = r_1 \omega_1/2r_2, \quad \omega_P = -r_1 \omega_1/2r_P.$$

Число оборотов в минуту n связано с угловой скоростью ω рад/с соотношением

$$\omega = \pi n/30, \quad [\omega] = \text{рад/с}, \quad [n] = \text{об/мин}.$$

1.4.3. Универсальный шарнир (шарнир Кардана)

Два вращающихся вала, не лежащих на одной прямой, соединены без скольжения с помощью универсального шарнира (шарнир Кардана); см. рис. 1.11.

Концы осей заканчиваются вилками и соединены жесткой крестовиной. Требуется найти передаточное отношение, если угол между осями α задан. Так как твердые тела соединены так, что точка A пересечения осей фиксирована в пространстве и также это есть материальная точка, принадлежащая каждому телу, то скорости концевых точек вилок выражаются в виде

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_P, \quad \mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_Q = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_Q,$$

где $\boldsymbol{\omega}_2$ означает угловую скорость крестовины. Отсюда получаются векторные уравнения

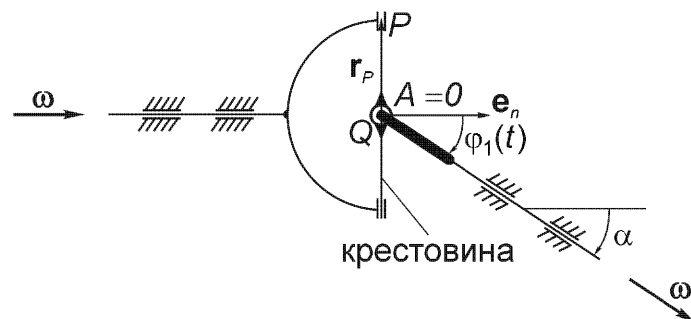


Рис. 1.11. Геометрия универсального шарнира. Крестовина расположена при $\varphi = 0$.

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_P = \mathbf{0}, \quad (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_Q = \mathbf{0},$$

которые имеют нетривиальное решение, если $(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_2) \parallel \mathbf{r}_P$ и $(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \parallel \mathbf{r}_Q \perp \mathbf{r}_P$. Скалярное умножение на \mathbf{r}_Q и \mathbf{r}_P , соответственно, дает смешанные произведения, где сомножители переставлены в циклическом порядке,

$$\begin{aligned} [(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_P] \cdot \mathbf{r}_Q &= (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_2) \cdot (\mathbf{r}_P \times \mathbf{r}_Q) = 0, \\ [(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_Q] \cdot \mathbf{r}_P &= (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \cdot (\mathbf{r}_Q \times \mathbf{r}_P) = 0. \end{aligned}$$

После сложения двух последних равенств исключается $\boldsymbol{\omega}_2$ и получаем соотношение

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1) \cdot (\mathbf{r}_P \times \mathbf{r}_Q) = 0,$$

что может быть переформулировано с помощью нормального вектора к плоскости крестовины \mathbf{e}_n

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1) \cdot \mathbf{e}_n = 0.$$

Если мы положим $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_n) = \omega \cos \varphi$ и $(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{e}_n) = \omega_1 \cos \varphi_1$, то найдем отношение

$$\omega / \omega_1 = \cos \varphi_1 / \cos \varphi.$$

Соотношение между α (постоянным углом между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_1$) и углами $\varphi(t)$ и $\varphi_1(t)$ с учетом ортогональности компонент угловых скоростей в плоскости крестовины

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 = \omega \omega_1 \cos \alpha = \omega \cos \varphi \omega_1 \cos \varphi_1 (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n)$$

имеет вид $\cos \varphi_1 = \cos \alpha / \cos \varphi$. Поэтому угол $\varphi_1(t)$ может быть исключен и зависящее от времени отношение угловых скоростей окончательно принимает вид

$$\omega / \omega_1 = \cos \alpha / \cos^2 \varphi(t),$$

где границы изменения отношения угловых скоростей следующие:

$$\cos \alpha \leq \omega / \omega_1 \leq (\cos \alpha)^{-1}.$$

1.4.4. Центральное движение (задача Кеплера): полярная система координат

Рассматривается плоское движение точки при условии, что ускорение \mathbf{a} постоянно направлено к неподвижной точке O . В полярных координатах радиус-вектор имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(t).$$

Вектор скорости есть производная по времени

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi,$$

где применяется формула для дифференцирования материального вектора \mathbf{e}_r с соответствующей угловой скоростью $(d\phi/dt)\mathbf{e}_z$. Поэтому радиальная скорость есть $v_r = dr/dt$ и угловая компонента равна $v_\phi = r d\phi/dt$. Ускорение в полярных координатах имеет вид

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + r \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi + r \dot{\phi} \dot{\mathbf{e}}_\phi = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi.$$

При центральном движении угловая компонента ускорения должна быть равна нулю

$$(r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) = 0.$$

Полагая $\omega = d\phi/dt$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка, которое после разделения переменных $d\omega/\omega = -2dr/r$ интегрируется. Если мы предположим, что начальные значения r_0 и ω_0 даны, то будем иметь

$$\ln \omega = -2 \ln r + \ln C \text{ или } \omega r^2 = C = \omega_0 r_0^2.$$

Поэтому при центральном движении секторная скорость [площадь на единицу времени прямоугольного треугольника с основанием $r(t)$ и высотой $v_\phi = r\omega$] $(r v_\phi / 2) = \omega r^2 / 2 = C/2$ сохраняется. Эта общая теорема была сформулирована Кеплером около 1610 года в его втором законе движения планет. Радиальное ускорение принимает следующую форму

$$a_r(t) = \ddot{r} - r \omega^2 = \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}.$$

Подстановка закона Ньютона для гравитации

$$a_r(t) = -k/r^2$$

позволяет получить нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для радиуса $r(t)$ траектории

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{k}{r^2} = 0.$$

Время может быть исключено, рассматривая $r(t) = r[\phi(t)]$, где $dr/dt = \omega dr/d\phi$,

$$\ddot{r} = r'' \omega^2 + r' \dot{\omega} = C^2 \frac{r''}{r^4} - 2C \frac{r'^2}{r^5} = \frac{C^2}{r^6} (r'' r^2 - 2r r'^2) = -\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} \right)'', \quad r' = \frac{dr}{d\phi}.$$

Замена дает линейное дифференциальное уравнение для обратной величины $1/r(\varphi)$, которое легко решается путем суперпозиции частного решения уравнения $(1/r)_p$ и интеграла однородного уравнения $(1/r)_h$,

$$(1/r)'' + (1/r) = kC^2, \quad (1/r)_p = k/C^2, \quad (1/r)_h = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \\ (1/r) = A \cos \varphi + B \sin \varphi + (k/C^2).$$

Траектория $r(\varphi)$ легко может быть определена как плоское коническое сечение с фокусом в начале отсчета O . Располагая одну из главных осей в направлении $\varphi = 0$, получим $B = 0$, и уравнение траектории получает вид:

$$r(\varphi) = C^2/k(1 + \varepsilon \cos \varphi), \quad \varepsilon = (r_0 v_0^2)/k - 1, \quad r_0, v_0 = r_0 \omega_0 \text{ при } \varphi = 0.$$

Здесь введено обозначение: ε – «численный эксцентриситет».

В первом приближении это решение дает уравнение траектории планет вокруг Солнца, причем Солнце находится в точке O , а также орбиты спутников, например, для спутников Земли, расположенной в фокусе O .

Вид траектории зависит от значения эксцентриситета ε .

$0 \leq \varepsilon < 1$ – замкнутые орбиты (эллипсы);

$\varepsilon \geq 1$ – открытые траектории (гиперболы или при $\varepsilon = 1$ парабола).

Скорость отрыва в перигелии (при $\varphi = 0$) в случаях, когда $\varepsilon \geq 1$, равна

$$v_0 \geq \sqrt{2k/r_0}.$$

Так как значение k для Земли в начале отсчета равно приблизительно $4 \times 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ и радиус Земли r_0 равен $6,37 \times 10^6 \text{ м}$, то скорость отрыва равна $11,2 \times 10^3 \text{ м/с}$. Приблизительные значения для Солнца: $k \approx 133 \times 10^{18} \text{ м}^3/\text{с}^2$ при радиусе Солнца $r_0 \approx 6,96 \times 10^8 \text{ м}$.

1.5. Дополнения и приложения кинематики деформации

1.5.1. Одноосная однородная деформация

Один конец стержня с длиной до деформации l_0 движется с постоянной скоростью v_e ; другой конец связан с опорой и остается фиксированным в пространстве. Вследствие условия однородной деформации перемещение поперечного сечения, расположенного при координате X в недеформированной конфигурации, определяется выражением

$$u(t; X) = x(t) - X,$$

где

$$x(t)/X = l(t)/l_0 = 1 + tv_e/l_0.$$

Исключение текущей координаты $x(t)$ дает лагранжево представление:

$$u = u(t; X) = t X v_e / l_0, \text{ откуда } v = v(t; X) = \partial u / \partial t = X v_e / l_0 = \text{const}, \\ a = 0, \quad 0 \leq X \leq l_0.$$

Исключение материальной координаты X дает эйлерово представление:

$$u = u(x; t) = x(1 - l_0/l) = x v_e t / (l_0 + t v_e), \quad 0 \leq x \leq l(t).$$

Линейное уравнение может быть решено относительно скорости v :

$$v(x; t) = du/dt = \partial u / \partial t + v \partial u / \partial x = \\ = [v_e / (l_0 + t v_e) - v_e^2 t / (l_0 + t v_e)^2] x + t v_e v_e / (l_0 + t v_e),$$

в результате получим

$$v = v(x; t) = x v_e / (l_0 + t v_e),$$

где асимптотически $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x; t) = 0$ при всех значениях x .

Дифференцируя по времени выражение для скорости еще один раз, получим ускорение, где положительное конвективное ускорение сокращается с локальным ускорением,

$$a = a(x; t) = dv/dt = \partial v / \partial t + v \partial v / \partial x = \\ = x [-v_e^2 / (l_0 + t v_e)^2 + v_e^2 / (l_0 + t v_e)^2] = 0.$$

Из эйлерова представления ясно видна нестационарность движения поперечных сечений через пространственную точку x .

1.5.2. Естественные координаты линии тока

При эйлеровом представлении движения скорость и ускорение материальной точки в декартовой системе координат (s, n, m) с базисными векторами $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$ определяются выражениями (см. рис. 1.12)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t; s, n, m) = v_t \mathbf{e}_t + v_n \mathbf{e}_n + v_m \mathbf{e}_m, \\ \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_t}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{dv_n}{dt} \mathbf{e}_n + \frac{dv_m}{dt} \mathbf{e}_m, \quad (1.52)$$

где компоненты ускорения могут быть записаны как полные производные по времени

$$\begin{aligned} dv_t/dt &= \partial v_t/\partial t + v_t \partial v_t/\partial s + v_n \partial v_t/\partial n + v_m \partial v_t/\partial m, \\ dv_n/dt &= \partial v_n/\partial t + v_t \partial v_n/\partial s + v_n \partial v_n/\partial n + v_m \partial v_n/\partial m, \\ dv_m/dt &= \partial v_m/\partial t + v_t \partial v_m/\partial s + v_n \partial v_m/\partial n + v_m \partial v_m/\partial m. \end{aligned}$$

В некоторый момент времени t отсчетная система координат может совпадать с естественными координатами в рассматриваемой точке линии тока; касательный вектор \mathbf{e}_t направлен в направлении скорости материальной точки, находящейся в начале отсчета O ; \mathbf{e}_n , предполагается, совпадает с главной нормалью линии тока. Поэтому в начале отсчета $v_t = v$, $v_n = 0$, $v_m = 0$,

$$\begin{aligned} dv/dt &= \partial v/\partial t + v \partial v/\partial s = \partial v/\partial t + (1/2) \partial v^2/\partial s, \\ dv_n/dt &= \partial v_n/\partial t + v \partial v_n/\partial s, \\ dv_m/dt &= \partial v_m/\partial t + v \partial v_m/\partial s. \end{aligned}$$

Конвективная компонента ускорения в направлении \mathbf{e}_n , $v \partial v_n/\partial s$, соответствует изменению скорости на расстоянии ds , измеренному вдоль линии тока, так как $t = \text{const}$. Это слагаемое получается от вращения вектора \mathbf{v} вокруг оси, параллельной бинормали \mathbf{e}_m , проходящей через центр кривизны линии тока, на бесконечно малый угол ds/r_s , который также может быть выражен как $ds/r_s = dv_n/v$. Поэтому похожее выражение имеет вид

$$v \partial v_n/\partial s = v^2/r_s,$$

где r_s^{-1} есть главная кривизна линии тока. Вектор конвективного ускорения лежит в плоскости кривизны линии тока; поэтому $\partial v_m/\partial s = 0$. В итоге, в общем,

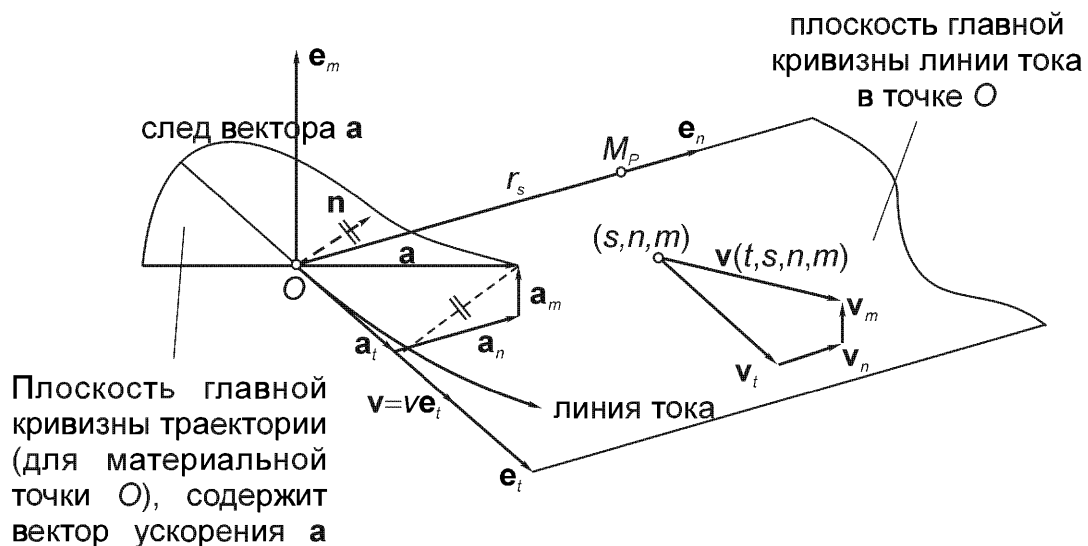


Рис. 1.12. Вектор ускорения \mathbf{a} с компонентами, указанными в естественных координатах линии тока нестационарного течения при постоянном времени.

три главные компоненты ускорения в естественных координатах линии тока определяются следующим образом

$$a_t = dv/dt = \partial v/\partial t + (1/2)\partial(v^2)/\partial s \text{ (тангенциальное ускорение)}, \quad (1.53)$$

$$a_n = dv_n/dt = \partial v_n/\partial t + v^2/r_s \text{ (главное нормальное ускорение)}, \quad (1.54)$$

$$a_m = dv_m/dt = \partial v_m/\partial t \text{ (нестационарное бинормальное ускорение)}. \quad (1.55)$$

Если мы сравним компоненты a_n и a_m с двумя компонентами ускорения в естественных координатах траектории в точке O (см. раздел 1.1.1), то можно заметить разницу в случае нестационарного течения, в то же время тангенциальная компонента a_t та же самая. При стационарном течении все компоненты становятся одинаковыми, так как линия тока и траектория совпадают и $r_s = r$ траектории.

При нестационарном течении

$$(\partial v_n/\partial t + v^2/r_s)\mathbf{e}_n + (\partial v_m/\partial t)\mathbf{e}_m = (v^2/r)\mathbf{n},$$

где \mathbf{n} есть главная нормаль и $1/r$ есть главная кривизна траектории, \mathbf{n} есть также (общая) нормаль линии тока.

1.5.3. Тензор деформаций, плоское деформированное состояние

(§) Тензорные свойства матрицы деформаций

Рассмотрение двух повернутых друг относительно друга декартовых систем координат $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z (X, Y, Z)$ и $\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{k} (X', Y', Z')$ для описания одной и той же деформации и учет инвариантности длины материального элемента при повороте системы координат приводит к соотношению:

$$\begin{aligned} & (1/2)(dl^2 - dl_0^2) = \\ & = \varepsilon_{xx}(dX)^2 + \varepsilon_{yy}(dY)^2 + \varepsilon_{zz}(dZ)^2 + 2(\varepsilon_{xy} dX dY + \varepsilon_{yz} dY dZ + \varepsilon_{zx} dZ dX) = \\ & = \varepsilon'_{xx}(dX')^2 + \varepsilon'_{yy}(dY')^2 + \varepsilon'_{zz}(dZ')^2 + 2(\varepsilon'_{xy} dX' dY' + \varepsilon'_{yz} dY' dZ' + \varepsilon'_{zx} dZ' dX'). \end{aligned}$$

Скалярное умножение эквивалентного представления приращения радиуса-вектора

$$d\mathbf{r} = dX\mathbf{e}_x + dY\mathbf{e}_y + dZ\mathbf{e}_z = dX'\mathbf{n} + dY'\mathbf{m} + dZ'\mathbf{k}$$

на единичный вектор \mathbf{e}_j ($j = 1, 2, 3$) дает линейное векторное преобразование между приращениями координат

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & m_x & k_x \\ n_y & m_y & k_y \\ n_z & m_z & k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{pmatrix}.$$

Поэтому дифференциалы dX, dY, dZ могут быть исключены и, сравнивая коэффициенты, получим полную систему преобразований для всех девяти компонент деформаций. Например, для нормальной компоненты ε'_{xx} в повернутых осях получим

$$\varepsilon'_{xx} = \varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2 + 2(\varepsilon_{xy} n_x n_y + \varepsilon_{yz} n_y n_z + \varepsilon_{zx} n_z n_x), \quad (1.56)$$

а для компоненты сдвиговой деформации в повернутых осях ε'_{xy}

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xy} = & \varepsilon_{xx} n_x m_x + \varepsilon_{yy} n_y m_y + \varepsilon_{zz} n_z m_z + \varepsilon_{xy} (n_x m_y + n_y m_x) + \\ & + \varepsilon_{yz} (n_y m_z + n_z m_y) + \varepsilon_{zx} (n_z m_x + n_x m_z). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Другие компоненты деформаций определяются аналогично путем циклической перестановки нижних индексов. Квадратная матрица, элементы которой преобразуются согласно полученным правилам при повороте системы координат, называют тензором (второго ранга). Для тензора напряжений получены аналогичные соотношения (2.22) и (2.23) и для тензора инерции - соотношения (2.122) и (7.54). Симметричный тензор деформаций может быть преобразован к диагональному виду путем соответствующего поворота осей координат к ортогональной системе главных осей, которые получаются при экстремальном условии: $\max[\varepsilon'_{xx}(n_x, n_y, n_z)]$ с ограничением $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1 = 0$ и при других аналогичных условиях. Полученные после преобразования элементы на главной диагонали матрицы называются главными нормальными деформациями, соответствующие сдвиговые деформации ε_{ij} ($i \neq j$) равны нулю. В соответствии с соотношением (1.30) существуют три ортогональных направления в каждой материальной точке, которые остаются ортогональными после деформации; они называются главными осями деформации.

(§) Преобразование главных осей, круг Мора

Рассматривается состояние плоской деформации, которое определяется условиями $\varepsilon_{zi} = 0$ ($i = x, y, z$) и $\partial \varepsilon_{ij} / \partial z = 0$. В качестве примеров могут быть полупространство и длинные цилиндры, наподобие длинных дамб. Симметричный тензор плоской деформации имеет три независимых элемента

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}. \quad (1.58)$$

При повороте осей координат (x, y) вокруг оси z на угол α направляющие косинусы принимают значения $n_x = \cos \alpha$, $n_y = \sin \alpha$, $m_x = -\sin \alpha$, $m_y = \cos \alpha$. Из формул (1.56) и (1.57) тогда получим

$$\varepsilon'_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\alpha \pm \varepsilon_{xy} \sin 2\alpha, \quad (1.59)$$

$$\varepsilon'_{xy} = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin 2\alpha + \varepsilon_{xy} \cos 2\alpha. \quad (1.60)$$

Знак плюс относится к ε'_{xx} , знак минус – к ε'_{yy} . Необходимое условие экстремального значения может быть записано в виде

$$\partial \varepsilon'_{xx} / \partial \alpha = 0 = -(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin 2\alpha + 2\varepsilon_{xy} \cos 2\alpha = 2\varepsilon'_{xy}.$$

Таким образом, обращение в нуль сдвиговой компоненты деформаций определяет главную ось деформации в направлении α_1

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = 2\varepsilon_{xy} / (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \quad (1.61)$$

и вторую главную ось в ортогональном направлении $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$. Соответствующий сдвиг $\varepsilon_{12} = \varepsilon'_{xy} = 0$, и главные нормальные деформации вычисляются по формуле

$$\varepsilon_{1,2} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})/2 \pm (1/2)[(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2]^{1/2}. \quad (1.62)$$

Используя главные оси в качестве системы координат и применяя обозначения (x, y) для повернутой на угол α системы координат, можно записать соотношения (1.59) и (1.60) в виде

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2\alpha, \quad \varepsilon_{xy} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (1.63)$$

В итоге получили уравнение эллипса, записанное в полярных координатах, в плоскости $[(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}), \varepsilon_{xy}]$. Круг, связанный с тензором плоской деформации, называется кругом Мора (см. также рис. 2.7).

Если мы предположим, что тензор известен в общей форме, то круг Мора может быть нарисован с центром в точке с абсциссой $(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})/2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$, проходя при этом через точки $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy})$ и $(\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})$. Направление оси главной деформации определяется углом α_1 , отсчитанным от оси x , как показано на рис. 1.13, а также это можно сделать с помощью двойного угла (см. также рис. 1.13).

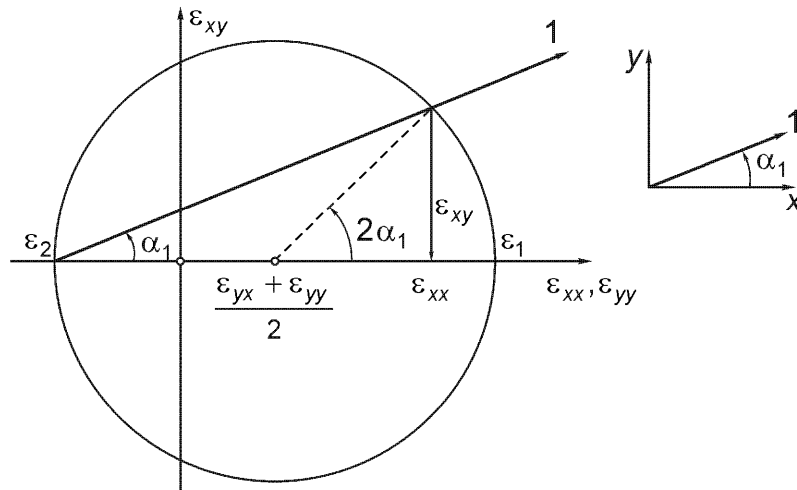


Рис. 1.13. Круг Мора для тензора плоской деформации. Ось главной деформации обозначена как ось 1. Дано: $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$. Найдено: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha_1$. См. также рис. 2.7.

Сумма нормальных компонент тензора деформаций остается постоянной при повороте системы осей координат (x, y) (центр круга Мора не движется); эта величина называется первым инвариантом тензора плоской деформации.

1.6. Сохранение массы: уравнение неразрывности

Выше была рассмотрена кинематика тела, состоящего из материальных точек. Каждое тело имеет определенную массу, которая является фундаментальным физическим свойством. Она измеряется в кратной единице «один килограмм», 1 кг и в отсутствие каких-либо внешних источников предполагается постоянной при движении. Эффекты, описанные в релятивистской механике, при движениях со скоростями, близкими к скорости света (3×10^8 м/с), не рассматриваются в данной книге. Далее, тело считается континуумом с массой Δm , которую имеет каждый материальный объем ΔV . Массовая плотность, масса на единицу объема, по предположению, существует согласно (математическому) определению

$$\rho(x, y, z, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad [\rho] = \text{кг/м}^3, \quad (1.64)$$

что имеет место в каждой материальной точке тела. Начальное распределение плотности при $t = 0$ обозначается как $\rho_0(X, Y, Z)$. Сохранение массы при движении тела от начальной до текущей конфигурации выражается сохранением суммы масс малых элементов, $dm = \rho dV$, т.е. сохранением объемного интеграла

$$m = \int_{V(t)} \rho(x, y, z; t) dV = \int_{V_0} \rho_0(X, Y, Z) dV_0, \quad [m] = \text{кг}, \quad (1.65)$$

где $dV = dx dy dz$ и $dV_0 = dX dY dZ$ связаны согласно соотношению (1.32). Так как равенство (1.65) должно выполняться для каждого материального объема тела, то подынтегральные выражения должны быть равны, и мы получаем локальное условие

$$\rho_0(X, Y, Z) = \rho(x, y, z; t) \det \{F_{ij}\},$$

инвертируя которое получаем уравнение неразрывности в лагранжевом представлении

$$\rho(x, y, z; t) = \rho_0(X, Y, Z) \det \{F_{ij}^{-1}\}. \quad (1.66)$$

Точечное отображение V_0 на $V(t)$ является сложным, и уравнение (1.66) содержит определитель градиентов деформации. Гораздо проще выбрать соответствующий пространственный объем V , контрольный объем, с проницаемой поверхностью ∂V , контрольной поверхностью. В некоторый момент времени t контрольный объем содержит массу $m(t)$

$$m(t) = \int_V \rho(x, y, z; t) dV, \quad (1.67)$$

где (x, y, z) означает пространственную точку в V . При течении через контрольный объем V масса $m(t)$ может изменяться вследствие суммарных нестационарных изменений плотности в пространственных точках (x, y, z) ; поэтому

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho(x, y, z; t)}{\partial t} dV. \quad (1.68)$$

В отсутствие внешних источников в V такое увеличение массы соответствует суммарному потоку массы, втекающей через контрольную поверхность ∂V . Если мы обозначим вектор единичной внешней нормали к поверхности ∂V через \mathbf{e}_n , то компонента скорости частицы, нормальная к контрольной поверхности, будет равна скалярному произведению $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n)$, и поток массы через элемент поверхности dS за единицу времени выражается как (см. рис. 1.14)

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n dS. \quad (1.69)$$

Скорость удельного потока массы (на единицу контрольной поверхности) вычисляется по формуле

$$\mu = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n, \quad [\mu] = \text{кг/с м}^2. \quad (1.70)$$

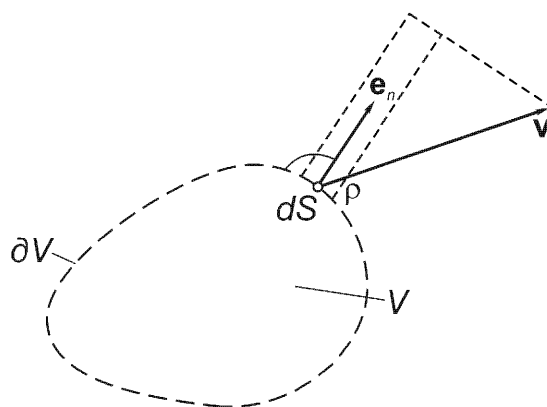


Рис. 1.14. Контрольный объем V , фиксированный в пространстве.
Поток через элемент dS контрольной поверхности ∂V .

Поток массы за единицу времени есть сумма скоростей элементарных потоков массы, т.е. это есть интеграл по замкнутой контрольной поверхности ∂V , и он должен быть равен производной $\frac{dm(t)}{dt}$ согласно формуле (1.68)

$$-\oint_{\partial V} \mu dS = \frac{dm(t)}{dt}. \quad (1.71)$$

В итоге, баланс скорости потока массы через контрольный объем V приводится к виду

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \mu dS = 0. \quad (1.72)$$

В данный момент времени контрольный объем V содержит массу тела с тем же самым материальным объемом $V(t)$ и согласно уравнению (1.65) $\frac{dm(t)}{dt} = 0$, причем, если выразить m в (1.65) в эйлеровых переменных, то в точности получим уравнение (1.72), где ρ , dV и dS выражены в пространственных координатах. Эта интерпретация уравнения (1.72) носит название транспортной теоремы Рейнольдса, которая является обобщением правила Лейбница о дифференцировании интеграла (см. также раздел 7.1).

С помощью интегральной теоремы Гаусса, которая имеет общий вид

$$\int_V \{\nabla g\} dV = \oint_{\partial V} \{\mathbf{e}_n g\} dS,$$

поверхностный интеграл в (1.72) может быть заменен интегралом по объему (с помощью теоремы о дивергенции); контрольный объем должен быть односвязным и фиксированным в пространстве

$$\oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV.$$

Поэтому уравнение (1.72) принимает вид интеграла по объему

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (1.73)$$

Соотношение (1.73) верно для любого контрольного объема, фиксированного в пространстве. Поэтому подынтегральное выражение должно быть равно нулю, что дает локальное условие, эйлерово уравнение неразрывности, справедливое в любой точке пространства,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.74)$$

здесь $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \equiv \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ есть дивергенция вектора скорости удельного потока массы $\rho \mathbf{v}$. Используя выражение для полной производной по времени плотности $\rho(x, y, z, t)$, по аналогии с соотношением (1.42), получим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho.$$

Тогда уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.75)$$

или, эквивалентно, если ввести производную логарифмической функции

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{d}{dt} (\ln \rho). \quad (1.76)$$

Последняя форма не только выражает кинематическое ограничение на поле скоростей несжимаемого течения (деформации) однородного континуума, $\rho = \text{const}$, а именно,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.77)$$

но также указывает, что условие (1.77) есть хорошее приближение и в случае сжимаемого течения вследствие медленного изменения логарифмической функции.

В случае несжимаемого и безвихревого течения [см. уравнение (1.50)], когда имеется дополнительное кинематическое ограничение $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, поле скоростей есть потенциальное векторное поле, $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi = \nabla \Phi$ [см. формулу (1.51)]. Это дает после подстановки в соотношение (1.77)

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \Delta \Phi = 0, \quad (1.78)$$

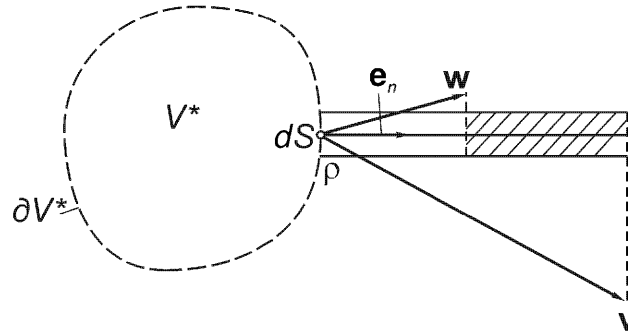


Рис. 1.15. Движущаяся контрольная поверхность ∂V^* .
Поток через элемент dS , имеющий заданную скорость w .

что является дифференциальным уравнением Лапласа для потенциала скорости $\Phi(x, y, z, t)$. Так как $\Delta = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ есть пространственный оператор, время есть только параметр движения. Течение становится нестационарным только при наличии зависящих от времени внешних воздействий: например, кинематические волны являются решением уравнения Лапласа. Потенциал скорости есть гармоническая функция пространственных координат.

В некоторых приложениях введение подвижной контрольной поверхности значительно упрощает решение проблемы. В этом случае точка поверхности имеет заданную скорость w , скорость потока массы изменяется согласно соотношению (1.69), принимая вид (см. рис. 1.15)

$$\rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_n dS. \quad (1.79)$$

Скорость изменения со временем массы $m(t)$ [см. уравнение (1.67)], заключенной в движущемся контрольном объеме V^* , должна быть равна суммарному потоку массы через движущуюся контрольную поверхность ∂V^* , что приводит к соотношению

$$-\oint_{\partial V^*} \mu dS = \frac{dm(t)}{dt}. \quad (1.80)$$

Скорость удельного потока массы при движущейся контрольной поверхности выражается формулой

$$\mu = \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_n. \quad (1.81)$$

Баланс массы принимает более общую форму (при условии, что внешние источники массы отсутствуют)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^*} \rho dV + \oint_{\partial V^*} \mu dS = 0. \quad (1.82)$$

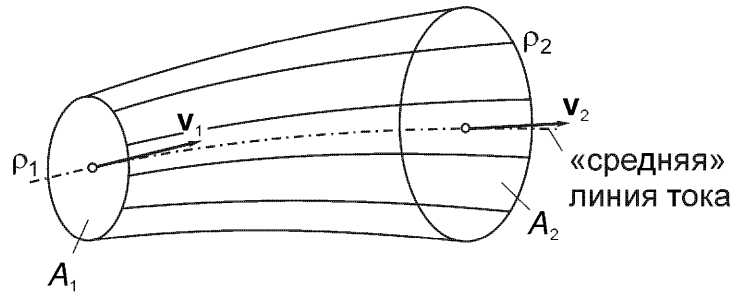


Рис. 1.16. Трубка тока. Области поперечных сечений на входе A_1 и на выходе A_2 . Контрольная поверхность фиксирована в пространстве при стационарном течении, $\dot{m} = \text{const}$.

Это соотношение полезно, если, например, трубка тока выбрана как контрольная поверхность в нестационарном течении; см. раздел 1.3.3.

Во многих приложениях заданное движение контрольного объема есть движение абсолютно твердого тела. Соотношение (1.4) применимо в этом случае к полю скоростей \mathbf{w} , и объем V остается неизменным. Декартова система координат прикрепляется к жесткому движущемуся контрольному объему, (x', y', z') , и так как ρ есть скалярная функция, то дифференцирование и интегрирование могут быть переставлены местами, что дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho(x', y', z'; t)}{\partial t} dV'. \quad (1.83)$$

Такой движущийся контрольный объем наиболее удобен, если относительное движение $(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ является стационарным. В этом случае объемный интеграл равен нулю, и

$$\oint_{\partial V} \mu dS = 0, \quad \mu = \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_n. \quad (1.84)$$

При стационарном течении линии тока совпадают с траекториями, и контрольная поверхность, соответствующая трубке тока, остается фиксированной в пространстве, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Так как $\partial \rho / \partial t = 0$, уравнение (1.72) приводится к виду

$$\oint_{\partial V_{st}} \mu dS = 0, \quad \mu = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n. \quad (1.85)$$

Интеграл может быть далее преобразован к более простому виду, если плоские поперечные сечения A_1 и A_2 будут выбраны вместо концевых поверхностей более общей формы для соответствующего замыкания трубки тока. Применяя теорему о среднем к интегралу по поперечному сечению, получим (см. рис. 1.16)

$$\oint_{\partial V_{st}} \mu dS = \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 = 0, \quad \mu_1 = -\rho_1 v_1, \quad \mu_2 = \rho_2 v_2.$$

Или в инженерной форме уравнение скорости потока массы имеет вид

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2. \quad (1.86)$$

<<Приток массы за единицу времени через поперечное сечение A_1 со средней скоростью v_1 должен быть равен оттоку массы через поперечное сечение A_2 со средней скоростью v_2 , так как течение массы через поверхность трубки тока отсутствует.>> Это уравнение применяется на стадии проектирования системы линий тока. Здесь полезна аналогия с течением жидкости через трубу с переменным поперечным сечением, и уравнение (1.86) дает распределение средней скорости вдоль длины трубы.

1.6.1. Стационарное течение через конусообразную трубу: представления Эйлера и Лагранжа

Предположим, что имеется течение несжимаемой жидкости в интервале $0 \leq x \leq l$, где поперечное сечение изменяется линейно по закону $A(x) = A_1 - (A_1 - A_2)x/l$. Эйлерово уравнение неразрывности дает среднюю скорость, $v(x=0) = v_1$ [см. уравнение (1.86)],

$$\dot{m} = \rho v_1 A_1 = \rho v(x) A(x) = \text{const} \quad (1.87)$$

и отсюда

$$v(x) = v_1 \frac{A_1}{A(x)} = \frac{v_1}{1 - \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) x/l}.$$

Ускорение в эйлеровом представлении при стационарном течении, когда $\partial v(x)/\partial t = 0$, учитывая, что $v = dx/dt$, имеет вид

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{v_1^2}{l} \frac{\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)}{\left[1 - \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) \frac{x}{l}\right]^3},$$

что не зависит от времени.

Альтернативно, если мы рассмотрим индивидуальную частицу, движущуюся по трубе, то скорость $v(t; X)$ изменяется со временем и зависит от начального положения частицы, скажем, $X = 0$ в момент времени $t = 0$. В момент времени t скорость в положении x должна быть $v(t; X = 0) = v(x)$. Интегрирование выражения $dt = dx/v(x)$ дает

$$[t]_0^x = \int_0^x \frac{d\xi}{v(\xi)} = \frac{1}{v_1} \left[x - \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \frac{x^2}{2l} \right],$$

что образует квадратное уравнение для лагранжева описания зависимости координаты от времени $x(t; 0)$. Соответствующее решение при выборе верхнего знака в нижеследующем выражении для действительного движения имеет вид:

$$x(t; 0) = \frac{l}{1 - \frac{A_2}{A_1}} \left[1 \mp \sqrt{1 - 2 \frac{v_1}{l} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) t} \right].$$

Скорость есть производная по времени, т.е. имеет вид:

$$v(t; 0) = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{v_1}{\sqrt{1 - 2 \frac{v_1}{l} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) t}}.$$

Наконец, ускорение при лагранжевом описании вычисляется как вторая производная по времени:

$$a(t; 0) = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_1^2}{l} \frac{(1 - A_2/A_1)}{\left[1 - 2 \frac{v_1}{l} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) t \right]^{3/2}},$$

что показывает, как меняется ускорение при прохождении частицы через трубу.

1.7. Упражнения А 1.1 – А 1.10 и решения

А 1.1: Радарный монитор наблюдает за вертикальным взлетом ракеты, Расстояние между ними по горизонтали равно l . При этом измеряется угол θ и поэтому из вычисления в реальном времени угловая скорость и угловое ускорение $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ предполагаются известными. Определить высоту $z(t)$, скорость $v(t)$ и ускорение $a(t)$. См. рис. А 1.1.

Решение: Рассмотрение треугольника дает $z(t) = H + l \operatorname{tg} \theta$, и после дифференцирования получим $v = dz/dt = l(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) d\theta/dt$, $a = d^2 z / dt^2 = l(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \times [d^2 \theta / dt^2 + 2(d\theta/dt)^2 \operatorname{tg} \theta]$. Если записать, что $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_\varphi \cos \theta$, то представление в полярных координатах дает тот же результат. Так как $r = l / \cos \theta$ и $\varphi \equiv \theta$, то радиальная компонента скорости имеет вид

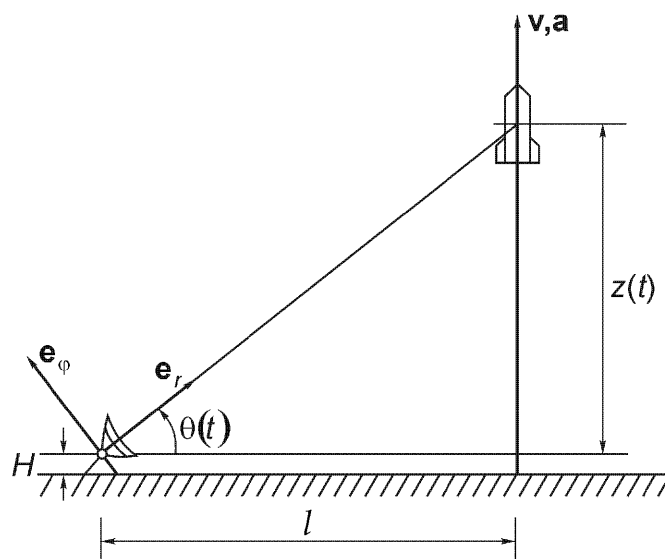


Рис. А 1.1.

$v_r = dr/dt = l(d\theta/dt)\sin\theta/\cos^2\theta$, а окружная компонента $v_\varphi = r d\varphi/dt = l(d\theta/dt)/\cos\theta$,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = l \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} (\ddot{\theta}\cos\theta + 2\dot{\theta}^2 \sin\theta),$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{l}{\cos^2\theta} (\ddot{\theta}\cos\theta + 2\dot{\theta}^2 \sin\theta).$$

А 1.2: Заменить кулачковый механизм в текущей конфигурации, показанный на рис. А 1.2, эквивалентной трехстержневой системой, не меняя скорости и ускорения.

Решение: При геометрической аппроксимации второго порядка центры кривизны контактирующих линий в точке контакта P находятся в точках M_1 и M_2 , что определяет соединяющий стержень M_1M_2 . Поэтому радиус кривошипа должен быть равен O_1M_1 . Центр кривизны для более общей системы четырех стержней O_2 стремится к бесконечности. Третий стержень имеет поступательное движение, определяемое движением точки M_2 .

А 1.3: Пропеллер прикреплен к самолету, совершающему криволинейный полет. Центр пропеллера находится в точке A (см. рис. А 1.3), совершающей движение по криволинейной траектории радиуса R с постоянной скоростью v_A . Определить скорость и ускорение вершины лопасти пропеллера P , если

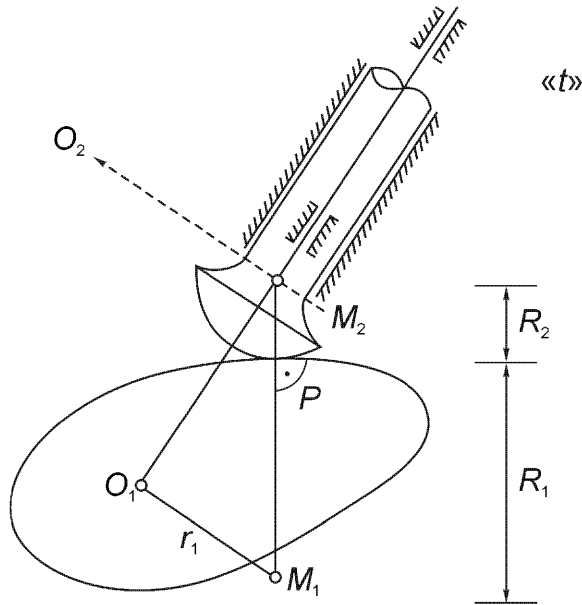


Рис. А 1.2. Кулачковый механизм с эквивалентной системой трех стержней $O_1M_1M_2$ в момент времени t (относительное движение точки P есть мгновенное вращение вокруг точек M_1 и M_2 , соответственно).

$|AP| = l$ и если угловая скорость пропеллера относительно самолета σ предполагается постоянной.

Решение: Угловая скорость ω вращающегося пропеллера как твердого тела есть векторная сумма собственной угловой скорости $\sigma \mathbf{e}_\varphi$ и угловой скорости движения самолета $\mathbf{e}_z d\varphi/dt$: $\omega = \sigma \mathbf{e}_\varphi + (v_A/R) \mathbf{e}_z$, так как $d\varphi/dt = v_A/R$. Применение соотношения (1.4) с $\mathbf{r}_{PA} = l(\sin \alpha \mathbf{e}_r + \cos \alpha \mathbf{e}_z)$ дает

$$\mathbf{v}_P = \sigma l \cos \alpha \mathbf{e}_r + v_A [1 + (l/R) \sin \alpha] \mathbf{e}_\varphi - \sigma l \sin \alpha \mathbf{e}_z.$$

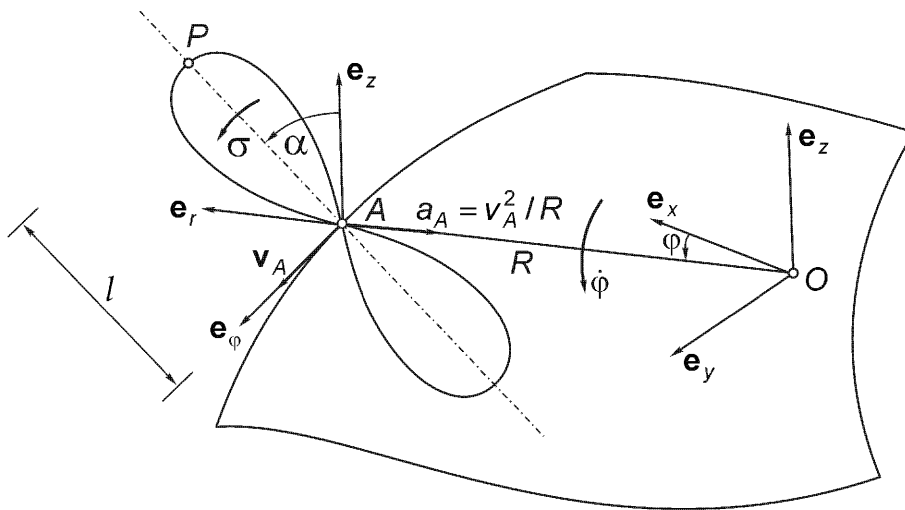


Рис. А 1.3.

Экстремальные значения скорости вершины лопасти v_P имеют место при $\alpha = \pm \pi/2$.

Ускорение можно получить, вычисляя производную по времени и учитывая соотношения

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \frac{v_A}{R} \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varphi = -\frac{v_A}{R} \mathbf{e}_r,$$

тогда будем иметь

$$\mathbf{a}_P = - \left[l \sigma^2 \sin \alpha + \frac{v_A^2}{R} \left(1 + \frac{l}{R} \sin \alpha \right) \right] \mathbf{e}_r + 2 \frac{v_A}{R} \sigma l \cos \alpha \mathbf{e}_\varphi - l \sigma^2 \cos \alpha \mathbf{e}_z.$$

Заметим, что компонента ускорения, содержащая \mathbf{e}_φ , есть ускорение Кориолиса, которое равно нулю только в положениях $\alpha = \pm \pi/2$, когда пропеллер расположен в плоскости движения самолета. См. соотношение (8.62) и пример А 7.1.

А 1.4: Большие вращения. При рассмотрении больших вращений твердого тела три независимых угловых координаты определяют конечную конфигурацию соответственно трем вращательным степеням свободы. Классические углы Эйлера находятся в результате следующих последовательных шагов: вращение на угол ψ вокруг оси $3 = 3^*$ отсчетной системы (1, 2, 3) с взаимно ортогональными осями, затем вращение на угол θ вокруг оси $1^* = 1^0$ и, наконец, вращение на угол φ вокруг оси $3^0 = 3'$, что дает в итоге конечную конфигурацию (1', 2', 3'). Линеаризация при малых углах вращения представляет трудности. Поэтому вводится суперпозиция трех больших вращений с помощью трех углов Кардана α, β, γ . В этом случае первое вращение происходит на угол α вокруг оси $1 = 1^*$, затем вращение на угол β вокруг повернутой оси $2^* = 2^0$, третье вращение происходит вокруг оси $3^0 = 3'$ на угол γ , в результате чего получим конечную конфигурацию (1', 2', 3'). С помощью матриц вращения $\mathbf{D}(\alpha), \mathbf{C}(\beta), \mathbf{B}(\gamma)$ данный вектор последовательно преобразуется согласно произведениям матриц.

Для вращения на угол α преобразование имеет вид $\mathbf{x}^* = \mathbf{D} \mathbf{x}$ (в компонентах $x_j^* = \sum_m a_{jm}(\alpha) x_m$)

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

вращение на угол β , $\mathbf{x}_0 = \mathbf{C} \mathbf{x}^* = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{x}$

$$(x_j = \sum_m a_{jm}(\beta) x_m^* = \sum_m \sum_n a_{jm}(\beta) a_{mn}(\alpha) x_n)$$

$$\mathbf{C}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

вращение на угол γ : $\mathbf{x}' = \mathbf{B} \mathbf{x}_0 = \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x}$

$$(x_k' = \sum_m a_{km} x_m, \quad a_{km} = \sum_n \sum_p a_{kn}(\gamma) a_{np}(\beta) a_{pm}(\alpha)),$$

$$\mathbf{B}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$\mathbf{A}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} (\cos \beta \cos \gamma) & (\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) & (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) \\ (-\cos \beta \sin \gamma) & (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) & (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) \\ (\sin \beta) & (-\sin \alpha \cos \beta) & (\cos \alpha \cos \beta) \end{pmatrix}.$$

В случае вращений на достаточно малые углы матрица \mathbf{A} может быть линеаризована, и тогда она имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad |\alpha| \ll 1, |\beta| \ll 1, |\gamma| \ll 1.$$

Этот результат можно также получить путем сложения малых векторов; см. формулу (1.5).

Обратное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}'$ можно просто получить с помощью транспонированной матрицы \mathbf{A}^T , так как для так называемого ортогонального векторного преобразования имеет место соотношение $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$, т.е. обратная матрица равна транспонированной матрице ($x_k = \sum_m a_{mk} x_m'$), в этом случае длина вектора остается неизменной.

<<Следовательно, суперпозиция последовательных вращений на большие углы может быть выражена как произведение соответствующих матриц вращения.>>

Докажем формулу преобразования для вектора угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\alpha + \boldsymbol{\omega}_\beta + \boldsymbol{\omega}_\gamma,$$

где

$$\boldsymbol{\omega}_\alpha = \dot{\alpha} \mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\omega}_\beta = \dot{\beta} \mathbf{e}_2^0, \quad \boldsymbol{\omega}_\gamma = \dot{\gamma} \mathbf{e}_3^0.$$

Решение: Последовательность вращений, как объяснено выше, дает необходимые преобразования

$$\boldsymbol{\omega}'_\alpha = \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad \boldsymbol{\omega}'_\beta = \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_\beta, \quad \boldsymbol{\omega}'_\gamma = \boldsymbol{\omega}_\gamma, \quad \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}'_\alpha + \boldsymbol{\omega}'_\beta + \boldsymbol{\omega}'_\gamma,$$

причем все векторы выражены в системе отсчета, связанной с телом.

Замечание: Если данные векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} связаны линейным векторным преобразованием $\mathbf{y} = \mathbf{K} \mathbf{x}$, то соотношение после поворота системы координат, описываемого матрицей \mathbf{A} , можно определить как $\mathbf{y}' = \mathbf{K}' \mathbf{x}'$. Используя преобразования $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$ и $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$ и тождество $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{x}$, получим

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{K} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{x} = (\mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{K}' \mathbf{x}'.$$

Следовательно, преобразование подобия между матрицами \mathbf{K} и \mathbf{K}' легко получается в виде

$$\mathbf{K}' = \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{A}^{-1}.$$

При этом детерминант матрицы \mathbf{K} остается неизменным.

А 1.5: Определить градиенты большой деформации и компоненты деформации первоначально прямой и тонкой листовой рессоры после деформации к полуокружности радиуса R без растяжения центрального волокна, см. рис. А 1.5. Толщина рессоры приближенно постоянна.

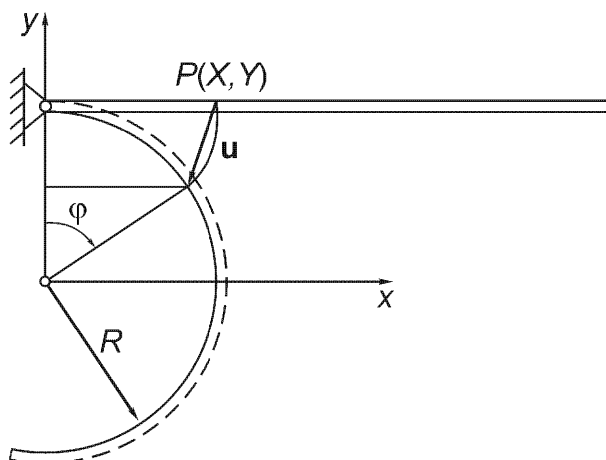


Рис. А 1.5.

Решение: Если мы рассмотрим точку P с материальными координатами (в первоначально прямолинейной конфигурации) $X = R\varphi$, $Y = R + P$, где P есть расстояние от оси, измеренное в поперечном сечении, то в конечном положении ее координаты будут равны $x = Y \sin(X/R)$, $y = Y \cos(X/R)$. Деформация подчиняется геометрическим соотношениям (см. рис. А 1.5) $x^2 + y^2 = (R + P)^2 = Y^2$ и $x/y = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(X/R)$. Градиенты деформации получаются путем вычисления частных производных: $\partial x/\partial X = (1 + P/R)\cos \varphi$, $\partial x/\partial Y = \sin \varphi$, $\partial y/\partial X = -(1 + P/R)\sin \varphi$, $\partial y/\partial Y = \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Градиенты перемещений, $u = x - X$, $v = y - Y$, поэтому не малы по сравнению с единицей; они имеют порядок двух. Деформации, с другой стороны малы: $\varepsilon_{xx} = (1 + P/2R)P/R$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yy} = 0$, что объясняется тем, что $|P|/R \ll 1$.

А 1.6: Найти геометрические соотношения, уравнения (1.20), и их линейризованную форму (1.21) в цилиндрической и сферической системах координат.

Решение: Материальные координаты точки P до деформации: (R, Φ, Z) и (R, Φ, Θ) , координаты этой точки после деформации: (r, φ, z) , (r, φ, θ) , соответственно [см. формулы (1.7) (1.8)]. Перемещение в радиальном направлении обычно обозначается как $u = r - R$; приращения других координат обозначаются χ, w и χ, ψ , соответственно. Квадраты элементов длины до и после деформации с учетом ортогональности координат записываются в следующем виде

$$(dl_0)^2 = dR^2 + (R'd\Phi)^2 + dZ'^2, \quad (dl)^2 = dr^2 + (r'd\varphi)^2 + dz'^2,$$

где

$R' = R$, $dZ' = dZ$, $r' = r$, $dz' = dz$ в цилиндрических координатах;

$R' = R \sin \Theta$, $dZ' = R d\Theta$, $r' = r \sin \theta$, $dz' = r d\theta$ в сферических координатах.

Вводя материальные координаты, получаем компоненты деформации путем сравнения коэффициентов в соотношении

$$\frac{1}{2}(dl^2 - dl_0^2) = \varepsilon_{rr} dR^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi} (R'd\Phi)^2 + \varepsilon_{z'z'} dZ'^2 + 2(\varepsilon_{r\varphi} R'dR d\Phi + \varepsilon_{\varphi z'} R'd\Phi dZ' + \varepsilon_{r z'} dZ' dR),$$

где нижний индекс z' равен z в цилиндрических координатах и он равен θ в сферических координатах. Ниже записаны только линейризованные соотношения, где имеют место формулы $\chi = v/r'$ и $\psi = w/r$,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r'} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \alpha \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta, \quad \varepsilon_{z'z'} = \alpha \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z'}, \\ 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{r'} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r' \frac{\partial(v/r')}{\partial r}, \quad 2\varepsilon_{\varphi z'} = r' \frac{\partial(v/r')}{\partial z'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\ 2\varepsilon_{rz'} &= \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial r} - \alpha \frac{w}{r}.\end{aligned}$$

Здесь $\alpha = 0$ и нижний индекс $z' = z$ подставляются для случая цилиндрических координат, $\alpha = 1$ и нижний индекс $z' = \theta$ подставляются для случая сферических координат. Точечная или аксиальная симметрия значительно упрощает формулы, которые принимают вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = (\varepsilon_{\theta\theta}) = \frac{u}{r}, \quad (\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}).$$

А 1.7. Получить уравнение неразрывности (1.75) для двумерного течения сжимаемой жидкости, рассмотрев баланс скорости течения массы в плоскости. В качестве элементарного контрольного объема выбрать элемент (dx, dy) . См. рис. А 1.7.

Указание: Разложение первого порядка по пространственным координатам достаточно для получения необходимого уравнения, учитывая, что далее производится предельный переход при стремлении элемента к точке. Сначала нужно найти нестационарное изменение массы в элементарном контрольном объеме.

Решение: Суммарная скорость вытекания массы (на единицу длины в направлении оси z) в соответствии с рис. А 1.7 имеет вид (члены, которые взаимно сокращаются, не указаны)

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dy dx + \dots$$

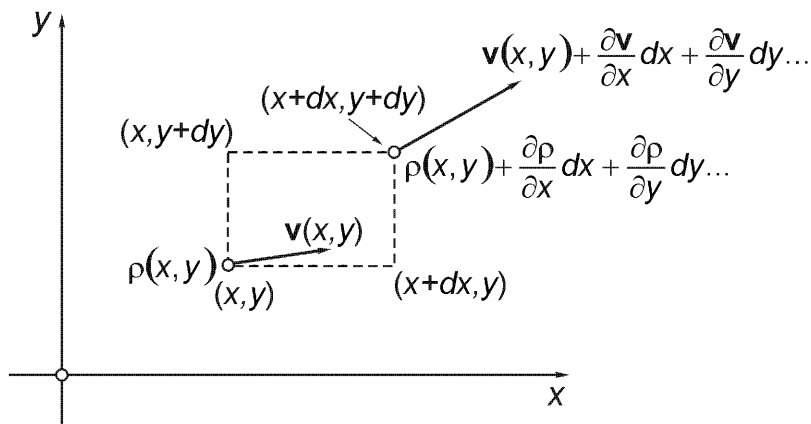


Рис. А 1.7.

При отсутствии какого-либо внешнего источника подвода массы найденная величина равна скорости нестационарного уменьшения массы внутри контрольного объема $-(\partial\rho/\partial t)dxdy$. После деления на $dxdy$ и предельного перехода при $dx \rightarrow 0$, $dy \rightarrow 0$ получим локальное уравнение непрерывности в переменных Эйлера:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0.$$

А 1.8: Определить относительную деформацию ε_x волокна, ориентированного параллельно оси растягиваемого стержня постоянного поперечного сечения. Начальная длина элемента равна $dl_0 = dX$. После деформации волокно остается параллельным оси стержня, конечная длина элемента равна $dl = dx$. Вычислить среднюю деформацию, зная измеренное удлинение Δl контрольной длины l_0 . Наконец, найти соотношение между нормальной компонентой тензора деформации ε_{xx} и удельным удлинением ε_x с учетом формулы $(1/2)(dl^2 - dl_0^2) = \varepsilon_{xx} dX^2$.

Решение: Два соседних поперечных сечения, находящиеся на расстоянии dX друг от друга, при деформации имеют различные перемещения, равные $u(X)$ и $u(X + dX) = u(X) + du$, соответственно. Волокно между поперечными сечениями с первоначальной длиной $dl_0 = dX$ после деформации имеет длину $dl = dX + du$. Удельное удлинение, или относительное удлинение волокна, имеет вид

$$\varepsilon_x(X) = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \frac{dX + du - dX}{dX} = \frac{du}{dX}.$$

Удлинение конечной контрольной длины l_0 образца определяется путем интегрирования

$$\Delta l = \int_0^{l_0} \varepsilon_x dX = \bar{\varepsilon}_x l_0,$$

среднее удельное удлинение имеет вид

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Сравнивая коэффициенты в выражении

$$\begin{aligned} (1/2)(dl^2 - dl_0^2) &= (1/2)(2 du dX + du^2) = [(du/dX) + (1/2)(du/dX)^2] dX^2 = \\ &= \varepsilon_{xx} dX^2, \end{aligned}$$

получим соотношение между деформациями

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x + (1/2)\varepsilon_x^2.$$

В случае, когда $|\varepsilon_x| \ll 1$, линейризация дает $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x$.

А 1.9: С помощью трех датчиков деформации (или розетки деформации) можно измерить три малых нормальных деформации ε_x , ε_y , ε_ξ (ось ξ наклонена под углом 45°) в точке, где нет поверхностных сил (с локальной нормалью z). Построить круг деформаций Мора для этой плоскости и найти главные деформации $\varepsilon_{1,2}$, а также направления главных осей деформации в плоскости (x, y) при предположении $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_{zz}$.

Решение: Центр круга Мора находится в точке $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$ на оси абсцисс. Так как ось ξ находится в плоскости (x, y) , применим формулу (1.59). Полагая $2\alpha = \pi/2$, находим малый угол сдвиговой деформации,

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_\xi - (\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Трехмерная задача сводится к плоской для плоскости (x, y) , так как компонента ε_{zz} является, по предположению, главной компонентой деформации. Формула (1.62) дает главные деформации в плоскости (x, y)

$$\varepsilon_{1,2} = (1/2)(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm (1/2)[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2]^{1/2}$$

и радиус круга Мора $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|/2$. Направления главных осей деформации определяются формулой (1.61). Графическое построение в плоскости $(\varepsilon_x, \varepsilon_{xy})$ дает быструю проверку численных результатов. Экстремальное значение сдвиговой деформации в плоскости (x, y) равно $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|/2$.

А 1.10: Поток воды $0,3 \text{ м}^3/\text{с}$ втекает при стационарных условиях в прямоугольный трубопровод. Две грани этого трубопровода пористые. На верхней грани вода втекает со скоростью потока, подчиняющимся параболическому распределению и с максимальным потоком $0,3 \text{ м}^3/\text{с}$ на единицу длины, см. рис. А 1.10; на передней грани вода вытекает со скоростью потока, подчиняющимся линей-

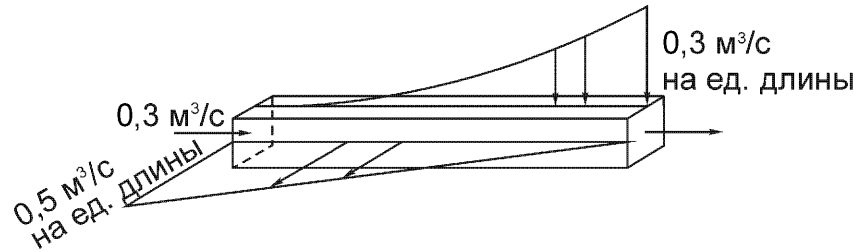


Рис. А 1.10.

ному распределению и с максимальным потоком $0,5 \text{ м}^3/\text{с}$ на единицу длины, см. опять рис. А 1.10. (а) Какова средняя скорость воды в конце трубопровода длиной $l = 0,3 \text{ м}$ и с поперечным сечением $A = 0,01 \text{ м}^2$? (б) В каком поперечном сечении средняя скорость имеет максимум?

Решение: Используем формулу (1.84) с $w = 0$ для составления уравнения

$$Av(x) + \int_0^x 0,5(1 - \xi/l) d\xi - \int_0^x 0,3(\xi/l)^2 d\xi - 0,3 = 0,$$

откуда следует решение задачи

(а) $x = l$, $v(0,3) = 25,5 \text{ м/с}$,

(б) при $x = 0$ средняя скорость имеет максимум, так как минимум находится в точке $x = 0,211 \text{ м}$.

2 Статика, системы сил, гидростатика

В кинематике изучается геометрия движения без рассмотрения причин деформации или ускорения. Из опыта известно, что причиной любого изменения движения является сила. Поэтому понятие силы было исторически введено первым, а физические определения силы с помощью закона Ньютона или через понятия мощности или работы (энергии) были введены позже. Другое определение силы было дано как поток в потенциальном поле (градиент), что может быть использовано также в немеханических полях, вводимых в термодинамике, химии и электрических науках как источник движения. В этой главе изучается геометрия сил, например, рассматривая приведение системы сил и состояние равновесия; в результате обнаруживается наличие системы из двух сил (пары сил), имеющей момент. Теория и приложения, представленные в этой главе, являются основой для статики и поэтому для изучения равновесия системы уравновешенных сил, действующих на тело, находящееся в покое.

2.1. Силы, объемные силы, поверхностные силы, напряжения, равновесие

В начале изучения сил полезно вспомнить опыты с гравитацией, т.е. с взаимным притяжением между всеми массами и частицами материи во вселенной. В формуле (3.23) записан закон Ньютона для притяжения двух масс. Для наших целей достаточно, однако, рассмотреть гравитацию массы в гравитационном поле Земли, т.е. силу, называемую весом, $G = mg$ ($g = 9,80665 \text{ м/с}^2$ есть точное среднее значение ускорения свободного падения у «поверхности» Земли, техническое среднее равно $g = 9,81 \text{ м/с}^2$; иногда используется грубое приближение $g = 10 \text{ м/с}^2$). Так как g меняется от максимума $9,832 \text{ м/с}^2$ у полюсов до минимума $9,780 \text{ м/с}^2$ на экваторе, то вес массы изменяется в зависимости от расположения ее на Земле. Масса m есть внутреннее свойство тела (в пределах ньютоновской механики), а вес G таковым не является. Сила тяжести есть причина движения вниз при свободном падении и вызывает видимые деформации гибких структур, например, при нагружении собственным весом. Ее величина измеряется в производных единицах системы СИ, а именно в Ньютонах, $1 \text{ N} = 1 \text{ кг} \times 1 \text{ м/с}^2$ (один килограмм массы соответствует 2,2046 фунтов, один метр равен 39,3701 дюймов); направление веса вертикально.

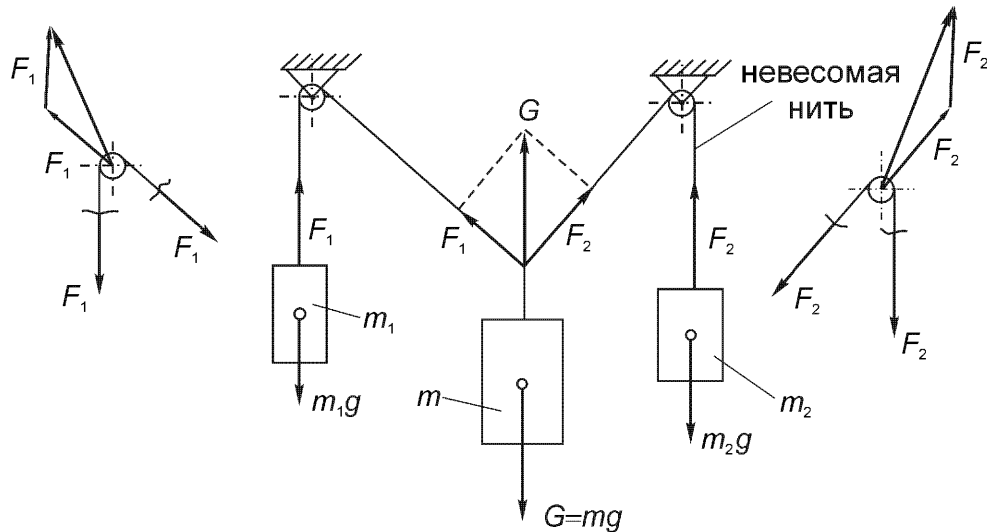


Рис. 2.1. Определение невертикальных сил через действие силы тяжести.

Силы в других направлениях просто получаются с помощью поддержки масс тросами. Для системы, изображенной на рис. 2.1, положение равновесия создается в результате действия трех сил: собственного веса G и двух сил F_1 и F_2 от растяжения тросов слева и справа от массы.

Значения сил F_1 и F_2 могут быть найдены, обернув трос на барабанные опоры и прикрепляя соответствующие массы к концам вертикально ориентированных прямых ветвей троса. Согласно простому эксперименту, изображенному на рис. 2.1, равновесие может быть достигнуто, если силы от растяжения тросов сложить согласно правилу треугольника или параллелограмма как векторы и получить результирующую силу $-G$, что соответствует эквивалентной поддержке массы одним вертикальным растянутым тросом.

Поэтому можно дать простое определение. «Сила есть вектор, который можно складывать с силой тяжести согласно правилу сложения двух векторов.» Вектор одной силы имеет три свойства: абсолютную величину, измеренную в Ньютонах, направление в пространстве и точку приложения в теле.

На примере, изображенном на рис. 2.1, эти сосредоточенные силы определены как результирующие действия распределенных сил, например, вес массы m есть сумма малых гравитационных сил, действующих на элементы массы, $dm = \rho dV$. Если мы предположим, что все силы $g dm$ параллельны (т.е. считая Землю локально «плоской»), то интегрирование по объему дает

$$G = \int_m g dm = \int_V \rho g dV. \quad (2.1)$$

Здесь ρ есть массовая плотность, $[\rho]$ есть кг/м^3 . Поэтому силы тяжести распределены по объему V тела с плотностью $\rho g = \gamma$ (вес на единицу объема, или удельный вес) и действуют на все материальные точки в вертикальном направ-

лении вниз. Такие объемные (или массовые) силы пространственно распределены и определяются, в общем, с помощью плотности силы на единицу объема $\mathbf{k}(x, y, z, t)$, образуя тем самым векторное поле. Размерность этой величины $[k] = \text{Н/м}^3$. Точками приложения являются материальные точки.

Если мы рассмотрим поперечное сечение троса, растягиваемого силой F в аксиальном направлении и параллельную систему малых сил σdA , действующих в каждом элементе поперечного сечения dA в том же направлении, то получим в результате

$$F = \int_A \sigma dA, \quad (2.2)$$

где σ есть плотность силы на единицу площади, (нормальное) напряжение, с точкой приложения, совпадающей с материальной точкой в поперечном сечении, $[\sigma] = \text{Н/м}^2$. Из-за ее важности полученная единица в системе СИ имеет специальное название Паскаль ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$). Силы на единицу площади, распределенные по поверхности, в общем, представляются векторами напряжений, которые не перпендикулярны площади элемента. Следовательно, вектор напряжений имеет четыре характерных свойства: величину, направление, точку приложения (подобно силе) и, вдобавок, пространственную ориентацию элемента площади. Поверхностная сила \mathbf{t}_n или вектор напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}_n$ имеют нижний индекс n нормали \mathbf{e}_n элемента площади и математически определяются как предел

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S_n} = \frac{d\mathbf{F}}{dS_n}, \quad (2.3)$$

$\Delta \mathbf{F}$ означает результирующую силу, действующую на искривленный, в общем, элемент площади ΔS с нормалью \mathbf{e}_n , где затем осуществляется предельный переход.

2.1.1. Напряжения в растягиваемом стержне: круг Мора

Растягиваемый стержень с постоянным поперечным сечением площади A растягивается силой F в аксиальном направлении x . Имеет место формула $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_x$, и при предположении однородного распределения напряжений по поперечному сечению одноосное напряженное состояние определяется формулой

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \frac{F}{A} \mathbf{e}_x = \sigma_{xx} \mathbf{e}_x. \quad (2.4)$$

Здесь A есть площадь деформированного плоского поперечного сечения с нормалью (после деформации) $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_x$; $\sigma_{xx} = F/A$ есть нормальное напряжение (нормальное к элементу площади). Рассмотрение плоского сечения с нормалью $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \sin \alpha$ и площадью $A' = A/\cos \alpha$ дает вектор напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \frac{F}{A'} \mathbf{e}_x = \frac{F \cos \alpha}{A} \mathbf{e}_x = \sigma_{xx} \cos \alpha \mathbf{e}_x. \quad (2.5)$$

Этот вектор имеет то же направление как $\boldsymbol{\sigma}_x$ и нормальная сила $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_x$, но его величина изменяется и равна теперь $\sigma_{xx} \cos \alpha$, направление его теперь наклонено к площади A' . Вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}_n$ может быть разложен на нормальную компоненту напряжений, ортогональную к A' , и на касательную компоненту напряжений в направлении \mathbf{e}_m в A' ,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \cos \alpha \mathbf{e}_n + \sin \alpha \mathbf{e}_m, \\ \boldsymbol{\sigma}_n &= \sigma_{xx} \cos^2 \alpha \mathbf{e}_n + \sigma_{xx} \cos \alpha \sin \alpha \mathbf{e}_m = \sigma_{nn} \mathbf{e}_n + \sigma_{nm} \mathbf{e}_m. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь нормальное напряжение по-прежнему однородно распределено по A' , но с интенсивностью $\sigma_{nn} = (\sigma_{xx}/2)(1 + \cos 2\alpha)$, и касательное напряжение равно $\sigma_{nm} = (\sigma_{xx}/2)\sin 2\alpha$. В плоскости напряжений $(\sigma_{nn}, \sigma_{nm})$ можно построить круг напряжений Мора. Центр его находится в точке с абсциссой $\sigma_{xx}/2$, и он проходит через начало отсчета (см. рис. 2.2). Для более общего случая см. раздел 2.1.2 для плоского напряженного состояния.

В итоге, максимальное нормальное напряжение $\sigma_{xx} = F/A$ действует в нормальном поперечном сечении, в котором нет сдвиговых напряжений. В лю-

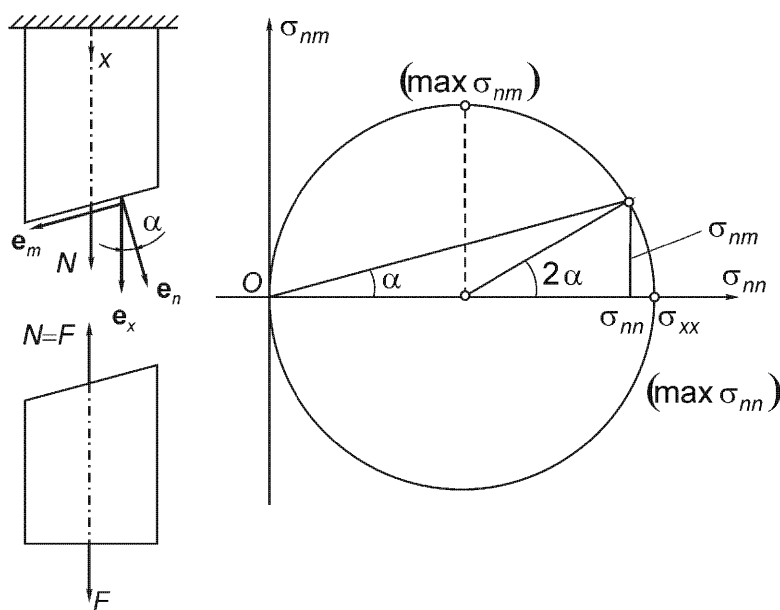


Рис. 2.2. Растягиваемый стержень и круг Мора для одноосного напряженного состояния.

бом другом наклонном сечении имеются нормальные и касательные напряжения. Максимальное сдвиговое напряжение, равное $\sigma_{xx}/2$, действует в сечении, наклоненном к оси стержня под углом $\alpha = 45^\circ$. Полученные результаты могут быть применены (с осторожностью, см. раздел 9.1.4) к стержню при сжимающей нагрузке $F < 0$. Тогда круг напряжений будет расположен слева от начала отсчета. В материалах, которые чувствительны к растяжению, разрушение может наступить в нормальном поперечном сечении. В материалах, чувствительных к сдвигу, разрушение может наступить в сечениях, наклоненных к оси стержня.

Вследствие зависимости вектора напряжений σ_n от нормали e_n суперпозиция напряжений путем сложения их векторов возможна только в случае, когда векторы напряжений приложены в одной точке и действуют на одну и ту же площадку. Поэтому компоненты напряжений в данной точке можно складывать, если первые нижние индексы у них одинаковые. Векторы напряжений, приложенные в одной точке, складываются по правилам обычного сложения векторов.

Принцип виртуальных сечений применялся ранее при определении напряжений в данном сечении и при обсуждении напряжений. В соответствии с этим принципом необходимо при исследовании внутренних сил виртуально разрезать тело, находящееся в движении, на части, сохраняя время неизменным. При рассмотрении континуума части могут быть выбраны бесконечно малыми; предполагается, что существуют пределы при $\Delta V \rightarrow 0$ и $\Delta S \rightarrow 0$. Также считается, что виртуальные части могут быть отделены друг от друга. Для со-

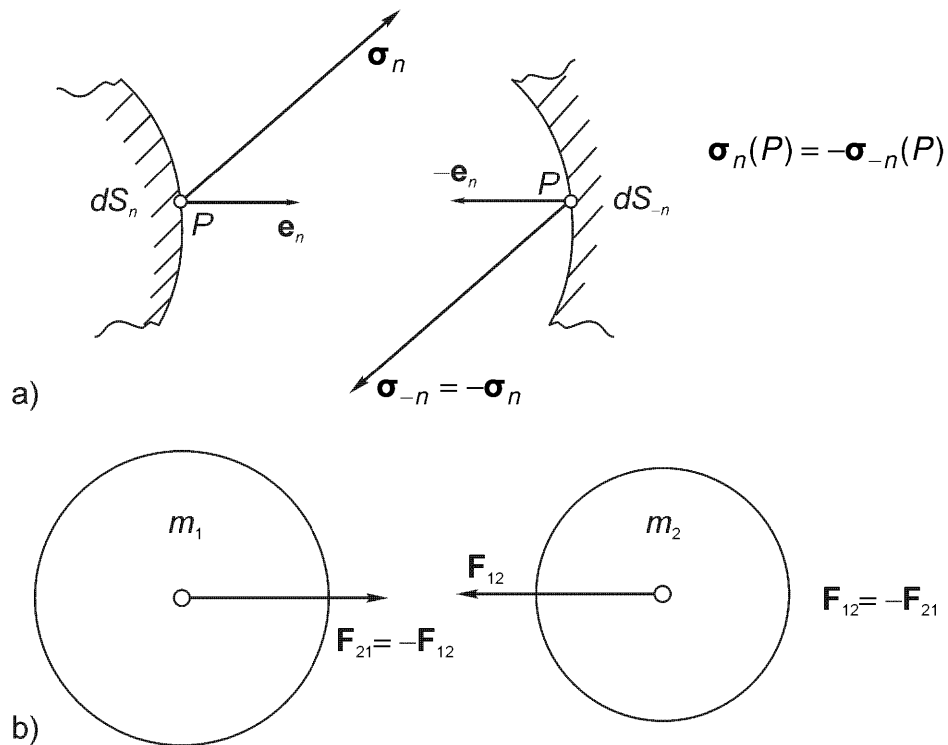


Рис. 2.3. (а) Закон равенства действия и противодействия для векторов напряжений. (б) Третий закон Ньютона для сил притяжения.

хранения движения и деформации неизменными поверхностные силы должны быть приложены как внутренние силы, действующие в соответствующих точках приложения, эти силы являются векторами напряжений в данных элементах поверхности. Легко заметить, что векторы напряжений в соответствующих элементах поверхности должны быть равны по величине и противоположны по направлению (см. рис. 2.3).

Этот закон равенства действия и противодействия в противоположных точках соответствующих материальных поверхностей носит имя Эйлера и Коши. Закон может быть обобщен на некоторые силовые поля, в частности, это верно (даже с учетом дальнего действия) для сил притяжения между двумя массами, т.е. на силы гравитации. Рис. 2.3 (b) иллюстрирует равенство сил притяжения согласно универсальному третьему закону Ньютона, см. формулу (3.23).

По аналогии с задачей о равновесии при наличии сил натяжения тросов (см. рис. 2.1) рассматривается равновесие тела, находящегося на наклонной плоскости. Рис. 2.4 показывает равновесие сил: вес G и результирующая сила F сложного и неизвестного распределения напряжений, возникающих в нижележащем клине на материальной поверхности контакта.

В равновесии имеет место соотношение $F - G = 0$, и поэтому эти силы действуют вдоль одной прямой. Проекция силы F на нормаль к поверхности дает равенство $N = G \cos \alpha$, и тангенциальная компонента реакции опоры есть $T = G \sin \alpha$.

Эксперимент показывает, что при увеличении угла α существует предел сдвиговой компоненты. Максимальное значение угла α , угол статического трения α_0 , ограничивает область равновесия. Условие на статическое трение мо-

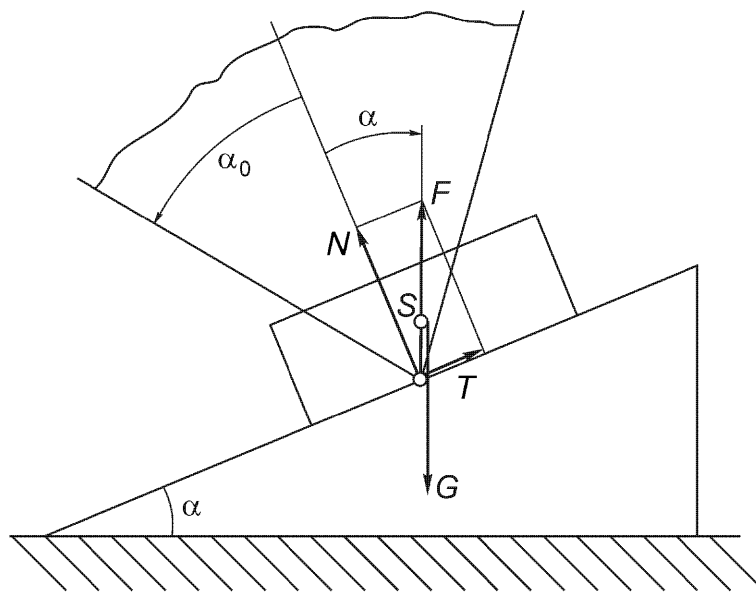


Рис. 2.4. Твердое тело в состоянии покоя в контакте с наклонной плоскостью. Показан конус статического трения.

жет быть выражено неравенством $\alpha < \alpha_0$ или $T < T_0 = G \sin \alpha_0 = N \operatorname{tg} \alpha_0$. Коэффициент статического трения $\mu_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$ зависит от гладкости и чистоты контактирующих поверхностей и от материалов в контакте. Численные значения при абсолютно сухом контакте определяются экспериментально, часто это делается путем абразивного тестирования (эта область науки называется трибологией). Данные обычно представляются в форме таблиц. По соображениям безопасности μ_0 обычно полагается равным меньшей величине коэффициента трения при контакте скольжением [в этом случае закон сухого трения Кулона $T = T_R$, $T_R = \mu N$ справедлив при постоянном коэффициенте трения для ограниченного диапазона «малых» относительных скоростей; см. раздел 7.4.8(§)]. Если мы предположим, что μ известно, условие статического трения легко проверяется, нарисовав конус с углом при вершине, равным $2\alpha_0$, с осью в направлении нормали N и вершиной в точке приложения силы F в зоне контакта. Равновесие имеет место, если сила F проходит внутри конуса статического трения. Некоторые средние значения коэффициента μ таковы: для стали 0,1; для стали при контакте с бронзой 0,16; для металла или дерева при контакте с деревом 0,5 и т.д.

2.1.2. Плоское напряженное состояние: состояние: круг Мора

Многие интересные результаты о напряжениях и принципе виртуальных сечений можно получить, рассматривая плоское напряженное состояние. Такое напряженное состояние встречается в точках поверхности, свободных от поверхностных усилий, и приближенно в тонких пластинах при нагружении в плоскости. На рис. 2.5 показана диаграмма равновесия бесконечно малого элемента пластины при действии сил в плоскости пластины на единицу ее толщины.

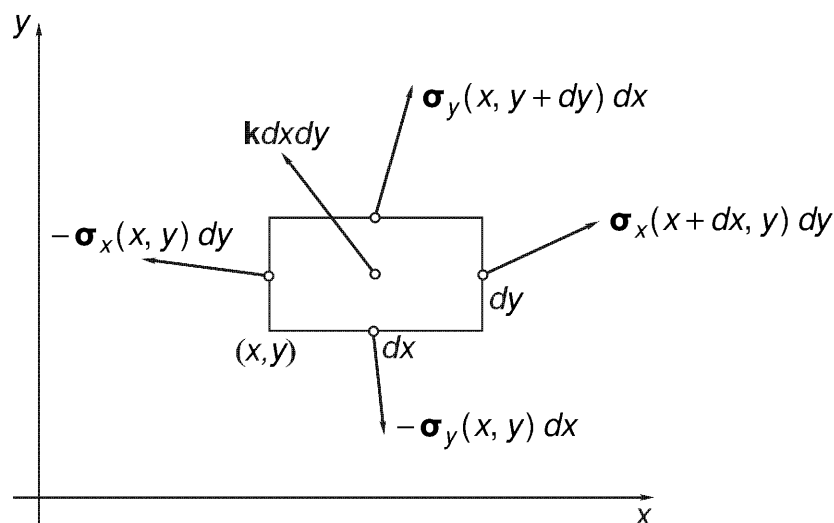


Рис. 2.5. Плоское напряженное состояние. Силы в плоскости пластины на единицу ее толщины, действующие на элемент пластины.

Предполагается, что $\sigma_z = 0$. Важно заметить, что нижние индексы у векторов напряжений, действующих на элементы поверхности, показывают направление внешней нормали к поверхности вдоль соответствующей оси координат. Например, элемент с координатой $x + dx$ и внешней нормалью \mathbf{e}_x имеет поверхностное усилие σ_x , аналогичный элемент с координатой x и внешней нормалью $-\mathbf{e}_x$ имеет вектор напряжений $-\sigma_x$. Здесь учтено, что при $dx \rightarrow 0$ имеет место закон равенства действия и противодействия. Все силы могут быть приведены к общей точке приложения (x, y) (см. рис. 2.10) и их векторы могут быть сложены, что позволяет найти их равнодействующую $d\mathbf{R}$

$$[\sigma_x(x + dx, y) - \sigma_x(x, y)] dy + [\sigma_y(x, y + dy) - \sigma_y(x, y)] dx + \mathbf{k} dx dy = d\mathbf{R}.$$

Достаточно использовать линейную аппроксимацию приращений напряжений, а также учесть соотношение $dA = dx dy$, чтобы получить формулу

$$\left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \mathbf{k} \right] dA = d\mathbf{R}.$$

Разделив далее на площадь элемента dA и перейдя к пределу при $dx, dy \rightarrow 0$, получим точное выражение для плотности силы \mathbf{f}

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \mathbf{k} = \mathbf{f}, \quad (2.7)$$

так как члены более высокого порядка при разложении приращений напряжений в ряд Тейлора стремятся к нулю. Необходимое условие равновесия в данной точке имеет вид $\mathbf{f} = 0$. Если материальная точка (x, y) находится в покое, векторное условие равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \mathbf{k} = 0. \quad (2.8)$$

Это эквивалентно двум локальным дифференциальным уравнениям равновесия. Подставляя вектор напряжений в виде

$$\sigma_i = \sigma_{ix} \mathbf{e}_x + \sigma_{iy} \mathbf{e}_y, \quad i = x, y, \quad (2.9)$$

получим уравнения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + k_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + k_y = 0. \quad (2.10)$$

Здесь \mathbf{k} приложенная внешняя объемная сила. Ниже будет показано, что равенство $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$ следует из дополнительного рассмотрения, которое становится необходимым ввиду того, что силы приложены в различных точках. Если

объемные силы отсутствуют или если объемная сила равна константе $\mathbf{k} = \mathbf{c}$, то уравнения в частных производных в (2.10) удовлетворяются тождественно, вводя функцию Эри $F(x, y)$ и полагая

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - y c_x - x c_y. \quad (2.11)$$

Вместо определения плоского напряженного состояния с помощью трех компонент напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$, достаточно найти скалярную функцию $F(x, y)$ и затем применить формулы (2.11). Плоское напряженное состояние статически определимо, если функция напряжений может быть получена с помощью граничных условий пластины. О пластинах, нагруженных в плоскости, см. раздел 6.5.

Плоское напряженное состояние в точке (x, y) определяется тензором напряжений 2×2 или двумя векторами напряжений $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y$. Поэтому должно быть возможным вычислить вектор напряжений, действующий на повернутый элемент поверхности с нормалью \mathbf{e}_n , образующей угол α с осью x . В соответствии с рис. 2.6 рассматривается прямоугольный треугольник бесконечно малых размеров dx, dy, ds , нагруженный поверхностными и объемными силами.

Уравнение равновесия имеет вид

$$d\mathbf{R} = (1/2)\mathbf{k} dx dy - \boldsymbol{\sigma}_x(x, y) dy - \boldsymbol{\sigma}_y(x, y) dx + \boldsymbol{\sigma}_n ds = \mathbf{0}.$$

Деля на ds и затем переходя к пределу при $dx, dy \rightarrow 0$, исключаем внешнюю объемную силу \mathbf{k} и получаем общее соотношение Коши, где учтено, что $dx/ds = \sin \alpha$, $dy/ds = \cos \alpha$,

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_x \cos \alpha + \boldsymbol{\sigma}_y \sin \alpha = n_x \boldsymbol{\sigma}_x + n_y \boldsymbol{\sigma}_y. \quad (2.12)$$

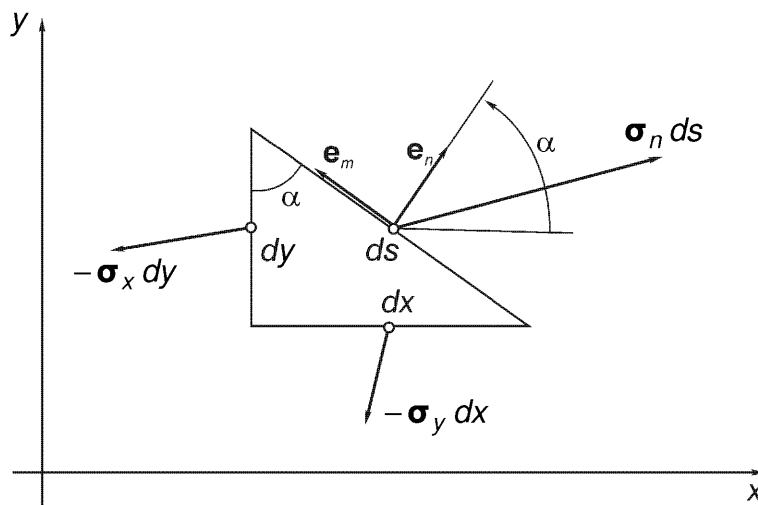


Рис. 2.6. Плоское напряженное состояние. Поверхностные силы на единицу толщины поверхности элемента треугольной пластины.

Нормальное напряжение направлено в направлении $\mathbf{e}_n = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y$ и равно

$$\begin{aligned}\sigma_n \cdot \mathbf{e}_n &= \sigma_{nn} = \sigma_{xx} n_x^2 + \sigma_{yy} n_y^2 + 2\sigma_{xy} n_x n_y = \\ &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Компонента касательного напряжения в перпендикулярном направлении $\mathbf{e}_m = m_x \mathbf{e}_x + m_y \mathbf{e}_y$ выражается формулой

$$\begin{aligned}\sigma_{nm} &= \sigma_{xx} n_x m_x + \sigma_{yy} n_y m_y + \sigma_{xy} (n_x m_y + n_y m_x) = \\ &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (2.14)$$

В формуле (2.14) коэффициенты равны

$$n_x = \cos \alpha, \quad n_y = \sin \alpha, \quad m_x = -\sin \alpha, \quad m_y = \cos \alpha.$$

Располагая компоненты напряжений в виде матрицы 2×2

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

а также учитывая правила преобразования элементов матрицы при повороте осей координат, убеждаемся, что тензор плоских напряжений, действительно, имеет свойства тензора. По аналогии с тензором плоской деформации главные оси тензора напряжений определяются по формуле, аналогичной (1.61), и главные нормальные напряжения имеют вид [см. формулу (1.62)]

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right]^{1/2}, \quad (2.16)$$

которые действуют на площадки, где отсутствуют касательные напряжения $\sigma_{12} = 0$, и ориентации которых определяются формулами

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2. \quad (2.17)$$

Круг напряжений Мора вычерчивается в плоскости $[(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}), \sigma_{xy}]$. Центр его находится в точке на оси абсцисс с координатой $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$, и он проходит через точки $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy})$ и $(\sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ в соответствии с рис. 2.7 (см. также рис. 1.13).

Направление оси 1 главных напряжений определяется углом, отложенным от оси x . Экстремальное значение касательного напряжения имеется в

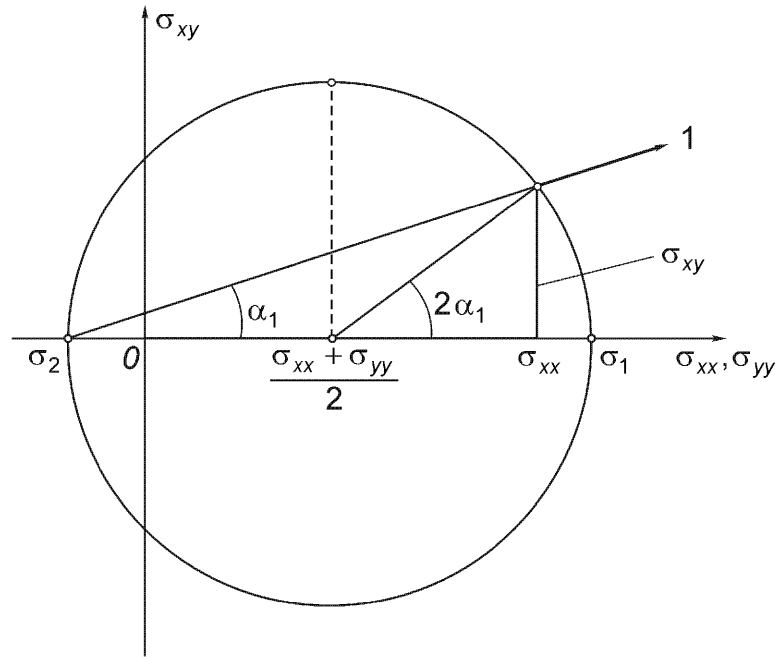


Рис. 2.7. Круг напряжений Мора для плоского напряженного состояния.

элементе, повернутом на угол 45° , и оно равно $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Если оба главных нормальных напряжения растягивающие, $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$, то наибольшее сдвиговое напряжение равно $\sigma_1/2$ и возникает в элементе вне плоскости. См. анализ трехмерного напряженного состояния, формула (2.31) при $k = 2$, $\sigma_3 = 0$.

2.1.3. Трехмерное напряженное состояние

Теперь будет сделано обобщение к трехмерному напряженному состоянию. Плотность силы может быть получена рассмотрением малого объемного элемента dx, dy, dz , находящегося в равновесии. Положительные поверхностные усилия $\sigma_x(x + dx, y, z)$, $\sigma_y(x, y + dy, z)$ и $\sigma_z(x, y, z + dz)$ приложены к (положительным) поверхностным элементам с нормальными векторами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, соответственно. Противоположные грани имеют отрицательные векторы напряжений, принадлежащие общей точке (x, y, z) . Сложение векторов (\mathbf{k} есть данная объемная сила на единицу объема) приводит к результирующей силе

$$\mathbf{dF} = \mathbf{k} dx dy dz + [\sigma_x(x + dx, y, z) - \sigma_x(x, y, z)] dy dz + [\sigma_y(x, y + dy, z) - \sigma_y(x, y, z)] dz dx + [\sigma_z(x, y, z + dz) - \sigma_z(x, y, z)] dx dy.$$

Разность усилий в соседних точках достаточно мала, поэтому возможно использовать линейную аппроксимацию, и после деления на величину элемента $dV = dx dy dz$ и перехода к пределу при $dx, dy, dz \rightarrow 0$ получим точное выражение для плотности силы в точке (x, y, z)

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \mathbf{k} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \quad (2.18)$$

Необходимое условие равновесия в векторной форме имеет вид $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, в индексной форме получим три условия равновесия при трехмерном напряженном состоянии

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + k_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.19)$$

В разделе 2.2.2 показана симметрия тензора напряжений, $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, что верно в общем случае в любой точке континуума.

Трехмерное напряженное состояние в материальной точке (x, y, z) определяется тремя векторами напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Т.е. вектор напряжений σ_n на элементе поверхности dA с ориентацией \mathbf{e}_n определяется этими тремя векторами, что можно показать, рассматривая равновесие элемента согласно рис. 2.8.

Векторная сумма поверхностных усилий и объемной силы $\mathbf{k} dA dh/3$ должна быть равна нулю

$$d\mathbf{F} = \mathbf{k} dA dh/3 - \sigma_x dA n_x - \sigma_y dA n_y - \sigma_z dA n_z + \sigma_n dA = \mathbf{0}.$$

Деля на dA , затем переходя к пределу при $dA \rightarrow 0$ и $dh \rightarrow 0$, получим важную формулу для вектора напряжений (соотношение Коши), которое относится к элементу поверхности произвольной ориентации с нормалью \mathbf{e}_n

$$\sigma_n = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z. \quad (2.20)$$

В тензорных обозначениях

$$\sigma_{ni} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

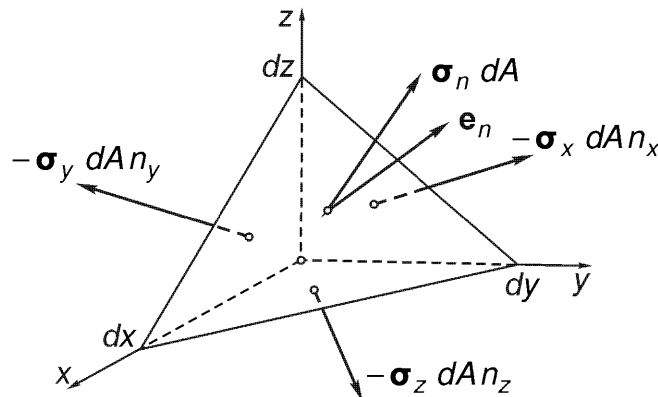


Рис. 2.8. Трехмерное напряженное состояние. Диаграмма равновесия тетраэдрального элемента.

где n_j означает направляющие косинусы вектора единичной нормали в декартовой системе координат (x, y, z) . Поэтому нормальная компонента напряжений равна скалярному произведению $(\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{e}_n) = \sigma_{nn}$, $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$,

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx} n_x^2 + \sigma_{yy} n_y^2 + \sigma_{zz} n_z^2 + 2(\sigma_{xy} n_x n_y + \sigma_{yz} n_y n_z + \sigma_{zx} n_z n_x). \quad (2.22)$$

Касательная компонента напряжений в тангенциальном направлении $\mathbf{e}_m \perp \mathbf{e}_n$, где $\mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{e}_n \times \boldsymbol{\sigma}_n) = 0$, равна проекции, определяемой по формуле $(\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{e}_m) = \sigma_{nm}$,

$$\begin{aligned} \sigma_{nm} = & \sigma_{xx} n_x m_x + \sigma_{yy} n_y m_y + \sigma_{zz} n_z m_z + \sigma_{xy} (n_x m_y + n_y m_x) + \\ & + \sigma_{yz} (n_y m_z + n_z m_y) + \sigma_{zx} (n_z m_x + n_x m_z). \end{aligned} \quad (2.23a)$$

Этот вектор обычно определяется с помощью двойного векторного произведения.

$$\sigma_{nm} \mathbf{e}_m = \boldsymbol{\sigma}_n - \sigma_{nn} \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{\sigma}_n \times \mathbf{e}_n). \quad (2.23b)$$

Отметим, что полученные формулы являются формулами преобразования компонент тензора при повороте осей координат. Тензор напряжений Коши является симметричным, см. раздел 2.2.2, и имеет вид

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Тензор определяет напряженное состояние в точке (x, y, z) [вектор поверхностного усилия определяется линейным векторным преобразованием $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_n$ (см. формулу (2.20))]. Данному тензору соответствуют три взаимно ортогональных главных оси напряжений. Отсюда можно интерпретировать математический термин «тензор», так как его свойства исторически были найдены при рассмотрении напряженного состояния. Соответствующие поверхностные элементы главных нормальных напряжений свободны от касательных напряжений

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Эти главные нормальные напряжения (согласно матрице собственных значений) являются корнями характеристического кубического уравнения

$$-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0, \quad (2.26)$$

где

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (2.27)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \quad (2.28)$$

$$I_3 = \det\{\sigma_{ij}\} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (2.29)$$

Указанные коэффициенты определяют собственные значения тензора напряжений. Они остаются неизменными при любом повороте системы координат, и поэтому эти коэффициенты называются инвариантами тензора напряжений. Первый и второй инварианты имеют важное значение при рассмотрении определяющих соотношений изотропного материала.

Направления осей главных напряжений являются решениями линейной системы однородных уравнений при подстановке туда последовательно главных нормальных напряжений σ_k

$$\sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij} - \sigma_k \delta_{ij}) n_j^{(k)} = 0, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, (3) \\ k = 1, 2, (3) \end{matrix}. \quad (2.30)$$

Здесь нужно учитывать дополнительное условие $\sum_j n_j^2 = 1$; δ_{ij} – символ Кронекера.

Элементы поверхности, где касательные напряжения достигают экстремальных значений τ_1, τ_2, τ_3 , имеют векторы нормали, повернутые на угол 45° относительно осей главных напряжений,

$$\tau_k = (1/2) |\sigma_i - \sigma_j|, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad k \neq i \neq j. \quad (2.31)$$

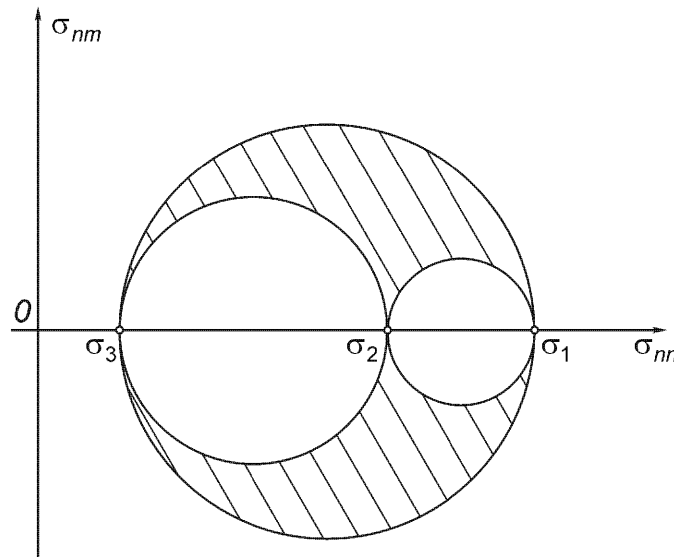


Рис. 2.9. Круги Мора при трехмерном напряженном состоянии.

Нормальные компоненты напряжений σ_k на этих элементах выражаются через главные нормальные напряжения с помощью формул

$$\sigma_k = (1/2)(\sigma_i + \sigma_j), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad k \neq i \neq j \neq k. \quad (2.32)$$

В общем случае с трехмерным напряженным состоянием связаны три круга Мора. Точки возможных пар компонент напряжений $(\sigma_{nn}, \sigma_{nm})$ при данном напряженном состоянии находятся внутри заштрихованной площади на рис. 2.9.

2.1.4. Среднее нормальное напряжение и девиатор напряжений

Тензор напряжений $\Sigma = (\sigma_{ij})$ можно разложить на сферический тензор и девиатор напряжений. Компоненты девиатора напряжений показывают отклонение от гидростатического напряженного состояния, выражаемого как среднее нормальных напряжений в точке материала (x, y, z) . Последнее обозначается как p и равно

$$p = I_1/3 = (1/3)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (2.33)$$

Тогда

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (2.34)$$

Поэтому сумма девиаторных нормальных напряжений равна нулю

$$\sum_{i=1}^3 s_{ii} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} - 3p \equiv 0.$$

Главные значения нормальных напряжений девиатора являются корнями редуцированного кубического уравнения

$$s^3 - J_2 s - J_3 = 0, \quad (2.35)$$

с коэффициентами, равными инвариантам девиатора J_2 и J_3 при повороте осей координат

$$J_2 = 3p^2 - I_2 = (1/2) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 s_{ij}^2 = (3/2) \tau_0^2, \quad (2.36)$$

$$J_3 = 2p^3 - pI_2 + I_3 = (1/3) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 s_{ij} s_{jk} s_{ki}. \quad (2.37)$$

Здесь τ_0 есть октаэдрическое касательное напряжение, впервые введенное Р. Мизесом. Это есть результирующее касательное напряжение на элементах

поверхности, ориентированных под равными углами к осям главных напряжений,

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$9\tau_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2I_1^2 - 6I_2,$$

что пропорционально сумме площадей кругов Мора. Напряжение τ_0 применяется в теории пластического течения вязких материалов.

Плоское напряженное состояние можно рассматривать как частный случай трехмерного напряженного состояния, когда $\sigma_{zi} = 0$, $i = x, y, z$. Компоненты девиатора напряжений в этом случае выражаются через среднее нормальных напряжений

$$p = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/3, \quad (2.38)$$

$$s_{xx} = \sigma_{xx} - p, \quad s_{yy} = \sigma_{yy} - p, \quad s_{xy} = \sigma_{xy} \quad (2.39)$$

и

$$J_2 = 3p^2 - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2). \quad (2.40)$$

Так как $\sigma_3 = 0$, экстремальные значения касательных напряжений равны

$$\tau_3 = (1/2)|\sigma_1 - \sigma_2|, \quad \tau_2 = (1/2)|\sigma_1|, \quad \tau_1 = (1/2)|\sigma_2|. \quad (2.41)$$

Соответствующие элементы поверхности ориентированы под углом 45° к осям главных напряжений.

При одноосном напряженном состоянии есть только одно ненулевое главное нормальное напряжение $\sigma_{xx} = \sigma_1$, в то время как $\sigma_{zi} = 0$ и $\sigma_{yi} = 0$, $i = x, y, z$. Тогда среднее нормальное напряжение равно

$$p = \sigma_{xx}/3, \quad (2.42)$$

девиаторная компонента имеет вид

$$s_{xx} = (2/3)\sigma_{xx} \quad (2.43)$$

и второй инвариант принимает значение

$$J_2 = 3p^2 = \sigma_{xx}^2/3. \quad (2.44)$$

2.2. Системы сил

Сложение сил есть основная проблема статики. При сложении внутренних сил векторы напряжений с общей точкой приложения, но при различных величинах элементов должны быть умножены на некоторые коэффициенты, соответствующие площадям элементов, после чего проводится векторное сложение. При многих рассмотрении систем внешних и внутренних сил с общей точкой приложения возникает система сходящихся сил.

В этом случае результирующая сила равна

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2.45)$$

и приложена в общей точке приложения сил. Эта сила статически эквивалентна исходной системе сил. Следовательно, система сходящихся сил с $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ является уравновешенной; силы \mathbf{F}_i , $i = 1, \dots, n$ находятся в равновесии. Какой-либо шарнир, соединяющий стержни фермы, или вершина мачты, укрепленной растяжками (где присоединены тросы), являются примерами такой общей точки приложения сил (усилия в элементах фермы или натяжения тросов, соответственно).

Результирующая сила (или равнодействующая) вычисляется с помощью компонент сил в декартовой системе координат. Путем разложения

$$\mathbf{F}_i = X_i \mathbf{e}_x + Y_i \mathbf{e}_y + Z_i \mathbf{e}_z \quad (2.46)$$

компоненты результирующей силы выражаются суммированием соответствующих компонент

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i, \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad (2.47)$$

в итоге вектор равнодействующей силы имеет вид

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y + R_z \mathbf{e}_z. \quad (2.48)$$

Поэтому система сходящихся сил имеет три условия равновесия

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i = 0. \quad (2.49)$$

Часто встречается более общая проблема суперпозиции сил, не имеющих общей точки приложения. В этом случае, как можно показать, необходимым условием суммирования сил является параллельный перенос каждой силы в некоторую общую точку. На рис. 2.10 показана эта основная статическая проблема для одной силы \mathbf{F} , приложенной в точке A тела.

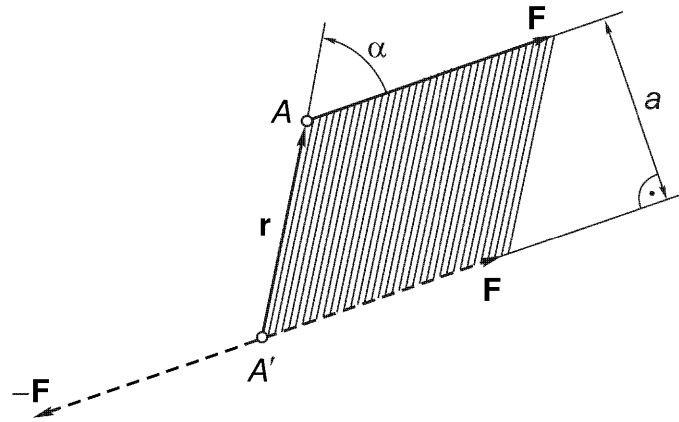


Рис. 2.10. Статически эквивалентное приведение силы F к точке приведения A' . Момент силы. Совокупность двух сил с моментом, пара сил.

Простой параллельный перенос силы в другую точку A' изменит действие силы на тело. Поэтому добавим в новой точке A' две уравновешенные силы F и $-F$, что не изменит действие силы F в точке A . В результате получим две параллельные силы (F в первоначальной точке приложения A и $-F$ в новой точке A'). Такая система двух сил, имеющих момент, называется парой сил. Это понятие играет важную роль в механике. Следовательно, статическое действие на тело силы F , приложенной в точке A , эквивалентно действию перенесенной силы F , приложенной в точке A' , и действию пары сил, описанной выше. Статическое действие пары сил определяется моментом пары Fa , который, по определению, равен произведению модуля силы $|F|$ на расстояние по перпендикуляру между линиями действия сил F и $-F$ пары. Кроме того, задается ориентация плоскости пары сил в пространстве, для чего вводится положительно ориентированный (в смысле правила правого винта) вектор e_n , направленный по нормали к плоскости, образованной параллельными силами F и $-F$ пары. В итоге, вектор-момент пары

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (2.50)$$

определенный как векторное произведение радиуса-вектора \mathbf{r} , проведенного из некоторой точки на линии действия силы $-F$ к некоторой точке на линии действия силы F (например, из точки A' к точке A), на данный вектор силы F , имеет необходимые свойства. Заштрихованная площадь на рис. 2.10 равна

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin \alpha = a |\mathbf{F}|, \quad [|\mathbf{M}|] = \text{Нм}, \quad (2.51)$$

так как $|\mathbf{r}| \sin \alpha = a$ и единичный вектор

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{M} / |\mathbf{M}|, \quad (2.52)$$

имеет требуемую ориентацию.

Вектор-момент есть краткое обозначение пары сил. Это есть свободный вектор, и точка его приложения в плоскости не фиксирована. Кроме того, все параллельные векторы моментов пар сил, имеющие одинаковую длину, статически эквивалентны.

Итак, мы получили важный результат. «Вектор силы \mathbf{F} в точке A и система сил (сила \mathbf{F} в точке A' вместе с моментом \mathbf{M}) статически эквивалентны.»

Компоненты вектора-момента пары сил в декартовой системе координат, где заданы точки $A(x, y, z)$, $A'(x', y', z')$ и

$$\mathbf{r} = (x - x')\mathbf{e}_x + (y - y')\mathbf{e}_y + (z - z')\mathbf{e}_z,$$

могут быть найдены путем раскрытия определителя

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = M_x \mathbf{e}_x + M_y \mathbf{e}_y + M_z \mathbf{e}_z &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x - x' & y - y' & z - z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \\ &= [(y - y')Z - (z - z')Y]\mathbf{e}_x + [(z - z')X - (x - x')Z]\mathbf{e}_y + [(x - x')Y - (y - y')X]\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Отсюда можно получить формулы

$$\begin{aligned} M_x &= (y - y')Z - (z - z')Y, \\ M_y &= (z - z')X - (x - x')Z, \\ M_z &= (x - x')Y - (y - y')X. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Эти формулы представляют аксиальные моменты силы \mathbf{F} относительно осей, параллельных осям x, y, z и проходящих через точку $A'(x', y', z')$. Отсюда видно, что компонента силы, параллельная некоторой оси, не дает момента относительно этой оси.

С помощью кососимметричной матрицы, соответствующей радиусу-вектору (в декартовых координатах),

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & -(z - z') & (y - y') \\ (z - z') & 0 & -(x - x') \\ -(y - y') & (x - x') & 0 \end{pmatrix}$$

вектор-момент определяется путем матричного умножения на \mathbf{F} , так что в матричной форме получим

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}.$$

Аналогичное линейное векторное преобразование $\mathbf{v}_{PA} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_{PA}$ было обсуждено в разделе 1.2.

Далее рассмотрим пространственную систему n сил \mathbf{F}_i , $i = 1, \dots, n$, имеющих точки приложения A_i . Произведем статическое приведение этих сил к отсчетной точке A' , которая для удобства выбрана в начале O декартовой системы координат. Добавление в точке O уравновешенных сил $\mathbf{F}_i + (-\mathbf{F}_i)$, $i = 1, \dots, n$, не изменяет действие исходной системы сил на тело. Поэтому статически эквивалентное приведение дает систему сходящихся сил в точке O (совпадающей с A') с результирующей

$$\mathbf{R} = \sum_i^n \mathbf{F}_i = R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y + R_z \mathbf{e}_z,$$

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i, \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad (2.55)$$

а также n пар сил [\mathbf{F}_i в точке A_i и $(-\mathbf{F}_i)$ в точке A'] с соответствующими векторами-моментами

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь \mathbf{r}_i есть радиус-вектор точки приложения A_i . Можно легко проверить, что результирующий момент находится как сумма векторов-моментов для отдельных сил

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = M_x \mathbf{e}_x + M_y \mathbf{e}_y + M_z \mathbf{e}_z. \quad (2.56)$$

(Суперпозицию двух пар сил с непараллельными плоскостями действия можно рассмотреть в виде упражнения. В качестве указания можно привести две противоположные силы каждой пары к общему отрезку линии пересечения двух плоскостей после соответствующего преобразования и вращения каждой пары в ее плоскости).

Следовательно, результирующие аксиальные моменты можно найти как сумму аксиальных моментов каждой силы \mathbf{F}_i

$$M_x = \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i), \quad M_y = \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i), \quad M_z = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i). \quad (2.57)$$

«Результирующая сила \mathbf{R} , приведенная к отсчетной точке $A' = O$, и результирующий момент \mathbf{M} – статически эквивалентны пространственной системе сил \mathbf{F}_i , приложенных в точках A_i , $i = 1, 2, \dots, n$.»

Пространственная система сил \mathbf{F}_i находится в равновесии, если

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \text{ и } \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (2.58)$$

Поэтому условиями равновесия являются шесть линейных уравнений

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i = 0, \\ M_x &= \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad M_y = \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \\ M_z &= \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Эти уравнения не зависят от конкретного выбора точки отсчета $A' = O$.

Если $R \neq O$, то вектор-момент изменяется при выборе новой отсчетной точки $A''(a, b, c)$, $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z$. Новые радиусы-векторы точек приложения сил F_i обозначены как \mathbf{r}_i'' , и они связаны с радиусами-векторами \mathbf{r}_i относительно старой отсчетной точки A' соотношениями $\mathbf{r}_i = \mathbf{a} + \mathbf{r}_i''$. Тогда результирующий момент относительно точки A'' равен

$$\mathbf{M}'' = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i'' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i'' \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{a} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{M} - \mathbf{a} \times \mathbf{R}. \quad (2.60)$$

Если $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, то момент \mathbf{M}'' равен нулю относительно любой точки, т.е. при любом значении \mathbf{a} . До формулировки уравнений равновесия такая отсчетная точка может быть выбрана произвольно.

Окончательное выражение формулы (2.60) может быть получено непосредственно переносом результирующей силы \mathbf{R} из точки $A' = O$ в точку A'' ; при этом момент $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{R}$ должен быть добавлен к (свободному) вектору-моменту \mathbf{M} .

Решение уравнений (2.59), которые линейны относительно компонент сил X_i, Y_i, Z_i , можно получить, применяя известные методы решения систем линейных неоднородных алгебраических уравнений. Каждая пространственная система сил может быть превращена в уравновешенную систему, если к ней добавить дополнительные силы.

Шесть условий (2.59) являются необходимыми для равновесия системы сил F_i и поэтому для равновесия тела, нагруженного этими силами. Для равновесия твердого тела, имеющего шесть степеней свободы, эти условия являются необходимыми и достаточными; см. также главу 5. Деформируемое тело, с другой стороны, при нагружении такой уравновешенной системой сил, может непрерывно течь или иметь ползучесть. Если неизвестные компоненты сил могут быть определены путем решения уравнений равновесия, группа сил, или, аль-

тернативно, материальная система, нагруженная этими силами, называется статически определенной, в противном случае, статически неопределенной.

В общем случае пространственная система сил может быть сведена к результирующей силе \mathbf{R} с точкой приложения в отсчетной точке A' и к результирующему вектору-моменту \mathbf{M} . Выбрав новую отсчетную точку A на расстоянии \mathbf{a} от A' , получим новый вектор-момент

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M} - \mathbf{a} \times \mathbf{R}.$$

При специальном выборе точки A вектор-момент \mathbf{M}_A становится параллельным результирующей силе \mathbf{R} . Математическое условие

$$\mathbf{R} \times \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$$

дает вектор смещения \mathbf{a} , который без потери общности можно взять ортогональным к \mathbf{R} . Выражение двойного векторного произведения в этом случае имеет вид

$$\mathbf{R} \times (\mathbf{M} - \mathbf{a} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \times \mathbf{M} - \mathbf{R} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \times \mathbf{M} - \mathbf{a} R^2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{R} = 0,$$

или в явном виде

$$\mathbf{a} = (1/|\mathbf{R}|)[(\mathbf{R}/|\mathbf{R}|) \times \mathbf{M}].$$

Вектор-момент \mathbf{M}_A , параллельный \mathbf{R} , получается при приведении системы сил к этой специально выбранной точке

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M} - [(\mathbf{R}/|\mathbf{R}|) \times \mathbf{M}] \times \mathbf{R}/|\mathbf{R}| = [(\mathbf{R}/|\mathbf{R}|) \cdot \mathbf{M}] \mathbf{R}/|\mathbf{R}|,$$

он является компонентой \mathbf{M} в направлении \mathbf{R} . Последняя величина остается неизменной при любом изменении отсчетной точки, сохраняя также неизменными величину и направление \mathbf{R} . Два параллельных вектора \mathbf{R} , \mathbf{M}_A называются силовым винтом и статически эквивалентны первоначальной системе сил.

Иногда более удобно привести данную пространственную систему сил к трем взаимно перпендикулярным силам, которые равны декартовым компонентам результирующей силы $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i : X_r = R_x, Y_r = R_y, Z_r = R_z$. Эти силы имеют

в общем случае линии действия, лежащие на скрещивающихся прямых. Из условия статической эквивалентности три точки приложения этих сил расположены на координатных осях на расстояниях (решение не единственное)

$$a_x = \frac{M_z}{R_y} \text{ для } Y_r, \quad a_y = \frac{M_x}{R_z} \text{ для } Z_r, \quad a_z = \frac{M_y}{R_x} \text{ для } X_r.$$

Эти отрезки измеряются от отсчетной точки $A' = O$.

2.2.1. Плоская система сил: аналитическое и графическое приведение, условия равновесия

Если линии действия всех сил \mathbf{F}_i , $i = 1, \dots, n$ находятся в одной плоскости, то эти силы образуют плоскую систему сил. После выбора общей точки приложения A в этой плоскости и приложения в ней двумерной самоуравновешенной системы сил $\mathbf{F}_i + (-\mathbf{F}_i)$ статически эквивалентное приведение дает результирующую силу в плоскости в точке A , равную $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$, и результирующий вектор-момент, ортогональный плоскости (x, y) , а потому ортогональный вектору \mathbf{R} ,

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) \mathbf{e}_z. \quad (2.61)$$

После приведения получим только три компоненты

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i, \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad M_z = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i). \quad (2.62)$$

Силы в плоскости будут в равновесии, если три (необходимые) линейные уравнения

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad M_z = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \quad (2.63)$$

выполняются. Можно ожидать, что если силы \mathbf{F}_i находятся в плоскости нагружения твердого тела с тремя степенями свободы при плоском движении (см. также главу 5), то эти уравнения равновесия будут также достаточны.

Приведение плоской системы сил удобно проводить графически с помощью силового и веревочного многоугольников. На рис. 2.11(a) показана масштабированная конфигурационная плоскость системы сил, где показаны четыре силы \mathbf{F}_i , и отдельно после выбора соответствующего масштаба сил на рис. 2.11 (b) показано векторное суммирование данных сил, проведенное графически, что дает результирующую силу $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$, $i = 1, \dots, 4$, в плоскости сил.

При ненулевом векторе \mathbf{R} можно определить точку приложения A в конфигурационной плоскости, где результирующий момент равен нулю. Так как вектор \mathbf{M} ортогонален вектору \mathbf{R} , то уравнение (2.60) может быть решено относительно a . Для плоской задачи уравнение

$$M = M_z - a R = 0 \quad (2.64)$$

позволяет найти a при предположении, что $R \neq 0$. Графически эта особая точка отсчета A определяется с помощью следующей процедуры: на плоскости сил

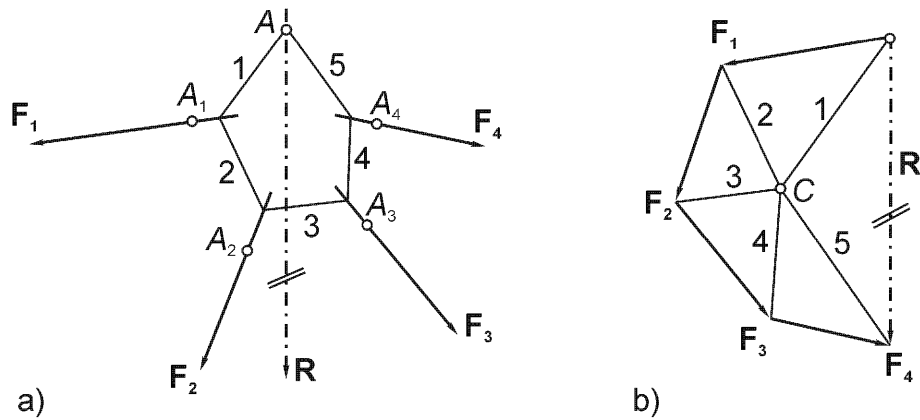


Рис. 2.11. Результирующая R плоской системы сил. Силовой и веревочный многоугольники.

выбирается точка, полюс Кульмана C , и проводятся лучи согласно рис. 2.11 (b). Перенос их в конфигурационную плоскость путем параллельного переноса делается так, что два луча, которые проведены к данной силе, образуют два луча веревочного многоугольника, пересекающиеся на линии действия этой силы. Точка пересечения первого и последнего лучей [1 и 5 на рис. 2.11 (a)] есть точка A . При статической интерпретации этого построения лучи в точке C можно рассматривать как фиктивные силы, уравнивающиеся попарно с данными силами. Эти треугольники с общей точкой C являются замкнутыми, их результирующие равны нулю. При последовательном проведении этой процедуры, например, начиная с точки C , прохождение вдоль луча 1 к силе F_1 и назад к точке C вдоль луча 2, дальше то же для силы F_2 приводит к тому, что фиктивная сила 2 встречается дважды в противоположных направлениях, и поэтому эти силы уравниваются. Легко заметить, что сила R будет уравновешена первой и последней из фиктивных сил. Три силы в плоскости с результирующей, равной нулю, находятся в равновесии, если они образуют систему сходящихся сил. Поэтому они должны иметь общую точку пересечения A в конфигурационной плоскости.

Понятия «веревочный многоугольник» и «лучи веревочного многоугольника» на рис. 2.11 (a) очень удобны для практики, так как кольцо из идеальной нити (или троса) деформируется в многоугольник при нагружении силами F_i , $i = 1, \dots, n$, и вдобавок силой, $F_{n+1} = -R$, $n = 4$, как описано выше. Поэтому фиктивные силы являются натяжениями в частях троса. Если полюс C находится вне площади замкнутого силового многоугольника, то некоторые из фиктивных сил будут сжимающими и необходимы опоры для какой-либо реализации системы на рис. 2.11(a). Два особых случая приведения плоской системы сил возможны:

$R = 0$. Силовой многоугольник суммы сил F_i замкнут, но веревочный многоугольник не замкнут, т.е. первый и последний лучи параллельны. Пара

сил с моментом $M_z \neq 0$ соответствует моменту этих фиктивных сил. Например, это будет в случае, если дополнительная сила $F_5 = -R$ не проходит через точку A .

$R = 0$ и $M_z \neq 0$. Силовой и веревочный многоугольники замкнуты, плоская система сил находится в равновесии. Например, если дополнительная сила $F_5 = -R$ проходит через точку A на рис. 2.11.

Силовой и веревочный многоугольники в основном применяются для поперечно нагруженных балок, см., например, рис. 2.40.

(§) Пример: реакции опор в плоской нагруженной структуре

Структура, изображенная на рис. 2.12, нагружена данными внешними силами F_1 и F_2 .

Реакции опор возникают в точках A , B , C , вместе с данными силами они образуют плоскую систему уравновешенных сил. На опорах B и C возможно свободное перемещение в горизонтальном направлении, поэтому здесь направление сил реакций заранее известно, а именно, эти реакции направлены вертикально. В точке A имеется неподвижный шарнир, поэтому здесь реакция может иметь любое направление в плоскости действия сил, см. раздел 1.3.4. В итоге, четыре неизвестные компоненты сил должны быть определены из трех уравнений равновесия (2.63). Четвертое, линейно независимое уравнение, необходимое для решения задачи, может быть получено из условия для дополни-

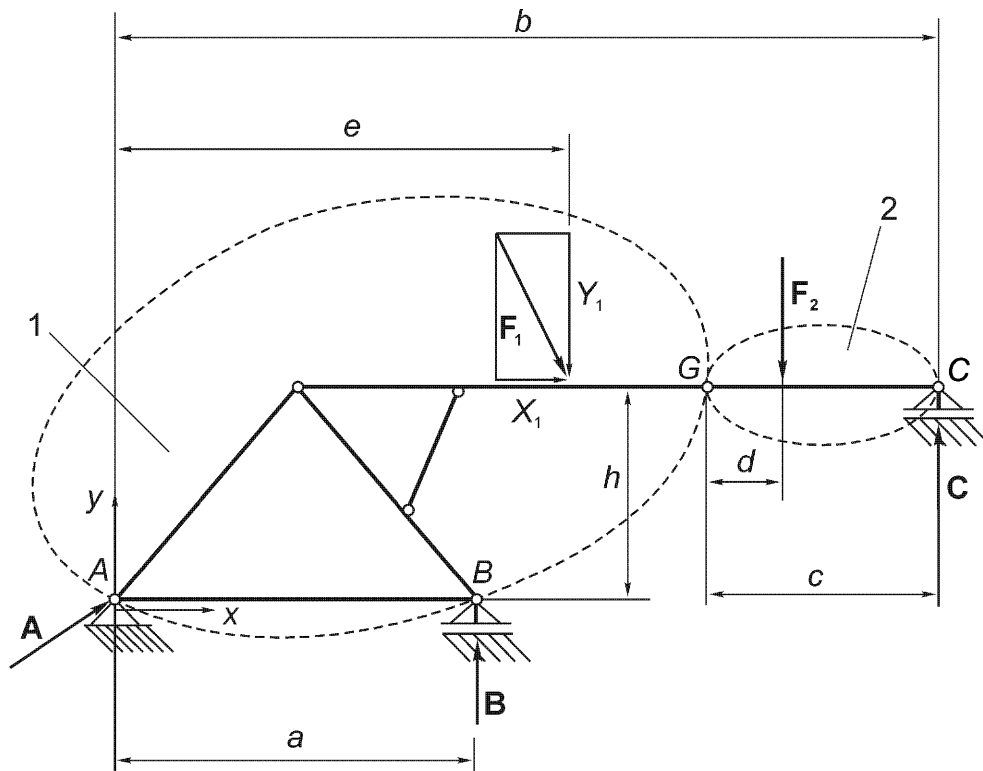


Рис. 2.12. Плоская структура, состоящая из двух подструктур 1 и 2.

тельного шарнира в точке G , где нет передачи момента между подструктурами, обозначенными на рис. 2.12 цифрами 1 и 2. Поэтому сумма моментов внешних сил, действующих на подструктуру 2 или 1, относительно отсчетной точки G должна быть равна нулю.

В результате имеем систему уравнений

$$A_x + X_1 = 0, \quad (a1)$$

$$A_y + B + C - Y_1 - F_2 = 0, \quad (a2)$$

$$Ba + Cb - X_1 h - Y_1 e - F_2 (b - c + d) = 0, \text{ отсчетная точка } A, \quad (a3)$$

$$Cc - F_2 d = 0, \text{ условие в шарнире для подструктуры 2.} \quad (a4)$$

Одно из условий равновесия [(a1)-(a3)] может быть заменено на второе условие для шарнирного соединения для подструктуры 1, поэтому оно играет роль независимого уравнения для контроля. Так как все неизвестные силы реакций опор определяются из решения, данная структура считается внешне закрепленной статически определимым образом.

2.2.2. Симметрия тензора напряжений

Диаграмма равновесия для бесконечно малого элемента дает пространственную систему объемных сил и поверхностных усилий при наличии шести уравнений равновесия. Три уравнения равновесия, основанные на равенстве нулю результирующей силы, были обсуждены ранее в разделе 2.1. В добавок к этому аксиальные моменты dM_x , dM_y , dM_z должны быть равны нулю. Взяв отсчетную точку (x, y, z) , которая была выбрана как точка приведения системы сил, аксиальный момент dM_z принимает вид

$$\begin{aligned} dM_z = & -[\sigma_{xx}(x+dx, y, z) - \sigma_{xx}(x, y, z)] dy dz dy/2 + \sigma_{xy}(x+dx, y, z) dy dz dx + \\ & + [\sigma_{yy}(x, y+dy, z) - \sigma_{yy}(x, y, z)] dx dz dx/2 - \sigma_{yx}(x, y+dy, z) dx dz dy - \\ & - [\sigma_{zx}(x, y, z+dz) - \sigma_{zx}(x, y, z)] dx dy dy/2 + \\ & + [\sigma_{zy}(x, y, z+dz) - \sigma_{zy}(x, y, z)] dx dy dx/2 - k_x dx dy dz dy/2 + \\ & + k_y dx dy dz dx/2 = 0. \end{aligned}$$

Линейная аппроксимация приращений напряжений и последующее деление на $dV = dx dy dz$ дает в пределе при $dx, dy \rightarrow 0$ точное выражение [для сравнения можно рассмотреть вывод уравнения (2.19)]

$$\sigma_{xy}(x, y, z) - \sigma_{yx}(x, y, z) = 0.$$

Два других условия $dM_x = 0$ и $dM_y = 0$ дают по аналогии с $dM_z = 0$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}. \quad (2.65)$$

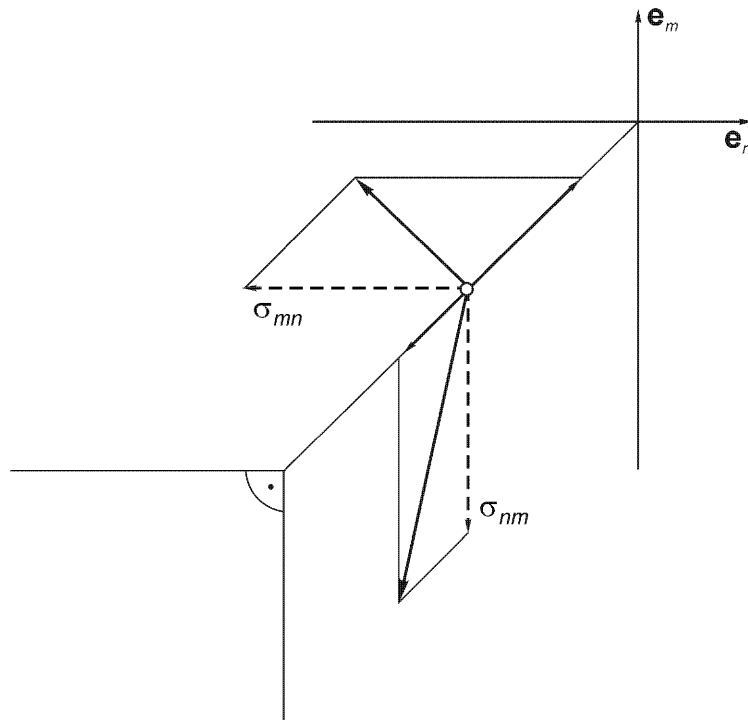


Рис. 2.13. Результат леммы по отношению к касательным напряжениям на примыкающих площадках: $\sigma_{nm} = \sigma_{mn}$.

Следовательно, в точечном континууме симметрия тензора напряжений следует из рассмотрения равновесия. Формула (2.65) дает следующую лемму для касательных напряжений на примыкающих площадках: «На двух взаимно ортогональных поверхностных элементах компоненты сдвиговых напряжений, которые нормальны к линии пересечения площадок, имеют равные значения и направлены по направлению к общей границе элементов или от нее.» См. рис. 2.13.

В континууме более высокого порядка (подобно континууму Коссера) материальным точкам приписываются вращательные степени свободы и вводятся так называемые моментные напряжения. При дальнейшем обобщении физические свойства приписываются этим (деформируемым) ячейкам и строится теория микромеханики. В этом рассмотрении возникают проблемы, касающиеся граничных условий.

2.2.3. Система параллельных сил: центр сил, центр тяжести, статические моменты

В частном случае системы параллельных сил линии действия всех сил системы параллельны. Статически эквивалентное приведение пространственной системы параллельных сил к одной результирующей силе (равнодействующей) возможно, если $R \neq 0$. равнодействующая приложена в некоторой точке приложения A , где $M_A = 0$. Эту точку можно найти при произвольной исходной точке

приведения A' , так как момент \mathbf{M} ортогонален \mathbf{R} . Вектор \mathbf{a} , направленный от A' к A , можно найти из решения уравнения (2.60):

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M} - \mathbf{a} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 0. \quad (2.66)$$

Выбирая начало отсчета O в качестве точки приведения A' и проводя радиус-векторы к точкам приложения параллельных сил $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}$, можно найти результирующий момент и момент результирующей силы $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{e}$, что после подстановки в уравнение (2.66) дает

$$\mathbf{a} \times \mathbf{e} \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{e},$$

или, эквивалентно,

$$\left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{a} - \mathbf{r}_i) F_i \right) \times \mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

В этом уравнении линия действия вектора \mathbf{a} может быть выбрана произвольно, например, ортогонально к \mathbf{e} , и решение уравнения дает точку A приложения вектора \mathbf{R} , где $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$. Ужесточая условие для определения \mathbf{a} , найдем такую точку A приложения равнодействующей \mathbf{R} , что эта точка остается фиксированной в пространстве, если данные параллельные силы F_i поворачиваются на некоторый угол α около параллельных осей, проходящих через их точки приложения A_i . Такая точка называется центром параллельных сил, см. рис. 2.14. Тогда, учитывая произвольность единичного вектора \mathbf{e} , получим соотношение

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_i) F_i = \mathbf{0}. \quad (2.67)$$

Единственное решение $\mathbf{a} = \mathbf{r}_M$ определяет радиус-вектор центра сил, направленный от начала $O = A'$ к точке A_M ,

$$\mathbf{r}_M = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (2.68)$$

Центр двух параллельных сил с ненулевой результирующей силой $R = F_1 + F_2 \neq 0$ поэтому лежит на прямой, проходящей через точки их приложения.

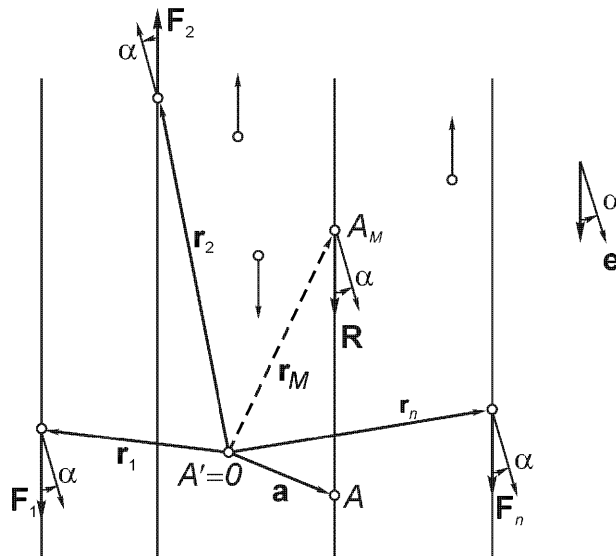


Рис. 2.14. Равнодействующая \mathbf{R} пространственной системы параллельных сил и точка ее приложения, центр сил A_M , после поворота всех сил вокруг оси на угол α .

Сходящиеся силы тяжести, действующие на тело, обычно аппроксимируются системой параллельных сил в тех случаях, когда угол наклона между действительными силами остается малым (есть случаи, когда эта аппроксимация не верна, например, при рассмотрении долговременных эффектов, наблюдаемых в космических объектах). Сила на единицу объема, приложенная к каждой материальной точке, считается вертикальной и равной

$$\mathbf{k} = \rho g \mathbf{e}_z,$$

где \mathbf{e}_z является нормалью к горизонтальной плоскости (модель плоской Земли), направленной вниз (рис. 2.15).

Суммирование параллельных сил по объему дает вес тела

$$G\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \int_V \rho g dV. \tag{2.69}$$

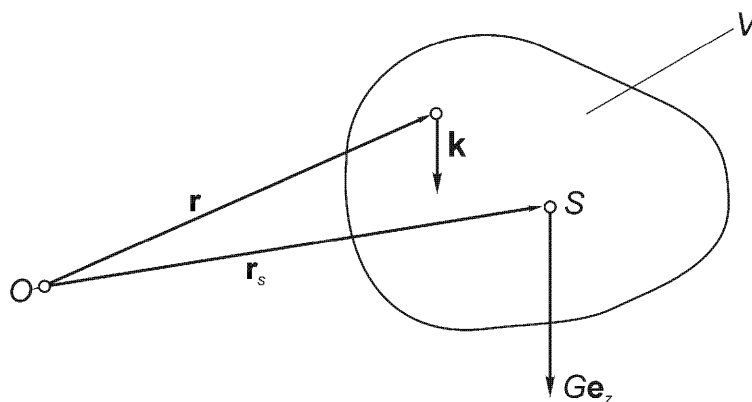


Рис. 2.15. Центр тяжести $C = S$ есть центр системы параллельных объемных сил, обозначенных как $\mathbf{k} = \rho g \mathbf{e}_z$, $g = \text{const}$.

Центр параллельных сил тяжести, центр тяжести C , есть точка приложения результирующего веса тела при любых поворотах тела (здесь дополнительно предположено, что ускорение земного тяготения g постоянно, или тело находится в однородном поле тяжести). Уравнение (2.67) принимает форму, соответствующую системе распределенных сил,

$$\int_V (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) \rho g dV = \mathbf{0}. \quad (2.70)$$

Решение этого уравнения дает формулу для радиуса-вектора, проходящего от начала отсчета до центра тяжести,

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{G} \int_V \mathbf{r} \rho g dV. \quad (2.71)$$

При сделанных допущениях центр тяжести тела остается фиксированным в теле при любых вращениях этого тела. Если мы используем формулу $G = mg$, то постоянное ускорение g в формуле (2.71) сокращается, и мы получим формулу для определения центра масс M

$$\mathbf{r}_M = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} \rho dV = \frac{1}{m} \int_m \mathbf{r} dm. \quad (2.72)$$

Последняя формула не зависит от каких-либо предположений о гравитации.

В случае однородного тела массовая плотность $\rho = \text{const}$ сокращается, так как $m = \rho V$, и получим выражение для расположения геометрического центра объема V

$$\mathbf{r}_V = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV. \quad (2.73)$$

Радиус-вектор \mathbf{r}_V есть векторное среднее радиусов-векторов, проведенных из начала отсчета ко всем точкам объема V (аналогично определяется средняя статистическая величина). Геометрические центры аналогично определяются для поверхностей S произвольной кривизны

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{S} \int_S \mathbf{r} dS \quad (dS \text{ есть двумерный элемент поверхности}) \quad (2.74)$$

и для (пространственно) изогнутых линий L

$$\mathbf{r}_L = \frac{1}{L} \int_L \mathbf{r} ds \quad (ds \text{ есть элемент длины дуги}). \quad (2.75)$$

Интегралы по области являются линейными операторами, которые позволяют суперпозицию, например, в случае композиции простых структур с известными частными интегралами формулы сводятся к суммированию.

Взвешенные векторы имеют большое математическое значение и применяются во многих технических приложениях.

Введем величины

$$\begin{aligned} Gr_S &= \int_V \mathbf{r} \rho g dV, \quad m \mathbf{r}_m = \int_V \mathbf{r} \rho dV, \quad Vr = \int_V \mathbf{r} dV, \\ Sr_s &= \int_S \mathbf{r} dS, \quad Lr_L = \int_L \mathbf{r} ds, \end{aligned} \quad (2.76)$$

называемые статическими моментами (моментами первого порядка) веса, массы, объема, площади поверхности, длины дуги, соответственно, вычисленными относительно начала отсчета $A' = O$. В частности, статические моменты плоской области A относительно точки O в этой плоскости находятся через (x, y) компоненты

$$Ax_S = \int_A x dA, \quad Ay_S = \int_A y dA, \quad (2.77)$$

где записаны аксиальные статические моменты относительно осей y и x , соответственно.

В случае аксиальной симметрии относительно оси, проходящей через точку O' в направлении орта \mathbf{e} , с учетом формул

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}', \quad \mathbf{r}_M = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_M, \quad \mathbf{r}' = r' \mathbf{e}_r + z' \mathbf{e}_z, \quad (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}) = 0$$

получим первый момент распределения массы

$$m \mathbf{r}'_M = \int_V r' \mathbf{e}_r \rho dV + \mathbf{e} \int_V z' \rho dV = \mathbf{e} \int_V z' \rho dV,$$

где r' измеряется от точки O' , т.е. центр распределения масс расположен на оси симметрии, $\mathbf{r}'_M = z'_M \mathbf{e}$.

2.3. Гидростатика

Задачи, связанные с равновесием жидкостей, довольно простые и не представляют трудностей для решения. Существенное свойство жидкого тела, находящегося в покое, есть равенство нулю сдвиговых компонент напряжений, $\sigma_{ij} = 0$, $i \neq j$. Оставшиеся три нормальные компоненты напряжений в каждой материальной точке равны изотропному гидростатическому давлению $p = -\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = -\sigma_{zz}$. Так как жидкости в основном испытывают сжимающие напряжения (жидкости при растяжении начинают испаряться) давление p считается положительным.

Вспоминая соотношение (2.20), которое не зависит материала,

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z, \quad (2.78)$$

и вставляя сюда изотропные нормальные напряжения $\sigma_x = \sigma_{xx} \mathbf{e}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{nn} \mathbf{e}_n$, получим после скалярного умножения на единичные векторы $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_x &= \sigma_{xx} n_x, & \sigma_{nn} \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_y &= \sigma_{yy} n_y, \\ \sigma_{nn} \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_z &= \sigma_{zz} n_z, & n_x &= \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_x \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Так как направление \mathbf{e}_n произвольно, состояние гидростатических напряжений существует в жидкости в покое. Подставляя

$$\rho = -\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = -\sigma_{zz} = -\sigma_{nn} \quad (2.79)$$

в уравнение (2.18), получим

$$\mathbf{f} = \mathbf{k} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) = \mathbf{k} - \nabla \rho = \mathbf{k} - \text{grad } \rho = \mathbf{0}.$$

Векторное условие локального равновесия жидкости в покое

$$\mathbf{k} = \text{grad } \rho \quad (2.80)$$

имеет место, если внешняя объемная сила \mathbf{k} образует поле вектора градиента; $\rho(x, y, z)$ есть скалярная функция. Такая сила выводится из потенциальной плотности $W'_\rho(x, y, z)$

$$\mathbf{k} = -\text{grad } W'_\rho. \quad (2.81)$$

Отсюда поверхности равного давления, $\rho(x, y, z) = \text{const}$, имеют заданные ортогональные траектории, которые являются векторными линиями поля заданной силы \mathbf{k} . В каждой точке нормаль к поверхности есть касательная к линии вектора и параллельна \mathbf{k} . Уравнение (2.80) может быть обобщено, чтобы включить силу инерции течения идеальной жидкости, см. уравнение (8.30).

Давление есть (нормальное) напряжение и потому имеет ту же размерность что и напряжение $[\rho] = \text{Н/м}^2$. Эта единица измерения также называется Паскаль: $1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}$. Вводится также техническая единица измерения 1 бар = 10^5 Н , которая приблизительно равна перепаду давления в вертикальном столбе воды высотой 10 м. Атмосферное давление обычно измеряют в гектопаскалях, $1 \text{ гПа} = 10^2 \text{ Па}$. Давление также входит в определяющие соотношения для сжимаемой жидкости, см. формулы (2.87) и (4.60).

2.3.1. Жидкость в поле силы тяжести

Рассматривается жидкость в покое в однородном поле силы тяжести, имеющая такие ограниченные горизонтальные размеры, что объемные силы приближенно считаются параллельными. Единичный вертикальный вектор \mathbf{e}_z направлен вверх. Формула (2.80) имеет только одну компоненту, описывающую изменение давления по вертикальной оси z ,

$$\mathbf{k} = -\rho g \mathbf{e}_z = \text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (2.82)$$

В этом случае поверхность изобар становится горизонтальной плоскостью.

(§) Несжимаемая жидкость

Интегрирование дифференциального уравнения (2.82) дает (плотность неоднородной жидкости может зависеть от координаты z , но не от давления p , т.е. жидкость предполагается несжимаемой)

$$p = -g \int_0^z \rho dz + C, \quad (2.83)$$

где C есть отсчетное давление в плоскости $z = 0$. Несжимаемая и однородная жидкость, где $\rho = \text{const}$, есть хорошее приближение для слоя жидкости малой или средней толщины,

$$p = -\rho g z + C,$$

где видно, что давление линейно уменьшается с высотой. Удобно обозначить давление на некоторой высоте $z = H$, например, на свободной поверхности воды у поверхности контакта с неподвижным воздухом как p_0 и измерять глубину h от этой плоскости в направлении, противоположном направлению оси z . Тогда

$$p(h) = p_0 + \rho g h. \quad (2.84)$$

«Давление увеличивается линейно в зависимости от глубины h .»

$$[p(h) - p_0] / \rho g = h. \quad (2.85)$$

Величина h называется (дифференциальным) перепадом давления.

Барометры и манометры, использующие вертикальные трубки, заполненные жидкостью, имеют ртуть или воду с соответствующей шкалой h , что позволяет измерять, соответственно, абсолютное давление или перепад давления (см. рис. 2.16). В случае $p_1 = p_0$ в U -образном манометре [см. рис. 2.16(b)] величина h равна нулю, что приводит к важному наблюдению: в любой сооб-

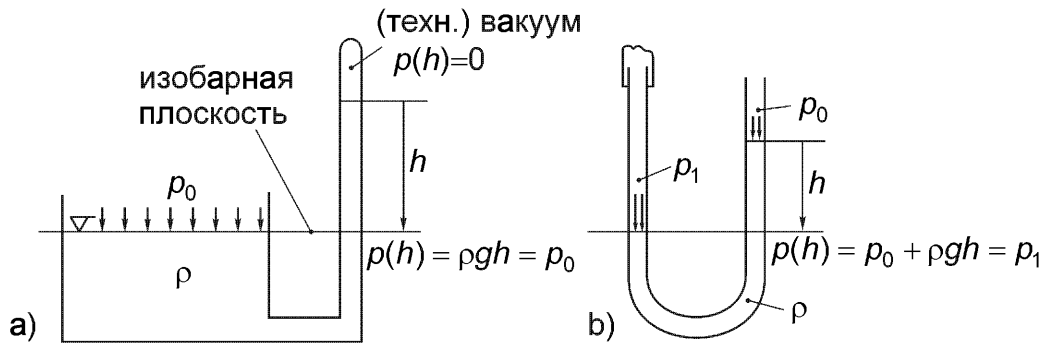


Рис. 2.16. (а) Механический принцип манометра (ртуть, $\rho = 13600 \text{ кг/м}^3$),
(б) U-образный манометр (вода, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$).

щающейся системе труб поверхность контакта жидкости и воздуха есть горизонтальная плоскость, соответствующая наивысшему уровню изобар.

Эффекты поверхностного натяжения, вызванные когезией и адгезией, типа мениска и капиллярного эффекта, имеют важное значение в некоторых специальных проблемах, но считаются пренебрежимыми во многих технических приложениях и не рассматриваются в этой книге (например, такой эффект виден при плавании стального режущего лезвия по поверхности воды).

Слоистые жидкости в параллельном поле тяжести имеют горизонтальные поверхности постоянного давления. Устойчивое положение равновесия имеет место, если плотность возрастает с глубиной. В однородных слоях перепад давления увеличивается линейно с глубиной аналогично манометру давления, где такое распределение давления имеет место при отсчете от поверхности раздела воздух-жидкость (см. рис. 2.17).

Сжимаемая однородная баротропная жидкость имеет определяющее соотношение для плотности и давления $\rho = \rho(p)$. Температура, по-видимому, может быть исключена с помощью термодинамического уравнения состояния, и

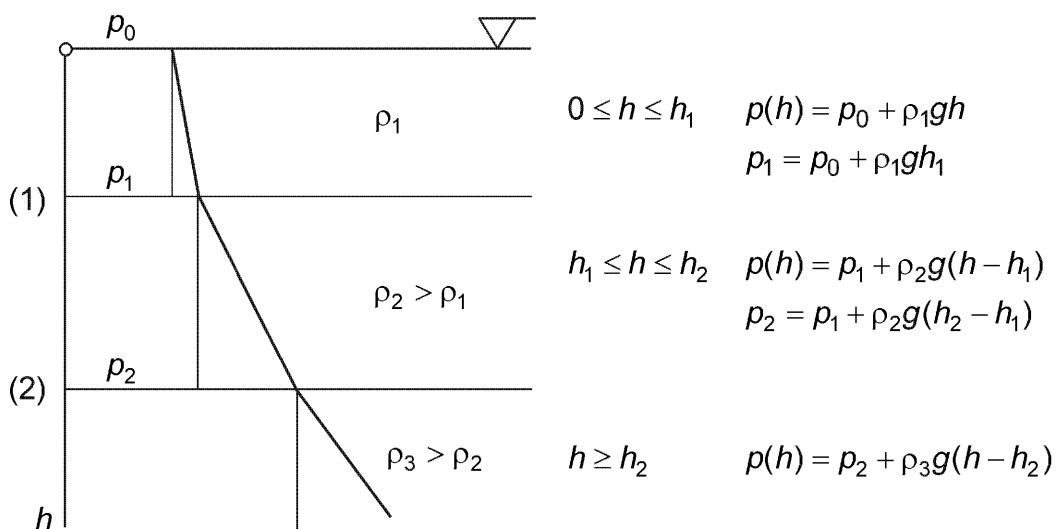


Рис. 2.17. Распределение абсолютного давления, манометрического давления и перепада давления в слоистой жидкости в состоянии покоя.

уравнение (2.82) может быть проинтегрировано разделением переменных

$$\frac{dp}{\rho(p)} = -g dz, \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = -g(z - z_0), \quad p_0 \text{ соответствует } z_0. \quad (2.86)$$

Простое численное интегрирование позволяет найти распределение $\rho(z)$ для слоистой структуры жидкости в покое (см. вновь рис. 2.17).

(§) Линейная сжимаемость

В случае линейной (объемной) сжимаемости определяющее соотношение имеет вид

$$dp = K_F d\rho/\rho_0 \quad \text{или} \quad p - p_0 = K_F[(\rho/\rho_0) - 1], \quad p, \rho > 0, \quad (2.87)$$

где K_F означает объемный модуль. Для жидкостей модуль практически не зависит от температуры и для чистой (дистиллированной) воды принимает значение $20,9 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$. Наоборот, для идеального газа при изотермических условиях, например, для сухого воздуха, $K_F = p_0 = \rho_0 RT$, где $R = 287 \text{ Нм/кг К}$ есть газовая постоянная и T – абсолютная температура, измеряемая в градусах Кельвина, $[T] = \text{К}$. Уравнение (2.86) с учетом (2.87) дает после интегрирования и после обращения логарифмической функции

$$p = p_0 + K_F \{[\exp(gp_0 h/K_F)] - 1\}, \quad h = z_0 - z \geq H. \quad (2.88)$$

«Давление возрастает экспоненциально с увеличением глубины h .» В отсчетной плоскости $h = 0$, $p = p_0$. При $K_F \geq p_0$ давление равно нулю на высоте $(-H)$ выше этой плоскости, где $H = (K_F/g\rho_0) \ln(1 - p_0/K_F)$.

Линейная аппроксимация экспоненциальной функции в уравнении (2.88) дает линейное распределение давления согласно (2.84) и потому верна для малых аргументов $(g\rho_0 h/K_F)$.

Инверсия соотношения (2.88) дает для изотермического слоя сухого воздуха ($K_F = p_0$ есть отсчетное давление при z_0 и $H \rightarrow -\infty$)

$$z - z_0 = (RT/g) \ln(p_0/p). \quad (2.89)$$

Барометрическая формула, связывающая давление и высоту, очень полезна, но требует уточнения. Она верна в слоях толщиной $|z - z_0| \approx 100 \text{ м}$. Поэтому измеренное давление позволяет найти высоту путем простого вычисления.

(§) Нелинейная сжимаемость

Для иллюстрации нелинейной сжимаемости рассматривается однородный слой газа в состоянии покоя в адиабатическом состоянии равновесия в параллельном поле тяжести. Соотношение для баротропного материала имеет вид

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad (2.90a)$$

где $\kappa = 1, 4$ означает показатель адиабаты, верный для сухого воздуха и двухатомных газов. Инкрементальная версия этого определяющего соотношения может быть записана в виде, использующем обозначение адиабатического касательного модуля K_a [см. уравнение (2.87)],

$$dp = K_a \frac{d\rho}{\rho}, \quad K_a = \kappa p. \quad (2.90b)$$

Подстановка в уравнение (2.86) дает в этом случае

$$\int_{p_0}^p \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} dp = -g\rho_0 (z - z_0). \quad (2.91)$$

После интегрирования получаем формулу, показывающую, что давление уменьшается с высотой $(z - z_0)$ выше уровня $z = z_0$ в соответствии с определяющим соотношением; p_0 есть заданное давление,

$$p = p_0 \left[1 - \frac{(\kappa - 1)g\rho_0(z - z_0)}{\kappa p_0} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (2.92)$$

Температура пропорциональна давлению, $T = \frac{p}{R\rho}$. Заменяя κ в соотношении (2.92) показателем политропы $n < \kappa$, получаем весьма общее выражение для распределения давления в слое воздуха при условиях политропного процесса.

2.3.2. Жидкости под давлением

Жидкость в замкнутых трубопроводах или в контейнерах часто подвержена высоким давлениям. Рассмотрим, например, большой сосуд с поршневым насосом, где поршень с малой площадью поперечного сечения A под действием аксиальной силы F находится в прямом контакте с (несжимаемой) жидкостью, см. рис. 2.18.

Среднее давление $p_1 = F/A$ приложено на уровне z_1 насоса и не зависит от формы поверхности поршня. Это легко проверить, проектируя бесконечно малую силу $\bar{p}_1 dS \mathbf{e}_n$ (\mathbf{e}_n есть нормаль к dS) на аксиальное направление \mathbf{e} движущей силы F ,

$$\bar{p}_1 dS \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e} = \bar{p}_1 dA.$$

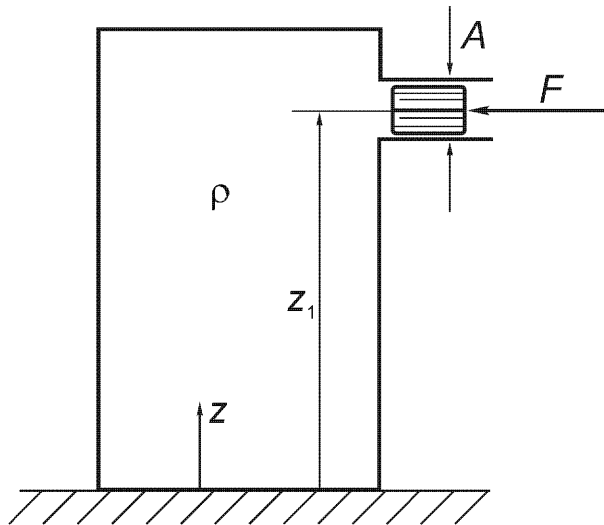


Рис. 2.18. Резервуар под давлением.

Здесь dA – элемент поперечного сечения. Суммирование аксиальных компонент по направлению e результирующей силы дает

$$F = \int_A \bar{p}_1 dA = p_1 A,$$

где p_1 есть среднее давление. Из-за наличия силы тяжести давление изменяется линейно

$$p(z) = p_1 + g\rho(z_1 - z),$$

где $p = p_1$ при $z = z_1$. В случае достаточно высокого давления, $p_1 \gg \max[g\rho|z_1 - z|]$ (на рис. 2.18 $p_1 \gg g\rho z_1$), изменение из-за действия силы тяжести пренебрежимо мало, и давление во всем объеме жидкости предполагается постоянным

$$p = \bar{p}_1 = \text{const.} \quad (2.93)$$

Эта аппроксимация верна также для сжимаемых жидкостей.

(§) Принцип действия гидравлического насоса

Два цилиндра с сильно различающимися поперечными сечениями прикреплены к жесткому цилиндру (см. рис. 2.19).

Сила F_1 производит высокое давление $p = \frac{F_1}{A_1}$ на жидкость в контейнере.

Если пренебречь влиянием силы тяжести, то давление p действует на рабочий поршень с большим поперечным сечением A_2 и создает большую

«подъемную» силу $F_2 = pA_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$ в соответствии с отношением $\frac{A_2}{A_1} \gg 1$. За-

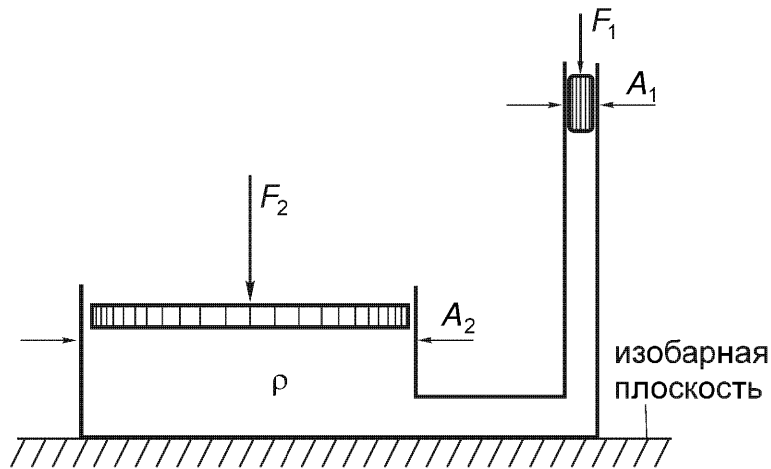


Рис. 2.19. Механический принцип действия гидравлического насоса.

метим, что большая сила F_2 также передается на основание, и потому при использовании насоса требуются специальные опоры.

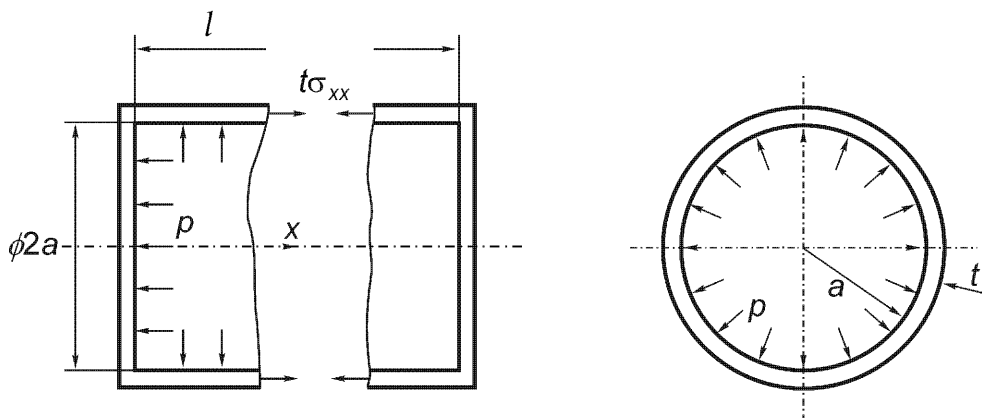
(§) Сосуды и трубы

Жидкость под давлением часто создает большие напряжения в тонкостенных сосудах круговой цилиндрической формы. Сферические контейнеры также используются для хранения жидкостей, например, естественного газа под большим давлением. Гидростатическое давление p действует перпендикулярно каждому нагруженному элементу поверхности, и потому ниже рассматривается нагружение стенки контейнера (см. рис. 2.20).

Аксиальная сила F в замкнутой цилиндрической оболочке объема $l \times A$ (на рис. 2.20 показаны однородно распределенные параллельные силы $p dA$ в случае плоского дна), в общем, находится по формуле

$$F = \int_A p dA = p A, \quad A = \pi a^2. \quad (2.94)$$

Поэтому, как и в растягиваемом стержне, аксиальные нормальные напряжения в круговой стенке равномерно распределены и определяются выражением

Рис. 2.20. Круговой цилиндрический и сферический сосуды под давлением, $t \ll a$.

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{2\pi at} = \frac{pa}{2t}. \quad (2.95)$$

Поле сходящихся сил действует на цилиндрическую и сферическую стенку и создает поле окружных напряжений. Из-за симметрии на рис. 2.21 рассмотрена верхняя половина оболочки, где равновесие сил в направлении оси z (цилиндрическая оболочка предполагается очень длинной в сравнении с ее диаметром) приводит к равенству

$$\int_S p n_z dS - \sigma_{\varphi\varphi} t L = 0. \quad (2.96)$$

Так как при проектировании имеет место формула $dS n_z = dA_z$ и учитывая, что $p = \text{const}$, интеграл приводится к простому виду $p A_z$, и решение уравнения

$$p A_z - \sigma_{\varphi\varphi} t L = 0 \quad (2.97)$$

дает известную формулу для сосудов давления, описывающую окружные напряжения,

$$\sigma_{\varphi\varphi} = p \frac{A_z}{tL}, \quad (2.98)$$

где A_z есть проекция поверхности нагруженной оболочки на плоскость $z = \text{const}$.

Мембранные напряжения в замкнутой цилиндрической оболочке длины l после подстановки в формулы (2.95) и (2.98) $A_z = 2al$ и $L = 2l$ (два края) находятся по формуле

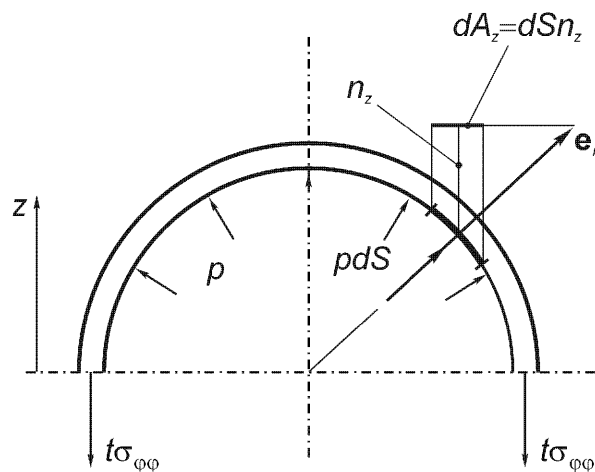


Рис. 2.21. Верхняя половина симметричной оболочки. Окружная сила $t \sigma_{\varphi\varphi}$ на единицу длины.

$$\sigma_{\varphi\varphi} = p \frac{a}{t} = 2\sigma_{xx}. \quad (2.98a)$$

Полученные формулы аппроксимируют главные нормальные напряжения в тонкой стенке достаточно далеко от концевых пластин. Изгибные напряжения у границ быстро уменьшаются при удалении от концов (см. раздел 6.7.1). Заметим, что окружные напряжения в два раза больше аксиальных напряжений, поэтому разрушение при разрыве цилиндрической оболочки обычно наблюдается в виде аксиально ориентированной трещины.

Сферическая оболочка имеет площадь проекции $A_z = \pi a^2$ и периметр $L = 2\pi a$, тогда формула (2.98) дает после подстановки значений A_z и L выражения для главных нормальных напряжений (оболочка под давлением имеет мембранные напряжения)

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{pa}{2t},$$

где φ и ϑ – сферические углы.

Радиальное напряжение при $r = a$ равно давлению p и линейно уменьшается до нуля при приближении к внешней поверхности, свободной от поверхностных усилий. Для тонких оболочек, $a/t \ll 1$, и радиальное напряжение пренебрежимо мало в сравнении с мембранными напряжениями. Все напряжения были определены из рассмотрения равновесия, и поэтому мы имеем статически определенное состояние напряжений (см. раздел 6.7 о других оболочках вращения и распределенных нагрузках).

2.3.3. Гравитационное гидростатическое давление в открытых контейнерах

В общем, давление $p = p_0 + g\rho h$, линейно зависящее от высоты h , действует в несжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя, на поддерживающие стенки или на выбранные части поверхности жидкость - твердое тело в виде пространственно распределенных сил $p dS e_n$. В случае плоского сечения возникает неоднородное поле параллельных сил.

(§) Плоское горизонтальное основание площади A

Это основание нагружено однородно распределенными параллельными силами, их равнодействующая F направлена вертикально и равна

$$F = p(H) A = (p_0 + g\rho H) A, \quad (2.99)$$

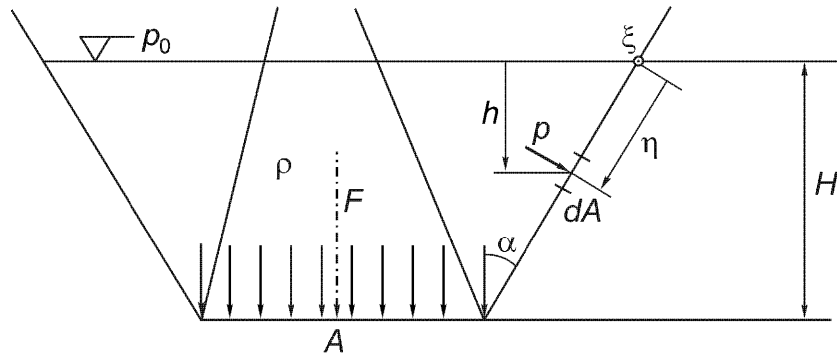


Рис. 2.22. Давление на плоские жесткие поверхности.

что зависит от глубины H , но не зависит от формы контейнера или веса жидкости в контейнере (см. рис. 2.22). Исторически этот факт называют гидростатическим парадоксом.

(§) Плоская удерживающая стенка площади A

Эта стенка также нагружена параллельными силами, которые статически эквивалентны одной равнодействующей силе, приложенной в центре сил, или в данном случае он называется центром давления. Однородное отсчетное давление p_0 имеет равнодействующую $p_0 A$, линия действия которой перпендикулярна к A и проходит через геометрический центр (центр тяжести) площади A по аналогии со случаем плоского горизонтального основания. Так как имеет место суперпозиция, далее мы рассмотрим действие линейно изменяющегося перепада давлений $p(h) = g\rho h$, что эквивалентно манометрическому давлению, отсчитанному от свободной поверхности при атмосферных условиях. Результирующая сила на наклонную поддерживающую стенку равна

$$R = \int_A p dA = g\rho \int_A h dA,$$

или после замены $h = \eta \cos \alpha$

$$R = g\rho \cos \alpha \int_A \eta dA = g\rho \cos \alpha \eta_s A.$$

В соответствии с рис. 2.22 статический момент нагруженной площади A относительно оси ξ , которая проходит по линии пересечения свободной поверхности и стенки, равен $\eta_s A$, где η_s есть координата центра площади A . Поэтому обозначая глубину центра A через $h_s = \eta_s \cos \alpha$, получим

$$R = g\rho h_s A. \quad (2.100)$$

«Величина равнодействующей силы давления равна произведению перепада давлений в центре площади A (что равно также среднему давлению линейного распределения давления по стенке), умноженному на площадь A .»

Точку приложения равнодействующей R (где момент равен нулю) можно найти из рассмотрения статической эквивалентности или, например, рассматривая суммарный аксиальный момент относительно оси ξ ,

$$R\eta_M = \int_A (p dA \eta) = g\rho \cos \alpha \int_A \eta^2 dA = g\rho \cos \alpha J_\xi \quad (2.101)$$

и затем рассматривая аксиальный момент относительно оси η

$$R\xi_M = \int_A (p dA \xi) = g\rho \cos \alpha \int_A \eta \xi dA = g\rho \cos \alpha J_{\xi\eta}. \quad (2.102)$$

Координаты (ξ_M, η_M) и являются требуемыми координатами центра давления. Интеграл J_ξ означает (аксиальный) момент инерции площади A относительно оси ξ . Интеграл $J_{\xi\eta}$ называется девiatorным (или центробежным) моментом, или произведением инерции площади A относительно ортогональных плоскостей $\xi = 0$ и $\eta = 0$. Математически оба момента площади являются моментами второго порядка, так как элемент площади умножается на расстояние во второй степени по нормали до оси (аналогично вводятся статистические моменты второго порядка). Подстановка значения R дает чисто геометрические выражения

$$\eta_M = \frac{J_\xi}{A\eta_S}, \quad \xi_M = \frac{J_{\xi\eta}}{A\eta_S}, \quad (2.103)$$

где

$$J_\xi = \int_A \eta^2 dA \text{ и } J_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA, \quad [J] = \text{м}^4. \quad (2.104)$$

Легко показать, что $\eta_M > \eta_S$ для любой формы площади A . Вводя новую систему координат (x, y) , оси которой параллельны осям (ξ, η) , но сдвинуты так, что начало находится в центре площади S , и делая замену $\eta = \eta_S + y$, получим

$$J_\xi = \int_A (\eta_S + y)^2 dA = \eta_S^2 A + 2\eta_S \int_A y dA + \int_A y^2 dA = \eta_S^2 A + J_x, \quad (2.105)$$

так как статический момент относительно центральной оси x равен нулю по определению. Соотношение (2.103) дает неравенство

$$\eta_M = \eta_S + \frac{J_x}{A\eta_S} > \eta_S, \quad J_x = \int_A y^2 dA > 0. \quad (2.106)$$

Знак центробежного момента $J_{\xi\eta}$ зависит от формы площади A . Этот момент равен нулю, если одна из осей (в нашем случае ось η) есть ось симметрии. Дальнейшие подробности можно найти в разделе 2.4.

В случае нагружения давлением прямоугольной области с площадью $A = b \times t$, где b – ширина, расположенная вниз от свободной поверхности, аксиальные моменты будут равны

$$J_{\xi} = \int_0^t \eta^2 b d\eta = \frac{bt^3}{3} \text{ и } J_x = \int_{-t/2}^{t/2} y^2 b dy = \frac{bt^3}{12}.$$

Отсюда находим, $\eta_M = 2t/3$. Если ось η является осью симметрии, то $\xi_M = 0$. В качестве упражнения рекомендуется найти центр давления, когда площадь $A = b \times t$ сдвинута вниз на расстояние c от свободной поверхности.

Нагружение давлением сферической или круговой цилиндрической части стенки контейнера дает пространственно распределенную или плоскую систему сходящихся сил, соответственно. В обоих случаях возможно приведение к равнодействующей с линией действия, проходящей через общую точку приложения сил.

(§) Круговая цилиндрическая поверхность (рис. 2.23)

Сила, действующая на единицу длины ($p a d\phi$), проектируется на оси x и z , а затем производится суммирование параллельных компонент

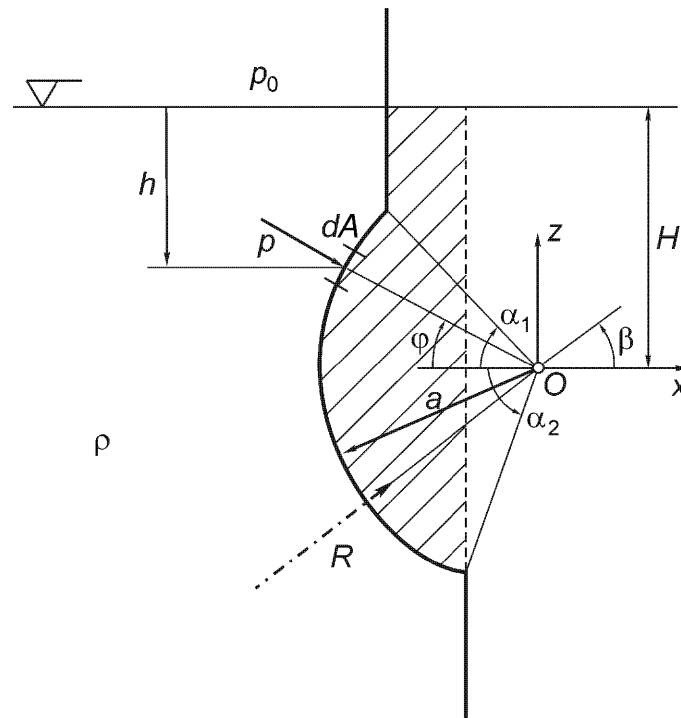


Рис. 2.23. Гидростатическое давление, действующее на круговую цилиндрическую стенку.

$$R_x = \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} (p a d\varphi \cos \varphi), \quad R_z = - \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} (p a d\varphi \sin \varphi).$$

Подстановка в последние формулы перепада давления, выраженного как функция полярного угла φ , дает выражения

$$R_x = g p a H \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \left(\cos \varphi - \frac{a}{2H} \sin 2\varphi \right) d\varphi = g p h_{S_x} a (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2),$$

$$R_z = -g p a H \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \left(\sin \varphi - \frac{a}{2H} (1 - \cos 2\varphi) \right) d\varphi = g p V,$$

где

$$V = H a \{ \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 + (a/2H) [\alpha_1 + \alpha_2 - (\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2)/2] \}$$

есть заштрихованный объем на единицу длины, показанный на рис. 2.23. Горизонтальная компонента R_x может быть вычислена непосредственно, так чтобы распределение давления действовало нормально к площади A_x , полученной в вертикальной плоскости путем проектирования цилиндрической поверхности на плоскость, перпендикулярную оси x . Поэтому получим

$$h_{S_x} = H \left[1 - \left(\frac{a}{2H} \right) (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \right].$$

Равнодействующая $R = (R_x^2 + R_z^2)^{1/2}$ проходит под углом β , отсчитанным от оси x , через общую точку приложения сил (центр круга), причем угол β находится из формулы $\operatorname{tg} \beta = R_z / R_x$.

(§) Гидростатическое давление на сферическую поверхность (рис. 2.24)

Рассмотрим вертикальную плоскость симметрии (x, z) при долготе $\varphi = 0$. Компонента силы в горизонтальном направлении x на глубине h имеет вид

$$dR_x = g p h dA \cos \vartheta \cos \varphi = g p h dA_x,$$

где ϑ – угол, определяющий широту. Интегрирование по площади эллипса $A_x = \pi a^2 \sin^2((\alpha_1 + \alpha_2)/2) \cos((\alpha_1 - \alpha_2)/2)$, представляющего x -проекцию сферической поверхности, дает

$$R_x = g p \int_{A_x} h dA_x = g p h_{S_x} A_x,$$

где

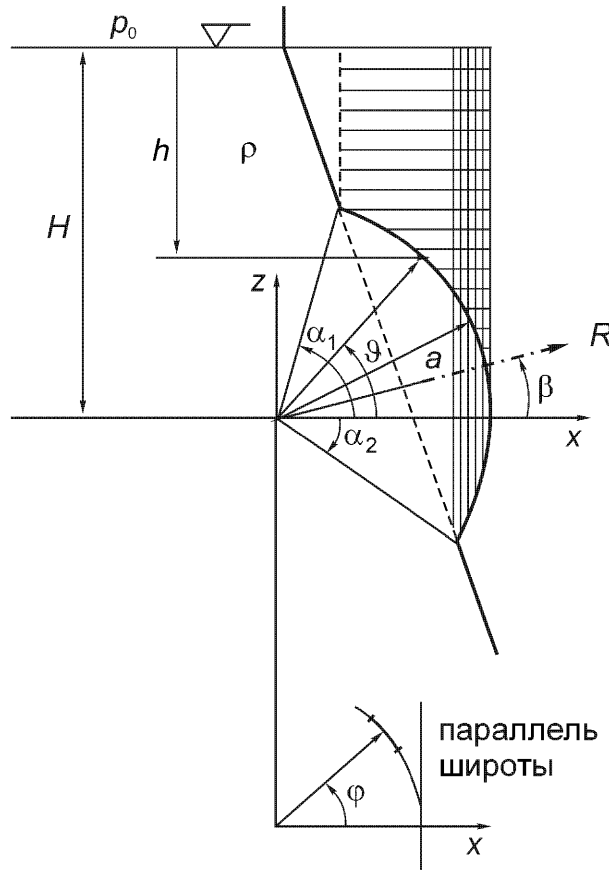


Рис. 2.24. Гидростатическое давление, действующее на сферическую часть стенки.

$$h_{S_x} = H[1 - (a/2H)(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)]$$

есть глубина центра A_x .

Интегрирование z -компоненты

$$dR_z = g\rho h dA \sin \vartheta = g\rho h dA_z$$

по площади проекции A_z дает разность объемов, заштрихованных на рис. 2.24, причем объем V_1 заштрихован горизонтально, а объем V_2 заштрихован вертикально. В самом деле:

$$\begin{aligned} R_z &= g\rho \int_{A_z} h dA_z = \\ &= -g\rho \frac{\pi a^3}{3} \left\{ \frac{3H}{a} (\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2} \left[(1 - \cos \alpha_1)^2 (2 + \cos \alpha_1) + (1 - \cos \alpha_2)^2 (2 + \cos \alpha_2) \right] \right\} = \\ &= g\rho (V_1 - V_2). \end{aligned}$$

(§) Гидростатическое нагружение двояко искривленной поверхности

В неявном виде такая поверхность, нагруженная водой в пространстве, например, арочная плотина, задается уравнением $f(x, y, z) = 0$, которое предполагается дифференцируемым. Вектор нормали \mathbf{e}_n задает направление сил манометрического давления на глубине h

$$p(h)dS\mathbf{e}_n, \quad p = \rho gh, \quad n_x/(\partial f/\partial x) = n_y/(\partial f/\partial y) = n_z/(\partial f/\partial z). \quad (2.107)$$

Горизонтальные компоненты нагружения равны $dX = p dS n_x$ и $dY = p dS n_y$, где направляющие косинусы выражаются формулами $n_{x,y} = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{x,y}$. Вертикальная компонента (положительная вверх) равна $dZ = p dS n_z$, $n_z = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_z$. Элемент поверхности, умноженный на направляющий косинус нормали, будет равен проекции этого элемента на соответствующую плоскость. Поэтому суммирование параллельных систем сил $dX = p dA_x$, $dY = p dA_y$, $dZ = p dA_z$ должно проводиться по спроектированным плоским областям A_x [в плоскости (y, z)], A_y [в плоскости (x, z)] и A_z [в горизонтальной плоскости (x, y)], соответственно, что позволит найти три результирующих распределенных силы. Две горизонтальные силы имеют ортогональные скрещивающиеся линии действия,

$$X_r = \rho g \int_{A_x} h dA_x = \rho g h_{S_x} A_x, \quad Y_r = \rho g \int_{A_y} h dA_y = \rho g h_{S_y} A_y, \quad (2.108)$$

а вертикальная сила пропорциональна объему V "выше" и нагруженной водой поверхности и ограниченного горизонтальной плоскостью $h = 0$,

$$Z_r = \rho g \int_{A_z} h dA_z = \rho g V. \quad (2.109)$$

Кроме величин глубин $h_{S_{x,y}}$ в центрах площадей A_x и A_y можно также найти координаты центров давления этих плоских областей, что можно сделать с помощью формул (2.103), где вместо координаты η_M нужно подставить $h_{M_{x,y}}$, соответственно. Линия действия силы Z_r проходит через геометрический центр объема V . Три взаимно перпендикулярные силы в этих положениях статически эквивалентны пространственно распределенным силам гидростатического нагружения (см. раздел 2.2).

В случае арочных дамб обычно строятся масштабированные модели, и тогда величины плоских областей A_x , A_y можно определить путем планиметрических экспериментов на соответствующим образом спроектированных поверхностях. Кроме того, объем V можно измерить, охватывая как-либо модель и заполняя полученный объем водой (или ртутью при масштабированном ста-

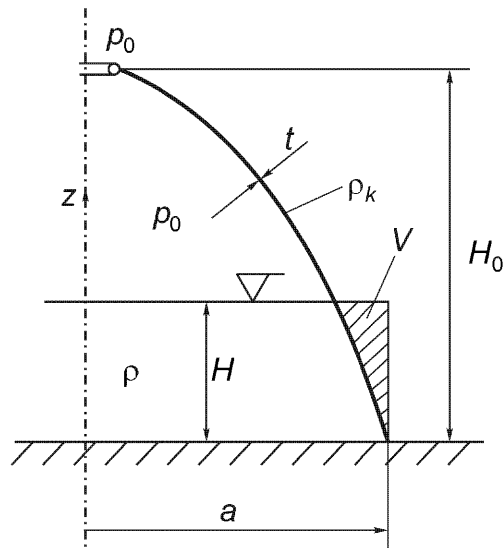


Рис. 2.25. Открытая, свободно стоящая параболическая оболочка вращения. «Подъемная сила».

тическом тестировании). Дважды подвешивая однородные пластины областей A_x и A_y , можно найти h_{S_x} и h_{S_y} , соответственно. Также подвешивание модели V из твердого тела позволяет экспериментально найти геометрический центр. Моменты инерции спроектированных областей можно вычислить путем численного интегрирования (например, аппроксимируя интегралы конечными суммами).

(§) Иллюстративный пример: подъемная сила

Довольно “неожиданный” эффект нагружения гидростатическим давлением можно наблюдать путем заполнения открытого и свободно стоящего сосуда, имеющего форму параболической тонкостенной оболочки вращения плотности ρ_k ; плотность жидкости равна ρ . Глубина H медленно увеличивается. Обозначив радиус основания через a , высоту сосуда через H_0 и толщину оболочки через t (причем $t \ll a$), получим формулу для веса оболочки G

$$G = g\rho_k t(2/3)2\pi aH_0 \{ [1 + (a/2H_0)^2]^{3/2} - (a/2H_0)^3 \}.$$

Здесь предположено, что отверстие в оболочке пренебрежимо мало (см. рис. 2.25).

Вертикальная, направленная вверх равнодействующая давления жидкости на оболочку действует вдоль оси оболочки и равна

$$R_z = g\rho V, \quad V = \pi a^2 (H^2 / 2H_0).$$

Положительность контактного давления на основание оболочки требует выполнения условия

$$G - R_z > 0,$$

откуда можно получить условие в более развернутом виде

$$(H/H_0)^2 < 2G/g\rho\pi a^2 H_0, \quad (H/H_0) < 1.$$

Высота заполнения сосуда ограничена даже в случае бетонных стенок, чтобы избежать возникновения подъемной силы.

2.3.4. Гидростатическая плавучесть

Рассматривается твердое тело, погруженное в однородную и несжимаемую жидкость, находящуюся в поле силы тяжести. Поверхностные элементы тела нагружены перпендикулярным к ним гидростатическим давлением $p = p_0 + g\rho h$. В сущности, твердое тело может быть заменено тем же объемом окружающей жидкости, который находится в покое и в равновесии при наличии того же поля поверхностных усилий. Поэтому вертикальная результирующая распределения давления на поверхности уравнивает вес вытесненного объема жидкости V_D , где вес равен $G_D = g\rho V_D$. Результирующая $R_z = A_S$ направлена вертикально вверх и называется силой гидростатической плавучести, ее величина следует из условия равновесия виртуального объема вытесненной жидкости

$$A_S - G_D = 0, \text{ или } A_S = g\rho V_D. \quad (2.110)$$

Точка приложения A_S есть геометрический центр S_D объема вытесненной жидкости V_D . Вес G_K тела приложен в его центре тяжести S_K , который, вообще говоря, отличается от S_D .

Необходимое условие равновесия тела, полностью погруженного в жидкость, имеет вид

$$G_K - A_S = 0, \quad (2.111)$$

что не зависит от средней глубины в случае, когда твердое тело имеет постоянный объем вытесненной жидкости. Так как моменты должны быть равны нулю, то возможны две равновесные конфигурации: S_K выше или ниже S_D (случай $S_K = S_D$ имеет лишь математический смысл). Легко проверить, что конфигурация, где S_K ниже S_D , не чувствительна к малым возмущающим моментам и поэтому является устойчивой равновесной конфигурацией, см. раздел 9.1. Твердое тело не чувствительно к поступательному перемещению. Малое вращательное возмущение наклоняет линию $S_K S_D$ от вертикального положения и создает пару сил G_K и $A_S = G_K$ с моментом. В устойчивой конфигурации вращающий момент нейтрализует возмущение и (квазистатически) возвращает тело обратно в равновесие. В противоположном случае, когда имеется неус-

тойчивое положение, момент действует в направлении увеличения возмущения, что приводит к возникновению опрокидывающего момента. Здесь статическая ситуация аналогична ситуации с жестким маятником, имеющим опору в точке S_D .

Плавучесть частично погруженного в жидкость плавающего тела определяется по выше полученным формулам, с учетом того, что окружающая тело жидкость является неоднородной с горизонтальной плоскостью раздела. Объем тела разделяется этой плоскостью на две части, и результирующая сила поверхностных усилий есть сумма $A_S = g\rho V_D + g\rho_A V_A$, где V_D есть объем нижней и более плотной жидкости и V_A есть объем верхней и менее плотной жидкости, обычно воздуха. В последнем случае $\rho_A \ll \rho$ и тогда с достаточной точностью получим

$$A_S = g\rho V_D, \quad (2.112)$$

где V_D обозначает объем, вытесненный только жидкостью. Так как эффекты поверхностного натяжения здесь не рассматриваются, то все связанные с этим специальные проблемы, например, «плавание на воде лезвия бритвы», здесь исключаются. Равновесие конфигурации плавающего тела требует выполнения условия

$$G_K = g\rho V_D. \quad (2.113)$$

Устойчивость для сильно неоднородного плавающего тела, когда точка S_K расположена ниже точки S_D , определяется аналогично случаю полностью погруженного тела. Малое произвольное возмущение создает восстанавливающие силы и моменты. Иная ситуация возникает в случае однородного плавающего тела и в общем случае, если точка S_K выше точки S_D . Возвращающие силы возникают, по-прежнему, при поступательном движении в вертикальном направлении, но, в противоположность случаю полностью погруженного тела, вращательное возмущение может создать восстанавливающий момент (например, если поперечное сечение корабля оптимизировано для создания стабилизирующих моментов).

Ниже рассматривается плавание однородного кругового цилиндра плотности ρ_S , причем отдельно рассмотрены случаи вертикального и лежащего горизонтального положения.

(§) Вертикально плавающий цилиндр: устойчивость (рис. 2.26)

Глубина погружения цилиндра в жидкость t находится из уравнения равновесия

$$G_K - A_S = 0,$$

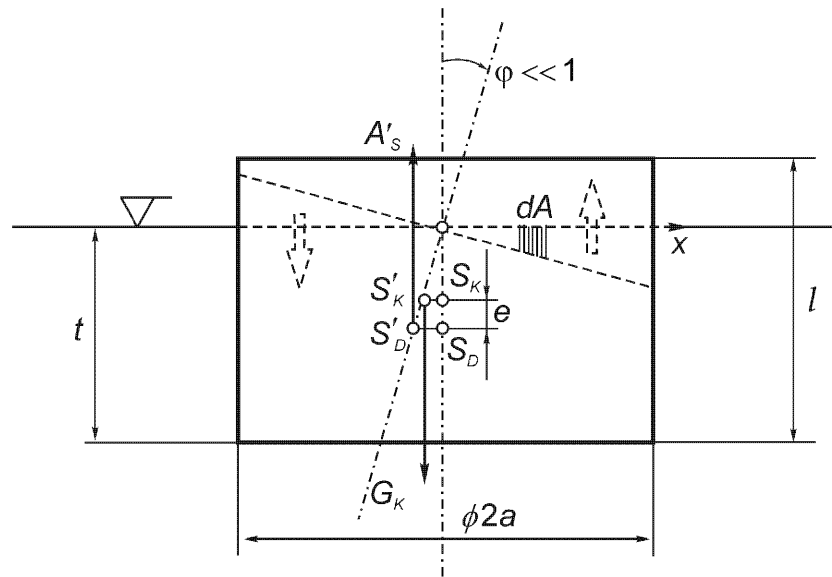


Рис. 2.26. Цилиндр, плавающий в вертикальном положении. Возмущение равновесной конфигурации.

откуда следует, что

$$t/l = \rho_S / \rho < 1.$$

Вращательное возмущение $\varphi \ll 1$ создает аксиальный момент, который можно разложить на две части согласно рис. 2.26

$$\delta M_y = g\rho \int_A (dA x \varphi x) - A'_S e \varphi > 0, \quad A'_S = A_S. \quad (2.114)$$

Полученное неравенство дает возвращающий момент и потому выражает условие устойчивости. Интегрирование проводится по горизонтальному поперечному сечению $A = \pi a^2$ в плоскости (x, y) на уровне жидкости, что дает момент инерции

$$J_y = \int_A x^2 dA = \frac{\pi}{4} a^4,$$

который вместе с выражением $A_S = g\rho \pi a^2 t$ нужно подставить в неравенство (2.114). В итоге получим геометрическое условие устойчивости

$$(2a)^2 / l^2 > 8(\rho_S / \rho)(1 - \rho_S / \rho).$$

Учитывая, что $\max\{(\rho_S / \rho)(1 - \rho_S / \rho)\} = 1/4$, можно получить достаточное условие

$$(2a/l) > \sqrt{2}.$$

«Только короткий (не квадратный в поперечном сечении, сплюснутый) цилиндр может устойчиво плавать в вертикальном положении.»

Возвращающий момент можно выразить через возникающую пару сил, а именно вес цилиндра G_K в точке S'_K и силу плавучести A_S , приложенную в геометрическом центре S''_D актуального, возмущенного объема вытесненной жидкости

$$\delta M_y = A_S H_M \varphi > 0, \quad (2.115)$$

где величина φH_M определяется из формулы (2.114) как расстояние по перпендикуляру между силами пары сил в возмущенной конфигурации. Тогда в (2.115) угол φ сокращается, и неравенство сводится к условию $H_M > 0$, где H_M называются высотой метацентра. Пересечение оси наклонного цилиндра и вертикальной линии действительного действия силы A_S есть точка выше S_K в устойчивой конфигурации. В этом примере можно получить условие устойчивости в виде

$$H_M/l = (a/2l)^2 \rho/\rho_S - (1 - \rho_S/\rho)/2 > 0.$$

(§) Плавающий цилиндр с горизонтальной осью: устойчивость

В этом случае длина дуги $a\alpha$ нагруженной жидкостью поверхности используется вместо глубины погружения t , что позволяет найти объем вытесненной жидкости в виде $V_D = (1/2)a^2(\alpha - \sin\alpha)l$. Условие равновесия требует выполнения условия $A_S = G_K$, что позволяет получить нелинейное уравнение для определения угла α

$$\alpha - \sin\alpha = 2\pi\rho_S/\rho, \quad \alpha < 2\pi.$$

Так как имеют место формулы

$$\overline{S_K S_D} = \frac{2}{3\pi} \frac{\rho}{\rho_S} a \sin^3 \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad J_y = \frac{l^3 2 a \sin \frac{\alpha}{2}}{12},$$

то для высоты метацентра получаем условие

$$H_M/a = \frac{2\rho}{3\pi\rho_S} \left(\frac{l^2}{(2a)^2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Геометрическое условие устойчивого плавания после анализа предыдущего неравенства принимает вид

$$(l/2a) > \sin \alpha/2.$$

Достаточное условие имеет простой вид: $(l/2a) > 1$; т.е. вытянутый цилиндр может устойчиво плавать горизонтально. Между вертикальным и горизонтальным плаванием существуют устойчивые конфигурации с наклонной осью цилиндра. Из-за более сложной геометрии эти промежуточные случаи не будут рассматриваться здесь.

(§) Плавучесть

Понятие гидростатической подъемной силы сохраняется также для тел, погруженных в жидкость, которые имеют опоры или, с математической точки зрения, прикреплены к точкам или закреплены вдоль линий в окружающей жидкости. Плавание шарнирно закрепленного, однородного, жесткого стержня постоянного поперечного сечения A иллюстрирует приближенное применение уравнения (2.110), рис. (2.27).

Не учитывая наклонное пересечение свободной поверхности со стержнем, объем вытесненной жидкости $V_D = A l_F$ используется для аппроксимации результирующей гидростатического давления путем силы плавучести $A_S = g \rho V_D$ в уравнении моментов для текущей конфигурации

$$(1/2)(G_K l - A_S l_F) \cos \alpha = 0, \quad G_K = g \rho_K A l.$$

При $\alpha \neq \pi/2$ получаем формулу для длины, подверженной давлению жидкости,

$$l_F/l = H/l \sin \alpha = \sqrt{(\rho_K/\rho)} \leq 1.$$

Сила вертикальной реакции в точке B передается на шарнирную опору, это реакция находится из уравнения равновесия $B + A_S - G_K = 0$, что дает

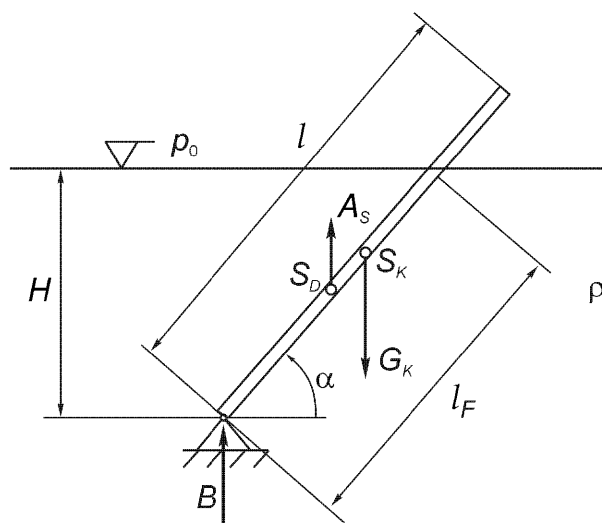


Рис. 2.27. «Плавучесть» жесткого, шарнирно закрепленного стержня, находящегося под действием жидкости по его поверхности.

$$B = G_K [1 - \sqrt{(\rho/\rho_K)}] < 0.$$

Второе решение для уравнения моментов имеет вид $\alpha = \pi/2$ и для стержня в вертикальном положении $A_S = g\rho AH$, $l_F = H < l$, тогда сила реакции имеет вид

$$B = G_K(1 - \rho H/\rho_K l).$$

Вертикальное положение равновесия устойчиво при условии

$$\delta M_y = A_S \frac{H}{2} \varphi - G_K \frac{l}{2} \varphi > 0, \quad 0 < \varphi \ll 1,$$

что после сокращения на φ приводит к окончательному результату

$$\rho_K/\rho < \left(\frac{H}{l}\right)^2 < 1.$$

2.4. Моменты инерции плоской фигуры A и правила их преобразования

После выбора декартовой системы координат (x, y) в плоскости данной плоской фигуры A (см. рис. 2.28) аксиальные моменты инерции определяются двойными интегралами по данной области

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA, \quad (2.116)$$

а также можно определить девiatorный, или центробежный момент инерции, называемый также произведением инерции,

$$J_{xy} = \int_A xy dA. \quad (2.117)$$

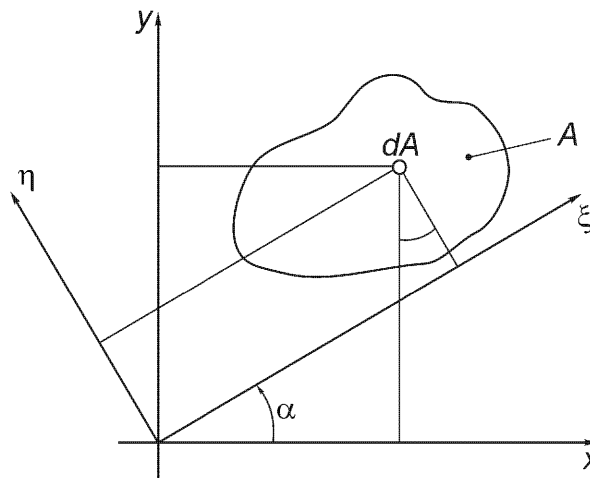


Рис. 2.28. Плоская фигура A и две повернутые системы координат.

Эти моменты второго порядка зависят от формы и размеров области A , а также ее расположения и ориентации относительно осей координат (x, y) . Размерность моментов инерции равна длине в четвертой степени, например, $[м^4]$. Для многих поперечных сечений из обработанных металлических профилей эти моменты помещены в таблицах для инженеров, работающих в области механической и строительной инженерии. Смотрите, например,

- Dubbels Taschenbuch für den Maschinenbau (W.Beitz и K.H.Küttner, Red.), Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 14. Auflage, 1981.

Центробежные моменты могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Это мера отклонения распределения площадей фигуры от симметрии. Если какая-либо из осей x или y есть ось симметрии, то $J_{xy} = 0$. Если формулы (2.116) и (2.117) проинтегрировать (аналитически или численно) при выбранной паре осей, то моменты второго порядка относительно параллельных осей координат или относительно координат, повернутых на угол α , могут быть определены без дальнейших и, возможно, трудоемких интегрирований.

(§) Моменты инерции относительно параллельных осей

Возьмем ось ξ , параллельную оси x , при расстоянии между осями, равном b . Тогда имеем соотношение между координатами $\eta = y + b$. Подставив это соотношение в определение аксиального момента инерции, получим

$$J_{\xi} = \int_A \eta^2 dA = \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + b^2 A = J_x + b^2 A + 2b \int_A y dA.$$

В общем, необходимо знать статический момент относительно оси x . Если ось x проходит через геометрический центр плоской фигуры, то статический момент относительно центральной оси равен нулю по определению, и мы приходим к формуле Штейнера

$$J_{\xi} = J_x + b^2 A. \quad (2.118)$$

Здесь x есть центральная ось, а ξ – ось, параллельная центральной оси на расстоянии b . Аналогичные вычисления можно провести для оси η , параллельной оси y на расстоянии a между осями. Тогда связь координат имеет вид: $\xi = x + a$, что приводит к формуле

$$J_{\eta} = \int_A \xi^2 dA = \int_A x^2 dA + 2a \int_A x dA + a^2 A = J_y + a^2 A + 2a \int_A x dA.$$

Если ось y является центральной, то статический момент относительно этой оси равен нулю, и мы получим

$$J_{\eta} = J_y + a^2 A. \quad (2.119)$$

Здесь ось η параллельна центральной оси y на расстоянии a между ними.

Деваторный момент $J_{\xi\eta}$ может также быть преобразован. Имеем связь координат $\xi = x + a$, $\eta = y + b$, в результате получим

$$\begin{aligned} J_{\xi\eta} &= \int_A \xi\eta dA = \int_A xy dA + a \int_A y dA + b \int_A x dA + ab A = \\ &= J_{xy} + abA + a \int_A y dA + b \int_A x dA. \end{aligned}$$

Если обе оси x и y являются ортогональными центральными осями, то все статические моменты равны нулю, и преобразование приобретает форму

$$J_{\xi\eta} = J_{xy} + abA, \quad (2.120)$$

здесь ξ и η – оси, проходящие на расстояниях a и b от центральных осей x и y , соответственно.

(§) Моменты инерции относительно повернутых осей (круг Мора)

Поворот системы координат вокруг оси z на угол α дает в соответствии с рис. 2.28 линейные соотношения $\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, $\eta = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$. Ортогональное векторное преобразование

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

описывает вышеприведенные соотношения и содержит хорошо известную косимметричную матрицу \mathbf{D} . Подстановка в определения моментов второго порядка дает, используя известные формулы для тригонометрических функций,

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= \int_A \eta^2 dA = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha, \\ J_{\eta} &= \int_A \xi^2 dA = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha, \end{aligned}$$

$$J_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \quad (2.122)$$

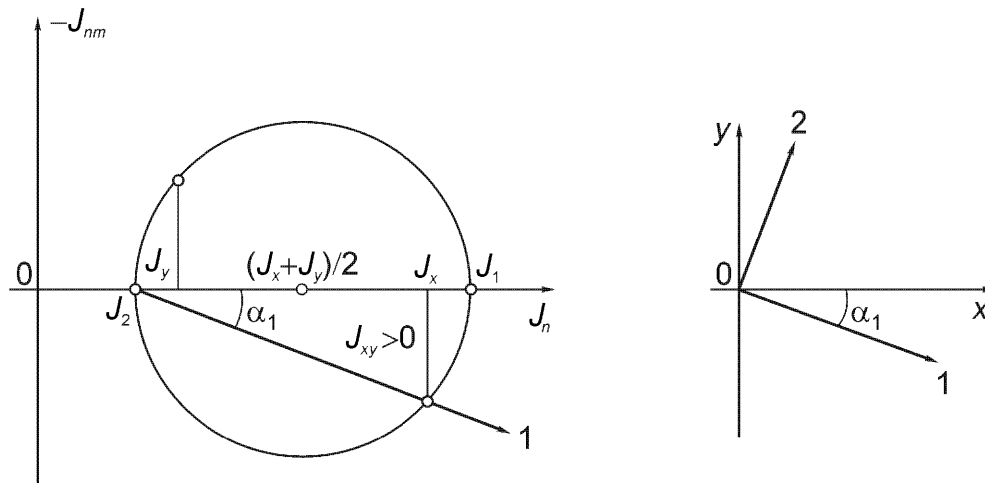


Рис. 2.29. Круг Мора для тензора инерции. Заданные величины:

$$J_x, J_y, J_{xy} > 0. \text{ Искомые величины: } J_1, J_2, \alpha_1.$$

Соотношения (2.122) представляют собой формулы преобразования компонент плоского тензора, см. формулы (2.13) и (2.14). Поэтому тензор инерции по отношению к повернутым осям координат выражается произведением матрицы вращения на исходный тензор инерции и на транспонированную матрицу вращения

$$\begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{pmatrix} \mathbf{D}^T, \quad (2.123)$$

что представляет собой преобразование подобия. Уравнение (2.122) определяет круг Мора (аналогичный кругу Мора для плоского напряженного состояния) в правой части плоскости $[(J_\xi, J_\eta), -J_{\xi\eta}]$ с центром на оси абсцисс в точке $(J_x + J_y)/2 = (J_\xi + J_\eta)/2$ и проходящий через точки $(J_\xi, -J_{\xi\eta}), (J_\eta, J_{\xi\eta})$. Главные моменты инерции равны

$$J_{1,2} = (J_x + J_y)/2 \pm (1/2)[(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2]^{1/2}, \quad (2.124)$$

соответственно ортогональным осям 1 и 2, причем угол α_1 , отсчитываемый от оси x , определяет направление главной оси 1

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -2J_{xy}/(J_x - J_y). \quad (2.125)$$

Последняя формула следует также из рис. 2.29. Девiatorный момент $J_{12} = 0$.

Полярный момент инерции, который есть также момент инерции относительно оси z , перпендикулярной чертежу, применяется в некоторых задачах. Этот момент определяется по формуле

$$J_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = J_x + J_y. \quad (2.126)$$

Так как момент инерции J_p не зависит от выбора осей координат x и y , то формула (2.126) выражает первый инвариант тензора инерции, а именно: $J_x + J_y = J_1 + J_2$ при повороте системы координат вокруг оси z .

(§) Эллипс инерции

С помощью радиуса инерции $i_x > 0$, определяемого по формуле

$$J_x = A i_x^2, \quad i_x = (J_x/A)^{1/2}, \quad (2.127)$$

имеющего главные радиусы $i_1 = (J_1/A)^{1/2}$ и $i_2 = (J_2/A)^{1/2}$, можно ввести радиальную координату, которая обратно пропорциональна введенному радиусу инерции

$$r = i_1 i_2 / i_x. \quad (2.128)$$

Если применить первую из формул (2.122), взяв в качестве исходных главные оси, то получим $J_x = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha$, где теперь угол α отсчитывается от главной оси 1 к повернутой оси x . Подставляя далее величины радиусов инерции, получим уравнение эллипса инерции (данное преобразование предложено Кульманом)

$$1 = [(r/i_2) \cos \alpha]^2 + [(r/i_1) \sin \alpha]^2. \quad (2.129)$$

Здесь в качестве осей эллипса взяты главные оси, а декартовы координаты точек эллипса находятся по формулам $x = r \cos \alpha$ и $y = r \sin \alpha$. Если принять, что $i_1 > i_2$, то большая полуось эллипса i_1 ортогональна главной оси 1. Центральный эллипс инерции можно построить, если рассмотреть геометрический центр фигуры A за начало отсчета. Тензор инерции изображается эллипсом, так как $J_1, J_2 > 0$. Коническое сечение, связанное с симметричным тензором общего вида (например, тензором плоской деформации или тензором плоских напряжений), может привести к получению не только эллипса, но также гиперболы или параболы. Тензор инерции при трехмерном распределении масс [формула (7.54)] представляется эллипсоидом, имеющим возможные свойства симметрии.

(§) Пример: центральный эллипс прямоугольника, $A = B \times H$

Две центральные оси, параллельные сторонам прямоугольника, являются осями симметрии и потому центральными главными осями. Если $J_1 = BH^3/12 > J_2 = HB^3/12$, то отношение $i_1/i_2 = H/B$ и главный радиус инерции равен $i_1 = H\sqrt{3}/6 \cong 0,289 H$.

2.5. Статика простых конструкций

Рассматриваются тонкие одномерные структуры типа стержней, балок, рам, тросов, а также фермы под действием заданных внешних нагрузок. Напряженное состояние этих систем обычно упрощается, и затем статически эквивалентные внутренние силы заменяют распределенные напряжения. Рассмотрение равновесия балочного элемента производится, как правило, в состоянии «замороженных» деформаций, т.е. по отношению к недеформированному состоянию. Для идеализированного элемента троса рассмотрение равновесия проводится при предположении нерастяжимости троса.

2.5.1. Балки и рамы

Тонкая криволинейная балка в общем случае нагружения разрезается вдоль поперечного сечения в положении, определяемым длиной дуги s , и используется локальная система координат (см. рис. 2.30). Вектор напряжений σ_x раскладывается на нормальное напряжение σ_{xx} в направлении, касательном по отношению к оси балки (последняя определяется как линия, которая соединяет геометрические центры поперечных сечений и имеет дуговую координату s), и на два касательных напряжения, σ_{xy} и σ_{xz} , лежащих в плоскости поперечного сечения. Стержень или балка есть тонкое тело, характерные размеры поперечных сечений которого меньше, чем общая длина дуги (пролет). В результате, тензор напряжений аппроксимируется компонентами напряжений σ_{xx} , $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, пренебрегая другими четырьмя компонентами σ_{yy} , σ_{zz} , $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$. Имеются случаи, когда последние компоненты напряжений не малы, например, в некоторых композитах, в этих случаях нужно использовать обобщенные теории балок. В дальнейшем предполагается, что упрощенное напряженное состояние дает хорошую аппроксимацию, и внутренние силы $\sigma_x dA$, распределенные по плоскому поперечному сечению A , приводятся к точке O ,

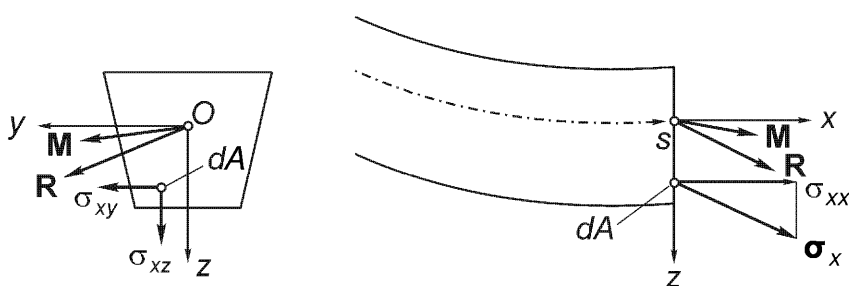


Рис. 2.30. Результирующие внутренних сил $\sigma_x dA$ по поперечному сечению. Поперечное сечение с положительной нормалью (в направлении оси x).

началу координат y, z в плоскости, статически эквивалентным образом (см. рис. 2.30)

$$\mathbf{R} = \int_A \boldsymbol{\sigma}_x dA, \quad \mathbf{M} = \int_A (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_x) dA, \quad \mathbf{r} = y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z. \quad (2.130)$$

Направления осей координат относительно оси балки показывают технические характеристики компонент внутренней результирующей силы $\mathbf{R} = N \mathbf{e}_x + Q_y \mathbf{e}_y + Q_z \mathbf{e}_z$.

Аксиальная, или нормальная сила

$$N(s) = \int_A \sigma_{xx} dA, \quad (2.131)$$

где

$$N/A = (1/A) \int_A \sigma_{xx} dA$$

означает среднее распределения нормальных напряжений при $s = \text{const}$, что дает однородно распределенные нормальные напряжения в случае чистого растяжения или сжатия; см. формулу (2.4) при $F = N$.

Сдвиговые силы

$$Q_y(s) = \int_A \sigma_{xy} dA, \quad Q_z(s) = \int_A \sigma_{xz} dA, \quad (2.132)$$

где

$$Q_i/A = (1/A) \int_A \sigma_{xi} dA, \quad (i = y, z),$$

определяют математическое среднее касательных компонент напряжений при $s = \text{const}$. Инженерные приложения таких постоянных касательных напряжений можно найти в приближенных формулах для конструирования тонкостенных конструкций.

В случае прямой балки, $s = x$, центральное нагружение в аксиальном направлении дает $Q_y = Q_z = 0$ и также $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, и поэтому можно рассматривать напряженное состояние как чистое растяжение или сжатие стержня под действием аксиальной силы N со средним нормальным напряжением N/A .

Аксиальные моменты внутренних сил можно найти, формально раскладывая определитель, соответствующий векторному произведению векторов,

$$\mathbf{M} = \int_A \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & y & z \\ \sigma_{xx} dA & \sigma_{xy} dA & \sigma_{xz} dA \end{vmatrix} = M_x \mathbf{e}_x + M_y \mathbf{e}_y + M_z \mathbf{e}_z,$$

$$M_x = \int_A (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA, \quad M_y = \int_A z \sigma_{xx} dA, \quad M_z = - \int_A y \sigma_{xx} dA. \quad (2.133)$$

Изменение отсчетной точки от O к $A'(y = b, z = c)$ дает после применения формулы (2.60) выражение для нового вектора-момента

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} - \mathbf{a} \times \mathbf{R} = M'_x \mathbf{e}_x + M'_y \mathbf{e}_y + M'_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{a} = b \mathbf{e}_y + c \mathbf{e}_z$$

и для новых аксиальных моментов

$$M'_x = M_x - (bQ_z - cQ_y), \quad M'_y = M_y - cN, \quad M'_z = M_z + bN. \quad (2.134)$$

Появление компонент вектора \mathbf{R} в этих выражениях означает рассмотрение двух групп внутренних сил отдельно: (Q_y, Q_z, M_x) и (N, M_y, M_z) . Последнее может быть приведено статически эквивалентным образом к нормальной силе $N \neq 0$, приложенной эксцентрично в некоторой точке $A' = A_N$ с координатами

$$y_N = b = -M_z/N, \quad z_N = c = M_y/N, \quad M'_y = M'_z = 0 \quad (2.135)$$

с началом координат в точке O .

Другая точка приведения $A' = S$ может быть выбрана так, чтобы аксиальные моменты M'_y и M'_z стали независимыми от аксиальной силы N , или, эквивалентно, не зависели от распределения нормальных напряжений $\sigma'_{xx}(y, z, s)$, вызванного N (т.е., например, не зависели от однородного среднего напряжения $\sigma'_{xx} = N/A$). Если мы положим $\sigma_{xx} = \sigma'_{xx} + \sigma''_{xx} + \sigma'''_{xx}$, где выполняются соотношения

$$\int_A \sigma'_{xx} dA = N, \quad \int_A \sigma''_{xx} dA = 0$$

и где σ''_{xx} означает самоуравновешенное распределение напряжений, у которого и нормальная сила, и момент равны нулю,

$$\int_A \sigma''_{xx} dA = 0, \quad \int_A z \sigma''_{xx} dA = \int_A y \sigma''_{xx} dA = 0,$$

то соотношение (2.134) дает после подстановки

$$M'_y = \int_A z (\sigma'_{xx} + \sigma''_{xx}) dA - cN, \quad M'_z = - \int_A y (\sigma'_{xx} + \sigma''_{xx}) dA + bN. \quad (2.136)$$

Предположение о независимости моментов сил $\sigma''_{xx} dA$ от расположения точки отсчета, т.е.

$$M'_y = \int_A z \sigma''_{xx} dA, \quad M'_z = -\int_A y \sigma''_{xx} dA$$

позволяет найти координаты новой точки приведения, сравнивая это выражение с формулой (2.136),

$$b = (1/N) \int_A y \sigma'_{xx} dA, \quad c = (1/N) \int_A z \sigma'_{xx} dA. \quad (2.137)$$

Если имеется какая-либо ось симметрии, проходящая через геометрический центр поперечного сечения, например, ось z , и если нормальные напряжения σ'_{xx} по крайней мере четно распределены относительно этой оси, то первая из написанных выше формул дает, если мы положим $y = y_S + y'$ (подынтегральная функция $y' \sigma'_{xx}$ будет кососимметричной)

$$b = (1/N) \int_A y_S \sigma'_{xx} dA + (1/N) \int_A y' \sigma'_{xx} dA = y_S. \quad (2.138)$$

В этом случае точка приложения аксиальной силы находится на оси симметрии в точке s .

Для поперечного сечения с двумя осями симметрии и если напряжения σ'_{xx} четно распределены также относительно оси y , получим

$$c = (1/N) \int_A z_s \sigma'_{xx} dA + (1/N) \int_A z' \sigma'_{xx} dA = z_s. \quad (2.139)$$

Следовательно, получили, что отсчетная точка находится в центре S поперечного сечения. Обычно в этом случае с двумя осями симметрии для однородного сечения напряжения $\sigma'_{xx} = N/A$ являются постоянными средними напряжениями. Поэтому интегралы по поперечному сечению

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA, \quad M_y = \int_A z \sigma_{xx} dA, \quad M_z = -\int_A y \sigma_{xx} dA$$

(оси y и z являются центральными осями) представляют аксиальную силу N и изгибающие моменты M_y , M_z , соответственно. В этом случае моменты не зависят от аксиальной силы N , приложенной в центре S поперечного сечения.

Оставшаяся группа сил (Q_y, Q_z, M_x) в точке O может быть приведена статически эквивалентным образом к точке, где $M'_x = 0$. Формула (2.134) при этом условии дает уравнение прямой линии ($y = b, z = c$),

$$bQ_z - cQ_y = M_x. \quad (2.140)$$

В любой из этих точек (b, c) группа внутренних сил (Q_y, Q_z, M_x) статически эквивалентна эксцентрично приложенной результирующей сдвиговой силе $Q = (Q_y^2 + Q_z^2)^{1/2}$.

Поиск точки приведения $A' = A_N$, где аксиальный момент M'_x будет не зависеть от силы Q , может быть проведен аналогично.

Запишем сдвиговые напряжения в виде $\sigma_{xi} = \sigma'_{xi} + \sigma''_{xi} + \sigma'''_{xi}$, $i = y, z$, где напряжение σ'_{xi} обозначает касательное напряжение кручения, среднее значение этих напряжений равно нулю,

$$\int_A \sigma'_{xy} dA = \int_A \sigma'_{xz} dA = 0,$$

напряжения σ''_{xi} имеют результирующие,

$$Q_i = \int_A \sigma''_{xi} dA, \quad i = y, z,$$

а напряжения σ'''_{xi} являются самоуравновешенными касательными напряжениями. После подстановки в первую из формул (2.134) получим

$$M'_x = \int_A [y(\sigma'_{xz} + \sigma''_{xz}) - z(\sigma'_{xy} + \sigma''_{xy})] dA - (bQ_z - cQ_y).$$

Здесь введен крутящий момент, $M_T = M'_x$, который по определению равен

$$M_T = \int_A [y\sigma'_{xz} - z\sigma'_{xy}] dA, \quad (2.141)$$

так как, если новая точка приведения выбрана на прямой линии, параллельной вектору \mathbf{Q} , то имеет место равенство

$$\int_A [y\sigma''_{xz} - z\sigma''_{xy}] dA = bQ_y - cQ_z. \quad (2.142)$$

В общем случае $\sigma''_{xi} \neq \text{const}$, и потому $b \neq y_S$, $c \neq z_S$. Точка приведения $A' = A_M$ называется центром сдвига. В случае, когда имеется ось симметрии, параллельная оси z , и компонента сдвигового напряжения σ''_{xz} распределена четным образом относительно этой оси, центр сдвига расположен на этой оси симметрии. Полагая $y = y_S + y'$ и сравнивая соответствующие члены в уравнении (2.142), получим при сделанных предположениях

$$\int_A [(y_S + y')\sigma''_{xz} - z\sigma''_{xy}] dA = y_S Q_z - \int_A z\sigma''_{xy} dA = bQ_z - cQ_y,$$

$$b = y_S, \quad c = (1/Q_y) \int_A z\sigma''_{xy} dA. \quad (2.143)$$

Аналогично при наличии двух осей симметрии поперечного сечения, предполагая дополнительно четное распределение касательных напряжений σ''_{xy} относительно оси y , а также делая замену $z = z_S + z'$,

$$\int_A z\sigma''_{xy} dA = \int_A (z_S + z')\sigma''_{xy} dA = z_S Q_y = cQ_y, \quad c = z_S. \quad (2.144)$$

Следовательно, только для «однородного» поперечного сечения с двумя осями симметрии геометрический центр сечения становится центром сдвига, и потому это особая точка приведения для обеих систем внутренних сил. Иными словами, $M_x = M_T$ есть крутящий момент (независящий от величин сдвиговых сил) и M_y, M_z являются изгибающими моментами (независимо от аксиальной силы N). Во всех других, более общих случаях определение крутящего момента при любом нагружении кручения и сдвига требует знания расположения центра сдвига A_M [см. формулу (6.118)], а также определения геометрического центра S . Значение этой точки в статике в некоторых случаях уменьшается, например, для композитных балок; для температурных напряжений, см. формулу (6.93).

2.5.1.1. Локальное равновесие плоского арочного и плоского балочного элемента (рис. 2.31)

Криволинейная балка предполагается свободной от кручения, и равновесие элемента балки (диаграмма равновесия показана на рис. 2.31) дает соотношение между аксиальной и сдвиговой силами и изгибающим моментом при данной внешней нагрузке на единицу длины, q_r и q_φ . При этом компоненты нагрузки определяются объемными силами (например, вес) и поверхностными усилиями при их приведении к оси балки. Далее мы не рассматриваем какие-либо распределенные внешние моменты. Для решения задачи вводим локальные полярные координаты r, φ , а также декартовы координаты y, z сечения. Результирующие внутренних сил в положительных направлениях координат приложены в поперечном сечении с направлением внешней нормали в сторону увеличения длины дуги, $(s + ds)$; силы в противоположных направлениях действуют в сечении с длиной дуги s .

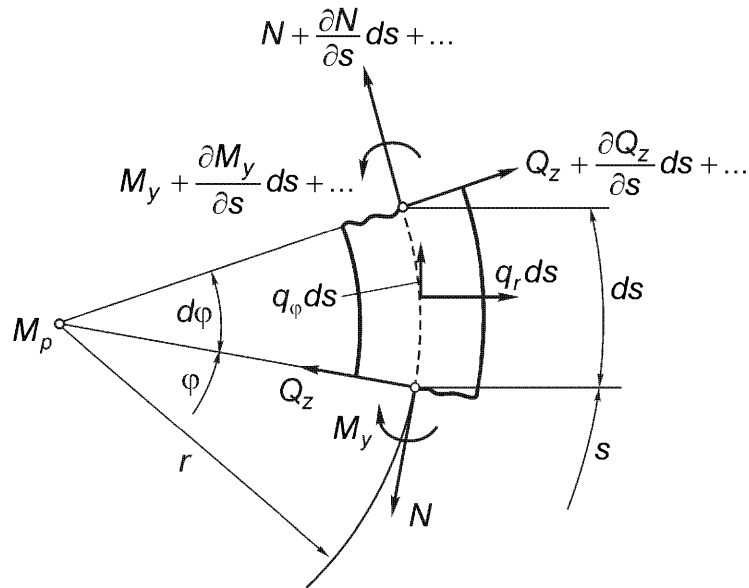


Рис. 2.31. Диаграмма равновесия плоского элемента арки при сдвиговом нагружении.

Плоская система сил N , $Q_z = Q$, $M_y = M$, приложенных в сечениях s и $s + ds$, соответственно, а также силы $q_r ds$, $q_\phi ds$ образуют уравновешенную систему сил.

Запишем баланс сил в радиальном направлении (r или z), используя при этом линейную аппроксимацию для $Q_z(s + ds)$ (это показано явно, вводя $o(ds^2)$ как члены второго порядка малости),

$$Q(s) + (dQ/ds)ds + q_r ds - Q(s) - N(s)d\phi + o(ds^2) = 0.$$

Вводя здесь длину элемента $ds = r(s)d\phi$, где r^{-1} есть кривизна оси балки, и переходя к пределу при $d\phi \rightarrow 0$, получим точное дифференциальное условие равновесия

$$dQ/ds - N/r = -q_r. \quad (2.145)$$

В тангенциальном направлении (ds или x) равенство нулю суммы сил дает [линейное разложение $N(s + ds)$ указано явно]

$$N(s) + (dN/ds)ds + q_\phi ds - N(s) + Q(s)d\phi + o(ds^2) = 0,$$

что в пределе при $d\phi \rightarrow 0$ дает условие равновесия

$$dN/ds + Q/r = -q_\phi. \quad (2.146)$$

Далее, сумма аксиальных моментов относительно оси y равна нулю; $M(s + ds)$ линейно аппроксимируется по аналогии с предыдущим, что дает

$$M(s) + (dM/ds)ds - M(s) - Q(s)d\varphi + o(ds^2) = 0.$$

Переходя к пределу при $d\varphi \rightarrow 0$, получим точное соотношение между сдвиговой силой и изгибающим моментом

$$Q_z = dM_y/ds. \quad (2.147)$$

Эти три дифференциальных уравнения локального равновесия сразу становятся независимыми друг от друга, если ось балки есть прямая линия (приближенно или точно после деформации соответствующим образом предеформированной балки), в этом случае $r^{-1} \rightarrow 0$, $d\varphi \rightarrow 0$. Так как $ds = r d\varphi = dx$, в этом случае уравнения легко интегрируются. Получим

$$\frac{dN}{dx} = -q_x, \quad N(x) = N_0 - \int_0^x q_x(\xi) d\xi, \quad N(0) = N_0, \quad (2.148)$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z, \quad Q_z(x) = Q_0 - \int_0^x q_z(\xi) d\xi, \quad Q_z(0) = Q_0. \quad (2.149)$$

Уравнение (2.147) теперь принимает вид $dM_y/dx = Q_z$ и после дифференцирования и подстановки из (2.149) становится линейным дифференциальным уравнением второго порядка для определения изгибающего момента

$$d^2M_y/dx^2 = -q_z. \quad (2.150)$$

Интегрируя дважды уравнение (2.150) или, альтернативно, один раз уравнение (2.149) для Q_z , получим

$$M_y(x) = Q_0 x + M_0 - \int_0^x \left(d\eta \int_0^\eta q_z(\xi) d\xi \right), \quad M_y(0) = M_0,$$

где появились две константы интегрирования Q_0 и M_0 . Двойной интеграл может быть заменен интегралом типа свертки путем интегрирования по частям

$$\int_0^x (d\eta Q_z(\eta)) = [\eta Q_z(\eta)]_0^x - \int_0^x \eta \frac{dQ_z}{d\eta} d\eta = x Q_z(x) + \int_0^x \xi q_z(\xi) d\xi = - \int_0^x (x - \xi) q_z(\xi) d\xi,$$

и изгибающий момент может быть найден однократным интегрированием поперечной нагрузки с взвешивающей функцией

$$M_y(x) = Q_0 x + M_0 - \int_0^x (x - \xi) q_z(\xi) d\xi. \quad (2.151)$$

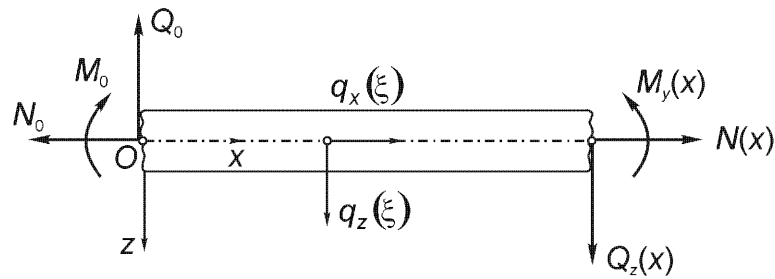


Рис. 2.32. Диаграмма равновесия конечного элемента прямой балки, нагруженной растягивающей и сдвиговой нагрузкой.

Приведенное здесь вычисление силовых факторов поперечного сечения может быть проверено рассмотрением равновесия конечного элемента прямой балки длины x . В соответствии с диаграммой равновесия сил, показанной на рис. 2.32, которую можно применить для любой конкретной прямолинейной балки, плоская система сил определяется величинами $q_x(\xi)d\xi$, N , $q_z(\xi)d\xi$, Q_z , M_y . Поэтому уравнения

$$N(x) + \int_0^x q_x(\xi) d\xi - N_0 = 0, \quad Q_z(x) + \int_0^x q_z(\xi) d\xi - Q_0 = 0$$

отражают условия равновесия сил в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно, и являются формальным решением уравнений (2.148) и (2.149).

Уравнение моментов относительно точки S , имеющей координату x , имеет вид

$$M_y(x) + \int_0^x (x - \xi) q_z(\xi) d\xi - Q_0 x - M_0 = 0.$$

Таким образом, воспроизведено соотношение (2.151), и константы интегрирования N_0 , Q_0 , M_0 имеют согласно рис. 2.32 ясный статический смысл: это аксиальная и сдвиговая силы и изгибающий момент, соответственно, в “отрицательном” поперечном сечении при $x = 0$.

Если балка имеет опору при $x = 0$, то это позволяет найти все или некоторые константы интегрирования. В случае жестко заземленной балки все три константы могут быть не равны нулю и равны силам реакций, действующим на балку: $N_0 = A_h$, $Q_0 = A_v$, $M_0 = M_e$. В случае простой (т.е. шарнирной) опоры $M_0 = 0$, а на свободном конце балки $Q_0 = M_0 = 0$. Последний случай называют динамическими граничными условиями

В общем, точка O при $x = 0$ рассматривается как находящаяся в непосредственной близости к действующим справа сосредоточенным силам $F_z = P_1, P_2, \dots$, $F_x = F_1, F_2, \dots$ и сосредоточенным внешним моментам $M = M_1, M_2, \dots$, и

потому N_0 , Q_0 , M_0 являются результирующими внутренними силами в соседнем отрицательном поперечном сечении.

В случае двухосного изгиба прямой балки (результаты для косоугольного изгиба см. в упражнениях А 6.1 и А 11.6) поперечное нагружение $q_y(x)$ задается в дополнение к $q_z(x)$ и уравнения (2.149) и (2.150) дополняются отдельными соотношениями для изгиба в плоскости (x, y)

$$dQ_y/dx = -q_y(x), \quad dM_z/dx = -Q_y \quad \text{или} \quad d^2M_z/dx^2 = +q_y(x). \quad (2.152)$$

Центральная пара осей y, z должна быть выбрана как пара главных осей 1, 2 поперечного сечения; см., например, формулу (6.39) и упражнение А 6.1.

Далее статика круговой арки радиуса $r = a = \text{const}$ может быть рассмотрена как частный случай криволинейной балки. С помощью обобщенной силы $N_H(s) = N + M_y/a$, имеющей производную $dN_H/ds = dN/ds + Q_z/a$, уравнение (2.146) может быть упрощено и сразу проинтегрировано,

$$\frac{dN_H}{d\varphi} = -aq_\varphi, \quad N_H(\varphi) = N(\varphi=0) - a \int_0^\varphi q_\varphi d\varphi.$$

Исключая сдвиговую силу в уравнении (2.145) с помощью формулы (2.147) и заменяя N через N_H , получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка для определения изгибающего момента

$$d^2M_y/d\varphi^2 + M_y = aN_H - a^2q_r. \quad (2.153)$$

Так как $N_H(\varphi)$ вычислено ранее, то правая часть уравнения уже известна, и решение линейного уравнения (2.153) можно найти путем суперпозиции частного решения уравнения и общего решения однородного уравнения

$$M_y(\varphi) = M_0 \cos \varphi + M_1 \sin \varphi. \quad (2.154)$$

В частном случае радиального нагружения $q_r = q = \text{const}$ и $q_\varphi = 0$ получим $N_H = N_H(\varphi=0) = \text{const}$ и для момента имеем явное выражение $M_y(\varphi) = M_0 \cos \varphi + M_1 \sin \varphi + aN_H - a^2q$. Константы $N_H = N_0 + M_y(\varphi=0)/a$, M_0 и M_1 можно определить из рассмотрения граничных условий, а в статически неопределимом случае с помощью дополнительных условий на деформации. См раздел 6.4.1.

По аналогии с прямой балкой результирующие в поперечном сечении $N(\varphi)$, $Q_z(\varphi)$, $M_y(\varphi)$ можно выразить через заданную нагрузку, рассматривая равновесие конечного элемента круговой арки. Это показано на простом иллюстративном примере на рис. 2.33.

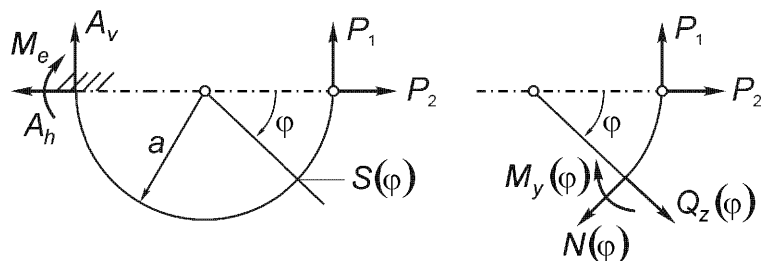


Рис. 2.33. Полуциркулярная защемленная балка и диаграмма сил конечного элемента.

Плоская система сил [P_1 , P_2 заданы, $N(\varphi)$, $Q_z = Q(\varphi)$, $M_y = M(\varphi)$ являются искомыми] находится в равновесии при $0 \leq \varphi \leq \pi$, если имеет место

$$N \cos \varphi + Q \sin \varphi - P_1 = 0,$$

$$N \sin \varphi + Q \cos \varphi - P_2 = 0$$

и, взяв в качестве отсчетной точки $S(\varphi)$,

$$M - aP_1(1 - \cos \varphi) + aP_2 \sin \varphi = 0.$$

Решение системы линейных уравнений дает

$$N = P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi = dQ/d\varphi, \quad (q_r = 0),$$

$$Q = P_1 \sin \varphi - P_2 \cos \varphi = dM/(a d\varphi) = -dN/d\varphi, \quad (q_\varphi = 0),$$

$$M = aP_1(1 - \cos \varphi) - aP_2 \sin \varphi.$$

Опорные реакции можно найти, полагая $\varphi = 0$, или совершенно независимо для данной задачи это можно сделать, рассмотрев всю систему внешних сил P_1 , P_2 , A_v , A_h , M_e . Последнее предлагается сделать читателю в качестве упражнения.

2.5.1.2. Прямые балки, силовой и веревочный многоугольники

Консольно защемленная балка и однопролетная шарнирно закрепленная балка могут быть рассмотрены при плоском изгибе, применяя аналитические и графические методы, характерные для данной задачи. Это позволяет проиллюстрировать результаты и проверить формальные решения, получаемые при помощи компьютерных программ. Возьмем оси x и z в качестве осей координат, заданная нагрузка $q_z(x) = q(x)$ не создает крутящего момента, ее внутренние результирующие: $Q_z = Q(x)$ и $M_y = M(x)$, сдвигающая сила и изгибающий момент, соответственно.

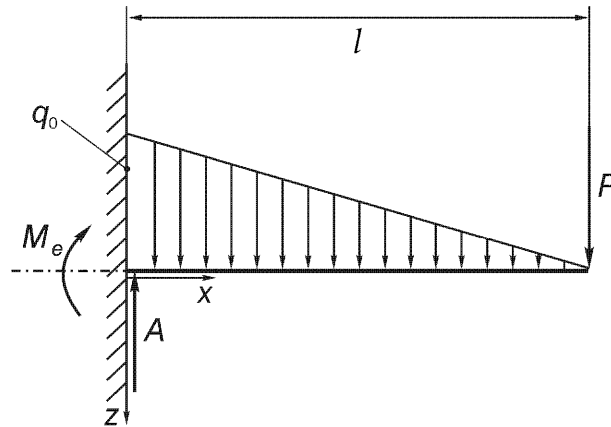


Рис. 2.34. Консольная балка под действием линейно распределенной нагрузки и единичной силы при отсутствии кручения.

(§) Консольная балка

Данная балка, изображенная на рис. 2.34, нагружена линейно распределенной поперечной нагрузкой с интенсивностью на единицу длины $q = q_0(1 - x/l)$ и также сосредоточенной силой $F = P$ на конце балки при $x = l$.

Данная нагрузка и силы реакций на защемленном конце, $x = 0$, образуют плоскую систему сил (P , $q dx$, $A_v = A$, M_e). Так как сумма проекций сил на аксиальное направление тождественно равна нулю, два уравнения равновесия всей системы сил остаются для определения двух неизвестных A и M_e :

$$A - P - R = 0, \quad R = \int_0^l q dx = q_0 \frac{l}{2},$$

где сила R , приложенная в точке $x = l/3$, статически эквивалентна распределенным силам.

Выбрав центр S защемленного сечения при $x = 0$ за отсчетную точку при вычислении моментов, получим

$$M_e + Pl + R \frac{l}{3} = 0, \quad \frac{Rl}{3} = \int_0^l x q dx.$$

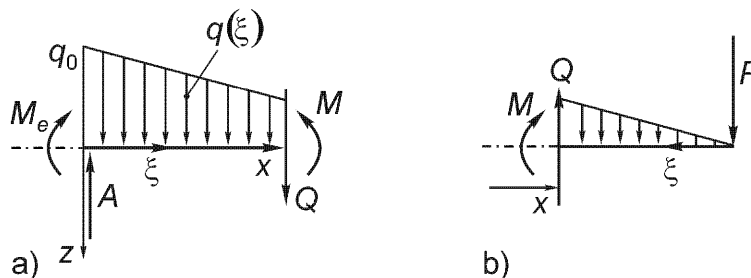


Рис. 2.35. Конечные элементы для консольной балки и диаграммы равновесия сил.

Аналогично, $Q(x)$ и $M(x)$ определяются путем рассмотрения линейных условий равновесия левого или правого конечных элементов, показанных на рис. 2.35.

Рассмотрение элемента на рис. 2.35(a) более сложное и кроме того содержит ранее определенные силы реакций в опоре, которые могут быть определены с ошибкой. Поэтому вторая система на рис. 2.35 (b) более предпочтительна.

Условия равновесия для левой части балки (рис. 2.35(a)):

$$\text{Силы } (q dx, A, M_e, Q, M): A - \int_0^x q d\xi - Q = 0,$$

$$S(x): M + \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi - M_e - Ax = 0.$$

Условия равновесия для правой части балки (рис. 2.35(b)):

$$\text{Силы } (q dx, P, Q, M): Q - \int_0^{l-x} q d\xi - P = 0,$$

$$S(x): M + \int_0^{l-x} (l - x - \xi) q(\xi) d\xi + P(l - x) = 0.$$

Аналитическое решение в интервале $0 \leq x < l$ имеет вид

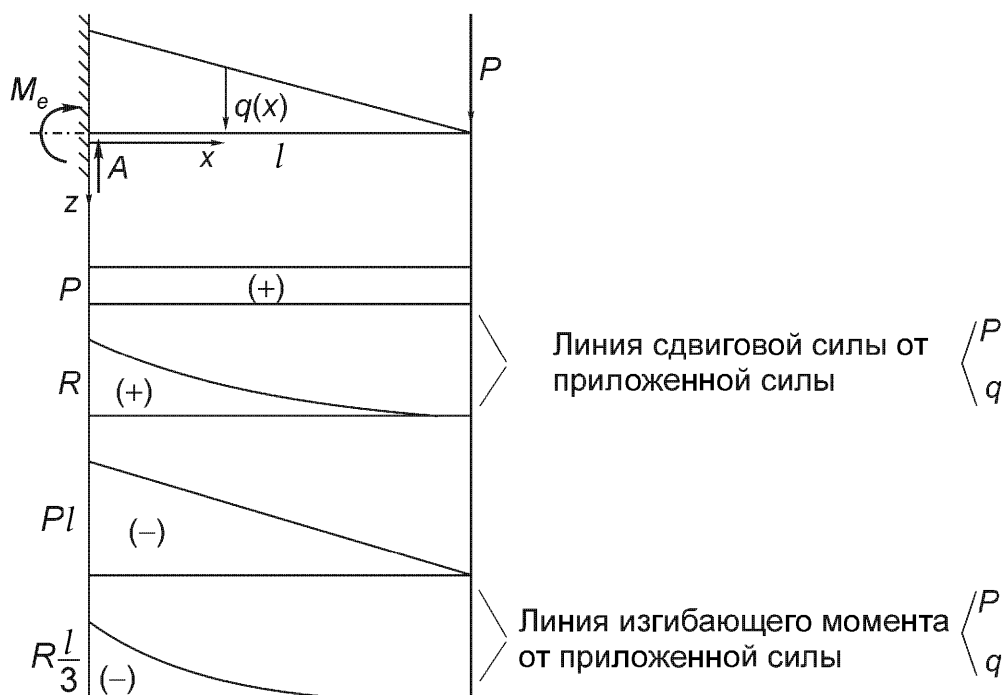


Рис. 2.36. Распределение сдвиговой силы и изгибающего момента в консольной балке при действии отдельных нагрузений P и $q(x)$, соответственно.

$$Q(x) = P + q_0(1 - x/l)(l - x)/2,$$

$$M(x) = -P(l - x) - q_0(1 - l/x)(l - x)^2/6. \quad (2.155)$$

Для проверки можно проверить выполнение условий $dM/dx = Q$, а также $M(x=0) = M_e$, $Q(x=0) = A$.

Из-за линейности уравнений равновесия по отношению к нагрузкам имеется суперпозиция [см. формулу (2.155)], т.е. P и $q(x)$ появляются отдельно. В инженерной практике такие отдельные нагружения рассматриваются последовательно (см. рис. 2.36) и результаты анализа складываются. Граничные условия на защемленном конце, $x=0$, и на свободном конце, $x=l$, консольной балки учитываются при решении задачи согласно рис. 2.34.

(§) Балка на шарнирах

Балка с пролетом l имеет свешивающийся конец a (см. рис. 2.37) и нагружена однородно распределенной нагрузкой интенсивности $q_z = q = \text{const}$ и сосредоточенной силой $F = P$ на правом конце.

Однородное нагружение может быть из-за веса однородной балки с поперечным сечением A , равное на единицу длины $q = g\rho A$. При шарнирных

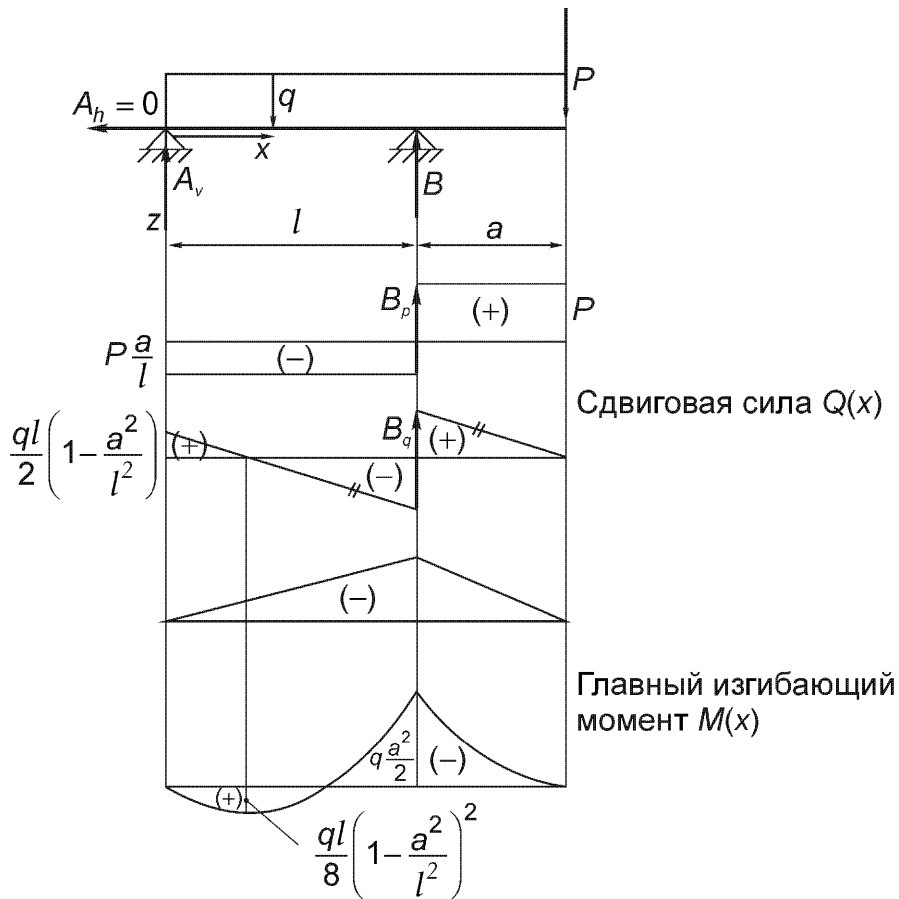


Рис. 2.37. Однопролетная шарнирно закрепленная балка со свешивающимся концом.

опорах моменты реакций равны нулю, и равновесие плоской системы параллельных сил $(q dx, P, A_v, B)$ при очевидном условии, что $A_h = 0$, дает

$$P + R - A_v - B = 0, \quad R = \int_0^{l+a} q dx = q(l+a),$$

точка приложения силы R : $x = (l+a)/2$.

Сумма моментов сил относительно точки $S(x=0)$ равна

$$Bl - P(l+a) - R(l+a)/2 = 0.$$

Последнее уравнение позволяет сразу найти реакцию B . Аналогично, реакция A_v может быть сразу определена из уравнения моментов сил относительно точки $x=l$ шарнирно опертой балки

$$A_v l + Pa - R[l - (l+a)/2] = 0.$$

Равенство нулю проекций сил на вертикальную ось позволяет явно и независимо проверить найденные величины

$$A_v = ql[1 - (a/l)^2]/2 - Pa/l, \quad B = ql[1 + (a/l)^2]/2 + P(1 + a/l).$$

Рассмотрение равновесия конечных элементов в областях $0 < x < l$ слева и $l < x < (l+a)$ справа позволяет найти результирующие внутренних сил $Q_z = Q(x)$ и $M_y = M(x)$, для этой цели нужно решить систему уравнений

$$0 < x < l: \quad A_v - qx - Q(x) = 0,$$

$$A_v x - qx^2/2 - M(x) = 0,$$

$$l < x < (l+a): \quad Q(x) - q(l+a-x) - P = 0,$$

$$M(x) + q(l+a-x)^2/2 + P(l+a-x) = 0,$$

где нужно подставить величину A_v , найденную ранее.

Сдвиговая сила изменяется линейно согласно соотношению $Q(x) = A_v - qx$ в области $0 < x < l$ и с тем же наклоном $Q(x) = P + R - qx$ в области свешивающейся части, $l < x < (l+a)$. На опоре $x=l$, где сосредоточенная сила B приложена к балке, имеется скачок сдвиговой силы, так как

$$\lim_{x \rightarrow (l-0)} Q(x) = A_v - ql, \quad \lim_{x \rightarrow (l+0)} Q(x) = A_v + B - ql,$$

$$Q(l+0) - Q(l-0) = [Q(l)] = B.$$

«В точке приложения сосредоточенной силы сдвиговая сила имеет скачок, величина которого равна внешней силе.» Последнее утверждение можно проиллюстрировать на рис. 2.37. Справа от нагрузки P сдвиговая сила резко падает до нуля в соответствии с граничным условием на свободном конце.

Диаграмма изгибающего момента не имеет скачков и состоит из двух параболических дуг: $M(x) = A_v x - qx^2/2$ в пределах пролета, $0 \leq x \leq l$, и $M(x) = -[(ql/2)(1 + a/l)^2 + P(1 + a/l)]l + (P + R)x - qx^2/2$ в соседней свешивающейся части. Экстремумы момента будут в тех точках, где сдвиговая сила проходит через нуль, а также на границах. Предел $a \rightarrow 0$ дает однородно нагруженную однопролетную балку; в этом случае максимальный момент $ql^2/8$ достигается в середине пролета.

(§) Иллюстративный пример: эксцентричная осевая сила

На рис. 2.38 показана диаграмма нагружения моментом со скачком изгибающего момента.

Консоль длины e жестко соединен с шарнирно опертой балкой, имеющей пролет l . На свободном конце консоли действует сосредоточенная сила F , параллельная прямой оси балки. На неподвижной опоре эксцентрично нагруженной балки, $x = 0$, реакция имеет две компоненты $A_h = F$ и A_v . В скользящей опоре реакция обозначена как B . Неизвестные силы A_v и B могут быть определены из двух оставшихся уравнений равновесия: сумма моментов сил относительно точек $S(x=0)$ и $S(x=l)$ должна быть равна нулю; $Bl - Fe = 0$ и $A_v l + Fe = 0$, соответственно. Откуда имеем: $B = -A_v = Fe/l$, и, следовательно, силы B и A_v образуют пару сил реакций с моментом $-Fe$. Результирующие по поперечному сечению от нормальной силы $N(x)$, сдвиговой силы $Q(x)$ и изгибающего момента $M(x)$ можно определить из соотношений:

$$0 \leq x < a: \quad N - A_h = 0, \quad N(x) = A_h = F = \text{const},$$

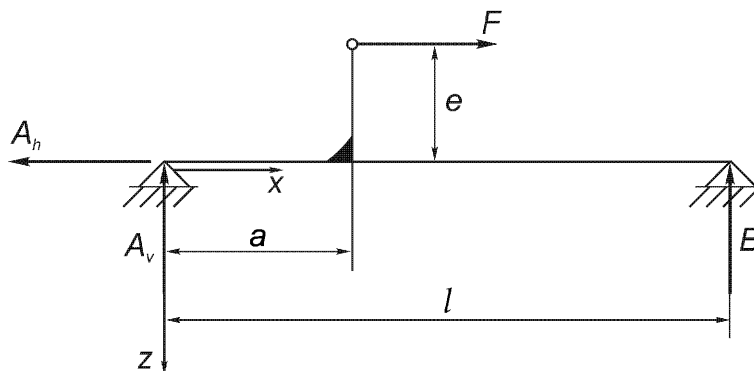


Рис. 2.38. Однопролетная балка, нагруженная сосредоточенным моментом eF .



Рис. 2.39. Нагруженная балка, статически эквивалентная балке, изображенной на рис. 2.38, Диаграмма постоянного сдвигового усилия и изгибающего момента со скачком.

$$Q - A_v = 0, \quad Q(x) = A_v = -Fe/l = \text{const},$$

$$M - A_v x = 0, \quad M(x) = A_v x = -Fex/l,$$

$$a < x < l: \quad N + F - A_h = 0, \quad N(x) = 0,$$

$$Q - A_v = 0, \quad Q(x) = A_v = -Fe/l = \text{const},$$

$$M - A_v x - Fe = 0, \quad M(x) = A_v x + Fe = Fe(1 - x/l).$$

Так как пределы, найденные слева и справа в диаграмме моментов на границе участков различны, их разность определяет скачок изгибающего момента в точке a

$$\lim_{x \rightarrow (a-0)} M(x) = -Fea/l, \quad \lim_{x \rightarrow (a+0)} M(x) = Fe(1 - a/l),$$

$$M(a+0) - M(a-0) = [M(a)] = Fe.$$

$[M(a)]$ обозначает скачок момента в точке a , который равен моменту внешней силы F относительно точки $S(x = a)$.

«В точке приложения пары сил изгибающий момент имеет скачок, величина которого равна этому внешнему моменту.» См. рис. 2.39, где показана шарнирно опертая балка, нагруженная статически эквивалентным образом.

(§) Графическое решение с помощью силового и веревочного многоугольников. Сначала это решение иллюстрируется на примере консольной балки, нагруженной одной сосредоточенной силой $F = P$ (см. рис. 2.40).

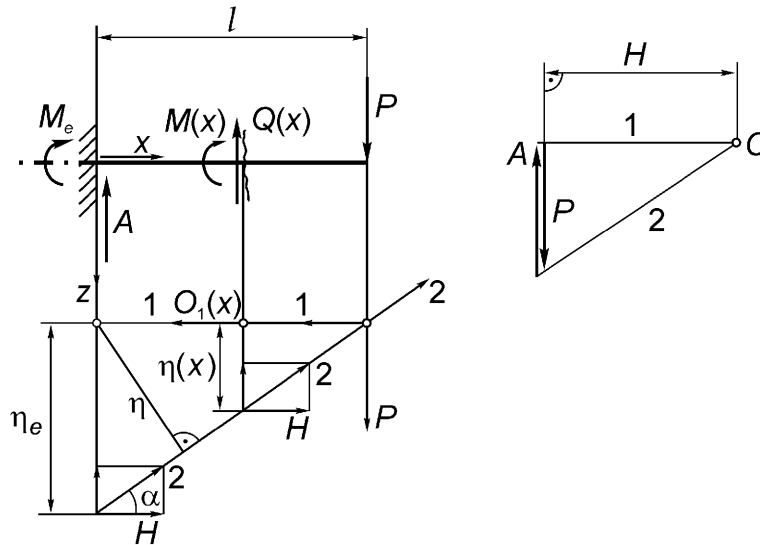


Рис. 2.40. Диаграмма моментов для консольной балки и постоянная сдвигающая сила, вычисленные графически в конфигурационной плоскости и плоскости силового многоугольника.

Масштабированная конфигурация балки показана как пролет l , сила P показана в масштабированной плоскости сил вместе с полюсом C (см. также рис. 2.11).

Фиктивные силы 1 и 2, соответствующие полярным лучам, по предположению уравнивают данную силу P ; поэтому эти три силы имеют общую точку приложения вдоль их линий действия в конфигурационной плоскости. Действительные силы, действующие на балку ($P, A_v = A, M_e$), находятся в равновесии и поэтому статически эквивалентны плоской системе непараллельных сил ($P, 1, 2$). Так как P есть общая сила, то остальные силы этих двух систем сил также эквивалентны, и сила A должна быть равна векторной сумме фиктивных сил, т.е. $A = P$. Силовой многоугольник замкнут. Вереvoчный многоугольник в конфигурационной плоскости не замкнут, и момент в заделке M_e можно найти из рассмотрения моментов фиктивных сил относительно точки отсчета на линии действия силы A , например, нужно умножить величину фиктивной силы 2, взятой со знаком минус, на нормальное расстояние η на рис. 2.40. Измерение расстояния η предпочтительнее (здесь η_e), и результирующий момент M_e становится равным произведению величины силы 2, взятой со знаком минус, на $\cos \alpha \eta_e$. В плоскости сил горизонтальная компонента силы 2 легко может быть найдена как «универсальное» расстояние до полюса H , которое должно быть измерено в масштабе сил. Затем после измерения η_e получим

$$-M_e = \mu_L \mu_F H \eta_e, \quad (2.156)$$

где μ_L = масштабу длин для конфигурации,

μ_F = масштабу сил,

H = расстоянию до полюса в плоскости сил,

η_e = плечу, измеренному вдоль линии действия силы $A_v = A$.

Знак момента определяется из условия эквивалентности этого момента и пары фиктивных сил. Заметим, что только компоненты нагрузок, перпендикулярные оси балки, нужно рассмотреть, чтобы считать H универсальной константой в случае многих нагрузок, приложенных к балке.

Аналогично сдвиговая сила $Q(x)$ и изгибающий момент $M(x)$ в области $0 < x < l$ можно определить из рассмотрения равновесия (правого) конечного элемента, показанного на рис. 2.40. Разрезание по веревочным лучам в конфигурационной плоскости дает эквивалентные системы сил (P, Q, M) и $(P, 1, 2)$. Поэтому результирующая фиктивных сил есть $Q(x) = P$, но момент есть $-M(x) = \mu_L \mu_F H \eta(x)$. Полюс моментов должен быть точкой на линии действия сдвиговой силы.

Распределенные нагрузки $q_z = q(x)$ эквивалентно заменяются кусочно постоянными нагрузками путем усреднения по интервалам соответствующей длины и затем рассматривая их частные равнодействующие. Однородная нагрузка $q = \text{const}$ в консоли, изображенной на рис. 2.41, может быть эквивалентно заменена одной силой, вес $G = ql$ приложен в точке $x = l/2$ при рассмотрении равновесия всей системы.

Графическое решение дает ($A_v = A = G$ равно равнодействующей фиктивных сил 1 и 2) момент в заделке $M_e = -\mu_L \mu_F H \eta_e = -Gl/2$. Что касается внутренних сил, то сосредоточенная сила G дает результирующую только в точке $x = 0$. Лучшая аппроксимация сдвиговой силы и изгибающего момента по длине балки может быть достигнута путем рассмотрения двух сосредоточенных сил, $P_1 = P_2 = G/2$, размещенных эквивалентно однородной нагрузке в точках, расположенных на четверти расстояния от концов пролета. В добавок к фиктивным силам 1 и 2 фиктивная сила 3 также рассматривается (она показана пунктирной линией на рис. 2.41). Кусочно постоянная сдвиговая сила и кусочно линейный распределенный момент следуют из нагружения сосредоточенными силами, но действительные линейные элементы (значение и касательная, $dM/dx = Q$) распределения моментов совпадают в поперечном сечении, расположенном в точке $x = l/2$ в добавок к этим величинам при предыдущей аппроксимации при $x = 0$, $x = l$. Дальнейшие разбиения (четыре интервала с $F_i = G/4$, $i = 1, 2, 3, 4$ рассмотрены на рис. 2.41) дают больше линейных элементов в концевых точках подинтервалов (две новых точки при $x = l/4$ и $x = 3l/4$). Геометрическая конструкция квадратной параболы в конфигурационной плоскости

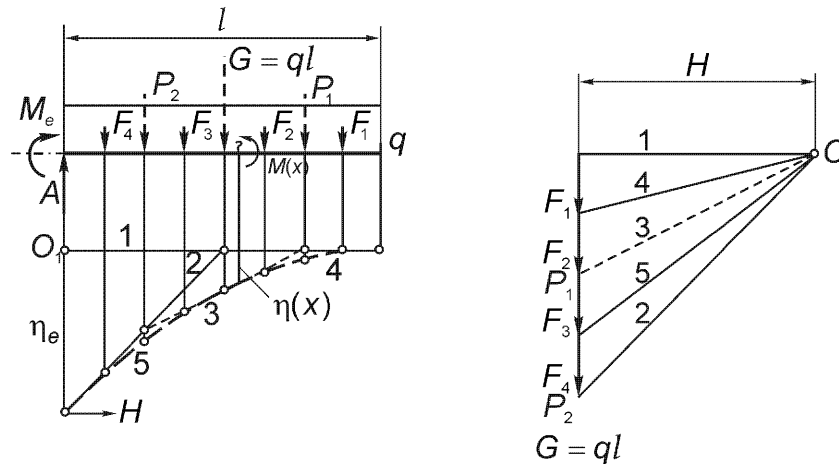


Рис. 2.41. Графическая аппроксимация распределения моментов однородно нагруженной консоли.

формально строится так же. Распределение моментов завершается рисунком от руки

$$M(x) = -\mu_L \mu_F H \eta(x). \quad (2.157)$$

Общий случай демонстрируется рассмотрением линейно распределенной нагрузки без стремления получить очень высокую точность, что (легко) достигается путем точного статически эквивалентного нахождения частных равнодействующих нагружения параллельными силами. Момент реакций M_e и линейные элементы показаны на рис. 2.42 только приближенно, так как сосредоточенные силы F_i , $i = 1, 2, 3, 4$ не приложены в соответствующих центрах сил. Опорная реакция $A_v = A$, однако, равна сумме сил F_i и имеет правильное значение.

Силовой и веревочный многоугольники дают распределение моментов и поэтому представляют общую графическую процедуру для интегрирования линейного дифференциального уравнения второго порядка (2.150)

$$d^2 M / dx^2 = -q_z(x) \quad (2.158)$$

с двумя соответствующими граничными условиями.

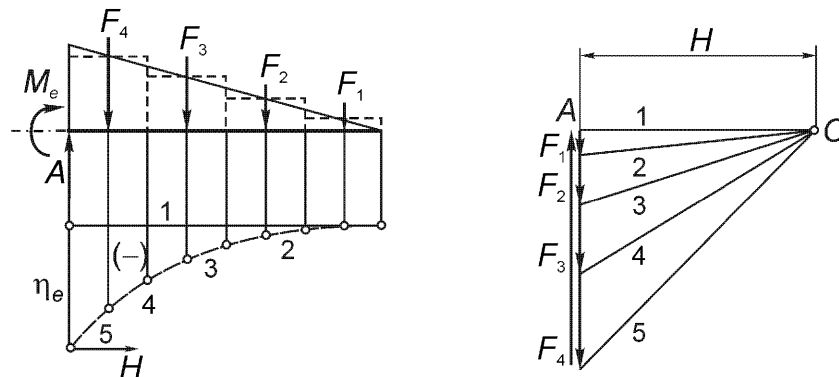


Рис. 2.42. Графическая аппроксимация распределения моментов в консольной балке, нагруженной линейно распределенной нагрузкой.

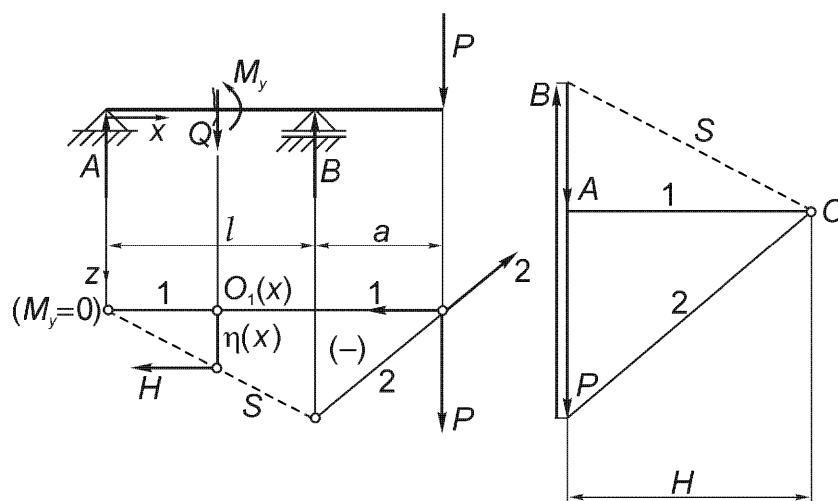


Рис. 2.43. Замыкание вервочного многоугольника вервочным лучом s .

Другой, альтернативный метод замены распределенной нагрузки на интервале состоит в замене ее двумя эквивалентными сосредоточенными силами, находящимися на концах интервала. Этот метод используется в инженерной практике и лишь упоминается здесь. Статическая идея этой замены состоит в дискретизации данной нагрузки с помощью промежуточных балок, шарнирно соединенных на действительной балке.

Шарнирно опертая однопролетная балка со свешивающимся концом, нагруженная одной силой $F = P$ (рис. 2.43), иллюстрирует случай замыкания вервочного многоугольника в случае, когда опорные моменты равны нулю. Фиктивные силы 1 и 2 статически эквивалентны опорным реакциям $A_v = A$, B , и изгибающий момент равен нулю в точке $x = 0$. Эти условия дают луч вервочного многоугольника s в конфигурационной плоскости. Параллельный перенос в точку C дает соответствующую третью фиктивную силу s . Другие детали на рис. 2.43 очевидны.

(§) Непрерывные (многопролетные) балки

Эти балки, имеющие три или более опор, иногда делают статически определимыми путем добавления шарниров, которые позволяют перенос аксиальных и сдвиговых сил, но не переносят изгибающие моменты. Такая двухпролетная балка с двумя шарнирами Гербера, нагруженная двумя сосредоточенными силами P_1 и P_2 , изображена на рис. 2.44.

2.5.1.3. Линии влияния

Чтобы представить сдвиговое усилие и изгибающий момент в выбранном поперечном сечении с координатой x для различных условий нагружения, удобно использовать соответствующую линию влияния. Последняя учитывает нагру-

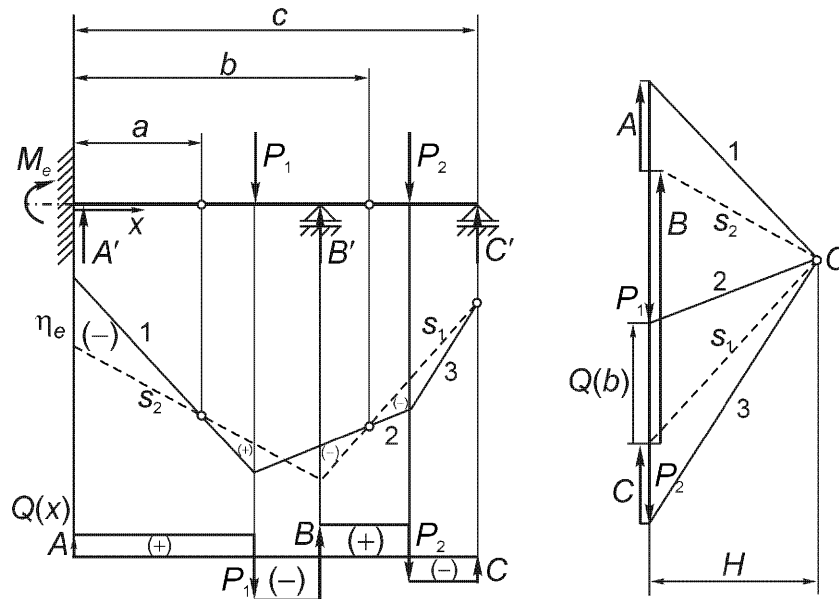


Рис. 2.44. Частичное замыкание веревочного многоугольника ломаной линией из веревочных лучей s_1, s_2 в соответствии с граничным условием $M(x = c) = 0$ и условиями в шарнирах $M(x = a) = M(x = b) = 0$.

жение сосредоточенной силой $F = 1$ в точке с координатой ξ , которая считается переменной, и потому имеем

$$\bar{Q}_z(x; \xi) \text{ и } \bar{M}_y(x; \xi),$$

что находится вычислением сдвигового усилия и момента в точке x , соответственно. Граничные условия существенны при построении этих функций. Для любого распределения нагрузки $q_z(\xi) d\xi$ результирующие находятся с помощью суперпозиции (интегрирования)

$$Q_z(x) = \int_0^l \bar{Q}_z(x; \xi) q_z(\xi) d\xi, \quad M_y(x) = \int_0^l \bar{M}_y(x; \xi) q_z(\xi) d\xi. \quad (2.159)$$

Единичная сосредоточенная сила $F = 1$ подставляется через интенсивность нагрузки $q_z(\xi) d\xi$ в точке ξ . Сосредоточенная сила $F = P$ в точке $\xi = \xi_1$ может быть выражена через псевдофункцию $q_z(\xi) = P \delta(\xi_1 - \xi)$, где $\delta(\xi)$ есть дельта-функция Дирака, нормализованная к единице, и имеющая существенные свойства

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(\xi) d\xi = 1 \text{ и } \int_{\xi_1-\varepsilon}^{\xi_1+\varepsilon} f(\xi) \delta(\xi_1 - \xi) d\xi = f(\xi_1), \quad \varepsilon > 0. \quad (2.160)$$

Подстановка в интегралы (2.159) дает, следовательно, вследствие линейности

$$Q_z(x) = P \int_0^l \bar{Q}_z(x; \xi) \delta(\xi_1 - \xi) d\xi = P \bar{Q}_z(x; \xi_1),$$

$$M_y(x) = P \int_0^l \bar{M}_y(x; \xi) \delta(\xi_1 - \xi) d\xi = P \bar{M}_y(x; \xi_1). \quad (2.161)$$

Сила $P=1$ дает по определению линию влияния. Нагружение сосредоточенными силами P_1, P_2, \dots, P_n , приложенными в точках $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, дает из-за суперпозиции

$$Q_z(x) = \sum_{i=1}^n P_i \bar{Q}_z(x; \xi_i), \quad M_y(x) = \sum_{i=1}^n P_i \bar{M}_y(x; \xi_i). \quad (2.162)$$

Это представление результирующих по поперечному сечению может быть использовано и для аналитического, и для графического решения, чтобы аппроксимировать интегралы (2.159) для распределенных нагрузок.

Применение формул (2.162) к шарнирно опертой балке, изображенной на рис. 2.45, нагруженной, например, поездом через две сосредоточенные силы P_1 и P_2 при медленном движении по пролету длиной l дает формулы

$$Q_z(x) = P_1 \bar{Q}_z(x; \xi_1) + P_2 \bar{Q}_z(x; \xi_2) = P_1 + P_2 - (P_1 \xi_1/l + P_2 \xi_2/l),$$

$$M_y(x) = P_1 \bar{M}_y(x; \xi_1) + P_2 \bar{M}_y(x; \xi_2) = (P_1 + P_2)x - (P_1 \xi_1/l + P_2 \xi_2/l)x, \quad (2.163)$$

где $x < \xi_1 < \xi_2$. См. также упражнение А 11.2. Полагая в выражении для функции влияния сдвигового усилия $x=0$, получим линию влияния силы реакции $A_v = A$; см. рис. 2.45 для дальнейших деталей.

С математической точки зрения линии влияния являются функциями Грина системы дифференциальных уравнений первого порядка (2.149) и (2.147):

$$\frac{d\bar{Q}_z(x; \xi)}{dx} = -\delta(x - \xi), \quad \frac{d\bar{M}_y(x; \xi)}{dx} = \bar{Q}_z(x - \xi), \quad (2.164)$$

при однородных граничных условиях

$$\bar{M}_y(x=0) = \bar{M}_y(x=l) = 0 \quad (2.165)$$

и неоднородных условиях

$$\bar{Q}_z(x=0) = 1 - \frac{\xi}{l}, \quad \bar{Q}_z(x=l) = -\frac{\xi}{l}, \quad (2.166)$$

которые применимы для шарнирно опертой балки, рассмотренной выше.

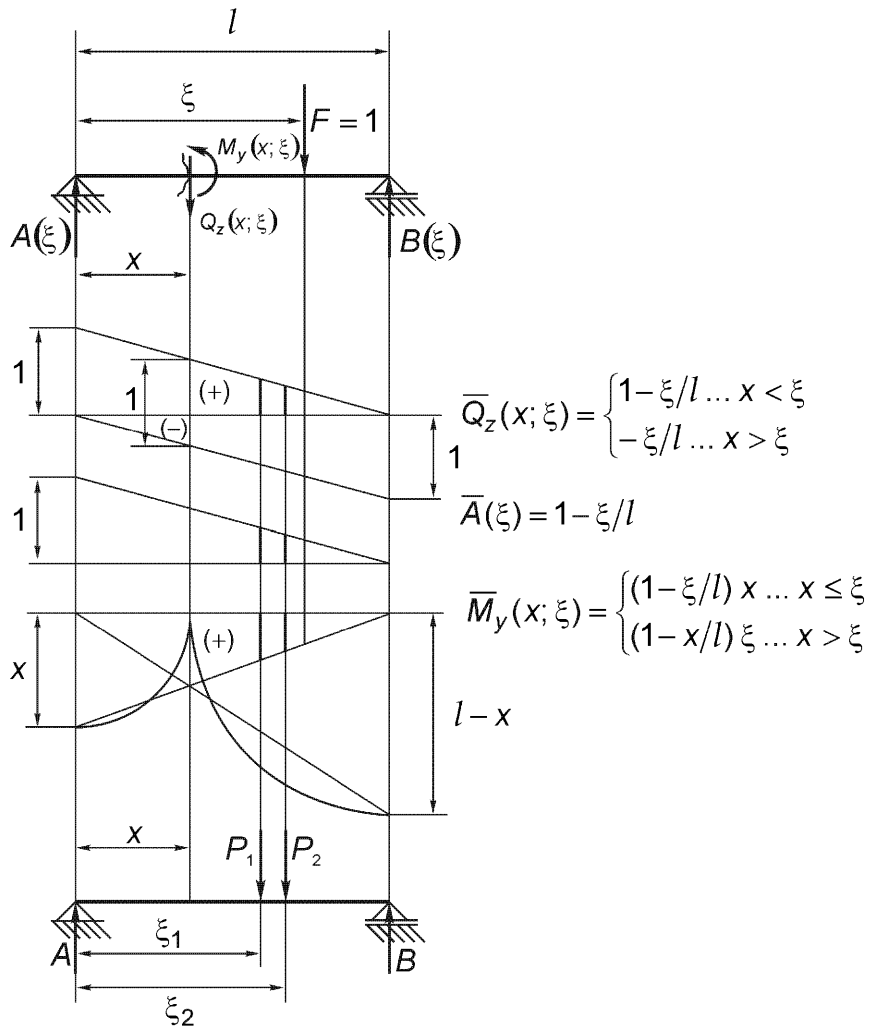


Рис. 2.45. Статические линии влияния однопролетной балки.
См. также раздел 5.2.

Интегрирование по x дает, если ввести подынтервалы $0 < x < \xi$, $\xi < x < l$,

$$\bar{Q}_z(x; \xi) = \begin{cases} \bar{Q}_z(0; \xi) = 1 - \frac{\xi}{l}, & x < \xi, \\ -1 + \bar{Q}_z(0; \xi) = -\frac{\xi}{l}, & x > \xi. \end{cases}$$

Второе интегрирование дает

$$\bar{M}_y(x; \xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)x, & x < \xi, \\ -\frac{\xi}{l}x + C, & x > \xi, \end{cases} \quad \bar{M}_y(x=0) = \bar{M}_y(x=l) = 0 \rightarrow C = \xi.$$

См. также раздел 5.2. Приложение также рассмотрено в разделе 6.2.3 (§). Об определении упругих прогибов см. упражнение А 11.2.

2.5.1.4. Плоские рамы и трехшарнирная арка

С геометрической точки зрения рамы являются балками с резко изогнутой осью, или с бифуркациями осей. Цель рамной конструкции заключается в том, чтобы жестко связать несколько прямых балок в общем углу, увеличивая тем самым изгибную жесткость. В этих жестких шарнирах, которые могут, по предположению, жестко вращаться при деформации рамы, происходит передача внутренних сил и изгибающих моментов. Теория балок не применима вблизи угла, где происходит резкий поворот поперечных сечений. Статический анализ ферм мы рассмотрим на примере плоской одноярусной рамы, имеющей статически неопределимые шарнирные опоры и нагруженной силами P и H согласно рис. 2.46.

Такая рама есть часть трехмерной структуры, но может быть выделена для анализа при плоском нагружении. Плоская система сил состоит из заданных сил (P и H) и искомых сил (A_v, B_v, A_h, B_h), которые находятся в равновесии, при этом выполняются условия:

$$A_h + B_h - H = 0, \quad A_v + B_v - P = 0, \\ l B_v - eP - aH = 0 \quad \text{и} \quad l A_v + aH - (l - e)P = 0.$$

Уравнения моментов имеют явное решение

$$A_v = P(1 - e/l) - H a/l, \quad B_v = P e/l + H a/l.$$

Уравнение проекций сил на вертикальную ось $A_v + B_v = P$ просто проверяет решение. Поэтому одна из горизонтальных реакций опор остается статически неопределенной, например, $A_h = X$. В результате реакция $B_h = H - X$ выражается через данную силу и статически неопределенную силу X . После выбора неопределенной силы результирующие в поперечном сечении вычисляются из рассмотрения равновесия конечных элементов в стойках и в

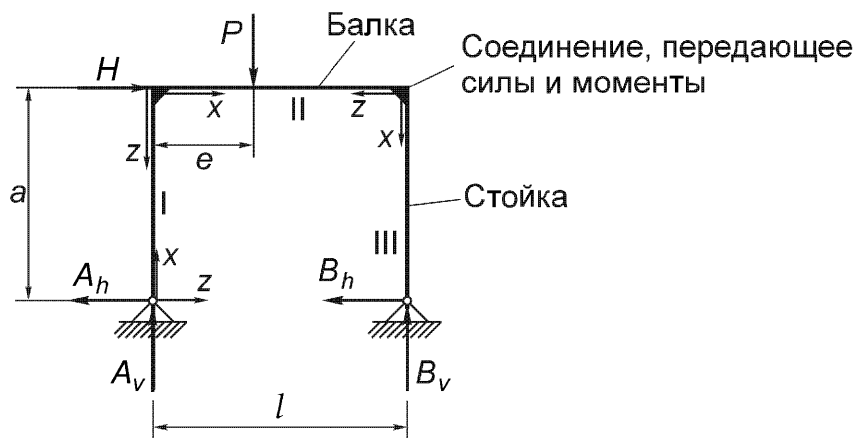


Рис. 2.46. Плоская одноярусная рама, имеющая статически неопределимые опоры.

балке (поперечине). Диаграммы равновесия сил должны быть изображены до написания нижеследующих уравнений равновесия:

В стойке I:

$$0 < x < a,$$

$$N + A_v = 0, \quad N = -A_v,$$

$$Q - A_h = 0, \quad Q = X,$$

$$M - x A_h = 0, \quad M = x X.$$

В поперечине (балке) II:

$$0 < x < e,$$

$$N + H - A_h = 0, \quad N = X - H,$$

$$Q - A_v = 0, \quad Q = A_v,$$

$$M - a A_h - x A_v = 0, \quad M = a X + x A_v.$$

В поперечине (балке) II:

$$e < x < l,$$

$$N + H - A_h = 0, \quad N = X - H,$$

$$Q - A_v + P = 0, \quad Q = A_v - P,$$

$$M - a A_h - x A_v + (x - e)P = 0, \quad M = a X + e P + x(A_v - P).$$

В стойке III:

$$0 < x < a,$$

$$N + B_v = 0, \quad N = -B_v,$$

$$Q - B_h = 0, \quad Q = B_h = H - X,$$

$$M + (a - x)B_h = 0, \quad M = (a - x)(X - H).$$

В случае скользящей опоры (на роликах), например, слева, левый шарнир может свободно скользить горизонтально, $X = 0$, и рама становится статически определенной. При неподвижной опоре значение X зависит от распределения жесткости по ферме (см. рис. 6.24 и приведенный там анализ).

В возможной и практически полезной конструкции статически определимой рамы опоры остаются неподвижными, но добавляется третий шарнир в поперечине. Такая конструкция называется трехшарнирной аркой. Так как изгибающий момент в добавочном шарнире в балке II равен нулю, то добавляется еще одно уравнение равновесия, которое позволяет найти реакцию $X = A_h$. В поперечине II в шарнире при $x = e$:

$$M(x = e) = aX + eA_v = 0 \rightarrow A_h = -A_v e/a = H e/l - P(1 - e/l)e/a.$$

На рис. 2.47 показана графическая оценка опорных реакций в трехшарнирной арке, когда она нагружена только на левой стороне; шарнир С расположен в точке $x = l/2 \neq e$. Так как правая часть арки ВС не несет нагрузок и изгибающий момент в точке С равен нулю, то линия действия опорной реакции В проходит через точку С на масштабированной конфигурационной плоскости. Три уравновешенные силы в плоскости: одна из них результирующая заданная сила

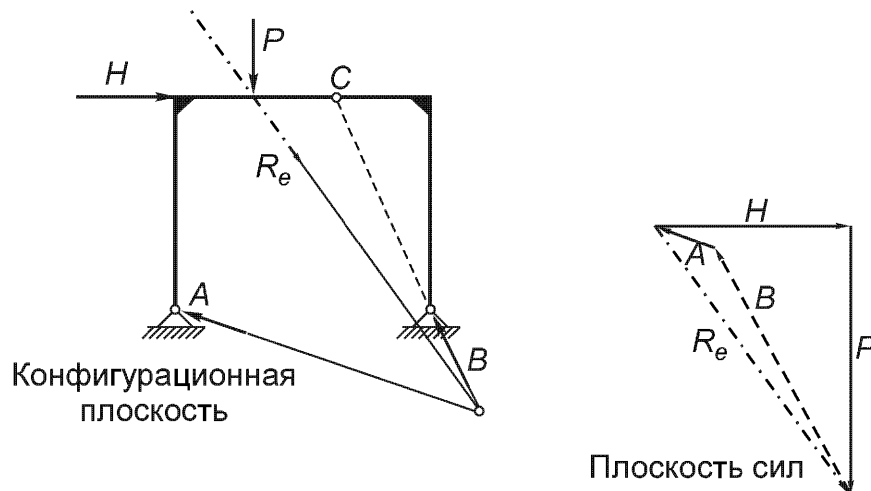


Рис. 2.47. Трехшарнирная арка, нагруженная на левой стороне. Графическая оценка сил реакций в шарнирах в масштабированной конфигурации и плоскости сил.

R_e , а также реакции B и A образуют систему сходящихся сил. Это условие позволяет найти направление реакции A .

2.5.1.5. Два статически определенных напряженных состояния

Обратная задача в соотношениях (2.130), а именно, определение распределения напряжений в поперечном сечении, в общем, имеет статически неединственное решение. Например, заданный вектор-момент соответствует бесконечному числу эквивалентных пар. В тонкостенных стержнях, однако, напряженное состояние может при некоторых дополнительных предположениях стать статически определимым. Ниже рассмотрены два нетривиальных примера.

(§) Изгибные напряжения в многослойном поперечном сечении

Облегченные балки, имеющие слоистую структуру поперечного сечения, имеют две пластины (или поверхностные слои из материала с большей прочностью на растяжение и сжатие, например, из соответствующего металла), которые находятся на постоянном расстоянии h благодаря сердцевине, предназначенной для восприятия касательных напряжений.

Материал сердцевины не несет нормальных напряжений, $\sigma_{xx} = 0$.

Благодаря поверхностному сцеплению частей сечения возможно восприятие любых, в принципе, касательных напряжений. В соответствии с рис. 2.48 нормальные изгибные напряжения, по предположению, распределены однородно по тонкостенным фланцам сечения, и пара сил $\sigma_{xx}(x) t B h$ должна быть статически эквивалентной данному моменту в поперечном сечении. Тогда в сечении с координатой x имеем момент

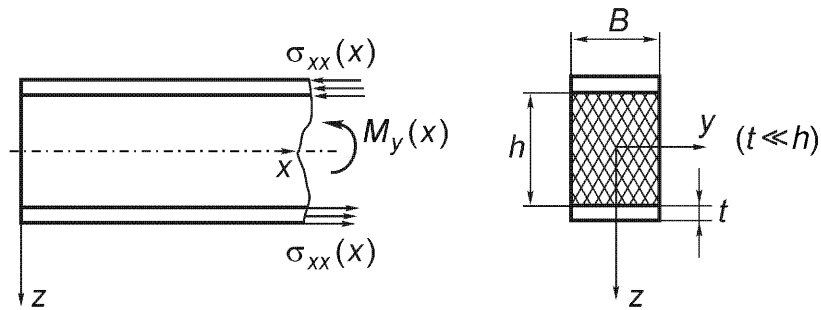


Рис. 2.48. Статически определимые изгибные напряжения в слоистом поперечном сечении прямой балки.

$$M_y(x) = htB\sigma_{xx}(x). \quad (2.167)$$

Растягивающие напряжения в нижнем поясе в сечении с координатой x находятся из чисто упругого рассмотрения

$$\sigma_{xx}(x) = M_y(x)/tBh > 0, \text{ если } M_y(x) > 0, \quad (2.168)$$

сжимающие напряжения в верхнем поясе равны

$$\sigma_{xx}(x) = -M_y(x)/tBh < 0, \text{ если } M_y(x) > 0. \quad (2.169)$$

Эти напряжения являются средними величинами при усреднении по толщине фланца при условии $t \ll h$. Формулы (2.168) и (2.169) могут быть использованы также для определения размеров двутавровых балок, когда фланцы тонкостенные, наподобие вышеописанным, а стенка высотой h может быть даже тоньше. Касательные напряжения, по предположению, распределяются по стенке поперечного сечения $A_S = sh$, и в некоторых простых формулах для проектирования предполагается, что эти напряжения имеют однородное распределение, что позволяет определить среднее касательное напряжение как статически определимую величину, $\sigma_{xz}(x) = \sigma_{zx} = Q_z(x)/A_S$.

Балки с относительно широким пролетом часто характеризуются с помощью системы стержней, которые связаны в почти шарнирных соединениях, образуя, таким образом, двумерную ферму. Последняя может быть статически определима, и аксиальные силы в стержнях статически эквивалентны сдвиговой силе и изгибающему моменту; см. раздел 2.5.2.

(§) Касательные напряжения при кручении тонкостенной трубы

Проектирование облегченных прямых балок при кручении ведет к проявлению замкнутых тонкостенных поперечных сечений. Рассматривается стержень, закручиваемый моментом M_T , имеющий постоянное по длине стержня одноклеточное поперечное сечение толщины $t(s)$, которая может быть переменной по длине дуги s (см. рис. 2.49).

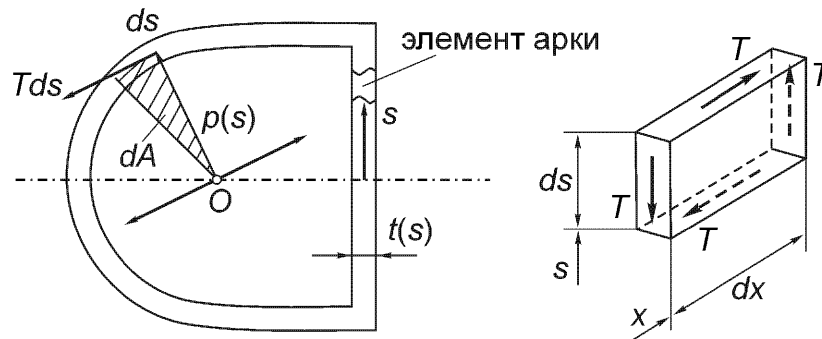


Рис. 2.49. Кручение тонкостенной трубы. Первая из формул Бредта.

Касательные напряжения в плоскости $\sigma_{xs}(s) = \sigma_{sx}(s)$ должны быть касательными к поверхности, свободной от усилий, и могут рассматриваться постоянными по толщине t , которая считается малой по отношению к другим размерам поперечного сечения. Результирующая сила на единицу длины $T = [t(s)\sigma_{xs}(s)]$ называется потоком касательных напряжений. Рассматривая равновесие элемента стенки, показанного на рис. 2.49, можно найти постоянный поток касательных напряжений T . Поэтому статическая эквивалентность дает дифференциальное соотношение для крутящего момента (опять см. рис. 2.49)

$$dM_T = T ds p(s) = 2T dA, \quad (2.170)$$

где $dA = p(s)ds/2$ есть площадь заштрихованного треугольного элемента, и интегрирование дает первую из формул Бредта

$$M_T = 2T A. \quad (2.171)$$

Здесь $A = \int dA$ есть площадь внутренней ячейки, окруженной периметром стенки материала; поэтому

$$T = M_T/2A. \quad (2.172)$$

Это – статически определяемый поток касательных напряжений и $\sigma_{xs}(s) = T/t(s)$ есть среднее касательное напряжение при кручении. Для замкнутой круговой трубы радиуса a имеем $A = \pi a^2$, поэтому касательное напряжение равно $\sigma_{xs}(s) = M_T/2\pi a^2 t$; для квадратного ящика со стороной a получим $A = a^2$, касательное напряжение равно $\sigma_{xs}(s) = M_T/2a^2 t$. Тонкостенная замкнутая круговая оболочка есть идеальный полый стержень для кручения. См. раздел 6.2.4 для дальнейшего рассмотрения упругого кручения.

2.5.2. Ферменные конструкции

В противоположность балкам и жестким рамным конструкциям, где элементы изгибаются, а также растягиваются или сжимаются, ферма есть структурная конструкция, где имеются шарнирно соединенные стержни, которые в основном нагружены аксиально. Если оси всех элементов и нагрузки лежат в одной плоскости, то рассматривается равновесие плоской фермы; в противном случае должна рассматриваться трехмерная конструкция пространственной фермы. Только в специальном случае решетчатой балки мы имеем «одномерную конструкцию» в смысле данной главы. Но стержни фермы являются, в общем, одномерными гибкими стержнями. Статический анализ фермы производится при следующих идеализирующих предположениях, накладываемых на конструкцию:

Все элементы имеют идеально прямые оси.

Соединения являются идеальными шарнирами (без изгиба, без трения).

Оси всех элементов, имеющих общую точку, пересекаются в этой точке.

Внешние силы (статически эквивалентно) приложены в шарнирах.

Элементы такой идеализированной фермы нагружены только аксиально, сдвиговые силы и изгибающие моменты отсутствуют. При растяжении полная несущая способность поперечного сечения может быть использована. При сжатии гибкие стержни могут выпучиваться. Этот вид разрушения не будет рассматриваться, что накладывает ограничения на длину сжатых элементов конструкции. См. раздел 9.1.4 (выпучивание по Эйлеру).

Структурный анализ делается после того, как «геометрическое» проектирование было сделано на первом шаге. Узлы фиксированы в пространстве относительно глобальной системы координат, и оси элементов, соединяющие выбранные пары шарниров, также избраны. Кроме того, предполагается, что нагружения заданы в виде сосредоточенных сил, приложенных в шарнирах. Если учитывается вес конструкции, то он находится для каждого элемента и затем приводится статически эквивалентным образом к соседним узлам. После определения размеров элементов фермы такой анализ проводится с весом каждого стержня. Равновесие всей системы (твердое тело с шарнирными, неподвижными или скользящими опорами) может быть рассмотрено отдельно, чтобы проверить результаты, полученные из диаграммы сил для каждого шарнирного соединения фермы (см. рис. 1.8). Шарниры нумеруются последовательно, чтобы номера соседних узлов имели наименьшую разность.

Произвольный узел с номером i рассмотрен на рис. 2.50, где S_{ij} означает аксиальную силу в элементе, соединяющем шарнир i с узлом j , и F_i есть заданная нагрузка в данной точке.

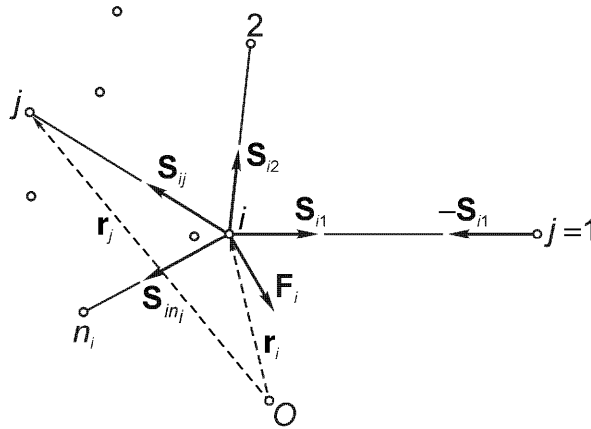


Рис. 2.50. Диаграмма сил изолированного идеализованного шарнира.

Система сходящихся сил в узле i находится в равновесии, если выполняется векторное условие

$$\mathbf{F}_i + \sum_{m=n_1}^{n_i} \mathbf{S}_{im} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_{im} = -\mathbf{S}_{mi}, \quad (2.173)$$

что должно быть выполнено для всех узлов $i = 1, \dots, k$.

Единичные векторы

$$\mathbf{e}_{im} = (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_i) / l_{im} \quad (2.174)$$

определяют линию действия внутренней силы $\mathbf{S}_{im} = S_{im} \mathbf{e}_{im}$. Поэтому уравнение (2.173) может быть переписано в векторной форме

$$\sum_{m=n_1}^{n_i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_m) S_{im} / l_{im} = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.175)$$

Неизвестные внутренние силы S_{im} (их число равно числу s структурных элементов плюс число реакций связей на внешних опорах z) находятся в явном виде, рассматривая три компоненты уравнения (2.175) и затем решая $3k$ линейных уравнения равновесия для пространственной фермы или $2k$ линейных и неоднородных уравнения для плоской фермы

$$\sum_{m=n_1}^{n_i} (x_i - x_m) S_{im} / l_{im} = X_i, \quad \sum_{m=n_1}^{n_i} (y_i - y_m) S_{im} / l_{im} = Y_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\sum_{m=n_1}^{n_i} (z_i - z_m) S_{im} / l_{im} = Z_i, \quad l_{im} = \sqrt{(x_i - x_m)^2 + (y_i - y_m)^2 + (z_i - z_m)^2}. \quad (2.176)$$

Матрица коэффициентов \mathbf{C} размерностью $3k \times s$ содержит разность данных узловых координат и должна иметь ленточную структуру. В матричном обозначении

$$\mathbf{C} \mathbf{S} = \mathbf{F}. \quad (2.177)$$

Здесь \mathbf{S} есть $s \times 1$ вектор неизвестных внутренних сил и \mathbf{F} есть $3k \times 1$ вектор-столбец из заданных сил и опорных реакций. Чтобы ферма могла быть структурой, которая несет данную нагрузку в пространстве (или в плоскости), число неизвестных (элементов) должно быть больше или равно числу линейных условий равновесия

$$s + z \geq 3k(2k). \quad (2.178)$$

Если ферма является по отношению к реакциям статически определимой, например, имеет реакции в трех (или двух) узлах, то число сил реакций равно $z = 6(3)$, в соответствии с числом степеней свободы (ограниченного) движения соответствующего твердого тела. Поэтому

$$s + 6(3) \geq 3k(2k). \quad (2.179)$$

В случае внешней статической определимости и появления знака неравенства, ферма имеет избыточные внутренние силы и является внутренне статически неопределимой. Эквивалентное число условий должно быть получено из рассмотрения деформаций, так что такие лишние неизвестные связаны с деформируемостью ферм, см. раздел 5.4.1. Эти n лишних внутренних сил должны быть соответствующим образом выбраны и добавлены как дополнительные элементы к вектору-столбцу \mathbf{F} . Остальные

$$(s - n) + 6(3) = 3k(2k) \quad (2.180)$$

уравнений равновесия можно решить и выразить остальные внутренние силы как функции заданных нагрузок и лишних сил X_m , $m = 1, \dots, n$. В некоторых классических задачах такое решение проводится явно.

Если ферма внешне и внутренне статически определима, то число ее элементов находится по формуле

$$s + 6(3) = 3k(2k). \quad (2.181)$$

Матрица коэффициентов \mathbf{C} становится в этом случае квадратной и должна быть неособенной, чтобы решить систему линейных уравнений. Условие на определитель имеет вид

$$\det\{\mathbf{C}\} \neq 0. \quad (2.182)$$

Методы решения, связанные с применением компьютеров, могут быть найдены, например, в книге

- Dankert J. Numerische Methoden der Mechanik. Wien, New York, Springer-Verlag, 1977.

В сингулярном случае, когда

$$\det\{\mathbf{C}\} = 0, \quad (2.183)$$

имеем неустойчивую ферму с (малой) подвижностью шарниров, которая, конечно, является несовершенной. В некоторых случаях у таких ферм внешние узлы находятся на сфере в пространстве или ограничены коническим сечением на плоскости, соответственно, где все эти узлы связаны друг с другом некоторыми элементами. Это явление было уже известно Риттеру (1890 г.), так как графическое решение с помощью диаграммы Кремоны в случае неустойчивой фермы провести не удастся. Смотрите:

- Ritter A. Anwendungen der Graphischen Statik. 2 Teil. Das Fachwerk, Zürich, Meyer and Zeller Verlag, 1890.

Такие неустойчивые фермы, так же как и фермы, которые стали подвижными при условии $(s+z) < 3k(2k)$, не имеют устойчивой несущей способности и не находятся в равновесии. Такая конструкция неустойчивой балки должна быть изменена путем перестановки узлов без добавления новых стержневых элементов.

2.5.2.1. Плоские фермы

Так как имеется плоская система сходящихся сил в любом узле фермы, то имеются два условия равновесия (2.176) и они являются нетривиальными. Графическое решение этих уравнений контролируемым способом можно произвести с помощью диаграммы Кремоны. Рис. 2.51 иллюстрирует процедуру

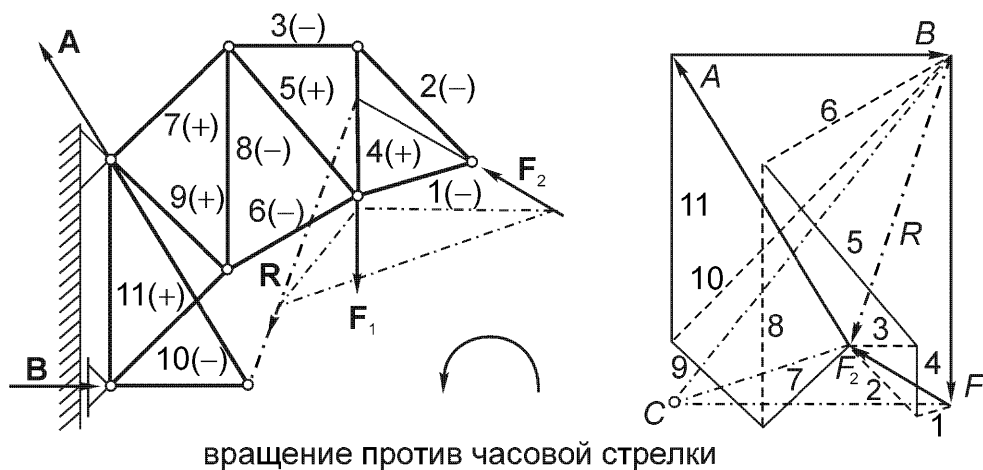


Рис. 2.51. Плоская ферма типа консоли. Диаграмма Кремоны (должно сохраняться направление против часовой стрелки).

для плоской фермы консольного типа, которая может быть частью крановой конструкции. Так как направление реакции **B** известно заранее, то линия действия реакции **A** в неподвижном шарнире может быть найдена из рассмотрения равновесия трех сил в плоскости ($\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ есть равнодействующая заданных сил, реакции **B** и **A**), система сил должна быть системой сходящихся сил в масштабированной конфигурационной плоскости. Суммирование сил в направлении против часовой стрелки в масштабированной плоскости сил дает значения соответствующих сил. Если мы возьмем узел, где соединены только два элемента, диаграмма сил показывает заданную нагрузку \mathbf{F}_2 и два неизвестные значения сил в элементах 1 и 2, и если мы замкнем силовой многоугольник, сохраняя расположение сил против часовой стрелки, где сила \mathbf{F}_2 уже известна в плоскости сил, то этим начинается построение диаграммы Кремоны. Растягивающее усилие в данном стержне направлено от узла и ему обычно приписывается знак плюс; сжимающие внутренние силы обозначаются знаком минус; на силовом многоугольнике стрелки не ставятся. Вырезание следующего узла, где нет внешних сил, дает силы 3 (-) и 4 (+), что уравнивает силу 2 (-), направленную к узлу. Проводя такую процедуру последовательно и сохраняя направление против часовой стрелки, получим диаграмму Кремоны, причем нет необходимости снова рисовать силы реакций, например, силу **A**. Такой самоконтролируемый и удобный метод есть простое средство для проверки вычислительных результатов.

Если плоская ферма может быть разделена на две подструктуры, так что путем разреза можно получить три элемента, усилия в которых не приложены к одной точке, то внутренние силы можно вычислить явно. Такой метод называется методом сечений Риттера, он иллюстрируется на примере однопролетной стержневой структуры на рис. 2.52.

Равновесие всей системы для плоской системы сил (заданные силы \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 ; искомые силы A_v , A_h , B) дает три линейных уравнения, имеющих

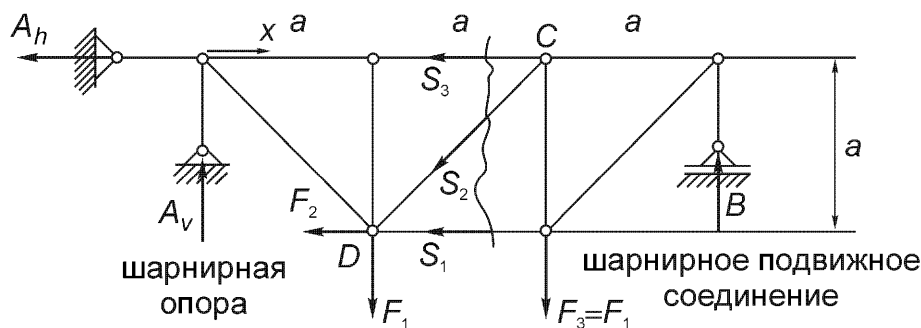


Рис. 2.52. Решетчатая однопролетная балка. Метод сечений Риттера. Диаграмма сил для правой подструктуры.

решение для частного случая $F_1 = F_3$, $A_v = F_1 - F_2/3$, $A_h = -F_2$, $B = F_1 + F_2/3$. Если мы рассмотрим сечение Риттера на рис. 2.52 и получающуюся диаграмму сил для правой подструктуры, то сила S_1 явно вычисляется из условия обращения в нуль момента сил относительно узла C , где пересекаются две другие неизвестные силы S_2 и S_3 . Так как в систему сил входят силы (F_3, B, S_1, S_2, S_3) , то указанное уравнение имеет вид

$$aS_1 - aB = 0 \rightarrow S_1 = B = F_1 + F_2/3.$$

Так как $S_1 > 0$, то в нижнем поясе фермы имеется растяжение. Вычисляя уравнение моментов относительно точки D , получим

$$aS_3 + 2aB - aF_3 = 0 \rightarrow S_3 = -2B + F_3 = -(F_1 + 2F_2/3).$$

Так как $S_3 < 0$, то в верхнем поясе имеется сжатие. Силы S_1 и S_3 параллельны, сила же S_2 направлена по диагонали, поэтому усилие в этом элементе поперечины можно вычислить, проектируя все силы на вертикальную ось,

$$S_2/\sqrt{2} + F_3 - B = 0 \rightarrow S_2 = (B - F_3)\sqrt{2} = \sqrt{2} F_2/3.$$

Так как $S_2 > 0$, то в этом длинном диагональном элементе имеется растяжение, что является предпочтительным.

Любое изменение в конструкции фермы влияет на внутренние силы. Например, рассмотрим другой диагональный элемент на рис. 2.52. Тогда новые усилия в стержнях (обозначенные штрихами) равны

$$S'_1 = 2F_1 + 2F_2/3 > S_1 > 0, \quad F_1, F_2 > 0,$$

$$S'_3 = -(F_1 + F_2/3), \quad |S'_3| < |S_3|.$$

Мы видим, что сжатие в верхнем поясе уменьшилось. Однако

$$S'_2 = -\sqrt{2} F_2/3 < 0,$$

что означает (нежелательное) сжатие длинной диагонали.

Следуя процедуре, описанной в разделе 2.5.1.3, построим далее линии влияния для сил в элементах, рассмотренных выше, при ограничении только параллельным нагружением (т.е. при условии $F_2 = 0$). Следуя методу Риттера, поперечное сечение с координатой x проведено через шарнир C (рис. 2.52) и линия влияния изгибающего момента согласно рис. 2.53 вычислена (сосредоточенная сила $F = 1$, по предположению, приложена в точке с непрерывно изменяющейся координатой ξ). Поэтому линия влияния силы нижнего пояса пропорциональна,

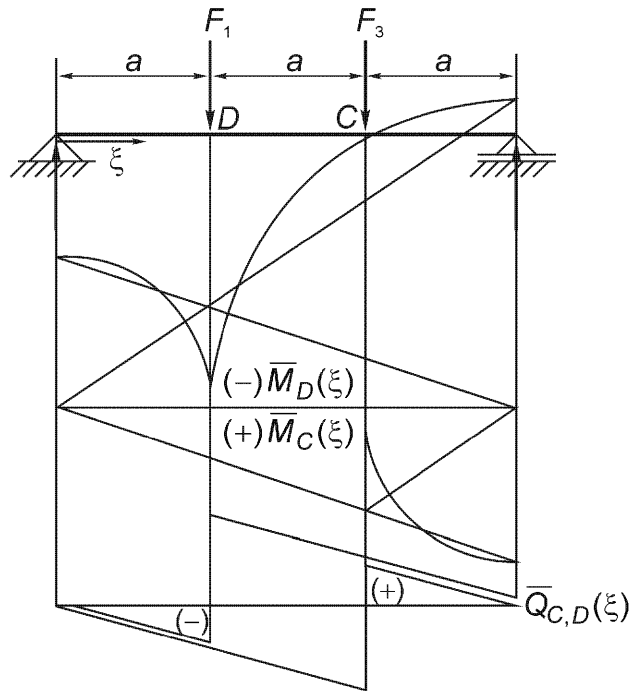


Рис. 2.53. Однопролетная балка, нагруженная поперечной нагрузкой аналогично ферме на рис. 2.53 при $F_2 = 0$. Линии влияния изгибающего момента и сдвиговой силы.

$$\bar{S}_1(\xi) = \bar{M}_C(\xi)/a.$$

Взяв координату x соответственно узлу D , получим аналогично

$$\bar{S}_3(\xi) = -\bar{M}_D(\xi)/a.$$

Линия влияния силы в диагональном элементе пропорциональна силе от сдвигового усилия в точке x , взятого в узлах C или D , соответственно,

$$\bar{S}_2(\xi) = -\sqrt{2} \bar{Q}_{C,D}(\xi),$$

см. рис. 2.53.

Согласно допущениям о нагружении ферм ξ принимает только дискретные значения, на рис. 2.53 $\xi = 0, a, 2a, 3a$. Суперпозиция дает силу в нижнем поясе для данных нагружений F_1, F_3 [см. формулу (2.163)],

$$S_1 = F_1 \bar{S}_1(\xi = a) + F_3 \bar{S}_1(\xi = 2a) = \frac{F_1}{a} \left(1 - \frac{2a}{l}\right) a + \frac{F_3}{a} \left(1 - \frac{2a}{l}\right) 2a,$$

наконец, $S_1 = F_1$, если $F_1 = F_3$.

2.5.3. Статика гибких тросов (и цепей)

Тросы и цепи являются особыми одномерными системами с пренебрежимо малой изгибной жесткостью, которые несут тангенциальные и поперечные нагрузки и в итоге имеют только растягивающие напряжения. Сложные

напряженные состояния в композитном поперечном сечении из-за контактирующих проволок троса и из-за контакта индивидуальных звеньев цепи здесь не рассматриваются. Наш анализ ограничен определением результирующей внутренней растягивающей силы, которая направлена по касательной к априори неизвестной равновесной конфигурации. Любая поперечная нагрузка создает искривленную конфигурацию. Поперечные нагрузки, например, параллельные вертикальному направлению, создают деформацию, которая родственна деформации каната под действием веса (в случае сосредоточенных параллельных сил это многоугольник). Для изучения нагружения сосредоточенной силой, равной $-B$, подвешенного каната с пролетом $(l+a)$ можно рассмотреть нижнюю часть рис. 2.43, где фиктивные силы 2 и s являются натяжениями троса в прямых сегментах, соответственно. Затем нагружение $q(s)$ предполагается распределенным по длине дуги s троса. Если мы рассмотрим равновесие элемента длины ds , имеющего неизвестное расположение в пространстве (рис. 2.54), то можно записать, что сумма трех сил, показанных на диаграмме сил, должна быть равна нулю:

$$\mathbf{N}(s+ds) - \mathbf{N}(s) + \mathbf{q}(s)ds = \mathbf{0}.$$

Достаточно рассмотреть линейную аппроксимацию разности натяжений троса в близко расположенных поперечных сечениях, чтобы получить точное локальное условие равновесия при $ds \rightarrow 0$,

$$d\mathbf{N}/ds = -\mathbf{q}(s), \quad \mathbf{N} = X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y + V\mathbf{e}_z. \quad (2.184)$$

Последнее соотношение можно записать в компонентах, причем оси x и y лежат в горизонтальной плоскости, а ось z направлена вертикально вверх:

$$dX/ds = -q_x, \quad dY/ds = -q_y, \quad dV/ds = -q_z. \quad (2.185)$$

Эти дифференциальные уравнения первого порядка можно формально проинтегрировать, что дает

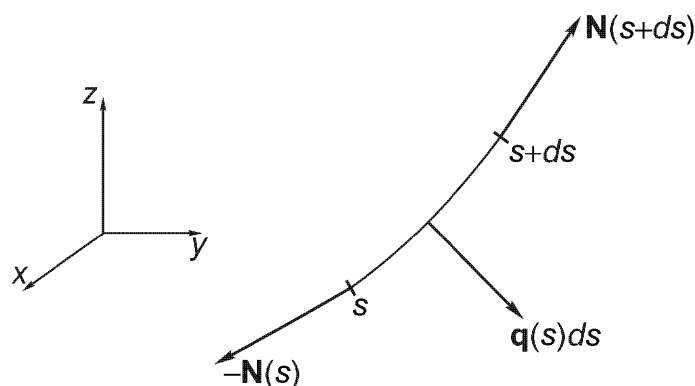


Рис. 2.54. Диаграмма сил для элемента гибкого троса, находящегося под действием тангенциального натяжения \mathbf{N} и произвольного нагружения $\mathbf{q} ds$.

$$X(s) = X_0 - \int_0^s q_x ds, \quad Y(s) = Y_0 - \int_0^s q_y ds, \quad V(s) = V_0 - \int_0^s q_z ds.$$

Удобно рассмотреть нижнюю точку троса, где касательная к тросу горизонтальна, даже если для этого структуру придется фиктивно расширить, и отсчитывать длину дуги s от этой точки. В этом случае, если направить ось x в горизонтальном направлении, две константы интегрирования будут равны нулю: $V_0 = 0$, $Y_0 = 0$. Пространственная кривая имеет каноническое представление $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$, причем

$$dx:dy:dz = X:Y:V. \quad (2.186)$$

Для однородно распределенной нагрузки $q_x = q_1$, $q_y = q_2$, $q_z = -q$ интегрирование дает

$$X = X_0 - sq_1, \quad Y = -sq_2, \quad V = sq, \quad dx:dy:dz = (X_0 - sq_1):(-sq_2):qs,$$

$$s = \int_0^s \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^{1/2} dz.$$

Численное решение нелинейных уравнений обычно проводится методом конечных разностей. Простое аналитическое решение может быть получено для плоской кривой при условии вертикального нагружения $q_2 = q_1 = 0$, $q = \text{const}$,

$$dz/dx = V/X_0 = qs/X_0. \quad (2.187)$$

В этом случае $X = X_0$ становится постоянной горизонтальной компонентой растягивающего усилия. Продифференцируем один раз уравнение (2.187) и введем новую переменную $u(x)$ по формуле $dz/dx = \sinh u(x)$, что далее дает $d^2z/dx^2 = (du/dx) \cosh u$. В итоге получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно новой переменной $u(x)$

$$du/dx = q/X_0 = 1/a, \quad [a] = \text{м}.$$

Интегрирование дает $u(x) = x/a + b$, причем $b = 0$, так как $dz/dx = 0$ при $x = 0$. Второе интегрирование дает окончательный результат для плоской равновесной конфигурации

$$z(x) = a \cosh(x/a) + C. \quad (2.188)$$

Путем вертикального перемещения начала системы координат так, чтобы имело место условие $z(0) = a$, получим, что константа $C = 0$, и параметр

$a = X_0/q$ получает простую геометрическую и статическую интерпретацию. Цепная линия $z(x) = a \cosh(x/a)$ для тросов и "размазанных" цепей при однородном нагружении также может быть применена для гибких арок при чистом сжатии; см. раздел 6.4.1 и уравнение (2.190). Вводя длину дуги $s = a \sinh(x/a)$, компоненту вертикальной внутренней силы можно записать в виде

$$V(x) = qs = X_0 \sinh(x/a). \quad (2.189)$$

Заметим, что при решении применялись обозначения гиперболических функций $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$, $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$. Тогда результирующее натяжение определяется формулами:

$$N(x) = (X_0^2 + V^2)^{1/2} = X_0 [1 + \sinh^2(x/a)]^{1/2} = X_0 \cosh(x/a) = qz(x),$$

где $q = \text{const}$. Оказывается, что натяжение N пропорционально ординате $z(x)$ в системе координат, где $z(0) = a$.

Кабели с малым прогибом, например, кабели в линиях высоковольтных электропередач, сильно натянуты и параметр a становится значительно больше длины пролета. В этом случае $|x|/a \ll 1$, и левая часть уравнения цепной линии может быть разложена в ряд Тейлора около точки $x=0$, ограничиваясь членами второго порядка малости (величина q опять считается постоянной). Это дает следующее выражение

$$z(x) = a \cosh(x/a) \approx a + x^2/2a, \quad z'(x) = z - a \approx qx^2/2X_0.$$

В этой аппроксимации $N \approx X_0 = qa \gg V_{\max}$ есть почти постоянная величина. Парабола становится точной конфигурацией гибкого троса при постоянном нагружении p на единицу длины горизонтальной проекции x . Например, в подвесном тросе моста с широким пролетом (рис. 2.55) нагружение практически совпадает с этим допущением.

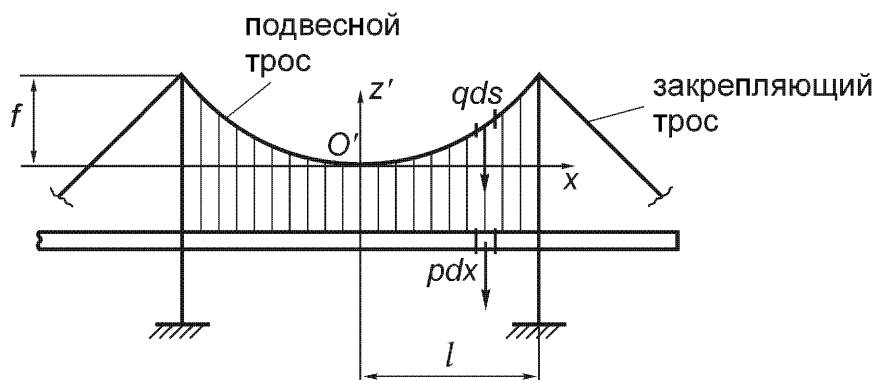


Рис. 2.55. Подвесной мост. Распределенное нагружение подвесного троса при $p = \text{const}$.

Распределение нагружения троса записывается в соответствии с равенством

$$p dx = -q_z(s) ds, \quad (2.190)$$

и подстановка (2.190) в уравнение (2.185)₃ дает (предполагая p постоянным) $dV = [-q_z(s) ds] = p dx$. Если мы рассмотрим $V = V(x)$, то интегрирование показывает, что вертикальная компонента пропорциональна расстоянию по горизонтали от самой низкой точки, $V = p x$. Уравнение (2.187) принимает вид

$$dz'/dx = V/X_0 = px/X_0, \quad (2.191)$$

и интегрирование дает соответствующую кривую подвешенного троса как точную параболу

$$z'(x) = px^2/2 X_0. \quad (2.192)$$

Допустимый прогиб $f = pl^2/2 X_0$ позволяет найти натяжение X_0 ; в данном случае большое значение параметра a не является полезным.

Так как длина троса и поэтому прогиб изменяются с температурой при фиксированных концевых опорах, тросы, натянутые данным весом G , часто используются со скользящими опорами, например, тросы канатной дороги (рис. 2.56) или верхняя питающая сеть электрической железной дороги.

На барабане, точка A , результирующая тангенциальная сила приблизительно равна весу, $N_A = qz_A \approx G$; малый и переменный вес вертикальной части троса не учитывается. Последняя формула определяет координату z_A в специальной системе координат. Учитывая соотношение $z_B = z_A + H$, можно найти максимальное натяжение троса, которое возникнет в

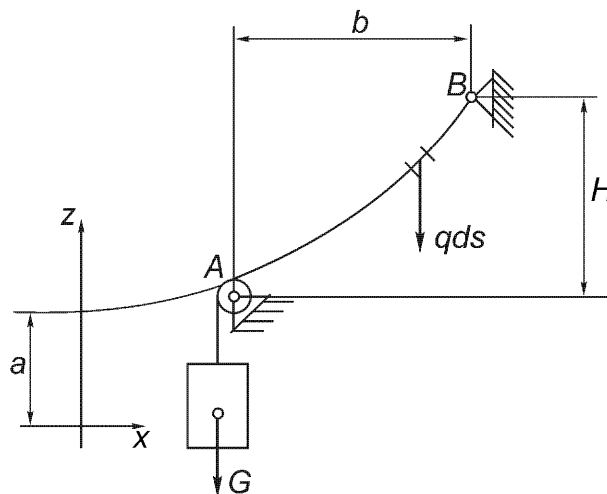


Рис. 2.56. Подвешенный трос, натягиваемый весом G . Показано фиктивное продолжение троса. Величины G , $q = \text{const}$, b , H заданы.

неподвижной точке B и будет равно $N_B = qz_B$. Далее можно выбрать размеры троса. Направление поддерживающей силы в опоре $-N_B$ может быть найдено, зная постоянное горизонтальное натяжение $X_0 = qa$, которое можно определить, вычислив параметр a из решения нелинейного геометрического уравнения (что можно сделать с помощью соответствующих вычислительных методов)

$$z_B = z_A + H = a \cosh(x_A + b)/a = z_A \cosh(b/a) + (z_A^2 - a^2)^{1/2} \sinh(b/a).$$

Нагружение дополнительной вертикальной сосредоточенной силой можно учесть, присоединив соответствующим образом соседнюю арку в виде цепной линии с тем же параметром a . Графическое решение можно приближенно осуществить с помощью веревочного многоугольника.

2.6. Упражнения А 2.1 – 2.15 и решения

А 2.1: Для данной плоской области, изображенной на рис. А 2.1, имеющей круговое отверстие, определить положение центра тяжести $C = S$, учитывая симметрию.

Решение: Так как $x_S = 0$, то статический момент относительно оси x определяется путем вычисления

$$Ay_S = \int_A y dA = A_1 y_1 - A_2 y_2, \quad A_1 = \alpha a^2, \quad A_2 = \pi c^2, \quad y_2 = b.$$

Из рассмотрения треугольного плоского элемента, изображенного на рис. А 2.1, можно найти координату центра тяжести y_1 области без выреза A_1 , вычислив

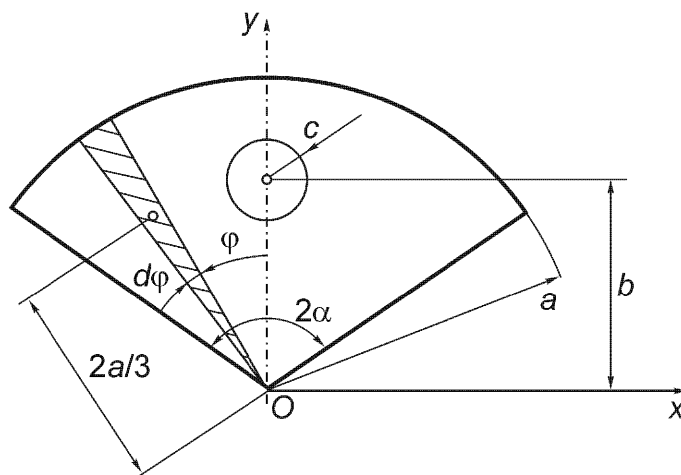


Рис. А 2.1.

статический момент,

$$A_1 y_1 = 2 \int_0^\alpha \left(\frac{2}{3} a \cos \varphi \right) \frac{a}{2} a d\varphi = \frac{2a^3}{3} \sin \alpha,$$

откуда $y_1 = (2a \sin \alpha) / 3\alpha$. Следовательно,

$$y_s = a \left(2 \sin \alpha - 3 \pi b c^2 / a^3 \right) / 3 \left(\alpha - \pi c^2 / a^2 \right).$$

Для $\alpha = \pi$ (т.е. для круговой области с эксцентричным отверстием) получим

$$y_s = -b[(a/c)^2 - 1].$$

А 2.2: Простая пространственная ферма (рис. А 2.2) имеет три элемента, соединенных в шарнире D , и нагружена сосредоточенной силой $\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$. Определить силы в элементах S_i , которые связаны с реакциями в опорах A , B и C .

Решение: С помощью сферического разреза вокруг точки D получим систему сходящихся сил \mathbf{F} , S_i , $i=1,2,3$. Уравнения равновесия содержат длины элементов: $l_1 = (a^2 + b_1^2)^{1/2}$, $l_2 = (a^2 + b_2^2)^{1/2}$, $l_3 = (a^2 + b_3^2 + c^2)^{1/2}$. Далее имеем

$$\sum_{i=1}^4 X_i = 0 = F_x - S_1 a / l_1 - S_2 a / l_2 - S_3 a / l_3,$$

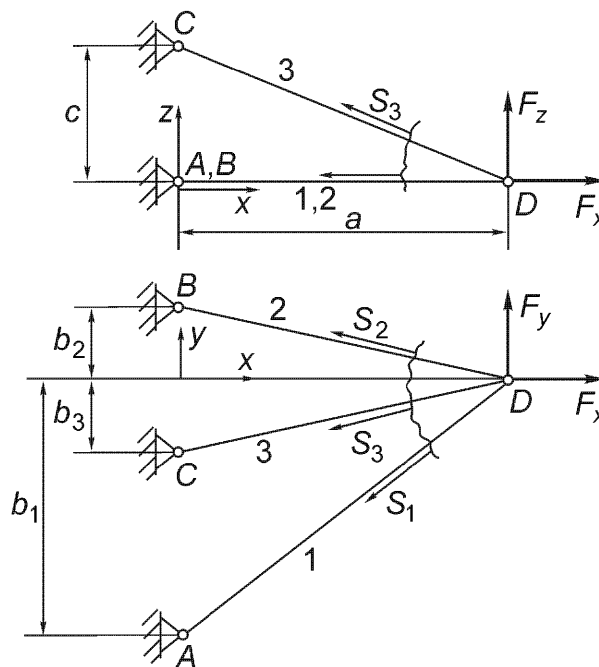


Рис. А 2.2.

$$\sum_{i=1}^4 Y_i = 0 = F_y - S_1 b_1/l_1 + S_2 b_2/l_2 - S_3 b_3/l_3, \quad \sum_{i=1}^4 Z_i = 0 = F_z + S_3 c/l_3.$$

Решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$S_1 = [b_2 F_x/a + F_y + (b_2 + b_3)F_z/c]l_1/(b_1 + b_2),$$

$$S_2 = [b_1 F_x/a - F_y + (b_1 - b_3)F_z/c]l_2/(b_1 + b_2), \quad S_3 = -l_3 F_z/c.$$

А 2.3: Жесткая платформа нагружена в углах тремя сосредоточенными силами F_i , $i = 1, 2, 3$, и поддерживается шестью шарнирно закрепленными стержнями согласно рис. А 2.3.

Сначала найти центр параллельных сил для нагрузок, затем произвести статически эквивалентное приведение сил к центру O и, наконец, определить усилия в стержнях S_k , $k = 1, 2, \dots, 6$.

Решение: Точка приложения равнодействующей нагрузок $\mathbf{R} = -R\mathbf{e}_z = -(F_1 + F_2 + F_3)\mathbf{e}_z$ (где момент равен нулю) находится из рассмотрения «статического момента»

$$\mathbf{r} R = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i F_i = l[F_1 \mathbf{e}_x + F_2(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + F_3 \mathbf{e}_y]$$

и имеет радиус-вектор \mathbf{r} с компонентами (координатами) $r_x = (F_1 + F_2)l/R$, $r_y = (F_2 + F_3)l/R$, $r_z = 0$. Статическая эквивалентность дает вектор \mathbf{R} ,

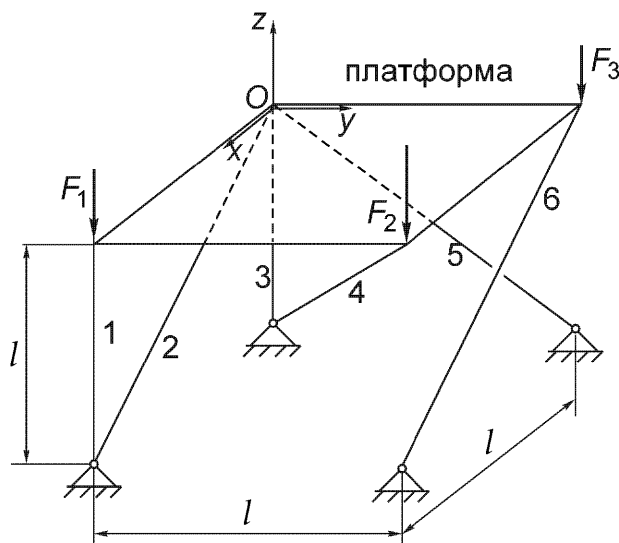


Рис. А 2.3.

приложенный в точке O , и момент

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = l[(F_1 + F_2)\mathbf{e}_y - (F_2 + F_3)\mathbf{e}_x].$$

Разрезая все поддерживающие стержни и рассматривая неизвестные аксиальные силы как натяжения, получаем шесть уравнений равновесия пространственной системы сил ($F_1, F_2, F_3, S_1, S_2, \dots, S_6$):

$$\sum_j X_j = 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 - \frac{\sqrt{3}}{3} S_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_6, \quad \sum_j Y_j = 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} S_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_5,$$

$$\sum_j Z_j = 0 = -S_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 - S_3 - \frac{\sqrt{3}}{3} S_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_6 - R,$$

$$\sum_j M_x^{(j)} = 0 = -l \frac{\sqrt{3}}{3} S_4 - l \frac{\sqrt{2}}{2} S_6 - l F_2 - l F_3,$$

$$\sum_j M_y^{(j)} = 0 = l S_1 + l \frac{\sqrt{3}}{3} S_4 + l F_1 + l F_2, \quad \sum_j M_z^{(j)} = 0 = -l \frac{\sqrt{2}}{2} S_6,$$

что дает в результате решения системы (знак минус означает сжимающую силу) $S_1 = F_3 - F_1$, $S_2 = -(F_2 + F_3)\sqrt{2} = S_5$, $S_3 = 2F_2 + F_3$, $S_4 = -(F_2 + F_3)\sqrt{3}$, $S_6 = 0$. Опорный стержень 6 при данных условиях нагружения оказался ненагруженным.

А 2.4. Скручивая полоску из (металлического) листа винтообразным образом и затем склеивая края, можно получить тонкостенную цилиндрическую оболочку произвольной длины (см. рис. А 2.4).

Используемый как растягиваемый стержень листовой металл имеет нормальные напряжения σ_{xx} ; допустимая величина их равна σ_{ad} . Связующий поверхности материал нагружен нормальным напряжением (σ) и касательным напряжением (τ). Последнее обычно ограничено условием $\tau_{ad} = \varepsilon \sigma_{ad}$, $\varepsilon < 1$.

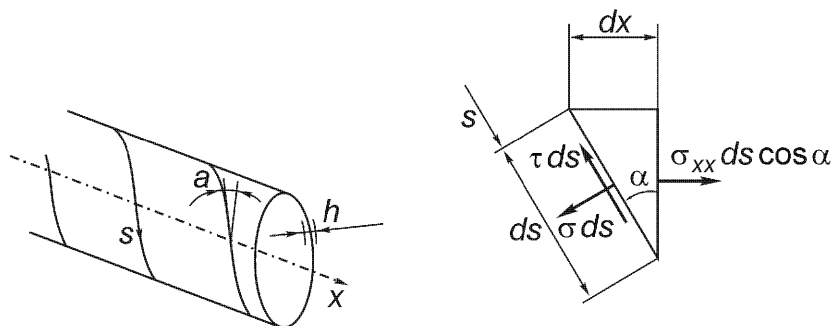


Рис. А 2.4.

Шаг винта, выражаемый углом α , должен быть выбран так, чтобы листовый металл и связующий материал имели одинаковую прочность.

Решение: Для решения задачи вырежем бесконечно малый треугольный элемент, где ds есть часть поверхностной связки. Диаграмма сил построена на рис. А 2.4. Условие равновесия делает вектор напряжений в связке статически определяемым (см. круг Мора) и поэтому $\tau = (1/2)\sigma_{xx} \sin 2\alpha$. Подставляя допустимые напряжения, получим

$$\alpha = (1/2) \arcsin(2\varepsilon).$$

Замечание: В общем, напряжения в связке статически неопределимы и допущение о постоянстве распределения напряжений является очень грубым; см. упражнение А 6.10 об упругом соединении внахлестку.

А 2.5: Консольная конструкция на рис. А 2.5 является альтернативным вариантом перемычки в сравнении с диагональным элементом плоской фермы. А именно, здесь используется тонкая панель листового металла со стержнями на краях. Из-за наличия шарнирных соединений и опор аксиальные силы в стержнях и поток касательных напряжений в пластине становятся статически определяемыми. Нагружение F и размеры конструкции заданы.

Замечание: Ребра жесткости сварены с пластиной. В случае выполнения условия $H \leq L$ или одного из двух сильных геометрических неравенств $H_G/H \ll 1$ и $(Ht_{plate})/A_G \ll 4$ предположение об аксиальности напряженного состояния ребер жесткости и чистого сдвига в пластине становится достаточно хорошим приближением. Поток касательных напряжений $T = \tau t_{plate}$ на поверхности любого ребра жесткости постоянен. Сдвиговая сила имеется

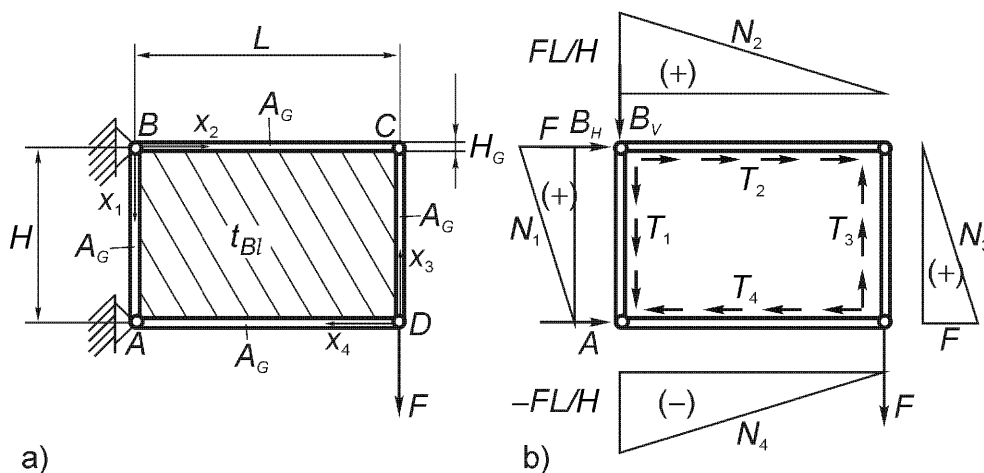


Рис. А 2.5. (а) Конструкция, работающая на сдвиг. (б) Диаграмма сил в концевых стержнях. $T_i = T = \text{const}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

только в пластине (t_{plate} – толщина пластины).

Решение: Опорные реакции равны: $B_V = -F$, $B_H = -FL/H = -A_H = A$. Равновесие дифференциального элемента ребра жесткости дает после интегрирования

$$N_i(x_i) = -T_i x_i + N_i(x_i = 0), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Круговые разрезы вокруг шарнирных соединений ребер жесткости дают

$$N_1(0) = N_3(0) = F, \quad N_2(0) = -N_4(L) = FL/H,$$

$$N_1(H) = N_2(L) = N_3(H) = N_4(0) = 0.$$

Поток касательных напряжений найден после подстановки и вычисления при $x_1 = x_3 = H$ и $x_2 = x_4 = L$ как постоянный и определяется формулами $T_i = F/H = T$, $i = 1, 2, 3, 4$. Линейное изменение аксиальных сил в ребрах жесткости показано на рис. А 2.5 (b). См. также упражнения А 6.8 и А 11.7.

Смотрите, например:

- Czerwenka G., Schnell W. Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus. B.I. Hochschultaschenbücher, Nr. 124, Mannheim, Bibliographisches Institut, 1967.

А 2.6: Консольная крановая конструкция (рис. А 2.6) нагружена эксцентрично приложенной, аксиальной силой F . Определить силы реакций и внутренние силы в балке с пролетом l .

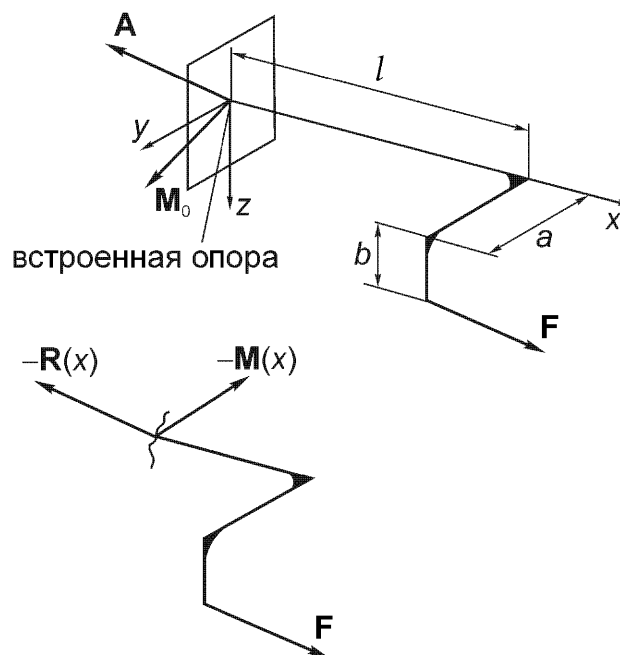


Рис. А 2.6.

Решение: Пространственная система сил $(\mathbf{F}, \mathbf{A}, \mathbf{M}_0)$ находится в равновесии при выполнении условий $(\mathbf{r}_0 = l\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y + b\mathbf{e}_z)$: $A_x + F_x = 0$, $A_y + F_y = 0$, $A_z + F_z = 0$, $M_x - bF_y + aF_z = 0$, $M_y - lF_y + bF_x = 0$ и $M_z - aF_x + lF_y = 0$. Рассматривая отрицательное поперечное сечение, полученное разрезом в положении с координатой x , учтем знак минус в векторах внутренних сил и моментов в диаграмме равновесия системы сил $[\mathbf{F}, -\mathbf{R}(x), -\mathbf{M}(x)]$, что дает $\mathbf{r}(x) = (l-x)\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y + b\mathbf{e}_z$, аксиальная сила равна $N = F_x$; сдвиговые силы $Q_y = F_y$, $Q_z = F_z$; изгибающие моменты $M_y(x) = bF_x - (l-x)F_z$, $M_z(x) = (l-x)F_y - aF_x$; крутящий момент $M_x = aF_z - bF_y$.

А 2.7. Плоская ферма, изображенная на рис. А 2.7, может быть частью структурной конструкции крыши; заданы нагрузки F_1, F_2, F_3 . Найти внутренние силы S_i в элементах 1, 2 и 3 с помощью метода сечений Риттера.

Решение: Условия равновесия всей системы позволяют найти опорные реакции:

$$A_H = -F_3, \quad A_V = (1/2)[(1+a/l)F_1 + (1-a/l)F_2 - (h/l)F_3],$$

$$B = (1/2)[(1-a/l)F_1 + (1+a/l)F_2 + (h/l)F_3].$$

Левая подсистема после проведения сечения по Риттеру рассматривается составлением уравнений моментов относительно полюсов I, II и III. Вычислив расстояния по нормали до линий действия сил, $c = -a + bl/h$, $r_2 = bc/(a^2 + b^2)^{1/2}$, $r_3 = hc/(h^2 + l^2)^{1/2}$, находим

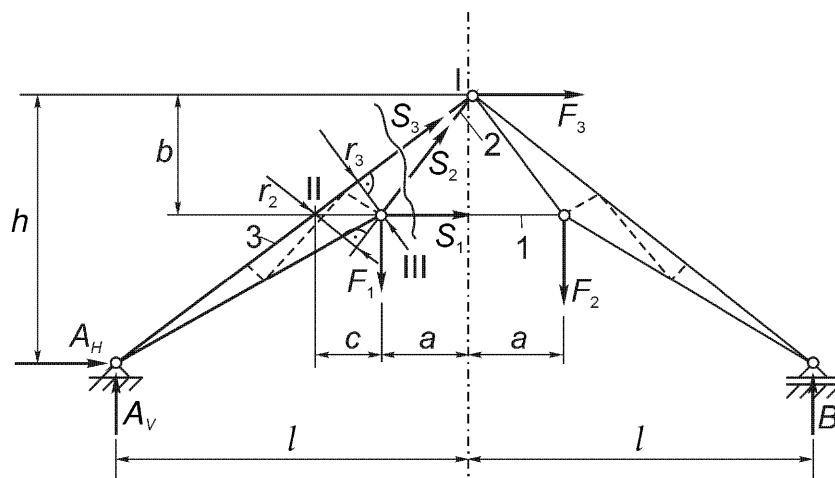


Рис. А 2.7.

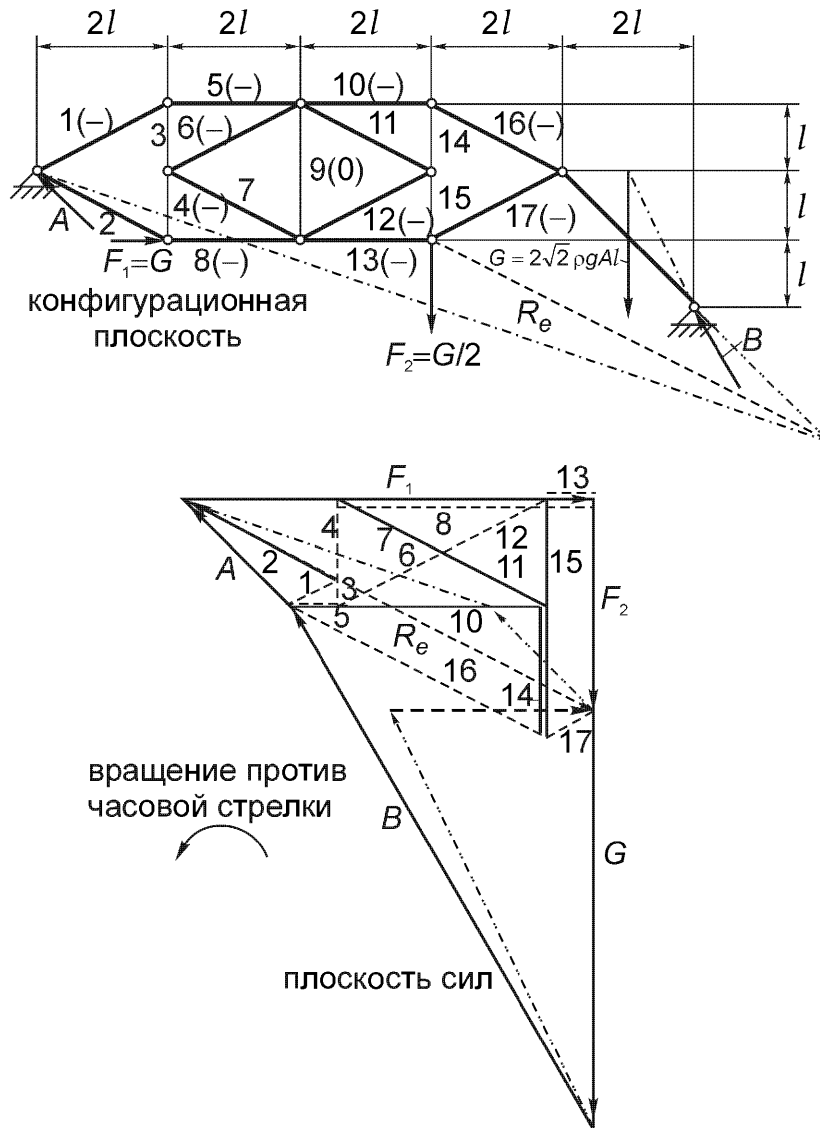


Рис. А 2.8.

$$\begin{aligned}
 bS_1 + hA_H - lA_V + aF_1 &= 0, \\
 r_2S_2 + (h-b)A_H - (l-a-c)A_V - cF_1 &= 0, \\
 r_3S_3 - (h-b)A_H + (l-a)A_V &= 0.
 \end{aligned}$$

Данная ферма является внутренне статически определимой. Пунктирные линии на рис. А 2.7 означают элементы, свободные от напряжений, которые добавляются, чтобы сократить пролеты поясов балки.

А 2.8: Трехшарнирная арка (рис. А 2.8) состоит из двух подсистем: плоская ферма и «тяжелая» однородная балка постоянного поперечного сечения A_c и плотности ρ . Вычислить вес G балки и определить графически реакции опор A и B при дополнительном нагружении $F_1 = G$ и $F_2 = G/2$. Все силы в элементах нужно определить из диаграммы Кремены. Сначала нужно нарисовать масштабированную конфигурацию системы.

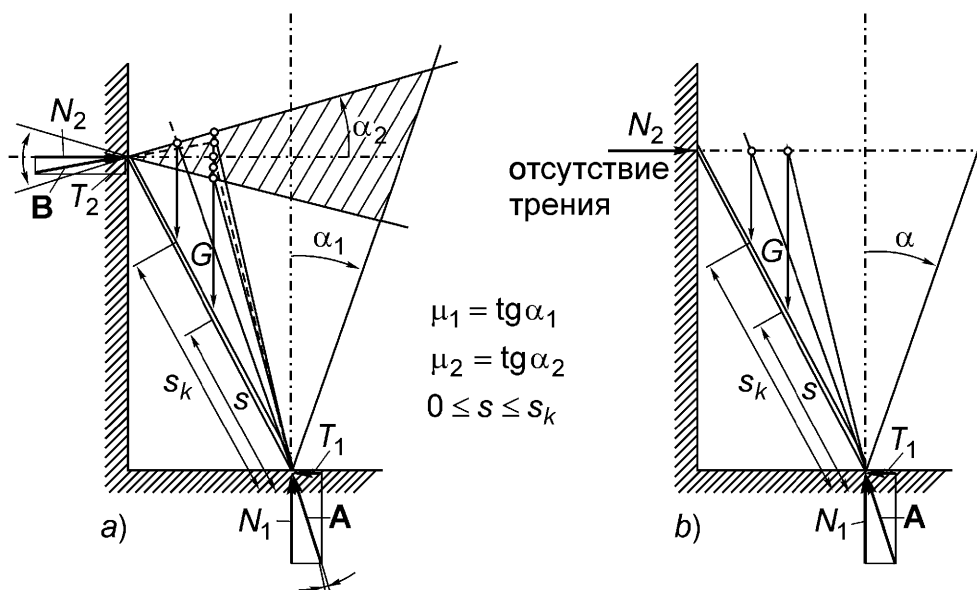


Рис. А 2.9.

Решение: $G = g\rho(2\sqrt{2})l A_c$ и диаграмма Кремоны построена в плоскости сил на рис. А 2.8. Заметим, что все силы должны определяться из диаграммы при обходе ее в направлении против часовой стрелки.

А 2.9: Определить графически область самоторможения жесткой лестницы, имеющей длину L , когда вес G поднимается на расстояние s согласно рис. А 2.9. Коэффициенты статического трения равны μ_1 при контакте с полом и μ_2 при контакте со стеной. Что изменится в решении задачи, если трением со стеной можно пренебречь?

Решение: Линии действия трех сил G , A , B должны пересекаться в одной точке, это необходимое условие равновесия трех непараллельных сил. Конусы статического трения у пола и у стены имеют общую плоскую область, которая заштрихована на рис. А 2.9(a). Для самоторможения равновесие должно быть независимым от величины G ; поэтому точка пересечения сил должна попадать в эту область. При подъеме веса он достигает критического положения при приближении к предельному положению $s \rightarrow s_k$; поэтому область самоторможения имеет вид $0 \leq s \leq s_k$. Влияние трения со стеной на предел s_k довольно мало по отношению к конфигурации всей системы; это видно из сравнения рисунков (a) и (b), рис. А 2.9. Три уравнения равновесия: $T_1 - N_2 = 0$, $T_2 + N_1 - G = 0$, $L(N_2 \sin \varphi + T_2 \cos \varphi) - sG \cos \varphi = 0$ содержат четыре неизвестных; в качестве статически неопределимой силы можно выбрать $X = T_2$. Из-за

наличия согласно закону Кулона предельных значений статического трения для любой докритической конфигурации должны выполняться неравенства $|T_1| \leq T_{F1} = \mu_1 N_1$, $|T_2| \leq T_{F2} = \mu_2 N_2$, или с учетом вышеописанных уравнений равновесия $N_2 = T_1 \leq \mu_1 N_1$, $N_2 \geq (G - N_1)/\mu_2$, $N_1, N_2 > 0$, $T_2 > 0$. Исключение N_2 из соотношения $s/L = 1 - N_1/G + (N_2/G)\text{tg}\varphi$ дает

$$(1 - N_1/G)(1 + \text{tg}\varphi/\mu_2) \leq s/L \leq 1 - (N_1/G)(1 - \mu_1 \text{tg}\varphi) > 0.$$

Так как $1 - \mu_1 \text{tg}\varphi > 0$, согласно рис. А 2.9(а), имеет место неравенство $N_1/G \geq 1/(1 + \mu_1 \mu_2)$. Исключение N_1/G дает геометрическое условие самоторможения в предельном положении (система статически определима)

$$s_k/L = \mu_1(\mu_2 + \text{tg}\varphi)/(1 + \mu_1 \mu_2).$$

Если $\mu_2 = 0$, то все докритические конфигурации также статически определимы. $X = T_2 = 0$. Предельное значение несколько меньше, т.е. в предельном положении

$$\bar{s}_k/L = \mu_1 \text{tg}\varphi.$$

А 2.10: Клиновидный ремень контактирует с барабаном по дуге с углом β и нагружен по касательным к барабану прямым ветвям силами S_1 и S_2 , соответственно, см. рис. А 2.10. Дан коэффициент статического трения μ (всегда есть скольжение по некоторой части окружности барабана из-за разности в деформации входящей и выходящей ветвей ремня). Определить предел разности $|S_2 - S_1|$. Существует ли условие самоторможения? Предельное условие статического трения призматических санок на прямом клинообразном направляющем рельсе при нагружении поперечной силой F можно вывести как частный случай.

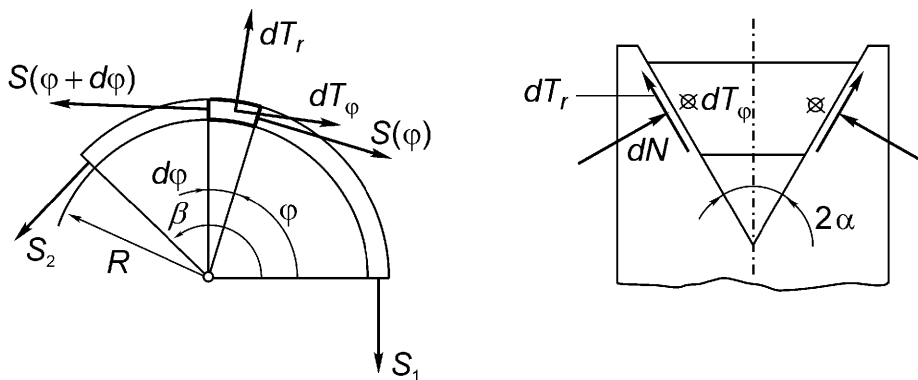


Рис. А 2.10.

Решение: На диаграмме равновесия элемента ремня указаны силы $[S(\varphi), S(\varphi+d\varphi), dN, dT_\varphi, dT_r]$. Сумма компонент сил в тангенциальном и радиальном направлениях должна быть равна нулю (2α угол при вершине клина), что дает уравнения

$$2(dT_r \cos \alpha + dN \sin \alpha) - S d\varphi = 0, \quad dS - 2dT_\varphi = 0.$$

Статическое трение дает ограничение на результирующую тангенциальную силу

$$|dT| = \sqrt{dT_r^2 + dT_\varphi^2} \leq dT_F = \mu dN.$$

Перед тем как возникает скольжение в тангенциальном направлении радиальная компонента dT_r равна нулю, и получается дифференциальное уравнение первого порядка $dS/S = \mu' d\varphi$, аналогичное уравнению Эйлера для трения обычного ремня о барабан [уравнение (7.67)], но с геометрически увеличенным коэффициентом трения клинообразного ремня $\mu' = \mu/\sin \alpha > \mu$. Решение этого уравнения имеет вид $S(\varphi) = S_1 \exp(\pm \mu' \varphi)$. Поэтому

$$S_2 \leq S_1 \exp(\mu' \beta) \quad \text{или} \quad S_1 \leq S_2 \exp(\mu' \beta).$$

Самоторможение невозможно. Горизонтальная сила H , действующая на призму в покое на горизонтальном клинообразном рельсе, поэтому ограничена условием $H \leq \mu' F$; можно сравнить это с ситуацией на плоскости (см. рис. 2.4).

А 2.11: На рис. А 2.11 изображена диаграмма винта с головкой, находящейся в контакте с жесткой пластиной. Заданы следующие размеры: a - радиус головки винта, r - средний радиус винтовой резьбы, $\gamma(r)$ - угол наклона, α - угол клина. Винт предварительно нагружен аксиальной силой F , нормальная сила на свободной оси равна N . Задан коэффициент статического трения μ , который предполагается одинаковым в контактной зоне головки и на резьбе. Нужно определить верхнюю и нижнюю границы внешнего момента, когда начинается вращение винта. При каких условиях возможно самоторможение?

Решение: Силы, действующие на элемент резьбы радиуса r , проектируются на единичные векторы, соответствующие следующим естественным координатам:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n &= \kappa (\sin \alpha \cos \gamma \mathbf{e}_r + \cos \alpha \sin \gamma \mathbf{e}_\varphi - \cos \alpha \cos \gamma \mathbf{e}_z), \\ \mathbf{e}_u &= -\cos \gamma \mathbf{e}_\varphi - \sin \gamma \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_f &= \kappa (\cos \alpha \mathbf{e}_r - \sin \alpha \sin \gamma \cos \gamma \mathbf{e}_\varphi + \sin \alpha \cos^2 \gamma \mathbf{e}_z), \end{aligned}$$

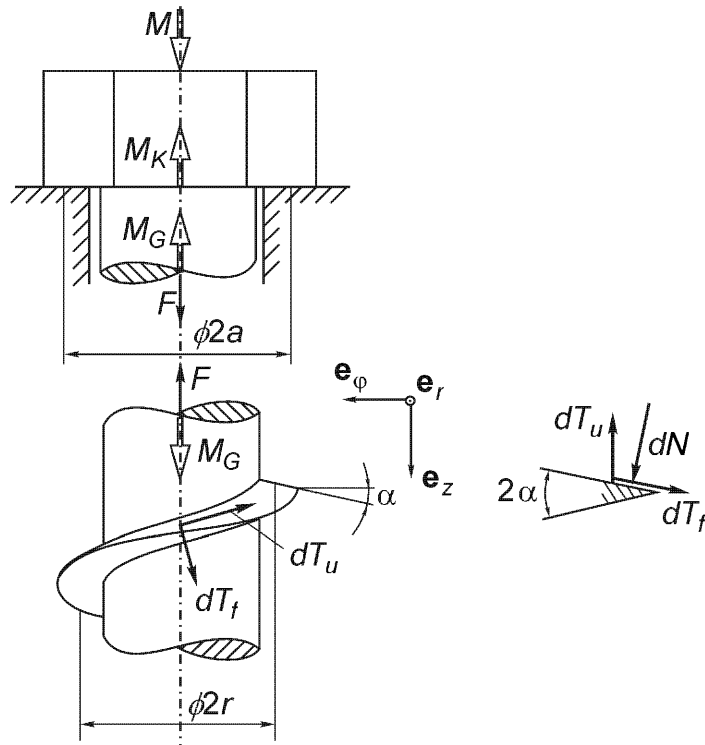


Рис. А 2.11.

$$\kappa = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma)^{-1/2},$$

$$\mathbf{e}_f = \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_n.$$

Тогда $d\mathbf{N} = -dN\mathbf{e}_n$, $d\mathbf{T} = dT_u\mathbf{e}_u + dT_f\mathbf{e}_f$. Равновесие головки винта требует выполнения условия $M - M_K - M_G = 0$, для головки общей площади A имеем

$$-F + \kappa \cos \alpha \cos \gamma \int_A dN - \sin \gamma \int_A dT_u + \kappa \sin \alpha \cos^2 \gamma \int_A dT_f = 0,$$

$$M_G - r \left(\kappa \cos \alpha \cos \gamma \int_A dN + \cos \gamma \int_A dT_u + \kappa \sin \alpha \sin \gamma \cos \gamma \int_A dT_f \right) = 0.$$

Исключение момента M_G , связанного с силами, действующими на резьбу, дает два уравнения для F и M . Неравенства

$$|M_K| \leq M_{KF} = \mu a F, \quad |dT| = (dT_u^2 + dT_f^2)^{1/2} \leq dT_F = \mu dN$$

получаются из ограничений на статическое трение. В пределе dT_f становится равным нулю, и момент M будет ограничен относительно затягивания или развинчивания винта

$$M \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \left(\pm \mu a + \frac{\kappa \cos \alpha \sin \gamma \pm \mu \cos \gamma}{\kappa \cos \alpha \cos \gamma - (\pm \mu \sin \gamma)} r \right) F.$$

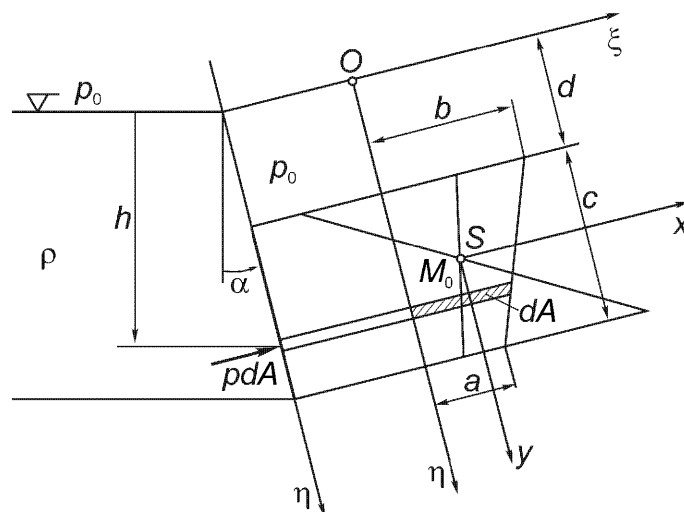


Рис. А 2.12.

Самоторможение характеризуется отрицательным моментом $M < 0$ для развинчивания винта

$$(\mu - \kappa \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma) r + \mu (\kappa \cos \alpha + \mu \operatorname{tg} \gamma) a > 0.$$

Угол α может быть положен равным нулю для малого наклона зажимного винта. Если вдобавок также $\gamma \ll 1$, то функция $\kappa \approx 1$.

А 2.12: Гидравлическое манометрическое давление в несжимаемой жидкости плотности ρ создает поле параллельных сил, действующих на трапецидальную область наклонной плоской подпорной стенки (см. рис. А 2.12). Вычислить статически эквивалентную равнодействующую R и найти точку ее приложения M .

Решение: Давление линейно распределено, $p = g \rho h$, и равнодействующая находится из рассмотрения координаты в плоскости $h = \eta \cos \alpha$, статического момента $\eta_S A$, площади $A = c(a+b)/2$ по соотношению

$$R = \int_A p dA = (g \rho \eta_S \cos \alpha) A = g \rho h_S A,$$

где в данном случае

$$A \eta_S = \int_A \eta dA = \int_d^{d+c} \eta \left[b - (\eta - d) \frac{b-a}{c} \right] d\eta, \quad \eta_S = d + \frac{2a+b}{3(a+b)} c.$$

Статическая эквивалентность дает

$$R\eta_M = \int_A \eta \rho dA = (g \rho \cos \alpha) J_\xi,$$

$$J_\xi = \int_A \eta^2 dA = \int_d^{d+c} \eta^2 \left[b - (\eta - d) \frac{b-a}{c} \right] d\eta =$$

$$= \frac{b}{3} \left[1 + \frac{d}{b} \frac{b-a}{c} \right] [(d+c)^3 - d^3] - \frac{b-a}{4c} [(d+c)^4 - d^4],$$

$$\eta_M = \eta_S + i_x^2 / \eta_S, \quad i_x^2 = c^2 (a^2 + 4ab + b^2) / 18(a+b)^2,$$

$$R\xi_M = \int_A \xi \rho dA = (g \rho \cos \alpha) J_{\xi\eta},$$

$$J_{\xi\eta} = \int_A \xi \eta dA = \frac{1}{2} \int_d^{d+c} \eta \left[b - (\eta - d) \frac{b-a}{c} \right]^2 d\eta =$$

$$= \frac{b^2}{4} \left[1 + 2 \frac{d}{b} \frac{b-a}{c} + \left(\frac{d}{b} \right)^2 \left(\frac{b-a}{c} \right)^2 \right] [(d+c)^2 - d^2] -$$

$$- \frac{b}{3} \left[\frac{b-a}{c} + \frac{d}{b} \left(\frac{b-a}{c} \right)^2 \right] [(d+c)^3 - d^3] + \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{2c} \right)^2 [(d+c)^4 - d^4],$$

$$\xi_M = \xi_S - c(b^3 + 3ab^2 - 3a^2b + a^3) / 36(a+b)^2 \eta_S,$$

$$\xi_S = (a^2 + ab + b^2) / 3(a+b).$$

А 2.13: Трехшарнирная арка полуциркулярной формы нагружена по всей наружной поверхности гидростатическим давлением несжимаемой жидкости плотности ρ и изнутри постоянным давлением p_c . Учитывая собственный вес арки $q = g \rho_b s b$, где $s b$ есть площадь поперечного сечения арки, определить опорные реакции в трех точках А, В и С, а также результирующие силы и моменты $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $M(\varphi)$. См. рис. А 2.13.

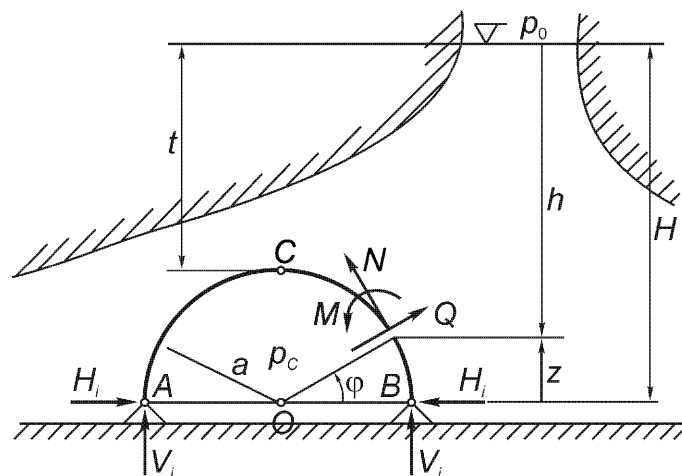


Рис. А 2.13.

Решение: Сдвиговая сила в точке C равна нулю из-за условий симметрии $C_V = 0$, $C_H = C$. Три случая нагружения рассмотрены отдельно и результаты могут быть затем суммированы, учитывая линейность уравнений равновесия.

Случай 1, однородное нагружение давлением $p_1 = p_c - p_0$. Равновесие всей системы дает $H_1 = 0$, $V_1 = C_1 = -ba p_1$. Рассмотрение диаграммы равновесия элемента арки дает нормальную силу $N_1 = ba p_1$ как постоянную и остальные силовые факторы $Q_1 = 0$, $M_1 = 0$ [можно сравнить в формулой (2.98)].

Случай 2, гидростатическое манометрическое давление $p_2 = g\rho h = g\rho(t + a(1 - \sin\varphi))$. Постоянное атмосферное давление p_0 включено в случай 1. Система сходящихся сил на одной половине арки имеет равнодействующую с компонентами $R_{2h} = g\rho h'_S A' = g\rho(t + a/2)ba$ и $R_{2v} = g\rho(t + a(1 - \pi/4))ba$; линия действия силы \mathbf{R} проходит через центр O круга. Уравнения равновесия всей системы дают $H_2 = -g\rho ba^2(\pi - 2)/4$, $V_2 = C_2 = g\rho(t + a(1 - \pi/4))ba$. Рассмотрение элемента арки и его результирующих нагрузок $R_{2h}(\varphi) = g\rho ba(t + a(1 - (1/2)\sin\varphi))\sin\varphi$, $R_{2v}(\varphi) = g\rho ba(t(1 - \cos\varphi) + a(1 - \cos\varphi + (1/2)\sin\varphi\cos\varphi - \varphi/2))$ дает результирующие в поперечном сечении

$$N_2(\varphi) = -(H_2 + R_{2h}(\varphi))\sin\varphi + (-V_2 + R_{2v}(\varphi))\cos\varphi,$$

$$Q_2(\varphi) = (H_2 + R_{2h}(\varphi))\cos\varphi + (-V_2 + R_{2v}(\varphi))\sin\varphi,$$

$$M_2(\varphi)/a = (H_2 + R_{2h}(\varphi))\sin\varphi - V_2(1 - \cos\varphi) - R_{2v}(\varphi)\cos\varphi.$$

В случае 3, когда рассматривается собственный вес арки, $d\mathbf{G} = -qa d\varphi \mathbf{e}_z$, имеем систему параллельных сил нагрузки с равнодействующей $R_3 = \pi a q/2$ для каждой половины арки на расстоянии $2a/\pi$ от точки O . Условия равновесия всей системы дают силы реакций $H_3 = C_3 = qa((\pi/2) - 1)$, $V_3 = \pi a q/2$. С помощью силы $R_3(\varphi) = \varphi a q$ на расстоянии $a\sin\varphi/\varphi$ результирующие в поперечном сечении имеют вид

$$N_3(\varphi) = -aq\{((\pi/2) - 1)\sin\varphi + ((\pi/2) - \varphi)\cos\varphi\},$$

$$Q_3(\varphi) = aq\{((\pi/2) - 1)\cos\varphi + ((\pi/2) - \varphi)\sin\varphi\},$$

$$M_3(\varphi)/a = -\pi a q\{1 - \sin\varphi - (1 - 2\varphi/\pi)\cos\varphi\}/2.$$

Все внутренние силы, найденные выше, определены способом, характерным для данной задачи. Они являются соответствующими решениями

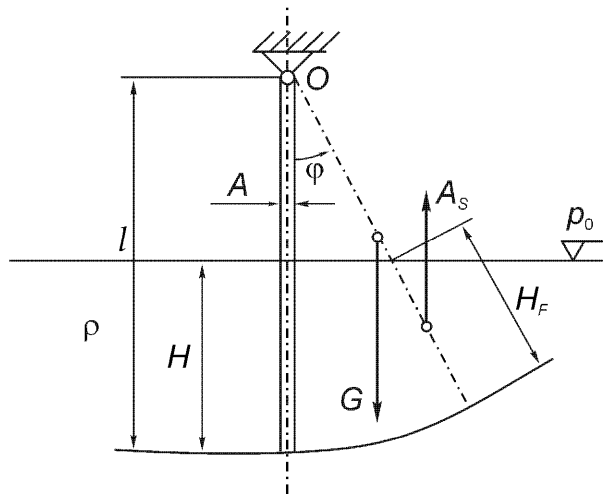


Рис. А 2.14.

дифференциальных уравнений (2.145) и (2.147); в них нагружение задается с помощью тангенциальной и радиальной (нормальной) компонент.

А 2.14: Однородный маятник в виде стержня длины l , поперечного сечения A и плотности ρ_b частично погружен в несжимаемую жидкость плотности ρ , $H < l$; см. рис. А 2.14. Определить равновесные конфигурации и проверить устойчивость вертикального положения, $\varphi = 0$.

Решение: Сумма моментов относительно точки O равна нулю, что дает $M_0 = (Gl/2 - A_S(l - H_F/2))\sin\varphi = 0$, где плавучесть равна $A_S = g\rho AH_F$ и $H_F = l - (l - H)/\cos\varphi$. $\varphi = 0$ определяет равновесную конфигурацию. Другие конфигурации находятся из решения нелинейного уравнения $\sin^2\varphi + (\rho_b/\rho)\cos^2\varphi = (H/l)(2 - H/l)$. Конфигурация $\varphi = 0$ устойчива, если возмущение $|\delta\varphi| \ll 1$ дает возвращающий момент. Линеаризация дает неравенство, $\delta M = Ag(\rho H(2l - H) - \rho_b l^2)\delta\varphi/2 < 0$, $\delta\varphi > 0$, и поэтому условие устойчивости, $\xi = H/l$,

$$\xi(2 - \xi) < \rho_b/\rho.$$

Безусловная устойчивость имеет место, если $\rho_b > \rho$. Другими словами, условие устойчивости имеет вид $\xi < 1 - (1 - \rho_b/\rho)^{1/2}$.

А 2.15: Жесткий и однородный мостовой настил (ρ , A , l) поддерживается подвесным канатом с удельным весом q на единицу длины. Система показана на рис. А 2.15. Даны величины l , h и b , требуется определить уравнение для

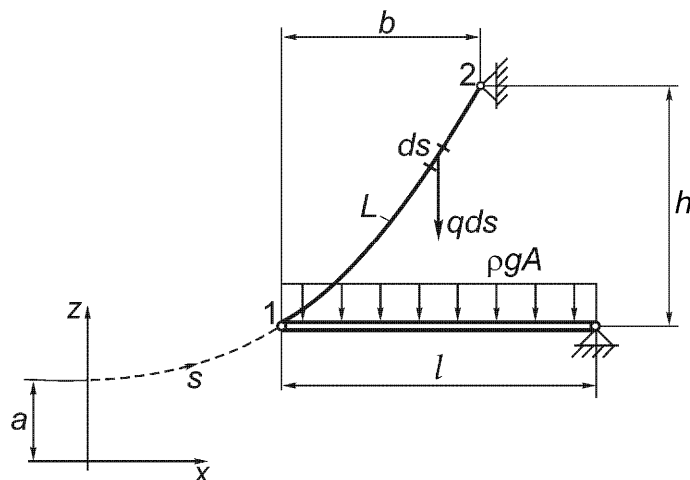


Рис. А 2.15.

параметра a и явно вычислить длину L подвесного каната, чтобы мост удерживался горизонтально.

Решение: Уравнение цепной линии имеет вид $z = a \cosh(x/a)$, $s = a \sinh(x/a)$. Натяжение $N = qz$ имеет компоненты $H = qa$ и $V = qs$. За счет веса моста $G = g\rho Al$ возникает вертикальная реакция в шарнире, которая равна $V_1 = G/2$. Поэтому $s_1 = V_1/q = G/2q = a \sinh(x_1/a)$ есть длина фиктивной части моста, заштрихованной на рис. А 2.15, и $x_1 = a \operatorname{arcsinh}(G/2aq)$ определяет горизонтальное расстояние от оси z . Далее, имеется геометрическая формула (формула сложения используется ниже)

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= h = \\ &= a \cosh(x_2/a) - a \cosh(x_1/a) = a(\cosh((x_1 + b)/a) - \cosh(x_1/a)) = \\ &= a(\cosh(x_1/a)\cosh(b/a) + \sinh(x_1/a)\sinh(b/a) - \cosh(x_1/a)). \end{aligned}$$

Подстановка x_1 дает нелинейное уравнение для величины $\xi = h/a$

$$\xi[1 - (G/2hq)\sinh(\xi b/h)] = [\cosh(\xi b/h) - 1]\cosh[\operatorname{arcsinh}(\xi G/2hq)],$$

которое можно использовать для численного решения. После определения a можно найти величины $L = s_2 - s_1 = s_2 - (G/2q)$, $s_2 = a \sinh[(x_1 + b)/a]$.

3 Механическая работа, мощность, потенциальная энергия

3.1. Работа и мощность сосредоточенных сил и пар сил

Движение (деформация) и сила (напряжение) естественным образом соединяются понятиями механической работы и мощности. Элементарная работа сосредоточенной силы $\mathbf{F}(t)$ на бесконечно малом перемещении $d\mathbf{r}$ точки ее приложения к телу определяется скалярным произведением

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = X dx + Y dy + Z dz = |\mathbf{F}| |d\mathbf{r}| \cos \alpha. \quad (3.1)$$

Поэтому решающее значение для выполнения работы имеет компонента перемещения $d\mathbf{r}$, измеренная в направлении заданной силы \mathbf{F} (см. рис. 3.1). В уравнении (3.1) вместо dW написано δW , чтобы отличить последнее от полного дифференциала скалярной функции: в общем случае элементарная работа не является аналитическим дифференциалом скалярной функции W . Размерность работы – это произведение силы на длину: $[\delta W] = \text{Нм}$, читается Ньютонметр, в системе СИ $1 \text{ Джоуль} = 1 \text{ Дж} = 1 \text{ Нм}$. Работа силы \mathbf{F} при конечном перемещении точки ее приложения вдоль траектории C из положения $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ в положение $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ равна сумме элементарных работ, которая выражается с помощью криволинейного интеграла

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\substack{\text{вдоль } C \\ \text{от } \mathbf{r}_1}}^{\mathbf{r}_2} \delta W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} X dx + \int_{y_1}^{y_2} Y dy + \int_{z_1}^{z_2} Z dz. \quad (3.2)$$

В общем случае $W_{1 \rightarrow 2}$ зависит от формы и длины кривой C . Это видно также при рассмотрении обычного интеграла $\int X dx$, так как в эйлеровом представлении компонента вектора силы $X(x, y, z, t)$, в добавление к нестационарной, хотя и явной зависимости от времени t , зависит от траектории C через ее параметрические уравнения $y = y(x)$, $z = z(x)$. Однако имеются силы, например, такие, что остаются ортогональными к траектории C , для которых элементарная работа $\delta W = 0$, и, следовательно, $W_{1 \rightarrow 2} = 0$. Поэтому систему сил можно разделить на те, что совершают работу, и те, что ее не совершают. Работа за едини-

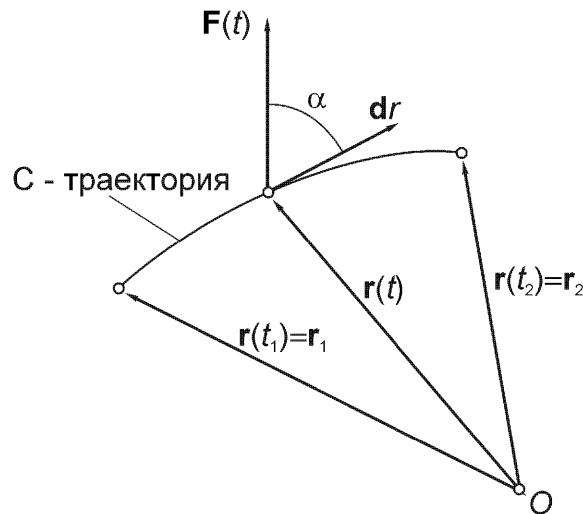


Рис. 3.1. Сосредоточенная сила \mathbf{F} и траектория C точки ее приложения.

цу времени, или мгновенная скорость ее изменения, также является скалярной функцией времени и называется мощностью силы \mathbf{F} :

$$P = P(t) = \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Xv_x + Yv_y + Zv_z = |\mathbf{F}| |\mathbf{v}| \cos \alpha, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{v}(t)$ – скорость точки приложения силы $\mathbf{F}(t)$. Размерность P – это работа, деленная на время, $[P] = \text{Нм/с}$, единица мощности $1 \text{ Нм/с} = 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ Вт}$ называется Ватт. Отсюда $1 \text{ Вт с} = 1 \text{ Дж} = 1 \text{ Нм}$ является единицей измерения работы и энергии (в технике используется такая мера как, например, $1 \text{ кВт час} = 3,6 \times 10^6 \text{ Дж}$, читается киловатт-час). Элементарная работа, выполненная за промежуток времени dt , выражается через мощность

$$\delta W = P(t) dt, \quad (3.4)$$

и тогда

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} P dt. \quad (3.5)$$

В общем случае интеграл по времени также зависит от траектории C .

Из уравнения (3.3) можно получить мощность пары сил с моментом $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ для случая жесткого вращения плоскости действия пары с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Точка приложения силы $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}$ движется со скоростью \mathbf{v}_1 , а точка приложения силы $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}$ со скоростью \mathbf{v}_2 . Из-за линейности распределения скоростей при любом жестком вращении имеем $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, и тогда, подставляя эти выражения в (3.3) и преобразуя смешанное произведение, получаем:

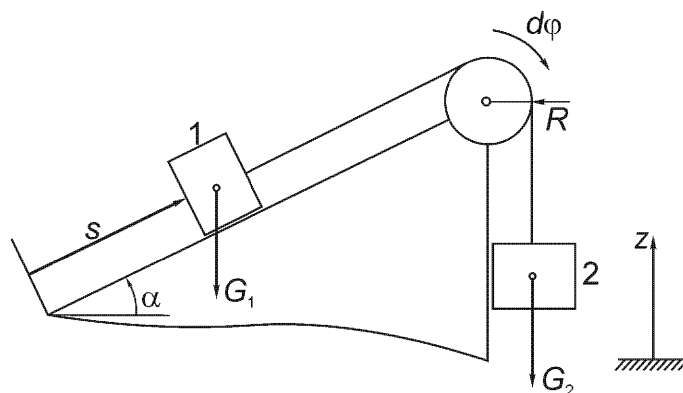


Рис. 3.2. Несвободное движение тел 1 и 2. Работа сил тяжести.

$$P = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (3.6)$$

Элементарная работа момента \mathbf{M} получается умножением на дифференциал времени dt :

$$\delta W = P dt = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{M} \cdot d\varphi, \quad (3.7)$$

где бесконечно малый вектор $d\varphi$ в направлении оси обозначает поворот плоскости действия пары на малый угол $d\varphi$. Следовательно, элементарную работу пары сил определяет проекция вектора $d\varphi$ на направление \mathbf{M} , то есть малый угол поворота вокруг оси под действием \mathbf{M} .

3.1.1. Пример: Работа сил тяжести

Силы тяжести тел 1 и 2 при несвободном движении в соответствии с рис. 3.2 совершают элементарную работу $\delta W = -(G_1 dz_1 + G_2 dz_2)$. Нерастяжимость соединяющей нити дает кинематическое ограничение $ds = R d\varphi = dz_1 / \sin \alpha = -dz_2$, и, следовательно, если не рассматривать трение, получаем

$$\delta W = (-G_1 \sin \alpha + G_2) ds.$$

3.1.2. Пример: Работа пары сил

На кривошип действует перпендикулярная ему сила \mathbf{F} с плечом R . Элементарная работа, совершаемая при малом повороте $d\varphi$ ($ds = R d\varphi$ – перемещение в направлении силы), следует из уравнения (3.1): $\delta W = F ds = M d\varphi$. Приведение силы \mathbf{F} к оси кривошипа дает пару сил с моментом $M = FR$.

3.2. Плотность мощности, стационарные и безвихревые силы, потенциальная энергия

Удельные сосредоточенные силы на единицу объема \mathbf{f} из уравнения (2.18) действуют на материальные точки некоторого континуума и могут быть ненулевы-

ми. Тогда локальная плотность мощности P' , измеряемая в $[\text{Вт}/\text{м}^3]$, определяется скалярным произведением плотности силы \mathbf{f} на скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$:

$$P' = P'(x, y, z; t) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}). \quad (3.8)$$

Мгновенная мощность в момент времени t всех внешних и внутренних сил (массовых сил, поверхностных усилий и внутренних напряжений), действующих на тело с материальным объемом $V(t)$, получается суммированием, то есть интегрированием по объему:

$$P(t) = \int_{V(t)} P' dt. \quad (3.9)$$

Суммарная работа, выполненная между двумя состояниями при t_1 и t_2 , определяется интегрированием по времени

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\int_{V(t)} P' dV \right). \quad (3.10)$$

Этот объемный интеграл подразумевает разбиение плотности мощности на две части – плотность мощности внутренних сил $P'^{(i)}$ и плотность мощности внешних сил $P'^{(e)}$. Таким образом, $P' = P'^{(i)} + P'^{(e)}$.

Стационарная плотность сил $\mathbf{f}(x, y, z; t)$, как и поле любой сосредоточенной силы, характеризуется в эйлеровом представлении соотношением $\partial \mathbf{f} / \partial t = \mathbf{0}$, и, следовательно, определяется выражением вида $\mathbf{f}(x, y, z)$, не содержащим в явном виде зависимости от времени. Для такого стационарного силового поля работа сил может становиться независимой от индивидуальных траекторий материальных точек. Необходимые и достаточные условия для этого рассмотрены далее для стационарного поля сосредоточенной силы $\mathbf{F}(x, y, z)$, но применимы также и к плотности сил $\mathbf{f}(x, y, z)$. Из требования, чтобы элементарная работа становилась равной полному дифференциалу скалярной функции $E_p(x, y, z)$

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = X dx + Y dy + Z dz = -dE_p = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right),$$

вытекают следующие условия:

$$X = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}. \quad (3.11)$$

В векторной записи, которая становится независимой от специального выбора декартовых координат, используемых при дифференцировании в формулах (3.11), это требование принимает вид

$$\mathbf{F} = -\nabla E_p = -\text{grad } E_p. \quad (3.12)$$

«Стационарная сила \mathbf{F} является градиентом поля скалярной функции E_p , которая называется потенциальной энергией.»

Градиент, рассмотренный в уравнении (3.12) как пространственная производная функции потенциала E_p , имеет следующую геометрическую интерпретацию. На поверхности малой сферы с центром в точке (x, y, z) построено центральное поле векторов $E_p(x_1, y_1, z_1)\mathbf{e}_n$, радиально направленных вдоль внешней нормали. Результирующий вектор – это векторная сумма, выраженная через интеграл по замкнутой поверхности

$$\oint E_p(x_1, y_1, z_1)\mathbf{e}_n dS,$$

где (x_1, y_1, z_1) – точки на поверхности сферы. Разделив на объем сферы V_S и перейдя к пределу, получаем:

$$\text{grad } E_p(x, y, z) = \lim_{V_S \rightarrow 0} \frac{1}{V_S} \oint E_p(x_1, y_1, z_1)\mathbf{e}_n dS. \quad (3.13)$$

«Градиент – это вектор, направленный в сторону наибольшего изменения потенциала E_p .»

Сила в таком потенциальном поле представляет собой поток в смысле агента передачи механического движения. Линии тока этого силового поля являются траекториями, ортогональными эквипотенциальным поверхностям $E_p(x, y, z) = \text{const}$ (сравните это с полем гидростатического давления).

Вычисляя стационарные смешанные вторые производные этого потенциала, заметим, что из правила взаимозаменяемости порядка дифференцирования вытекают следующие условия:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial y} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \text{ следовательно, } \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial x} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} = \frac{\partial X}{\partial z}, \text{ следовательно, } \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \text{ следовательно, } \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

Необходимые и достаточные условия существования потенциальной функции можно обобщить в векторной форме, не зависящей от выбора координат

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

«Безвихревое векторное поле силы \mathbf{F} имеет ассоциированную с ним потенциальную функцию E_p .» Это условие имеет силу также и для нестационарных сил; в этом случае функция потенциала явно зависит от времени в виде $E_p(x, y, z, t)$, но соотношение $\mathbf{F}(x, y, z, t) = -\text{grad } E_p$ остается справедливым.

Ротор векторного поля также является пространственной производной. Строя поле векторов $\mathbf{F} \times \mathbf{e}_n$, касательных к поверхности малой сферы с центром в точке (x, y, z) , и рассматривая результирующий вектор, в пределе получаем ротор:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \lim_{V_S \rightarrow 0} \frac{1}{V_S} \oint \mathbf{F} \times \mathbf{e}_n dS. \quad (3.16)$$

Безвихревые и стационарные силы выводятся из потенциала, который явно не зависит от времени, и работа, совершенная такими силами, не зависит от траектории C . Работа такой консервативной системы сил равна уменьшению потенциальной энергии; разность берется между значениями потенциала в начальном и конечном положениях движущейся точки приложения силы \mathbf{F} :

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 dE_p = E_p(\mathbf{r}_1) - E_p(\mathbf{r}_2) = E_1 - E_2. \quad (3.17)$$

Вводя обозначение плотности потенциальной энергии E'_p безвихревой и стационарной плотности силы \mathbf{f} в сплошной среде, суммарную работу внутренних и внешних сил можно записать в виде

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{V(t)} W'_{1 \rightarrow 2} dV = \int_{V(t_1)} E'_1 dV - \int_{V(t_2)} E'_2 dV = E_1 - E_2, \quad (3.18)$$

где E_1 и E_2 – значения суммарной потенциальной энергии упруго деформируемого тела в начальном и конечном состояниях, соответственно. Обычно потенциальную энергию разбивают на вклад консервативных внешних нагрузок (с индексом e – external) и консервативных внутренних напряжений (с индексом i – internal):

$$E_p = E_p^{(e)} + E_p^{(i)}. \quad (3.19)$$

3.3. Потенциальная энергия внешних сил

К наиболее важным консервативным силам относятся приблизительно параллельные силы тяжести и центральные силы гравитации. В дальнейшем рассматриваются только однородные параллельные силы тяжести.

3.3.1. Однородные и параллельные силы тяжести, потенциал собственного веса

Векторы удельного веса полагаются параллельными вертикальному направлению \mathbf{e}_z ; см. рис. 3.3. Единственной ненулевой компонентой вектора силы, приложенной к материальным точкам, является компонента $Z = -g\rho$. Следовательно, $\mathbf{k} = Z\mathbf{e}_z$ является безвихревым полем, и плотность потенциала E' является линейной функцией высоты z над отсчетной горизонтальной плоскостью:

$$E'_g(z) = -\int_0^z Z dz = g\rho z + C', \quad [\text{Вт с/м}^3]. \quad (3.20)$$

Суммарная потенциальная энергия силы тяжести $G = mg$ определяется как интеграл по объему:

$$E_g(z) = \int_{V(t)} E'_g(z) dV = g \int_{V(t)} \rho g dV + C = g \int_m z dm + C = mg z_S + C, \quad (3.21)$$

где z_S – высота центра тяжести и массы.

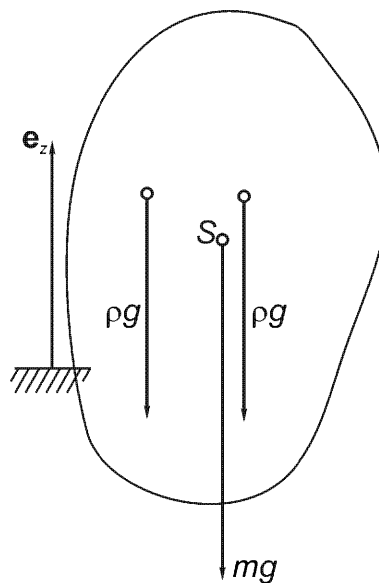


Рис.3.3. Однородное и параллельное поле тяготения, $-g\mathbf{e}_z = \text{const}$.

3.3.2. Центральное поле сил с центральной симметрией

Сонаправленная с радиусом-вектором \mathbf{r} сила с произвольной интенсивностью $f(r)$ равна

$$\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}/r. \quad (3.22)$$

Так как центральное поле сил является безвихревым, то формально работа, совершенная такой силой, равна сумме элементарных работ $(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = f(r)dr$, которая при изменении ее знака совпадает с потенциалом $E(r)$:

$$E(r) = -\int f(r)dr + C.$$

Вычисление градиента $\text{grad} E(r) = \nabla E = (dE/dr)\nabla r = -f(r)\nabla r$ дает нам силу \mathbf{F} , так как $\text{grad} r = \nabla r = \mathbf{r}/r$ – радиально направленный единичный вектор. Неоднородное центральное поле тяготения массы m_p воздействует на достаточно удаленную массу m по обратно-квадратичному закону

$$f(r) = \mu \frac{m_p m}{r^2}, \quad (3.23)$$

где $\mu = (6,6732 \pm 0,0005) \times 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг с}^2$ – универсальная гравитационная постоянная. Следовательно, для планеты Земля с массой $m_p \approx 5,97 \times 10^{24} \text{ кг}$ и средним радиусом $r_0 \approx 6,371 \times 10^6 \text{ м}$ получаем среднее ускорение тяготения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. При введении обозначения $r = r_0 + z$ изменение g с высотой определяется выражением $g = 9,81 \times (1 + z/r_0)^{-2} [\text{м/с}^2]$. Ускорение свободного падения на сплюснутую у полюсов и вращающуюся Землю на малом расстоянии от ее поверхности является функцией широты φ :

$$g(\varphi, z) = 9,78049 \times (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi) - 0,0003086 z - 0,00011 [\text{м/с}^2].$$

Масса Солнца в грубом приближении равна $m_S \approx 1,99 \times 10^{30} \text{ кг}$, а его радиус $r_0 \approx 6,96 \times 10^8 \text{ м}$.

3.4. Потенциальная энергия внутренних сил

Для иллюстрации потенциала внутренних сил (напряжений) рассмотрено упругое тело. Согласно Джорджу Грину (1837) термодинамическое определение задано условием, что каждая деформированная конфигурация может быть получена из первоначально недеформированной конфигурации, которая полагается

свободной от напряжений, с помощью обратимого (квазистатического и изотермического) процесса. Таким образом, предполагается, что после достаточно медленной разгрузки все деформации (смещения) исчезают, и упругое тело восстанавливает свою начальную конфигурацию. Для такой последовательности состояний равновесия при нагружении и разгрузке во всех материальных точках справедливо утверждение о равенстве нулю плотности силы: $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, а, следовательно, и плотность мощности всюду равна нулю: $P' = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0$. В соответствии с уравнением (3.10) суммарная работа должна быть равна нулю:

$$W_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}^{(e)} - E_p^{(i)} = 0, \quad (3.24)$$

$$W_{1 \rightarrow 2}^{(e)} = E_p^{(i)} \equiv U. \quad (3.25)$$

«Работа $W_{1 \rightarrow 2}^{(e)}$, совершенная внешними силами, действующими на упругое тело, равна увеличению потенциала внутренних сил, или упругого потенциала $E_p^{(i)}$.» Этот упругий потенциал, называемый энергией деформации, при изотермических условиях является внутренней энергией U упругого тела. Следовательно, в замкнутом процессе нагружения и разгрузки упругого тела работа, совершенная внешними силами, равна нулю:

$$W_{1 \rightarrow 2}^{(e)} + W_{2 \rightarrow 1}^{(e)} = U + (-U) = 0,$$

а точки приложения этих сил имеют замкнутые траектории.

Удельная энергия деформации, или плотность энергии деформации,

$$U' = dU/dV \quad (3.26)$$

на каждом шаге нагружения рассматривается как функция некоторого параметра, скажем, времени t , закрепленного за каждым состоянием равновесия. Следовательно, скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ определяет скорость смещений, а мощность внешних сил в каждом состоянии равновесия можно приравнять скорости изменения энергии деформации

$$P^{(e)} = dU/dt. \quad (3.27)$$

Если в некоторый момент времени рассмотреть баланс сил конечного объема V упругого тела, эта мощность принимает вид

$$P^{(e)} = \int_V \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} dV + \oint_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma}_n dS \cdot \mathbf{v}) = \frac{dU}{dt}, \quad (3.28)$$

где \mathbf{k} – заданная массовая сила (удельный вес), $\boldsymbol{\sigma}_n$ – усилия на поверхности ∂V объема V . Применяя интегральную формулу Гаусса и подставляя соотно-

шение (2.20), этот поверхностный интеграл можно заменить интегралом по объему:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma}_n dS \cdot \mathbf{v}) &= \oint_{\partial V} [n_x (\boldsymbol{\sigma}_x \cdot \mathbf{v}) + n_y (\boldsymbol{\sigma}_y \cdot \mathbf{v}) + n_z (\boldsymbol{\sigma}_z \cdot \mathbf{v})] dS = \\ &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\boldsymbol{\sigma}_x \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\boldsymbol{\sigma}_y \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\boldsymbol{\sigma}_z \cdot \mathbf{v}) \right] dV. \end{aligned}$$

Дифференцируя по времени произведения в этом выражении и объединяя градиенты напряжения с заданной массовой силой \mathbf{k} , получаем:

$$P^{(e)} = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \left[\left(\boldsymbol{\sigma}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) + \left(\boldsymbol{\sigma}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) + \left(\boldsymbol{\sigma}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) \right] dV = \frac{dU}{dt}. \quad (3.29)$$

Так как из-за уравновешенности сил $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, а уравнение (3.29) должно оставаться в силе для любого частичного объема V , а также в пределе при $V \rightarrow 0$, скорость изменения удельной энергии деформации принимает вид:

$$-P^{(i)} = \frac{dU'}{dt} = \left[\left(\boldsymbol{\sigma}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) + \left(\boldsymbol{\sigma}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) + \left(\boldsymbol{\sigma}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) \right], \quad (3.30)$$

где скорость $\mathbf{v}(x, y, z; t)$ должна рассматриваться в эйлеровом представлении. В индексной записи скорость изменения внутренней энергии определяется выражением

$$\frac{dU'}{dt} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sum_i \sum_j \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (3.31)$$

С помощью симметричного тензора скоростей деформаций в эйлеровом представлении

$$V_{ij} = V_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.32)$$

скорость изменения удельной энергии деформации легко выражается через скалярное произведение этого тензора на симметричный тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{dU'}{dt} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} V_{ij}. \quad (3.33)$$

С учетом того, что перемещение $d\mathbf{u} = \mathbf{v} dt$ определяет мгновенную равновесную конфигурацию в близком состоянии, приращение внутренней энергии за малый промежуток времени dt становится выражением, свободным от параметра времени:

$$dU' = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} V_{ij} dt = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \frac{1}{2} d \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]. \quad (3.34)$$

Для малых приращений градиентов перемещений применяются линеаризованные геометрические соотношения, и тогда

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} d \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right], \quad dU' = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (3.35)$$

Частное дифференцирование формулы (3.35) по компонентам деформации дает компоненты напряжения: $\partial U' / \partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}$. Таким образом, если задано определяющее уравнение упругого тела $\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})$, это выражение можно проинтегрировать для получения энергии деформации

$$U'(\varepsilon_{ij}) = \sum_i \sum_j \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (3.36)$$

В случае изотропии эта функция зависит только от трех инвариантов тензора деформаций I_1, I_2, I_3 .

3.4.1. Упругий потенциал гукковского твердого тела (линейной пружины)

Закон Гука описывает линейно упругое соотношение между напряжением и деформацией; см. раздел 4.1.1. В растянутом стержне постоянного поперечного сечения A одноосные напряжение и деформация постоянны по длине l и пропорциональны друг другу: $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$, где E – модуль упругости Юнга. В этом случае формула (3.36) при исключении из нее нормальной компоненты напряжения становится выражением для постоянной плотности энергии деформации

$$U'(\varepsilon_{xx}) = E \frac{\varepsilon_{xx}^2}{2}. \quad (3.37)$$

Умножая на объем стержня Al , получаем потенциал пружины (общий запасенный упругий потенциал, или энергию деформации), выраженный через деформацию или, альтернативно, через напряжение,

$$U(\varepsilon_{xx}) = \frac{1}{2} E A l \varepsilon_{xx}^2 = U(\sigma_{xx}) = \frac{1}{2} \frac{A l}{E} \sigma_{xx}^2. \quad (3.38)$$

Подстановка осевой силы $N = A \sigma_{xx}$ дает часто встречающуюся величину, дополнительную энергию, в виде

$$U(N) = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} l = U^*. \quad (3.39)$$

Для малой и однородной деформации ($\varepsilon_{xx} \ll 1$) линеаризованное геометрическое соотношение (1.21) принимает вид $\varepsilon_{xx} = du/dx = s/l$, где $s = u(x=l)$ – удлинение стержня, закрепленного при $x = 0$. Тогда

$$U(s) = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} s^2. \quad (3.39a)$$

Здесь $EA/l = c$ – жесткость пружины, измеряемая в [Н/м], то есть сила, необходимая для того, чтобы произвести единичное удлинение ($s = 1$). Следовательно, макроскопический закон Гука для пружины $F = N = cs$ выражает пропорциональность между осевой нагрузкой и осевым удлинением. Работа внешней силы F в процессе деформации равна

$$W_{1 \rightarrow 2}^{(e)} = \int_0^s F(u) du = \int_0^s cu du = U(s) = \frac{1}{2} cs^2 = \frac{F^2}{2c}. \quad (3.40)$$

«Работа медленно возрастающей внешней силы F запасается в упругом стержне в виде восстанавливаемой упругой энергии (внутренних сил N). Работа, совершаемая при разгрузке, имеет точно такую же величину (диссипация отсутствует).» Таким образом, энергия деформации зависит от жесткости c , которая является параметром системы и может быть выражена или через удлинение s , или через осевую нагрузку F . Следует отметить одно важное свойство:

$$dU/ds = F \quad \text{и} \quad dU/dF = s, \quad (3.41)$$

где s – смещение, измеренное в направлении силы: $F = cs$.

Выражение энергии деформации (3.39) применяется к каждому линейно упругому элементу идеализированной фермы. Следовательно, если мы предположим наличие общего для всех элементов модуля Юнга E , то суммирование по n элементам дает

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i S_i^2 / EA_i, \quad (3.42)$$

где S_i – осевая сила в элементе с номером i , которую в случае статической определенности можно выразить через внешние нагрузки. В результате частного дифференцирования соотношения (3.42) по внешней силе F получаем упругое перемещение δ точки приложения силы в направлении этой силы, или перемещение узла:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \sum_{i=1}^n l_i (S_i / EA_i) \frac{\partial S_i}{\partial F}. \quad (3.43)$$

Отметим, что $\partial S_i / \partial F$ дает относительное изменение силы в элементе S_i по отношению к сосредоточенной нагружающей силе F , и видно, что эти выражения в формуле (3.43) можно заменить силами, возникающими в элементах при особом нагружении фиктивной единичной силой $F = 1$. После такой подстановки формула (3.43) становится удобной для технических приложений, например, для контроля смещений.

(§) Пример: Простая ферма

Схема этой фермы, состоящей из пяти элементов с равным поперечным сечением $A = A_i = 6,25 \text{ см}^2$ и со стороной большого квадрата $a = 0,25 \text{ м}$, показана на рис. 3.4. Внешняя нагрузка $F = 50 \text{ кН}$ в узле 1 приводит к нормальным силам, равным $-F\sqrt{2}$ в нижних элементах и к силе F в горизонтальной диагонали (в верхних элементах напряжения отсутствуют). Подстановка в уравнение (3.43) модуля Юнга стали $E = 21 \times 10^6 \text{ Н/см}^2$ дает перемещение узла 1 вниз на величину $\delta_1 = (Fa/EA) [2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}] = 0,516 \times 10^{-3} \text{ м}$.

Одноосный закон Гука $F = cs$ можно обобщить, рассматривая нагружение линейно упругого тела несколькими сосредоточенными силами и сосредоточенными внешними моментами и используя матричную запись:

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \mathbf{u}_F, \quad (3.44)$$

где \mathbf{k} – матрица жесткости (ее элементы являются коэффициентами жесткости). Формула (3.44) выражает закон Гука с помощью линейного векторного соотношения между перемещениями u_i в направлении приложенных сил, собранными в вектор-столбец \mathbf{u}_F , и внешними нагрузками, где элементами матрицы-столбца \mathbf{F} являются сосредоточенные силы F_i . В случае нагружения сосре-

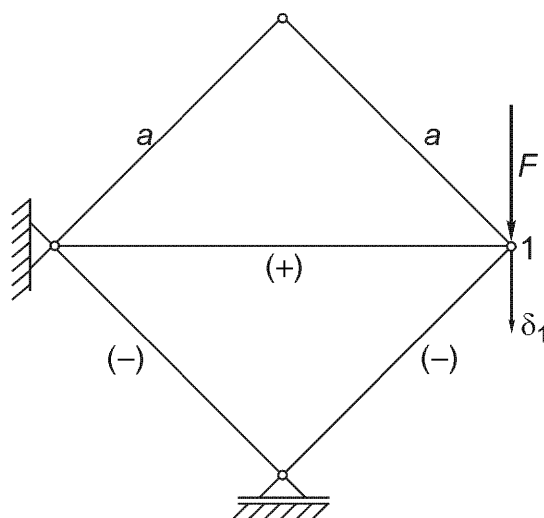


Рис. 3.4. Деформация линейно упругой фермы.

доточенными моментами, соответствующими перемещениями будут малые повороты вокруг оси момента. Аналогично случаю с растянутым стержнем, где жесткость s равна приложенной силе F , необходимой для удлинения $s = 1$, каждый столбец матрицы жесткости содержит величины внешних сил, которые производят единичное перемещение, содержащееся в соответствующей строке вектора-столбца \mathbf{u}_F , когда все остальные элементы равны нулю:

$$F_i = \sum_j k_{ij} u_j \Rightarrow u_k = 1, \quad u_j = 0, \quad j \neq k, \quad F_i = k_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Энергия деформации, запасенная в произвольно нагруженном линейно упругом теле, в соответствии с аналогом матрицы в формуле (3.40), принимает вид

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}_F^T \mathbf{k} \mathbf{u}_F = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{k}^{-1} \mathbf{F}, \quad (3.45)$$

где верхний индекс T обозначает транспонированную матрицу. Обратная матрица \mathbf{k}^{-1} несингулярной матрицы жесткости называется матрицей податливости. Она существует, если $\det\{\mathbf{k}\} \neq 0$. Ее элементы являются коэффициентами влияния, обобщающими податливость $1/c = s/F$ одноосной пружины:

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{F}. \quad (3.46)$$

Столбец матрицы податливости отвечает смещению \mathbf{u}_F , вызванному единичной нагрузкой в соответствующей строке вектора нагрузки, когда все остальные элементы равны нулю. Для того чтобы матрица жесткости была несингулярной, такое нагружение должно быть уравновешенным (например, все степени свободы движения тела как жесткого целого должны быть запрещены соответствующими опорами); см. формулы (6.1), (6.2), (10.49) и (11.70).

Плотность энергии деформации в формуле (3.36) является квадратичной функцией деформаций, которая для изотропного гуковского твердого тела должна иметь вид

$$U'(\varepsilon_{ij}) = C_1 e^2 + C_2 J_2, \quad e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz},$$

где C_1 и C_2 – константы, а J_2 – второй инвариант девиатора деформаций [см. соотношения (1.35) и (2.36)], который не зависит от объемного расширения e . Если мы возьмем рассмотренный далее трехмерный закон Гука, соотношение (4.15)

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \delta_{ij} \right),$$

то, проведя интегрирование в формуле (3.36), получаем выражение в виде суммы двух слагаемых:

$$U'(\varepsilon_{ij}) = G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} e^2 + \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2 \right] = \frac{G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} e^2 + 2G J_2. \quad (3.47)$$

Сравнение коэффициентов дает $2C_1 = E/3(1-2\nu) = K$, модуль объемного расширения, и $C_2 = 2G$, где $G = E/2(1+\nu)$ – модуль сдвига, а $-1 < \nu < 1/2$ – коэффициент Пуассона. Суммарный упругий потенциал Гуковского тела определяется интегрированием по объему

$$U = \int_V U' dV. \quad (3.47a)$$

В формуле (3.47) удельная работа объемного сжатия определяется слагаемым $Ke^2/2$, а слагаемое $2GJ_2$ представляет собой работу конфигурационного изменения формы при условии малости градиентов смещений (энергию деформаций формоизменения). Последнее выражение становится энергией деформации в процессе деформирования несжимаемого упругого тела.

3.4.2. Баротропная жидкость

В случае специального предположения об идеальной и баротропной жидкости касательные напряжения исчезают, и гидростатическое напряжение $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ имеет заданную определяющую зависимость от плотности $p = p(\rho)$. Из соотношения (3.33) в этом случае вытекает плотность мощности объемного сжатия

$$dU'/dt = -p \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (3.48)$$

Подстановка уравнения неразрывности (1.75) дает $dU'/dt = (p/\rho) dp/dt$, а приращение внутреннего потенциала можно записать в виде, не содержащем времени,

$$dU' = p(dp/\rho). \quad (3.49)$$

3.5. Лагранжево представление работы внутренних сил, тензор напряжений Кирхгоффа

Для больших деформаций применяются нелинейные геометрические соотношения (1.20), и соотношение (3.33) должно быть преобразовано к лагранжевой форме. Формально материальная производная по времени от (1.18) равна

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(dl^2 - dl_0^2) = \\
& = 2\left[\dot{\epsilon}_{xx}(dX)^2 + \dot{\epsilon}_{yy}(dY)^2 + \dot{\epsilon}_{zz}(dZ)^2 + 2(\dot{\epsilon}_{xy}dXdY + \dot{\epsilon}_{yz}dYdZ + \dot{\epsilon}_{zx}dZdX)\right] = \\
& = 2\sum_k \sum_l \frac{d\epsilon_{kl}}{dt} dX_k dX_l.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

С другой стороны, если продифференцировать выражение $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ и заметить, что $d(dx)/dt = d(dx/dt) = dv_x$, и т.д., то эта производная принимает вид

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(dl^2 - dl_0^2) = 2[dx dv_x + dy dv_y + dz dv_z] = \\
& = 2\sum_i \sum_j V_{ij} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X} dX + \frac{\partial x_i}{\partial Y} dY + \frac{\partial x_i}{\partial Z} dZ \right) \left(\frac{\partial x_j}{\partial X} dX + \frac{\partial x_j}{\partial Y} dY + \frac{\partial x_j}{\partial Z} dZ \right).
\end{aligned}$$

Почленное умножение приводит окончательно к четверной сумме

$$\frac{d}{dt}(dl^2 - dl_0^2) = 2\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l V_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_j}{\partial X_l} dX_k dX_l. \tag{3.51}$$

Сравнивая коэффициенты и рассматривая градиент деформации $F_{ik} = \partial x_i / \partial X_k$, получаем скорость деформаций в виде

$$\frac{d\epsilon_{kl}}{dt} = \sum_i \sum_j V_{ij} F_{ik} F_{jl} = \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t}. \tag{3.52}$$

В случае движения тела как жесткого целого $d\epsilon_{kl}/dt = 0$, так же как и $V_{ij} = 0$.

Уравнение (3.52) можно разрешить относительно элементов симметричного тензора скоростей деформаций

$$V_{ij} = \sum_k \sum_l \frac{d\epsilon_{kl}}{dt} F_{ki}^{-1} F_{lj}^{-1},$$

и тогда дивергенция поля скоростей задается суммой

$$\sum_i V_{ij} = \text{div } \mathbf{v} = \sum_k \sum_l \frac{d\epsilon_{kl}}{dt} \sum_i F_{ki}^{-1} F_{li}^{-1}.$$

Компоненты

$$B_{kl} = \sum_i F_{ki}^{-1} F_{li}^{-1}$$

являются элементами тензора деформаций Фингера. (Дж. Фингер был профессором механики в Венском техническом университете). Кинематическое ограничение несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ может быть выражено как

$$\sum_k \sum_l B_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} = 0.$$

Умножая $d\epsilon_{kl}/dt$ на соответствующую компоненту напряжений S_{kl} и суммируя, получаем удельную мощность [см. уравнение (3.33)] на единицу массы:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dU'}{dt} = \frac{1}{\rho} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} v_{ij} = \frac{1}{\rho_0} \sum_k \sum_l S_{kl} \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t}. \quad (3.53)$$

Сравнение коэффициентов скоростей деформаций приводит к зависимости между напряжениями Коши в эйлеровом представлении и напряжениями Кирхгоффа

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \sum_k \sum_l S_{kl} F_{ik} F_{jl}. \quad (3.54)$$

Решение относительно напряжений в лагранжевой форме дает выражение:

$$S_{kl} = \frac{\rho_0}{\rho} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} F_{ki}^{-1} F_{lj}^{-1} = S_{lk}, \quad (3.55)$$

где ρ – текущая плотность, а ρ_0 – начальная плотность в недеформированном состоянии. Вновь определённые компоненты напряжений являются элементами симметричного второго тензора напряжений Пиола-Кирхгоффа. Наиболее важно, что, будучи перемножены со скоростями деформаций Грина, они дают ту же плотность мощности на единицу массы.

Вектор напряжений, или усилие \mathbf{S}_n , соответствующий напряжениям Кирхгоффа, конструируется путем отнесения силы к недеформированной площадке с нормалью \mathbf{e}_n в недеформированной исходной конфигурации. Неортогональные компоненты задаются проекциями на косоугольную триаду, которая является поточечно различным результатом отражения первоначально ортогональной системы $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ на деформированное состояние. Три базисных ненормализованных вектора – это

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.56)$$

где

$$\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + 2\epsilon_{\alpha\beta} \quad (3.57)$$

являются элементами метрического тензора. Следовательно,

$$\mathbf{S}_n = \sum_{\alpha=1}^3 S_{n\alpha} \mathbf{g}_\alpha. \quad (3.58)$$

Из этого рассмотрения больших деформаций уже видна необходимость в других тензорах напряжений. Нормализация базисных векторов \mathbf{g}_α дает технические компоненты напряжений $\tau_{n\alpha}$, которые относятся к недеформированной элементарной площадке,

$$\mathbf{S}_n = \sum_{\alpha=1}^3 \tau_{n\alpha} \mathbf{g}_\alpha / |\mathbf{g}_\alpha|, \quad \tau_{n\alpha} = S_{n\alpha} |\mathbf{g}_\alpha|. \quad (3.59)$$

Они не подчиняются правилам преобразования элементов тензора при повороте системы координат.

Вторая интерпретация вектора напряжений Кирхгоффа \mathbf{S}_n с компонентами S_{ni} в направлении осей первоначальной системы отсчета $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, скажем, $i = x, y, z$, следует из рассмотрения деформированной площадки с начальной нормалью \mathbf{e}_n в недеформированной конфигурации и, связывая её с силой $d\mathbf{F}$, после соответствующего преобразования в недеформированное состояние $d\mathbf{F}_0$. Получаем следующие соотношения между компонентами силы и напряжениями:

$$dF_{0i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial X_i}{\partial X_j} dF_j, \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \sum_k \sigma_{ik} F_{kj}^{-1}.$$

В механике сплошных сред этот ассоциированный несимметричный тензор называется первым тензором напряжений Пиола-Кирхгоффа.

3.6. Упражнения А 3.1, А 3.2 и решения

А 3.1. Параллельное и последовательное соединение пружин. Требуется определить эффективную жесткость линейно упругих пружин, соединенных последовательно, или, наоборот, параллельно, путем сложения их упругих потенциалов. См. рис. А 3.1.

Решение: Суммарный потенциал n пружин равен сумме упругой энергии, запасенной каждой из них,

$$U = \sum_{i=1}^n U_i, \quad \text{на рис. А 3.1 } n = 3.$$

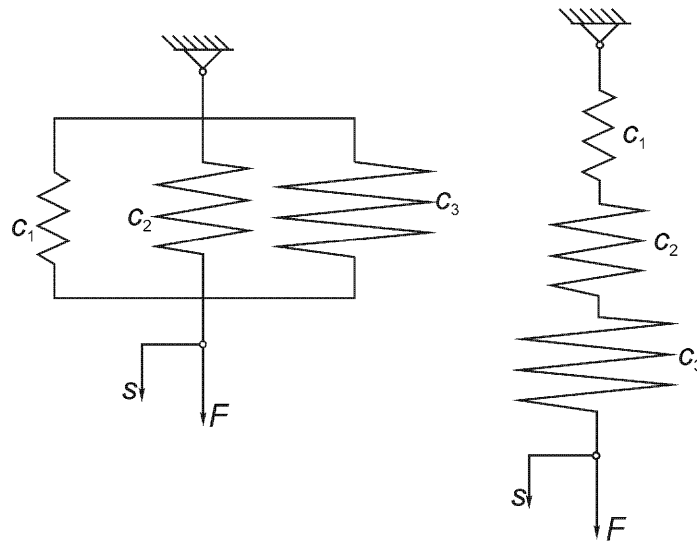


Рис. А 3.1. Параллельное и последовательное соединение линейно упругих пружин.

В случае параллельного соединения удлинение s является общим для всех пружин, отсюда, учитывая, что $U_i = c_i s^2 / 2$, получаем

$$U_i = \frac{s^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i = \frac{1}{2} k_{eff} s^2, \quad k_{eff} = \frac{F}{s} = \sum_{i=1}^n c_i, \quad F = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Каждая из последовательно соединенных пружин несет одну и ту же нагрузку F . Таким образом, запасенная энергия i -ой пружины равна $U_i = F^2 / 2c_i$, и тогда

$$U_i = \frac{F^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^{-1} = \frac{F^2}{2k_{eff}}, \quad k_{eff} = \frac{F}{s} = 1 / \sum_{i=1}^n c_i^{-1}, \quad s = \sum_{i=1}^n s_i.$$

См. раздел 4.2.2, а также упражнения А 6.2, А 6.3 и раздел 12.8.

А 3.2. Определить связь между моментом и малым углом для пружинного основания (рис. А 3.2) путем дифференцирования упругого потенциала. Несимметричное нелинейное определяющее соотношение для распределенных пружин задано полиномом третьей степени. Линейный коэффициент жесткости (на единицу длины) k' обычно является общим коэффициентом полинома. При повороте по ходу часовой стрелки удлинение отдельной пружины равно $s = -x\varphi$. Учесть влияние квадратичного члена и определить линейную жесткость при повороте.

Решение: Соотношение между силой (на единицу длины) и перемещением имеет вид

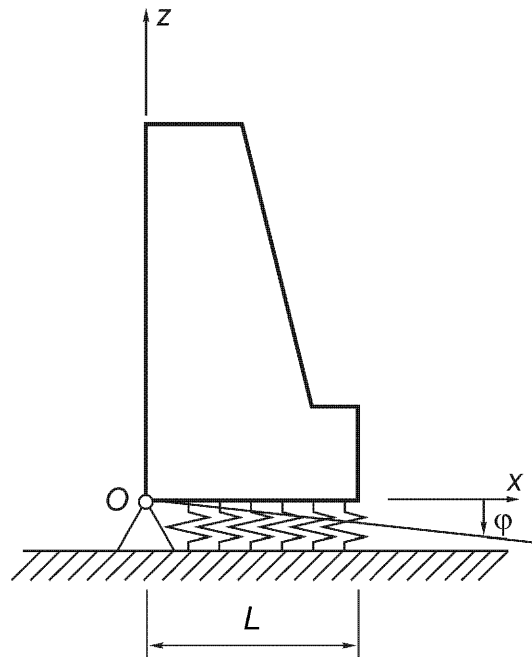


Рис. А 3.2. Физически нелинейное пружинное основание.

$$q = k'(s + \eta_1 s^2 + \eta_2 s^3).$$

Удельная энергия равна работе внешней силы на единицу длины

$$U' = \int_0^s q(u) du,$$

и путем суперпозиции получаем упругий потенциал

$$U = \int_0^L U' dx = k' \frac{L^3}{3} \left(\frac{\varphi^2}{2} - \eta_1 \frac{L}{4} \varphi^3 + \eta_2 \frac{3L^2}{20} \varphi^4 \right).$$

Дифференцирование дает восстанавливающий момент сжатого основания (отметим результирующую линейную жесткость при повороте и несимметричность по углу φ):

$$M = \frac{dU}{d\varphi} = k' \frac{L^3}{3} \left(\varphi - \eta_1 \frac{3L}{4} \varphi^2 + \eta_2 \frac{3L^2}{5} \varphi^3 \right).$$

Для линейного основания Винклера см. раздел 9.6 и рис. 11.7.

4 Определяющие соотношения

В этой книге не рассматриваются «нелокальные» материальные законы твердых тел или жидкостей. Следовательно, определяющие соотношения в каждой материальной точке являются конечными или дифференциальными уравнениями, которые связывают тензор напряжений с соответствующими деформациями (влияние температуры и других немеханических полей на этой стадии рассмотрения исключено). Рассматриваются простые материальные законы для упругих, вязко-упругих, упруго-пластических и упруго-вязко-пластических тел. Процессы деформации, особенно для тел последних видов, ограничены малыми деформациями и скоростями деформаций, то есть из них должны быть исключены задачи, связанные с технологиями пластического формоизменения, такими какковка. Большие возможности для последующих рассмотрений дали широкие и хорошо организованные испытания материалов, которые проводились повседневно для получения численных значений материальных параметров.

Исключая монокристаллы, некоторые жидкости и очень чистые (не технические) материалы, общая теория все еще испытывает недостаток знаний о влиянии сил на атомном или молекулярном уровне на прочность тела. Всякое тело обычно наполнено разного рода примесями и загрязнениями, и поэтому соотношения между напряжениями и деформациями для такого «загрязненного» тела нельзя определить точно. С другой стороны, материаловедение разработало теории и умения производства материалов с оптимальными свойствами для специального применения. Читатель отсылается к обширной литературе по этому важному вопросу.

4.1. Упругое тело, закон Гука линейной теории упругости

Общее определение нелинейной упругости расширяет термодинамические рассуждения Джорджа Грина о гиперупругом теле; см. соотношения (3.35). Термодинамическое равновесие предполагает существование недеформированной начальной конфигурации, свободной от каких бы то ни было напряжений. При любой траектории нагружения упругое тело после разгрузки возвращается в это состояние, и существует единственное конечное соотношение между соответствующими тензорами напряжений и деформаций. В эйлеровом представлении компоненты тензора напряжений Коши связаны с компонентами тензора деформаций Альманси

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}). \quad (4.1)$$

При лагранжевом описании тензор напряжений Кирхгоффа является функцией тензора деформаций Грина

$$S_{ij} = G(\varepsilon_{ij}). \quad (4.2)$$

Дальше обсуждаются линейная упругость и пример квадратичного закона нелинейной упругости.

4.1.1. Линейно упругое тело, закон Гука

Самое простое и наиболее часто применяемое соотношение между напряжением и деформацией – это линейный закон упругости гукковского материала. Роберт Гук так сформулировал этот закон в 1678 году на латыни «*Ut tensio sic vis*». Это означает «Сила (пружины) пропорциональна ее удлинению», или

$$F = cs. \quad (4.3)$$

Здесь коэффициент c – жесткость пружины, а s – перемещение в направлении приложенной силы F ; см. рис. 4.1. Для определения жесткости c при обычных испытаниях упругих материалов стержневые образцы на растяжение (их конструкция и размеры установлены стандартом) подвергаются нагружению на специальных испытательных машинах. Сила растяжения увеличивается малыми шагами или непрерывно и медленно, и производится точное измерение силы и удлинения. Таким путем получается диаграмма пружины. Наклон прямой линии на диаграмме есть жесткость c . Из такого измерения вытекает одноосное линейно упругое определяющее соотношение, которое получается путем деления осевой силы на площадь недеформированного поперечного сечения A_0 , что дает компоненту напряжения Кирхгоффа $S_{xx} = S$:

$$S = F/A_0 = (cl_0/A_0)(s/l_0) = E\varepsilon, \quad (4.4)$$

где $\varepsilon = s/l_0$ – однородное относительное удлинение, а $E = (cl_0/A_0)$ – модуль Юнга. Для мягкой стали $E = 2,06 \times 10^5$ Н/мм²; для других упругих материалов см. таблицу в Приложении. В той части образца, где $\varepsilon = \text{const}$, боковые размеры d_0 уменьшаются в соответствии с коэффициентом

$$\nu = \varepsilon_q/\varepsilon, \quad \varepsilon_q = (d_0 - d)/d_0, \quad (4.5)$$

где ν – коэффициент Пуассона. В общем случае $\nu > 0$; для стали $\nu \approx 0.3$. Допустимый диапазон изменения $-1 < \nu \leq 1/2$; см., например, соотношение (4.11).

Измеренное относительное удлинение $\varepsilon \ll 1$ в диапазоне линейной упругости приблизительно равно осевой компоненте деформации, $\varepsilon \approx \varepsilon_{xx}$; анало-

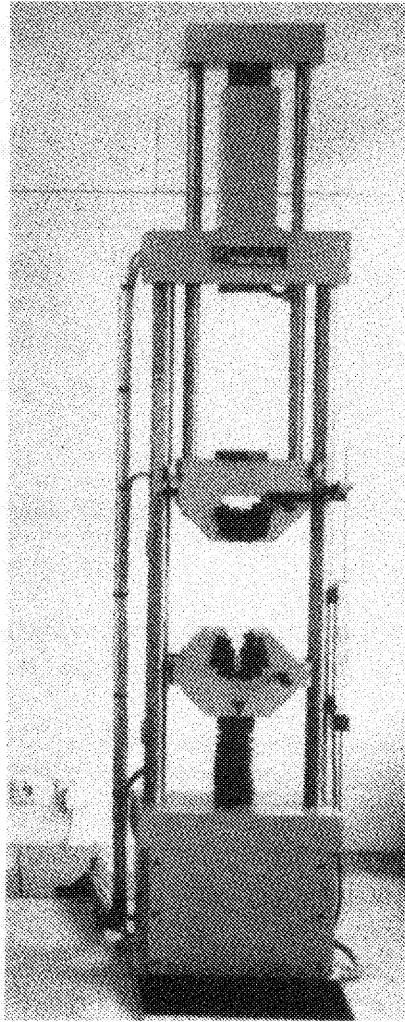


Рис. 4.1 (а). Гидравлическая универсальная испытательная машина фирмы Шенк-Требел. Развиваемое усилие нагружения 120 кН.

гично $\varepsilon_q \approx -\varepsilon_{yy}$, так как, например, для стали предел пропорциональности напряжений и деформаций составляет около 0,5%. Согласно с определением внутренней работы, математическая форма одноосного закона Гука, таким образом, принимает вид

$$S = E\varepsilon_{xx}, \quad (4.6)$$

где ε_{xx} – компонента тензора деформаций Грина. Формула (4.6) с математической точки зрения остается в силе и при больших деформациях, но соотношение между напряжением и относительным удлинением тогда становится нелинейным. В эйлеровом представлении, и также согласуясь с определением внутренней работы, путем деления осевой силы на текущую площадь поперечного сечения A получаем другой линейный материальный закон

$$\sigma_{xx} = F/A = E\varepsilon_{xx}. \quad (4.7)$$

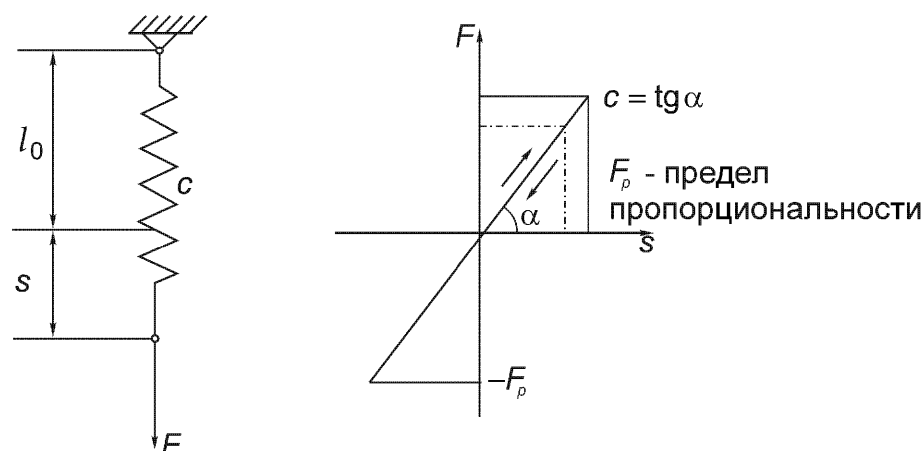


Рис. 4.1 (b). Символическая модель гукковского тела. Соотношение между силой и перемещением линейной пружины.

В геометрически нелинейном случае ε_{xx} – это компонента тензора деформаций Альманси. Соотношение между напряжением и относительным удлинением опять нелинейно! Преобразование формулы (4.7) к лагранжевому представлению дает нелинейный закон связи напряжений и деформаций. Соотношения (4.6) и (4.7) – это линейные соотношения, которые в случае материальной изотропии позволяют перейти от элемента поперечного сечения к повернутому элементу площади путем преобразования тензоров напряжений и деформаций, см. рис. 2.2. С другой стороны, соотношение (4.4) – это просто соотношение для линейно упругой пружины и не является определяющим (материальным) законом.

Испытания на простой сдвиг, когда равны нулю все компоненты деформаций, кроме $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, дают (линейное) соотношение между измеренными касательным напряжением и углом сдвига. Математическая модель, например, при эйлеровом представлении – это линейный определяющий закон

$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}, \quad (4.8)$$

где G – модуль сдвига.

Модуль Юнга E и модуль сдвига G являются парой упругих констант для однородного и изотропного гукковского тела (например, в эйлеровом представлении). В такой сплошной среде направления главных напряжений и главных деформаций должны совпадать в каждой материальной точке. Каждое из главных нормальных напряжений трехмерного напряженного состояния приводит к поперечному сжатию, следовательно, если мы обобщим испытание на одноосное растяжение, то в трехмерном случае при эйлеровом представлении суперпозиция приводит к соотношениям

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)], \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \quad (4.9)$$

Если мы введем среднее напряжение $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ и объемное расширение $e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, то из сложения соотношений (4.9) вытекает линейный закон сжимаемости

$$e = [3(1-2\nu)/E]p. \quad (4.10)$$

При малой деформации объемное расширение e – это относительное изменение объема, а упругая константа

$$K = E/3(1-2\nu) \quad (4.11)$$

представляет собой модуль объемного сжатия. В условиях изотропного растяжения $p > 0$ и $e > 0$. Следовательно, коэффициент Пуассона находится в пределах $0 \leq \nu \leq 1/2$. Диапазон $-1 \leq \nu \leq 0$ обычно не рассматривается. Соотношение

$$p = K\varepsilon \quad (4.12)$$

определяет упругость при сжатии и, следовательно, представляет собой первый закон Гука для трехмерного напряженного состояния. Обе эти величины, p и e – это первые инварианты соответствующих тензоров.

Таким образом, сжимаемость материала отделена, и, следовательно, девиаторные компоненты главной деформации $\varepsilon'_i = \varepsilon_i - e/3$ [формула (1.35)] и девиаторные компоненты напряжений $\sigma'_i = \sigma_i - p$ [формула (2.34), где обозначения изменены на $s_{ij} \equiv \sigma'_{ij}$] линейно связаны между собой:

$$\varepsilon'_i = [(1+\nu)/E]\sigma'_i, \quad \sigma'_i = \sigma_i - p, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.13)$$

При повороте системы координат по отношению к главным осям применяются формулы преобразования элементов тензора [см. формулы (2.22) и (2.23), изменив их для представления в главных осях]. Компоненты девиатора напряжений линейно связаны с компонентами девиатора деформаций

$$\sigma'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.14)$$

если соотношение для модуля сдвига $G = E/2(1+\nu)$ вводится так, что оно не противоречит определению из испытания на чистый сдвиг. В случае трехмерного напряженного состояния соотношение (4.14) дает шесть соотношений и замыкает закон Гука. Исключение девиаторных компонент представляет закон Гука в форме, впервые полученной Ламе,

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} p \delta_{ij} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu). \quad (4.15)$$

В случае больших деформаций следует рассматривать компоненты тензора деформаций Альманси.

В условиях плоской деформации, когда $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$, отдельно определяется нормальная компонента напряжения, ортогональная плоскости x, y :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (4.16)$$

При подстановке этого выражения компоненты деформации, выраженные через закон Гука (4.15), принимают вид

$$3\rho = (1 + \nu)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_{xx} = (1/2G)[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \quad \varepsilon_{yy} = (1/2G)[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})],$$

$$\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}/2G. \quad (4.18)$$

При плоском напряженном состоянии, где $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$, отдельно определяется нормальная деформация, ортогональная плоскости x, y :

$$\varepsilon_{zz} = -[\nu / (1 - \nu)](\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}). \quad (4.19)$$

Следовательно, из закона Гука при плоском напряженном состоянии следует:

$$\varepsilon_{xx} = (1/E)[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}], \quad \varepsilon_{yy} = (1/E)[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}], \quad \varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}/2G. \quad (4.20)$$

Такое напряженное состояние применяется для тонких пластин толщины h при нагружении в плоскости пластины: плоские поверхности $z = \pm h/2$ полагаются свободными от нагрузок. Внутренние силы на единицу длины

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz, \quad n_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \quad (4.21)$$

определяют средние напряжения плоского напряженного состояния, $\sigma_x = n_x/h$, $\sigma_y = n_y/h$, $\sigma_{xy} = n_{xy}/h$, которые не зависят от поперечной координаты z и приближенно заменяют действительные напряжения, которые, возможно, проявляют слабую зависимость от z . Уравнения (4.20) переписаны для этого состояния мембранных напряжений в тонких пластинах и приняты в форме, зависящей от координат срединной плоскости (x, y) ,

$$\varepsilon_x = (1/Eh)(n_x - \nu n_y), \quad \varepsilon_y = (1/Eh)(n_y - \nu n_x), \quad \varepsilon_{xy} = n_{xy}/2Gh. \quad (4.22)$$

Здесь Eh – жесткость линейно упругой пластины при растяжении. Ниже проанализированы два дополнительных теста для экспериментального определения модулей E и G .

(§) Испытание на изгиб

Однопролетная балка, шарнирно опертая на концах, симметрично нагружена двумя силами $F_1 = F_2 = F$, как показано на рис. 4.2.

В пределах центрального участка пролета длиной $(l - 2a)$ поперечные силы отсутствуют ($Q_z = 0$), и балка испытывает чистый изгиб под действием постоянного момента $M_y = M = aF$. В этой области первоначально прямолинейная ось балки деформируется в дугу окружности; ось z является, например, осью симметрии поперечного сечения.

В случае линейно упругого поведения материала эксперимент демонстрирует прямую пропорциональность между (отрицательной) кривизной деформированной оси балки и изгибающим моментом

$$1/r = -M/S_B = -aF/S_B, \quad (4.23)$$

где $S_B = EJ_y$ – жесткость балки на изгиб (постоянная по длине). Следовательно, измерение радиуса кривизны r дает изгибную жесткость в виде

$$S_B = aF|r|, \quad (4.24)$$

и так как главный момент инерции поперечного сечения образца J_y известен, модуль Юнга определяется соотношением

$$E = aF|r|/J_y. \quad (4.25)$$

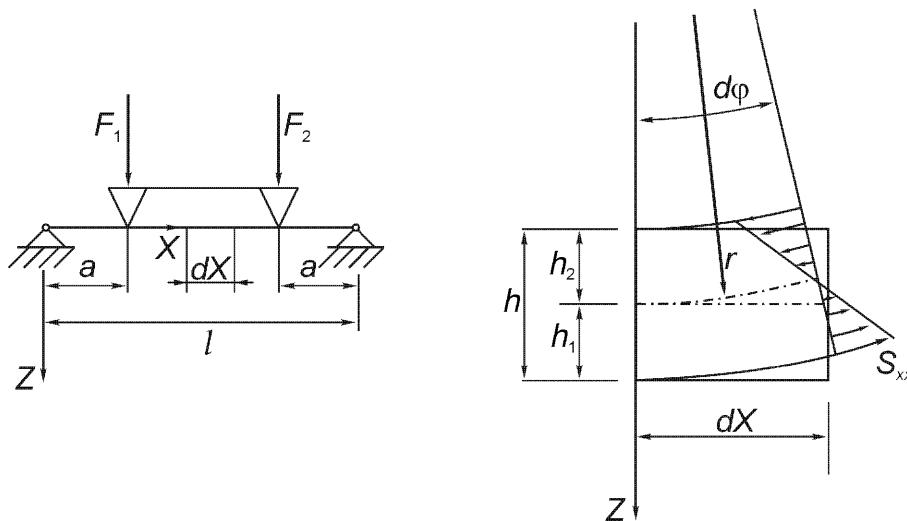


Рис. 4.2. Испытание на изгиб. Распределение напряжений при чистом изгибе.

Радиус кривизны можно определить путем измерения удлинений $\varepsilon_{1,2}$ волокон на нижней и верхней поверхностях, при $(r + h_1)$ и $(r - h_2)$, соответственно. Следовательно (опять см. рис. 4.2), $dX = r d\varphi$,

$$\begin{aligned} dX(1 + \varepsilon_1) &= (r + h_1) d\varphi = (r + h_1) dX / r, \\ dX(1 + \varepsilon_2) &= (r - h_2) d\varphi = (r - h_2) dX / r. \end{aligned}$$

Решение относительно кривизны дает

$$\left| \frac{1}{r} \right| = \frac{\varepsilon_1}{h_1} = -\frac{\varepsilon_2}{h_2}, \quad (4.26)$$

или в другом виде, который в смысле вычислений уменьшает влияние ошибок при измерении деформаций, $\varepsilon_2 < 0$,

$$\left| \frac{1}{r} \right| = \frac{\varepsilon_1 h_2 - \varepsilon_2 h_1}{2h_1 h_2}. \quad (4.27)$$

Здесь $h = h_1 + h_2$ – высота балки, а h_1 – расстояние от самого нижнего волокна до центра тяжести поперечного сечения. В случае поперечного сечения с двойной симметрией $h_1 = h_2 = h/2$ и $|1/r| = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/h$.

Удлинения элементарных волокон длины dX , первоначально ориентированных параллельно прямолинейной оси балки, имеют линейное распределение

$$\varepsilon_x = \frac{(r + Z) d\varphi - dX}{dX} = \frac{Z}{r} = Z \frac{\varepsilon_1}{h_1}. \quad (4.28)$$

Закон Гука в представлении Лагранжа

$$S_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E \varepsilon_x (1 + \varepsilon_x / 2) \quad (4.29)$$

дает нелинейное распределение напряжений по оси Z , ось y – это линия, на которой отсутствуют напряжения, или нейтральная ось, см. также формулу (4.23):

$$M_y = \int_A Z S_{xx} dA = \frac{E \varepsilon_1}{h_1} \int_A Z^2 dA = E J_y \frac{\varepsilon_1}{h_1} = -S_B / r. \quad (4.30)$$

Поперечные по отношению к оси X относительные удлинения равны $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$. Исключение модуля Юнга E , при допущении о малости деформаций $\varepsilon_x \ll 1$, дает линейное распределение напряжений, принятое в технической теории балок,

$$\sigma_{xx} = z M_y / J_y, \quad -h_2 \leq z \leq h_1. \quad (4.31)$$

Экстремальные значения нормальных напряжений достигаются на наружных волокнах и равны

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{M_y}{J_y} h_{1,2}. \quad (4.32)$$

(§) Испытание на кручение

Круглый цилиндрический стержень длины l со сплошным или полым поперечным сечением нагружен в таком эксперименте крутящим моментом $M_x = M_T = M$. В случае линейной упругости измерения показывают пропорциональность между этим моментом и относительным углом закручивания концевых поперечных сечений

$$\chi = \frac{M}{S_T} l, \quad (4.33)$$

где $S_T = GJ_T$ – жесткость при кручении. В случае сплошного поперечного сечения $J_T = J_p = \pi d^4/32$. Тонкостенная круговая цилиндрическая оболочка с толщиной стенки $t \ll d$ имеет жесткость при кручении, пропорциональную $J_T = \pi d^3 t/4$. Следовательно, измеряя χ , можно определить модуль сдвига

$$S_T = \frac{M}{\chi} l \quad \text{и} \quad G = \frac{M}{\chi J_T} l. \quad (4.34)$$

При деформации кручения поперечные сечения жестко поворачиваются друг относительно друга (рис. 4.3), и их депланация, не зависящая от координаты X , определяется осевым перемещением $u = \vartheta \varphi(Y, Z)$. Постоянный относительный угол закручивания равен $\vartheta = d\chi/dX = \chi/l$, а функция депланации* $\varphi(Y, Z)$ определяется в разделе 6.2.4.

Если мы рассмотрим две точки на одинаковом удалении от центральной оси x в двух близких поперечных сечениях на расстоянии dX , то жесткое вращение приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} v(X + dX) - v(X) &= \frac{\partial v}{\partial X} dX = -Z d\chi, & w(X + dX) - w(X) &= \frac{\partial w}{\partial X} dX = Y d\chi, \\ d\chi &= \vartheta dX. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Следовательно, из условия $dX \rightarrow 0$ получаем градиенты перемещений

* Другие ее названия – функция кручения Сен-Венана или функция перемещения (см. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. Под ред. И.А.Биргера и Я.Г.Пановко. Том 1, М., Машиностроение, 1968, стр.248). (Прим. перев.)

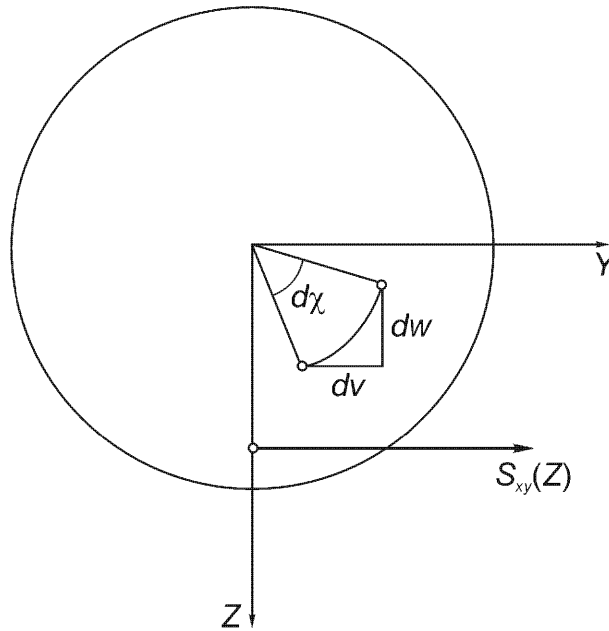


Рис. 4.3. Компоненты относительного перемещения dv и dw , возникающего при повороте $d\chi$ двух соседних поперечных сечений, и касательное напряжение S_{xy} при чистом кручении.

$$\frac{\partial v}{\partial X} = -\vartheta Z, \quad \frac{\partial w}{\partial X} = \vartheta Y. \quad (4.36)$$

Из нелинейного геометрического соотношения для ε_{xy} , заданного формулой (1.19), следует, что можно без потери общности принять вдоль линии $Y = 0$, где $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ (ротационная симметрия), линейное распределение сдвиговых деформаций по радиальной координате

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{\vartheta}{2} Z. \quad (4.37)$$

Из закона Гука вытекает линейное распределение касательных напряжений при кручении

$$S_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = -G\vartheta Z = S_{yx}. \quad (4.38)$$

Из статической эквивалентности распределенных пар и крутящего момента M следует

$$M = -\int_A r S_{x\varphi} dA = G\vartheta \int_A r^2 dA = G\vartheta J_p. \quad (4.39)$$

Таким образом, G в выражении жесткости при кручении S_T – это модуль сдвига. Исключение G дает

$$S_{xy} = -\frac{M}{J_p} Z, \quad Y = 0, \quad (4.40)$$

и максимальное сдвиговое напряжение, направленное по касательной к внешней, свободной от нагрузок, окружности, равно

$$\tau_{\max} = S_{xy}(r = d/2) = \frac{M d}{J_p 2}. \quad (4.41)$$

См. также рис. 6.18.

4.1.2. Замечание об анизотропии

Многие природные и технические материалы в пределах достаточно малых деформаций демонстрируют линейно упругое поведение, но являются также макроскопически анизотропными. Следовательно, если мы все еще предполагаем однородность, закон Гука обобщается для учета зависимости упругих констант от направления. По аналогии с изотропным случаем существует плотность энергии деформации $U'(\varepsilon_{ij})$ с частными производными, равными симметричным напряжениям

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U'}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ji}. \quad (4.42)$$

Последние являются линейными функциями компонент деформации. Следовательно, U' – это квадратичная положительно определенная форма симметричных деформаций

$$U' = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad \text{где } C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{jilk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (4.43)$$

При таких условиях симметрии тензор $\{C_{ijkl}\}$ имеет 21 взаимно независимую упругую константу. Общий случай более подробно обсуждается в литературе, смотрите, например:

- Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.

Далее обсуждаются специальные случаи нагружения материалов, проявляющих дополнительные свойства симметрии и поэтому описываемые меньшим числом упругих констант.

(§) Плоское напряженное состояние

В ортотропных материалах с тремя плоскостями симметрии анизотропные свойства выражаются через девять упругих констант. При плоском напряженном состоянии ($\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$) с плоскостью симметрии в тонкой пластине

число упругих модулей уменьшается до четырех. Если мы примем в качестве главных направлений анизотропии оси x и y , закон Гука принимает вид

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_x} - \nu_y \frac{\sigma_{yy}}{E_y}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E_y} - \nu_x \frac{\sigma_{xx}}{E_x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G_{xy}}, \quad (4.44)$$

где E_x, E_y, ν_x, ν_y – независимые упругие параметры, которые могут быть соответственно определены из испытаний стержневых образцов на растяжение в двух главных направлениях и

$$G_{xy} = \sqrt{E_x E_y} / 2 (1 + \sqrt{\nu_x \nu_y}). \quad (4.45)$$

(§) Трансверсальная изотропия относительно оси x

Такой случай цилиндрической симметрии встречается, например, в телах в форме стержня после вытягивания. Ненулевыми полагаются нормальные напряжения в радиальном и осевом направлениях σ_{rr} и σ_{xx} . Закон Гука принимает вид

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_x} - \nu \frac{\sigma_{rr}}{E}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \nu_x \frac{\sigma_{xx}}{E_x}, \quad \varepsilon_{xr} = 0, \quad (4.46)$$

где E и ν – упругие константы в поперечном сечении. Для растягиваемого стержня $\sigma_{rr} = 0$, такое поведение является явно изотропным.

4.1.3. Замечание о нелинейности

Априори нелинейно упругие материалы, такие как чугун или бетон (при сжатии), где

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{kl}), \quad (4.47)$$

обычно считаются очевидно изотропными. Инкрементальная процедура, использующая шаги по времени или шаги по коэффициенту нагрузки, построена для одноосного напряженного состояния

$$\sigma_{xx} = f(\varepsilon_{xx}), \quad (4.48)$$

с приращением напряжения

$$d\sigma_{xx} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{xx}} d\varepsilon_{xx} = E(\sigma_{xx}) d\varepsilon_{xx}. \quad (4.49)$$

В численной процедуре рассмотрены конечные приращения напряжения, а $E(\sigma_{xx})$ аппроксимируется касательным или секущим модулем, соответственно (см. рис. 4.4).

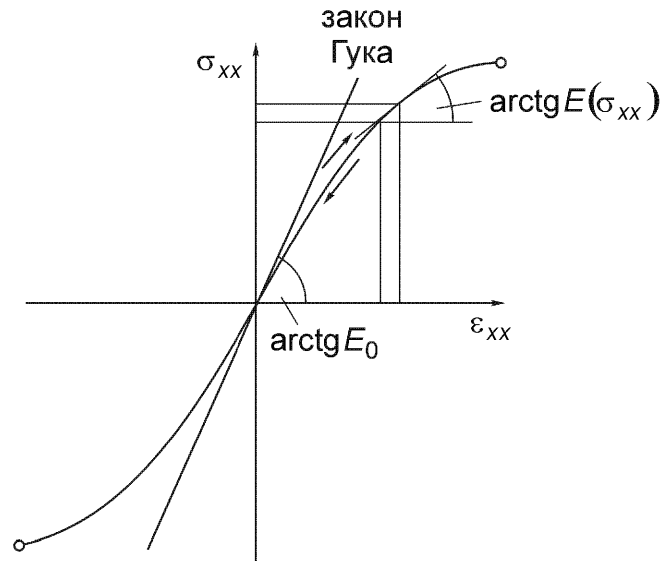


Рис. 4.4. Нелинейно упругое одноосное определяющее соотношение между напряжением и деформацией.

В качестве примера рассмотрен кубический закон нелинейности, где мы полагаем $\sigma_{xx} = \sigma$, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon$,

$$\sigma = E\varepsilon(\eta_0 + \eta_1\varepsilon + \eta_2\varepsilon^2), \quad (4.50)$$

а η_k , $k = 0, 1, 2$, являются константами. Так как $\eta_0 \geq 0$ и $\partial\sigma/\partial\varepsilon \geq 0$, это определяющее соотношение имеет силу в тех пределах изменения деформации, которые следуют из условия $E(\sigma) \geq 0$:

$$\begin{cases} \eta_0 + 2\eta_1\varepsilon + 3\eta_2\varepsilon^2 \geq 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{если } \eta_1 \neq 0, \eta_2 = 0, \text{ то } |\varepsilon| < \eta_0/2|\eta_1|, \\ \text{если } \eta_2 \neq 0, \text{ то } |\varepsilon| < \frac{1}{3\eta_2} \left(|\eta_1| - \sqrt{\eta_1^2 - 3\eta_0\eta_2} \right), \\ \text{когда } \eta_1^2 - 3\eta_0\eta_2 \geq 0, \end{array} \right. \end{cases}$$

в противном случае пределы для деформации не имеют места, если $\eta_2 > 0$. Из того, что коэффициент $\eta_1 \neq 0$, следует, что определяющее соотношение должно быть несимметричным при растяжении и сжатии.

Для бетона при сжатии ($\varepsilon < 0$) принято использовать квадратичное соотношение ($\eta_2 = 0$), где $E = \sigma_p/\varepsilon_p$, $\eta_0 = 2$, $\eta_1 = \varepsilon_p^{-1}$, $\varepsilon_p = 0,2\%$, и величина максимального сжимающего напряжения σ_p зависит от качества бетона (например, для бетона стандарта В300 $\sigma_p = 2,25 \text{ кН/см}^2$). Касательный модуль, соответствующий уравнению (4.50), имеет вид

$$E(\varepsilon) = E(\eta_0 + 2\eta_1 \varepsilon + 3\eta_2 \varepsilon^2) \geq 0, \quad (4.51)$$

следовательно, касательный модуль бетона является линейно убывающей функцией сжимающей деформации $\varepsilon < 0$, $|\varepsilon| < \varepsilon_p$,

$$E_{\text{бетона}} = \frac{2\sigma_p}{\varepsilon_p} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right), \quad E_{\text{бетона}}(\varepsilon = 0) = \frac{2\sigma_p}{\varepsilon_p} = 2E. \quad (4.52)$$

Коэффициент Пуассона для бетона при сжатии полагается независимым от деформации в диапазоне $0 \leq \nu_{\text{бетона}} \leq 1/4$.

Нелинейные определяющие соотношения упругого и изотропного материала в общем и в случае пространственного напряженного состояния выводятся путем дифференцирования из плотности энергии деформации $U'(\varepsilon_{ij}) = U'(e, J_2, J_3)$, которая является функцией инвариантов тензора деформаций. Применяя цепное правило, заметьте, что инвариант девиаторной части тензора деформации J_2 [см. формулу (2.36), где нужно подставить компоненты девиатора деформации ε'_{ij} вместо напряжений s_{ij}] и объемное расширение e не зависят друг от друга и что в дальнейшем третьим инвариантом девиаторной части тензора деформации J_3 мы будем пренебрегать (что является обычной практикой)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U'}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial U'}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial U'}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial U'}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (4.53)$$

Следовательно, если мы учтем, что

$$e = \sum_i \varepsilon_{ij}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2,$$

и далее

$$\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{2}{3} e \delta_{ij} - \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ij} - \frac{e}{3} \delta_{ij} = \varepsilon'_{ij},$$

то окончательная форма определяющего соотношения принимает вид

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U'}{\partial e} \delta_{ij} + \frac{\partial U'}{\partial J_2} \varepsilon'_{ij}. \quad (4.54)$$

В случае линейной упругости применяется закон Гука

$$\frac{\partial U'}{\partial e} = Ke, \quad \frac{\partial U'}{\partial J_2} = 2G.$$

В инженерной практике аналитические определяющие соотношения должны быть определены путем согласования с данными, полученными из эксперимента. Параметр идентификации проще всего задать при допущении об изотропии и однородности путем выбора положительно определенной полиномиальной функции, например,

$$U' = \frac{1}{2} K e^2 + 2G J_2 + D_1 e^3 + D_2 e J_2 + D_3 J_3 + E_1 e^4 + E_2 e^2 J_2 + E_3 J_2^2 + E_4 e J_3 + O(\varepsilon^5), \quad (4.55)$$

которая с помощью соотношения (4.54) вносит первую, квадратичную поправку в закон Гука (третьим инвариантом J_3 обычно пренебрегают):

$$\frac{\partial U'}{\partial e} = K e + 3 D_1 e^2 + D_2 J_2, \quad \frac{\partial U'}{\partial J_2} = 2G + D_2 e. \quad (4.56)$$

Разделение $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij}$ приводит к связанным уравнениям

$$p = \frac{\partial U'}{\partial e} = (K + 3 D_1 e) e + D_2 J_2, \quad (4.57)$$

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial U'}{\partial J_2} \varepsilon'_{ij} = (2G + D_2 e) \varepsilon'_{ij}. \quad (4.58)$$

Вычисление малых приращений величин, определенных уравнениями (4.57) и (4.58), по отношению к деформированному состоянию (e, ε'_{ij}) , дает:

$$dp = (K + 6 D_1 e) de + D_2 dJ_2, \quad dJ_2 = \sum_i \sum_j \varepsilon'_{ij} d\varepsilon'_{ij},$$

$$d\sigma'_{ij} = (2G + D_2 e) d\varepsilon'_{ij} + D_2 \varepsilon'_{ij} de.$$

Путем сравнения определяются два обобщенных касательных модуля, которые зависят от деформированного состояния и, таким образом, определяют неоднородный закон Гука

$$K_T = (K + 6 D_1 e), \quad 2G_T = (2G + D_2 e).$$

В противоположность одноосному напряженному состоянию здесь связанные величины остаются в инкрементальных уравнениях; они могут рассматриваться как источники внутренних напряжений. Предположение $D_3 \neq 0$ делает связь инкрементальных деформаций даже более сильной. Следовательно, нужно использовать концепцию эквивалентного напряжения, которая ставит наравне плотность энергии деформации при пространственном и одноосном напряженных состояниях.

Хрупкие материалы обычно считаются упругими вплоть до предельной нагрузки, до самого момента наступления излома.

4.2. Вязко-упругое тело

Деформации в некоторых материалах зависят не только от напряженного состояния в данный момент времени, но и от истории нагружения. Такие «материалы с памятью» широко обсуждаются в обширной области реологии. Простая теория разработана для материалов с затухающей памятью. Далее рассмотрено внутреннее трение при течении вязкой жидкости, затем рассмотрены определяющие соотношения одноосных моделей. Трехмерные соотношения выведены с помощью правдоподобных аргументов.

4.2.1. Ньютоновская жидкость

Типичным экспериментом является сдвиговое течение слоя вязкой жидкости толщины s между параллельными жесткими пластинами (см. рис. 4.5), возникающее при движении верхней пластины с постоянной скоростью v_0 . Чтобы сохранять скорость постоянной, к этой пластине должна быть приложена тангенциальная сила, которая передается жидкости с помощью постоянного распределения касательных напряжений на границе раздела (жидкостное трение). Измерения показывают, что для многих жидкостей (и газов) существует пропорциональность между этим касательным напряжением и поперечным градиентом поля скоростей потока жидкости. На рис. 4.5 показано линейное изменение скорости в узкой щели. «Вязкий» закон одномерного течения такой ньютоновской жидкости записывается в виде линейного соотношения

$$\sigma_{zy} = \tau = \eta \frac{\partial v}{\partial z} = \sigma_{yz}. \quad (4.59)$$

Для линейного профиля скорости $\partial v / \partial z = v_0 / s$, и сдвиговое напряжение $\sigma_{zy} = \eta v_0 / s$ не зависит от z . «Неоднородный» параллельный поток не является безвихревым, $\text{rot } \mathbf{v} = (-\partial v / \partial z) \mathbf{e}_x$. Параметр материала η называется коэффициентом динамической, или абсолютной вязкости, он имеет размерность напряжений, отнесённых к скорости деформации, то есть $[\eta] = \text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2} = \text{кг} / (\text{с} \cdot \text{м})$.

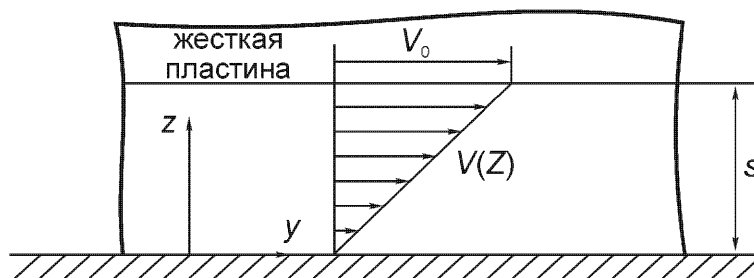


Рис. 4.5. Ламинарное сдвиговое течение вязкой жидкости (течение Куэтта).

Его значение для воды при температуре 20°C равно $\eta = 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$. Относительно сильная зависимость η от температуры должна учитываться, в то время как влияние приложенного давления p (нормального напряжения σ_{zz}) на сдвиговой поток и, следовательно, на коэффициент вязкости пренебрежимо мало, кроме очень высоких давлений. Для жидкостей η уменьшается с увеличением температуры, а для газов – увеличивается. Так как вязкость сложно измерить, используя формулу (4.59), в промышленности используется специальный прибор. Измеряется время в секундах, необходимое для того, чтобы жидкость вытекла из контейнера заданной формы и размеров. Затем пересчитывают экспериментальные данные в стандартные единицы. Получаемая единица вязкости названа в честь Ж. Л. Пуазейля, $1 \text{ пуаз} = 1 \text{ г}/(\text{с} \cdot \text{см})$, используется также его сотая доля $1 \text{ сантипуаз} = 1/100 \text{ пуаза} = 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$. Так как вязкость ньютоновских жидкостей мала, сдвиговые напряжения появляются только при больших поперечных градиентах скорости. Такие градиенты встречаются, например, в неподвижном пристенном пограничном слое; течение во внешнем потоке можно полагать происходящим без трения, то есть без рассмотрения сдвиговых напряжений (см. главу 13).

Закон, связывающий сдвиговое напряжение и скорость деформации (4.59), показывает различие в поведении жидкой и твердой фаз: у жидкости нет сдвиговой жёсткости, жидкость в покое должна находиться в гидростатическом состоянии, и сдвиговые напряжения исчезают (см. (2.80)). Если по «анalogии» с законом Гука для линейной упругости

$$p = -Ke \quad (4.60)$$

(в случае линейной сжимаемости p – это гидростатическое давление, то есть среднее нормальное напряжение, взятое с отрицательным знаком), пренебрегая объёмной вязкостью сжимаемой жидкости, рассматривать девиаторные компоненты, то при эйлеровом представлении движения получаем

$$\sigma'_{ij} = 2\eta V_{ij} - \frac{2}{3}\eta \delta_{ij} \sum_k V_{kk}, \quad V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.61)$$

Это определяющее соотношение названо именем Г. Г. Стокса.

Если движение может считаться несжимаемым, условие неразрывности (1.77) приобретает вид

$$\text{div } \mathbf{v} = \sum_k V_{kk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma'_{ij} = 2\eta V_{ij}, \quad (4.62)$$

где напряжение $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$ связано с неопределённым давлением p .

(§) Иллюстративный пример

Рассматривается стационарный несжимаемый поток вязкой жидкости между параллельными стенками, находящимися на расстоянии $2h$ друг от друга (см. рис. 4.6). Давление должно быть постоянным в каждом поперечном сечении и уменьшается в направлении неоднородного параллельного потока $p = p(x)$ в эйлеровом представлении. Благодаря несжимаемости скорость не зависит от координаты x ; таким образом, во всех сечениях $v_x = u(z)$. Рассмотрение равновесия контрольного объёма $dx dz$ даёт (при нулевом ускорении)

$$[p(x) - p(x + dx)]dz + [\sigma_{zx}(z + dz) - \sigma_{zx}(z)]dx = 0, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}.$$

Если перейти к пределу $dx \rightarrow 0$, линейная аппроксимация даёт точное соотношение

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0.$$

Подстановка $\sigma_{zx} = \eta \partial u / \partial z$ приводит к выражению $\partial^2 u / \partial z^2 = \eta^{-1} \partial p / \partial x$, которое не зависит от поперечной координаты z . Следовательно, интегрирование выполняется просто, и профиль скорости с учетом условия симметрии $\partial u / \partial z = 0$ при $z = 0$, $u(z = 0) = u_0$ принимает вид

$$u(z) = u_0 + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z^2.$$

Граничные условия при $z = \pm h$, где вязкая жидкость прикреплена к стенке (условие прилипания), имеют вид $u(z = \pm h) = 0$, откуда следует, что градиент давления должен быть постоянным

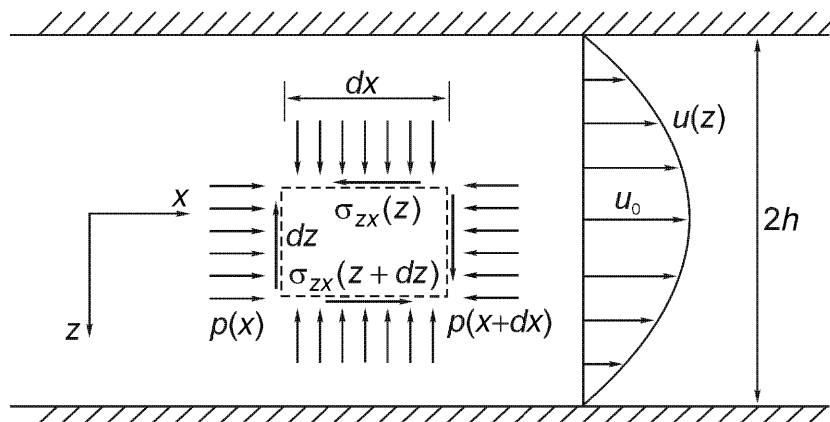


Рис. 4.6. Плоское ламинарное вязкое течение в канале.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\eta u_0}{h^2},$$

и поэтому давление линейно уменьшается с ростом расстояния x

$$p(x) = p_0 - \frac{2\eta u_0}{h} \frac{x}{h} > 0. \quad (4.63)$$

Распределение скорости становится параболической функцией

$$u(z) = u_0 \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (4.64)$$

Измерение разности (перепада) давлений на некотором расстоянии l можно использовать для определения динамической вязкости

$$\eta = \frac{p_0 - p(l)}{2l u_0} h^2, \quad (4.65)$$

где максимальную скорость u_0 можно выразить через секундный массовый расход жидкости

$$\dot{m} = \rho 2 h \bar{u} = 2\rho \int_0^h u(z) dz = \rho 2 h \frac{2u_0}{3}.$$

Таким образом, более удобная для определения кинематическая вязкость выражается соотношением

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{2}{3} \frac{p_0 - p(l)}{\dot{m} l} h^3, \quad (4.66)$$

которое не зависит от плотности. Кинематическая вязкость ν измеряется в $\text{м}^2/\text{с}$. Влияние вязкости на течение, изображенное на рис. 4.6, проявляется в основном двояко: Параллельный поток в каждом сечении становится неоднородным, происходит диссипация потенциальной энергии, а давление линейно падает в осевом направлении. Безразмерный коэффициент гидравлического сопротивления λ может быть определён из безразмерного перепада давлений

$$\frac{p_0 - p(l)}{\rho \bar{u}^2 / 2} = \frac{l}{2h} \frac{24\nu}{2h \bar{u}} = \frac{1}{2h} \lambda, \quad \bar{u} = \dot{m} / 2\rho h, \quad (4.67)$$

или, используя число Рейнольдса Re ,

$$\lambda = 24 / Re, \quad \text{где } Re = 2h\bar{u} / \nu. \quad (4.68)$$

Гиперболический закон для коэффициента сопротивления типичен для ламинарного вязкого течения ньютоновских жидкостей. Ламинарное течение устой-

чиво только для малых чисел Рейнольдса. При критическом значении $Re = Re_{cr}$ ламинарное параллельное течение становится неустойчивым и сменяется турбулентным течением. Последнее характеризуется, в среднем, повышенным коэффициентом сопротивления.

Осесимметричное ламинарное течение в круглой цилиндрической трубе названо в честь Гагена – Пуазейля (см. также раздел 13.3.1), и при подстановке радиуса поперечного сечения $h = a$ коэффициент гидравлического сопротивления принимает вид

$$\lambda = 64 / Re, \quad Re < Re_{cr} = 2320. \quad (4.69)$$

(§) Одномерная вязкая модель

Одномерная модель «ньютоновской» жидкости показана на рис. 4.7. Обобщенная модель тела передает силу, пропорциональную относительной скорости между «поршнем» и «цилиндром» гидравлического амортизатора (на рис. 4.7 это скорость точки приложения силы):

$$F = \eta \dot{u}. \quad (4.70)$$

Коэффициент пропорциональности связан, например, линейно с коэффициентом вязкости ньютоновской жидкости при течении в узком зазоре [формула (4.59)].

4.2.2. Линейная вязко-упругость

Деформации в упругих телах определяются мгновенным состоянием нагрузки; таким образом, линейно упругое тело помнит только недеформированное исходное состояние. Все материалы, в большей или меньшей степени, демонстрируют в процессе нагружения чувствительность распределения напряжений от скорости деформации. Например, под действием внутреннего трения материал ослабляет изменение откликов на периодические нагрузки, и свободные колебания затухают. В состоянии ползучести вязко-упругого тела под действием постоянной нагрузки могут также развиваться необратимые деформации. Такие развивающиеся во времени деформации могут остановить свой рост через не-

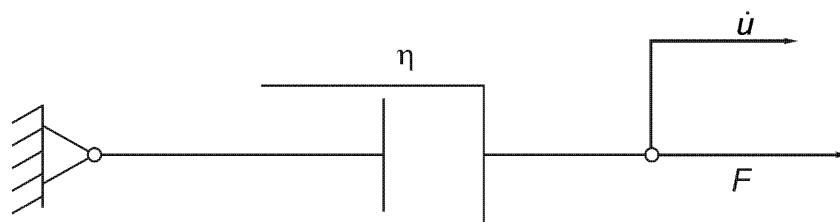


Рис. 4.7. Схематическая одномерная модель ньютоновской жидкости: Вязкий амортизатор (демпфер).

которое конечное время или же неограниченно возрастает. Простейшие линейные модели этих вязких эффектов получены путем синтеза гукской пружины и «ньютоновской жидкости». Их соединение показано ниже в связи с формированием трех основных моделей линейной вязко-упругости.

(§) Тело Кельвина-Фойгта

Как показано на рис. 4.8, одномерная модель представляет собой параллельное соединение линейной пружины жесткости c и ньютоновской жидкой фазы, где η – коэффициент затухания демпфера. Эта двухфазная модель твердого тела обладает упомянутым выше свойством демпфирования и демонстрирует явление, известное как запаздывающая упругость. Сила F вызывает общее перемещение u , и вклад обеих фаз представляется в виде

$$F = cu + \eta \dot{u}, \quad u(t=0) = 0. \quad (4.71)$$

Функция ползучести $u(t)$ есть частное решение этого дифференциального уравнения при условии нагружения в виде единичной ступени. $F = H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда, $H(t) = 1, t \geq 0, H(t) = 0, t < 0$. Уравнение (4.71) линейно, поэтому его решение ищется в виде суммы $u = u_h + u_p$. Частное решение для $t \geq 0$ является константой $u_p = 1/c$, а решение однородного уравнения имеет вид

$$u_h = A e^{-(c/\eta)t}. \quad (4.72)$$

С учетом начального условия $u(0) = 0$ получаем $A = -1/c$, и функция ползучести принимает вид

$$u(t) = \frac{1}{c} [1 - e^{-(c/\eta)t}] H(t), \quad \vartheta = \eta/c, \quad (4.73)$$

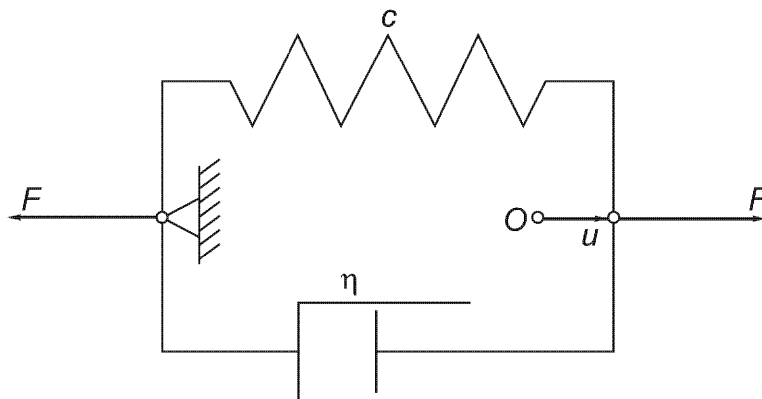


Рис. 4.8. Схематическая одномерная модель твердого тела Кельвина-Фойгта.

где ϑ – время запаздывания перемещения. Упругое перемещение F/c достигается при сохранении нагрузки $F = 1$ постоянной в течение длительного времени (по отношению к времени запаздывания), то есть упругость запаздывает.

Функция релаксации в этой модели выражает зависимость силы от времени при управлении перемещением, когда перемещение мгновенно изменяется от нуля до постоянной величины $u(t) = H(t)$:

$$F(t) = cH(t) + \eta \delta(t), \quad \delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}, \quad (4.74)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Упругость в пружине развивается мгновенно; вязкая часть силы становится бесконечной в начальный момент времени, а потом исчезает.

Если мы рассматриваем всестороннее сжатие как чисто упругое, $p = Ke$, и принимаем линеаризованные геометрические соотношения (малые деформации позволяют суперпозицию двух фаз материала), то определяющие соотношения для трехмерного напряженного состояния в однородном и изотропном теле Кельвина-Фойгта имеют вид:

$$\sigma'_{ij} = 2G \left(\varepsilon'_{ij} + \vartheta \frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial t} \right), \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{e}{3} \delta_{ij}, \quad \varepsilon = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \vartheta = \eta/G, \quad (4.75)$$

где G – модуль сдвига и K – модуль всестороннего сжатия гуконской фазы, а η – коэффициент вязкости вязкой фазы.

Модель Кельвина-Фойгта, формула (4.75), хорошо подходит для описания демпфирования в материале гармонических колебаний малой амплитуды. Временные функции можно представить в виде $\sigma'_{ij} \exp(i\omega t)$, $\varepsilon'_{ij} \exp(i\omega t)$, комплексные амплитуды для удобства обозначены подобно девиаторным напряжениям и деформациям, соответственно, и соотношение (4.75) принимает форму, явно не включающую время,

$$\sigma'_{ij} = 2G(1 + i\omega\vartheta)\varepsilon'_{ij}. \quad (4.76)$$

Формально эти соотношения представляют собой определяющие соотношения гуконского твердого тела с комплексным модулем сдвига

$$G^* = G + i(\omega\vartheta G), \quad i = \sqrt{-1}. \quad (4.77)$$

Вязкость является причиной сдвига по фазе между напряжениями и деформациями при их развитии во времени. Более подробно этот вопрос рассмотрен при обсуждении принципа упруго-вязко-упругого соответствия; см. раздел 6.10.

В общем случае нагружения отклик является непериодическим, и применение к соотношению (4.75) преобразования Лапласа

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.78)$$

приводит к линейному соотношению между преобразованными девиаторными напряжениями и деформациями:

$$s f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \dot{f}(t) dt, \quad (4.79)$$

$$\sigma_{ij}^{*} = 2G^* \varepsilon_{ij}^{*}, \quad G^* = G(1 + s\vartheta). \quad (4.80)$$

При $t = 0$ рассматривается недеформированное исходное состояние [заметим, что $f(0) = 0$].

(§) Жидкость Максвелла

Одномерная модель, состоящая из гукской пружины жесткости c и ньютоновской жидкости с вязкостью η , соединенных последовательно (см. рис. 4.9), — это двухфазный материал, называемый жидкостью Максвелла, который демонстрирует упомянутое выше свойство необратимой и неограниченной ползучести. Такая модель объясняет наблюдаемую в экспериментах релаксацию напряжений. Согласно рис. 4.9 сила F является общей для обеих фаз, а скорости деформации складываются

$$\dot{u} = \frac{\dot{F}}{c} + \frac{F}{\eta}, \quad u(0) = F(0)/c. \quad (4.81)$$

Начальное условие выражает мгновенную упругость материала Максвелла при ступенчатом нагружении. Следовательно, при $F(t) = H(t)$, $dF/dt = \delta(t)$ функция ползучести принимает вид:

$$u(t) = \frac{1}{c} \int \delta(t) dt + \frac{1}{\eta} \int H(t) dt = (c^{-1} + \eta^{-1} t) H(t) = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{c}{\eta} t \right) H(t). \quad (4.82)$$

Согласно соотношению (4.82) упругий отклик является мгновенным, а ползучесть запаздывает.



Рис. 4.9. Схематическая одномерная модель тела Максвелла: Пружина и демпфер при последовательном соединении.

Функция релаксации силы $F(t)$ возникает, когда перемещение задано законом $u(t) = H(t)$ [следовательно, $du/dt = \delta(t)$], и, таким образом, является функцией Грина дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{F} + \frac{c}{\eta} F = c \delta(t), \quad (4.83)$$

$$F = c e^{-(c/\eta)t} H(t), \quad \vartheta = \eta/c. \quad (4.84)$$

Здесь ϑ – время релаксации, параметр ослабления напряжений.

Если считать всестороннее сжатие чисто упругим $p = Ke$ и обобщить уравнение (4.81), получаем трехмерные соотношения между напряжениями и скоростями деформаций для однородной и изотропной жидкости Максвелла:

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\dot{\sigma}'_{ij} + \frac{1}{\vartheta} \sigma'_{ij} \right), \quad \vartheta = \eta/G. \quad (4.85)$$

Считая исходным недеформированное состояние при $t = 0$ и применяя к определяющим дифференциальным соотношениям (4.85) преобразование Лапласа [формулы (4.78) и (4.79)], получаем

$$s \epsilon'_{ij}{}^* = \frac{1}{2G} (s + \vartheta^{-1}) \sigma'_{ij}{}^*. \quad (4.86)$$

Комплексный модуль сдвига материала Максвелла

$$G^* = G \frac{s}{s + \vartheta^{-1}} \quad (4.87)$$

формально представляет линейное соотношение между преобразованными по Лапласу девиаторными напряжениями и деформациями в соответствии с законом Гука:

$$\sigma'_{ij}{}^* = 2G^* \epsilon'_{ij}{}^*. \quad (4.88)$$

Обратитесь к упруго-вязко-упругому соответствию; см. раздел 6.10.

(§) Многопараметрическое линейно вязко-упругое тело

Трехпараметрическое стандартное твердое тело имеет одномерную модель, представляющую собой последовательное соединение гуковской пружины жесткости c_1 и фазы Кельвина-Фойгта (c_2, η) или, эквивалентно, параллельное соединение гуковской пружины c_1 и жидкости Максвелла (c_2, η) . Такой трехфазный материал имеет симметричное определяющее дифференциальное соотношение

$$\dot{F} + p_0 F = q_1 \dot{u} + q_0 u, \quad (4.89)$$

которое может быть определено с помощью надлежащих функций ползучести и релаксации. Три параметра ρ_0 , q_0 и q_1 выражаются через коэффициенты упругой жесткости и вязкости в случае последовательного соединения как

$$\rho_0 = (c_1 + c_2)/\eta, \quad q_0 = c_1 c_2 / \eta, \quad q_1 = c_1. \quad (4.90)$$

Частным решением этого уравнения при таком последовательном расположении является функция ползучести

$$u(t) = \left[\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} (1 - e^{-t/\vartheta}) \right] H(t), \quad \vartheta = \eta / c_2. \quad (4.91)$$

Асимптотически достигается конечная деформация

$$u(t \rightarrow \infty) = c_1^{-1} + c_2^{-1}. \quad (4.92)$$

Параллельное соединение дает

$$\rho_0 = c_2 / \eta, \quad q_0 = c_1 c_2 / \eta, \quad q_1 = c_1 + c_2. \quad (4.93)$$

Функция релаксации для такого параллельного соединения просто задана суперпозицией

$$F(t) = (c_1 + c_2 e^{-t/\vartheta}) H(t). \quad (4.94)$$

Асимптотически напряжение снижается до уровня упругого остаточного напряжения $1/c_1$.

Подстановка вместо F девиаторных компонент напряжений и вместо перемещения u соответствующих деформаций дает трехмерное обобщение в предположении о линеаризованных геометрических соотношениях

$$\dot{\sigma}'_{ij} + \rho_0 \sigma'_{ij} = q_1 \dot{\varepsilon}'_{ij} + q_0 \varepsilon'_{ij}. \quad (4.95)$$

Применение преобразования Лапласа [формулы (4.78) и (4.79)] дает

$$(s + \rho_0) \sigma'_{ij}^* = (q_1 s + q_0) \varepsilon'_{ij}^*, \quad (4.96)$$

а комплексный модуль сдвига

$$G^*(s) = \frac{q_1 s + q_0}{2(s + \rho_0)} \quad (4.97)$$

формально входит в закон Гука в преобразованном пространстве

$$\sigma'_{ij}^* = 2G^* \varepsilon'_{ij}^*. \quad (4.98)$$

Изотропия и однородность, а также чисто упругое всестороннее сжатие подразумеваются.

Трехпараметрическое вязкое тело получается путем замены гуконской фазы с жесткостью c_1 на одномерную модель ньютоновской жидкости с вязкостью η_1 . Следовательно, уравнение (4.89) изменяется:

$$\dot{F} + p_0 F = q_2 \ddot{u} + q_1 \dot{u}. \quad (4.99)$$

Частным решением является функция ползучести при последовательном расположении

$$u(t) = \left[\frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{c_2} (1 - e^{-t/\vartheta}) \right] H(t). \quad (4.100)$$

С ростом времени нагружения деформация ползучести неограниченно возрастает.

Первое обобщение многопараметрического вязко-упругого определяющего соотношения задается дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами. Обозначая линейный полиномиальный оператор через $Q_n(D) = q_0 + q_1 D + q_2 D^2 + \dots + q_n D^n$, где $D = d/dt$, и аналогично для $P_m(D)$, получаем обобщенное дифференциальное соотношение между девиаторными компонентами напряжений и деформаций

$$P_m(D) \sigma'_{ij} = Q_n(D) \varepsilon'_{ij}, \quad (4.101b)$$

где при гидростатическом сжатии предполагается чисто упругое поведение. При рассмотрении однородных начальных условий преобразование Лапласа формально представляет закон Гука в преобразованном пространстве

$$\sigma'_{ij}{}^* = \frac{Q_n(s)}{P_m(s)} \varepsilon'_{ij}{}^*, \quad \text{если } n \leq m, \quad (4.101b)$$

или обратное соотношение в случае, когда $n \geq m$. Из вида этого соотношения следует выражение для комплексного модуля сдвига G^* в виде рациональной дроби

$$G^* = \frac{Q_n(s)}{2P_m(s)}. \quad (4.102)$$

Следует упомянуть возможность декомпозиции на частные дроби. Следовательно, G^* составлен путем суперпозиции «простых» моделей низкого порядка.

(§) Общая теория линейной вязко-упругости

Для выражения комплексного модуля сдвига G^* вместо формулы (4.102) можно использовать любую подходящую функцию $G^*(s)$. Обратное преобразова-

ние произведения двух преобразований Лапласа [сравните с формулой (4.101b)] представляет интеграл в виде свертки

$$\sigma'_{ij} = \int_{-\infty}^t \sum_k \sum_l G_{ijkl}(x, y, z, t - \tau) \frac{\partial \varepsilon'_{kl}}{\partial \tau}(x, y, z, \tau) d\tau. \quad (4.103)$$

Это соотношение может учитывать даже неоднородную зависимость свойств материала от пространственных координат (x, y, z) и анизотропию, но геометрические соотношения все так же остаются линеаризованными. G_{ijkl} является тензором четвертого порядка функций релаксации. Обратное преобразование определяющего интеграла свертки имеет ядро, известное как тензор функций ползучести. Идентификация этих функций, основанная на длительных по времени испытаниях, является трудной и дорогостоящей, и, таким образом, ограничена специальными материалами и специальными приложениями. Более предпочтительными являются многопараметрические модели. При рассмотрении недеформированного исходного состояния при $t = 0$ изотропия значительно упрощает определяющий функционал

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t G(\tau) \varepsilon'_{ij}(x, y, z, t - \tau) d\tau. \quad (4.104)$$

Также может быть включена вязкость объемного деформирования.

Все обсужденные до сих пор вязко-упругие определяющие соотношения справедливы для изотермических условий. По поводу проблемы термических напряжений см. раздел 6.10.2.

4.2.3. Нелинейный вязко-упругий материал

Бейли и Нортон обобщили одномерное линейное уравнение жидкости Максвелла для учета нелинейного влияния напряжений на деформацию ползучести, в основном для металлов. При постоянной температуре T это дифференциальное соотношение в условиях одноосного напряженного состояния принимает вид степенного закона

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{\vartheta} \left[\frac{\sigma}{\sigma_n(T)} \right]^{n(T)}, \quad (4.105)$$

где ϑ – характеристическое время, обычно 10^9 секунд.

Если обозначить ассоциированное с этим временем напряжение через $\sigma_n(T)/10^9 \text{ с} = \sigma_{n\vartheta}$, то предельное напряжение ползучести в случае другого выбора характеристического времени преобразуется согласно следующему соотношению

$$\sigma_n(T) = \left[\frac{10^9}{\vartheta} \right]^{1/n} \sigma_{n\vartheta}. \quad (4.106)$$

Экспоненциальный показатель ползучести $n(T)$ проявляет слабую зависимость от температуры. В случае нечетного натурального числа n деформация ползучести при растяжении и сжатии хорошо описывается без дополнительного использования функции знака sgn .

Обобщение на случай трехмерного напряженного состояния существует благодаря Ф.К.Г. Одквисту, где рассматривается сначала одноосное определяющее соотношение для девиаторных компонент напряжения $\sigma'_{xx} = (2/3)\sigma$, $\sigma'_{yy} = \sigma'_{zz} = -\sigma/3$ с соответствующим инвариантом J_2 для выражения вязкой части скорости деформации

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij}{}^{-2} = \sigma^2/3 \Rightarrow \dot{\epsilon}_v = f(J_2) \frac{2}{3} \sigma. \quad (4.107)$$

Из сравнения со вторым слагаемым уравнения (4.105), определяющим вязкую часть скорости деформации, следует

$$f(J_2) = \frac{3}{2\vartheta \sigma_n^n(T)} (3J_2)^{(n-1)/2}. \quad (4.108)$$

Благодаря инвариантности коэффициента в одноосном законе (4.107) трехмерное определяющее соотношение для скорости девиатора деформаций принимает простой вид

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{3}{2\vartheta \sigma_n^n(T)} (3J_2)^{(n-1)/2} \sigma'_{ij}. \quad (4.109)$$

При этом все так же предполагается чисто линейная сжимаемость. Введение эффективного эквивалентного напряжения (интенсивности напряжений)

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2}, \quad (4.110)$$

которое при одноосном напряженном состоянии растягиваемого стержня равно нормальному напряжению $\sigma_{xx} = \sigma$ [формула (4.107)], приводит определяющее нелинейное дифференциальное уравнение к более простой форме

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{3}{2\vartheta \sigma_n^n(T)} \sigma_e^{(n-1)} \sigma'_{ij}. \quad (4.111)$$

Можно легко проверить, что удельная мощность диссипации при деформировании материала максвелловского типа в случае изотермической ползучести определяется следующим выражением (см. рис. 4.9):

$$D = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ijv} = \frac{\sigma_e^{n+1}}{\vartheta \sigma_n^n(T)}, \quad (4.112)$$

где $d\varepsilon_{ijv}/dt$ – вязкая часть скорости деформаций, которая является однозначной функцией интенсивности напряжений.

В случае чистого сдвига $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau$, интенсивность напряжений равна $\sigma_e = \tau\sqrt{3}$, и тогда скорость сдвиговой деформации определяется выражением

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2G} \dot{\tau} + \frac{3^{(n+1)/2}}{2\vartheta \sigma_n^n(T)} \tau^n. \quad (4.113)$$

Для процесса установившейся ползучести $\dot{\varepsilon}'_{ijv} = f(J_2)\sigma'_{ij}$ Н. Дж. Хофф сформулировал аналогию между скоростью вязких деформаций и нелинейно упругими деформациями, которые возникли бы в упругом теле той же формы и при тех же условиях нагружения

$$\varepsilon'_{ij} = f(J_2)\sigma'_{ij}.$$

Для демонстрации величины параметров в законе Бейли и Нортонa приведем их значения для мягкой стали при повышенной температуре 450 °C : $n = 5$ и $\sigma_{n7} = 70$ Н / мм². Подробности можно найти в монографии:

- Odqvist F.K.G. und Hult J. Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Berlin, Springer-Verlag, 1962.

(§) Пример: Разрушение растягиваемого стержня при ползучести

Для иллюстрации эффектов ползучести рассмотрен тонкий стержень из материала Нортонa при растяжении постоянной силой F . Смотрите, например:

- Parkus H. On the lifetime of visco-elastic structures in a random temperature field. In «Recent Progress in Applied Mechanics», B. Broberg, J. Hult and F. Niordson, Eds., New York, Wiley, 1967, pp. 391-397.

(Х. Паркус был профессором Венского технического университета).

Вязкая часть деформации с течением времени деформирования возрастает и становится больше мгновенной упругой деформации, которая спустя некоторое время становится пренебрежимо малой. Деформация ползучести рассматривается при условии постоянного объема стержня

$$A dx = A_0 dX, \quad (4.114)$$

где $A(t)$ – площадь деформируемого поперечного сечения. В соответствии с формулой (1.29) для больших деформаций ползучести используется логарифмическая мера деформации

$$\varepsilon = \ln \frac{dx}{dX} = \ln(1 + \varepsilon_x) = -\ln \frac{A}{A_0}, \quad (4.115)$$

и после дифференцирования по времени полученная скорость деформации подставляется в определяющее соотношение

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma^n}{\vartheta \sigma_n^n(T)}, \quad (4.116)$$

откуда получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\vartheta \dot{\alpha} + \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_n(T)} \right]^n \alpha^{-n+1} = 0, \quad \alpha = A/A_0, \quad \dot{\alpha} = \dot{A}/A_0, \quad \sigma_0 = F/A_0. \quad (4.117)$$

Разделение переменных и интегрирование дает безразмерную функцию уменьшения площади поперечного сечения с течением времени

$$\alpha^n(t) = 1 - \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_n(T)} \right]^n \frac{nt}{\vartheta}. \quad (4.118)$$

Простейший критерий наступления разрушения стержня при установившейся ползучести имеет вид $d\alpha/dt \rightarrow \infty$, или, что эквивалентно, согласно уравнению (4.117) $\alpha \rightarrow 0$. Таким образом, при нелинейной ползучести однородный стержень имеет конечную продолжительность жизни (конечный срок эксплуатации)

$$\frac{nt_L}{\vartheta} = \left[\frac{\sigma_n(T)}{\sigma_0} \right]^n, \quad (4.119)$$

где $n > 1$, T – постоянная температура. Стержень из мягкой стали при 500°C и при постоянной нагрузке $\sigma_0 = 10^4 \text{ Н/см}^2$ имеет следующие параметры:

$$n(T) = 5, \quad \vartheta \sigma_n^5 = 33,5 \times 10^{23} \text{ (Н см}^{-2}\text{)}^5 \text{ час},$$

и его срок эксплуатации равен примерно $t_L = 6700$ часов. Заметим, что даже малые колебания температуры, наложенные на ее среднее значение, вызывают значительное снижение ожидаемого срока эксплуатации. Эта чувствительность имеет большое значение как в практических задачах техники, так и при проектировании экспериментов на ползучесть при повышенных температурах.

4.3. Пластическое тело

Кроме рассмотренных выше вязких деформаций необратимые деформации могут развиваться в пластических телах при их нагружении выше предела текучести. Несущая способность такой конструкции значительно уменьшена за счёт роста пластических деформаций и распространения зон текучести на большую часть объёма конструкции. При предельном нагружении такой податливой структуры может произойти пластическое разрушение. Большие пластические деформации податливых тел, которые возникают, например, в ходе перестройки за счётковки и прокатки металлов при повышенной температуре, в данном курсе не рассматриваются. Смотрите, например:

- Lippmann H. *Mechanik des Plastischen Fliessens*. Berlin, Springer-Verlag, 1981.

При кратковременных перегрузках структурная пластичность, то есть способность податливого материала поглощать энергию, является благоприятной. Кроме того, текучесть в малой пластической зоне в окрестности нагрузки или концентрации напряжений ограничивает пики напряжений и приводит к перераспределению напряжений на гораздо более низком уровне. Положительное воздействие встроенной податливости используемых в технике материалов усиливается специальным проектированием конструкций.

Далее приведено введение в пластичность, сначала рассматриваются простые модели в одномерном представлении, а затем определяющие соотношения в трёхмерном напряжённом состоянии. С помощью метода конечных элементов приближенные решения нелинейных проблем структурной пластичности находят применение в инженерной практике.

4.3.1. Жёстко-пластическое тело

Закон сухого трения Кулона (см. рис. 2.4) представляет собой закон прилипания-проскальзывания, нелинейное соотношение между напряжениями и деформациями для жестко-пластического материала Сен-Венана. В одномерной модели растягиваемого образца не развивается никакой деформации, если сила F меньше предела текучести, который считается одинаковым при растяжении и сжатии $|F| < F_Y$. Нагружение на уровне предела текучести $|F| = F_Y$ приводит к установившемуся течению без упрочнения, то есть к постоянной пластической деформации $u_p(t)$. При разгрузке деформированный стержень реагирует жестко при $|F| < F_Y$. Работа, совершенная при деформации, $F_Y u_p$, полностью рассеивается. Символически эта модель показана на рис. 4.10 вместе с графиками зависимости между силой и перемещением при нагрузке и разгрузке.

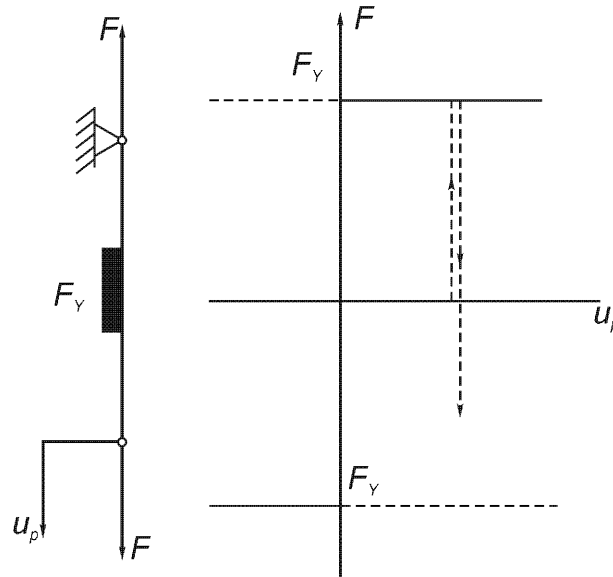


Рис. 4.10. Символическая одномерная модель тела Сен-Венана. Цикл нагружения, достигающий предела текучести F_Y .

При отсутствии какой бы то ни было упругой деформации полная осевая деформация равна ее пластической части, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_p$. Постоянная поперечная деформация задается условием несжимаемости $e = 0$, и в приближении малых деформаций

$$\varepsilon_q = -\varepsilon_{yy} = -\varepsilon_{zz} = -\varepsilon_p / 2.$$

Простое обобщение модели Сен-Венана на трехмерное жестко-пластическое тело получается путем принятия критерия текучести Р. Мизеса. По-прежнему предполагается изохорический процесс деформации, хорошо согласующийся с экспериментальными результатами, и, если предположить, что материал остается изотропным, то с использованием второго инварианта девиатора напряжений и материальной константы k закон течения в пластических зонах принимает вид

$$J_2 - k^2 = 0, \quad J_2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij}{}^2. \quad (4.120)$$

В случае растягиваемого стержня $J_2 = \sigma_{xx}^2 / 3$, где $\sigma_{xx} = F / A_0$ (предполагаются линеаризованные геометрические уравнения). Следовательно, неограниченное течение имеет место в том случае, если напряжение достигает величины предела текучести

$$\sigma_{xx} = k\sqrt{3} = \sigma_Y, \quad \sigma_Y = F_Y / A_0. \quad (4.121)$$

Аналогично, при чистом сдвиге, когда $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau$ и второй инвариант $J_2 = \tau^2$, неограниченная пластическая деформация сдвига имеет место, когда

$$\tau = k = \tau_Y, \quad (4.122)$$

где τ_Y – предельное напряжение текучести при сдвиге. Следовательно, отношение предельных напряжений текучести при растяжении и сдвиге равно $\sqrt{3}$.

При трехмерном напряженном состоянии второй инвариант принимает вид $J_2 = (3/2)\tau_0^2$. Отсюда следует, что в (ограниченных) пластических зонах

$$k = \tau_0 \sqrt{3/2}, \quad (4.123)$$

где τ_0 – октаэдрическое касательное напряжение, то есть это компонента девиатора напряжений в поверхностном элементе октаэдра; см. соотношение (2.36).

При некоторых заданных условиях нагружения тело состоит из жестких частей своего объема с неопределенным распределением напряжений (здесь используются только условия равновесия) и ограниченных зон текучести идеально-пластического материала. В пластически деформируемых областях закон Мизеса представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений связи между напряжениями и деформациями

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \sigma'_{ij}. \quad (4.124)$$

Если считать коэффициент λ постоянным и не зависящим от напряженного состояния, получаем линейно вязкую ньютоновскую жидкость. Чтобы показать нелинейность закона пластического течения, подставим это выражение во второй инвариант, и с учетом соотношения (4.120) получаем

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij}{}^2 = \lambda^{-2} \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\epsilon}_{ij}{}^2 = \lambda^{-2} J_{2\dot{\epsilon}} = k^2.$$

Следовательно, решая это уравнение относительно λ , получаем выражение

$$\lambda = \frac{\sqrt{J_{2\dot{\epsilon}}}}{k}, \quad (4.125)$$

которое зависит от второго инварианта тензора текущих пластических скоростей деформаций. Таким образом, нелинейный закон течения Мизеса принимает вид

$$\sigma'_{ij} = \frac{k}{\sqrt{J_{2\dot{\epsilon}}}} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (4.126)$$

Если скорости деформаций известны, $e = 0$, можно вычислить второй инвариант, и тогда компоненты девиаторной части тензора напряжений внутри пластических зон точно определяются соотношением (4.126). Окончательные напряжения в конце процесса пластического деформирования не зависят от вре-

мени нагружения, в отличие от напряженного состояния в вязком теле. Время является просто параметром, и скорости деформации можно заменить приращениями в течение каждого шага нагружения.

С исторической точки зрения следует отметить, что Сен-Венан не применял условия текучести Мизеса, а рассматривал условие, впервые полученное Треска: текучесть имеет место, если наибольшее касательное напряжение постоянно и равно предельному напряжению текучести при сдвиге τ_Y , которое определяется простым испытанием на сдвиг. Следовательно, из рассмотрения главных нормальных напряжений $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ вытекает соотношение

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2k. \quad (4.127)$$

Инвариантная формулировка критерия текучести Треска имеет значительно более сложный вид, и ее можно найти в книге:

- Prager W. and Hodge P.G. Theory of Perfectly Plastic Solids. New York, Wiley, 1951.

Имеется русский перевод:

- Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М., ИЛ, 1956.

Так как при использовании модели жестко-пластического тела для задач с локализованными пластическими зонами, которые демонстрируют стандартный случай структурной пластичности, встречаются некоторые трудности, обычно принимается во внимание упругость. Далее будет рассмотрен идеальный упруго-пластический материал. Применение рассмотренной выше модели ограничивается технологическими процессами пластического формоизменения.

4.3.2. Упруго-пластическое тело

Одномерная модель идеального упруго-пластического тела состоит из последовательно соединенных гуковской и сен-венановской фаз. Растяжимый стержень, показанный на рис. 4.11(а), демонстрирует линейно упругий отклик на медленное нагружение из недеформированного состояния, когда закон $F = cu$ выполняется до тех пор, пока сила впервые не достигнет предела текучести $F = F_Y$. Пластическое течение в этой модели становится стационарным, если нагрузка сохраняется постоянной и равной пределу текучести. Течение реального стержня из мягкой низкоуглеродистой стали из-за образования шейки происходит нестационарно. В том месте, где площадь поперечного сечения сильно уменьшена, возникает локальная неустойчивость материала и развивается трёхмерное напряжённое состояние. Соотношение между силой и перемещением на рис. 4.11(а) предполагается симметричным. Также показаны некоторые циклы нагружения и постоянное удлинение u_p после разгрузки. Циклы следуют

правилам, найденным Людвигом Прандтлем для диаграмм напряжения-деформации последовательных нагружений и разгрузок.

Во время циклической пластической деформации металлов можно наблюдать, что в условиях нового нагружения пластическое течение возникает при меньшем уровне напряжений, если сравнивать с пределом текучести на начальной траектории нагружения первоначального материала. Это явление называется эффектом Баушингера (первая статья по этой теме была опубликована в 1886 году) и является одним из важных эффектов деформационного упрочнения. Это явление показано на одномерной билинейной модели на рис. 4.11(b), состоящей из гуксовской фазы с жёсткостью c_1 , соединённой параллельно с идеальным упруго-пластическим телом с параметрами (c_2, F_Y) . Сила растяжения в интервале пластичности уже не является постоянной [см. рис. 4.11(b)], а подчиняется следующему соотношению:

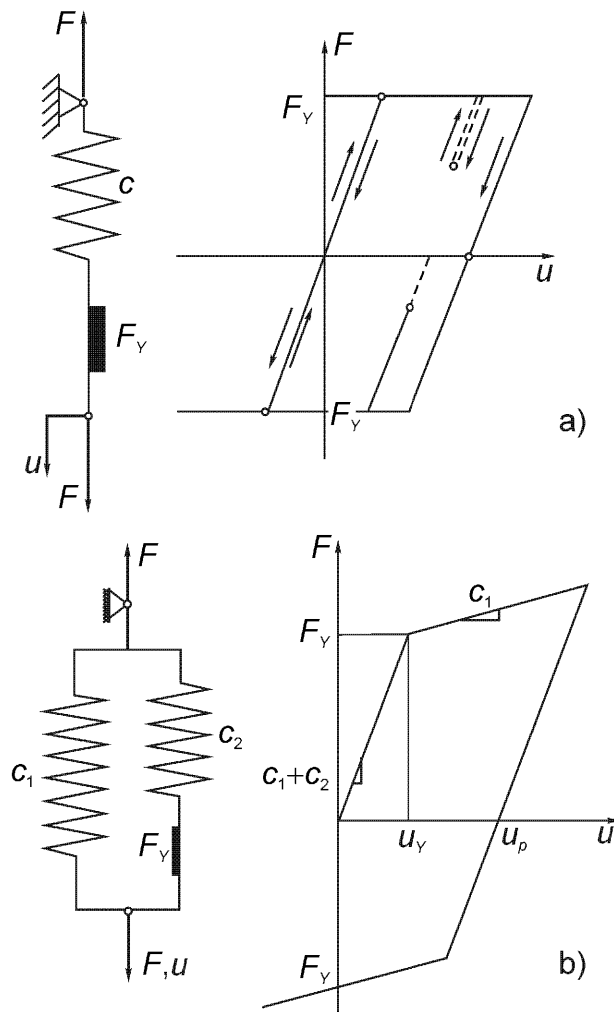


Рис. 4.11. Символические одномерные модели:

- (a) Идеальное упруго-пластическое твёрдое тело с пределом текучести F_Y .
- (b) Упруго-пластическое тело с линейным деформационным упрочнением и эффектом Баушингера при циклической пластичности.

$$F_p = F_Y + c_1(u - u_Y) = c_1 u + \frac{c_2}{c_1 + c_2} F_Y, \quad u_Y = \frac{F_Y}{c_1 + c_2}.$$

Разгрузка следует траектории гуксовой двойной фазы с жёсткостью $c_1 + c_2$. Однако обратные пластические деформации возникают, если

$$F_p = -F_Y + c_1(u + u_Y) = c_1 u - \frac{c_2}{c_1 + c_2} F_Y.$$

Следовательно, предел текучести любой упругой траектории повторного нагружения (при сжатии), начинающееся на абсциссе с пластическим перемещением u_p , понижается по сравнению с начальным пределом F_Y , что и показывает наличие эффекта Баушингера. Другая трехфазная модель ограничивает область линейного деформационного упрочнения согласно рис. 4.12 путем параллельного соединения двух одномерных идеальных упруго-пластических тел с различными пределами текучести, $F_{1Y} < F_{2Y}$. Удлинение u и деформации ε_x одинаковые.

Траектория упругого нагружения, начинающаяся из недеформированной конфигурации, определяется линейным соотношением

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A_0} = \frac{F_1 + F_2}{A_1 + A_2} = E \varepsilon_x, \quad \left(0 \leq \varepsilon_x \leq \varepsilon_{1Y} = \frac{F_{1Y}}{E A_1} \right).$$

Для случая $\varepsilon_x > \varepsilon_{1Y}$ одна фаза становится идеально-пластической, $F_1 = F_{1Y} = \text{const}$ и

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A_0} = \frac{F_{1Y} + E \varepsilon_x A_2}{A_1 + A_2}, \quad \left(\varepsilon_{1Y} \leq \varepsilon_x \leq \varepsilon_{2Y} = \frac{F_{2Y}}{E A_2} \right).$$

Дальнейшее увеличение растяжения даёт полную деформацию $\varepsilon_x > \varepsilon_{2Y}$, обе параллельные фазы становятся идеально-пластическими, и

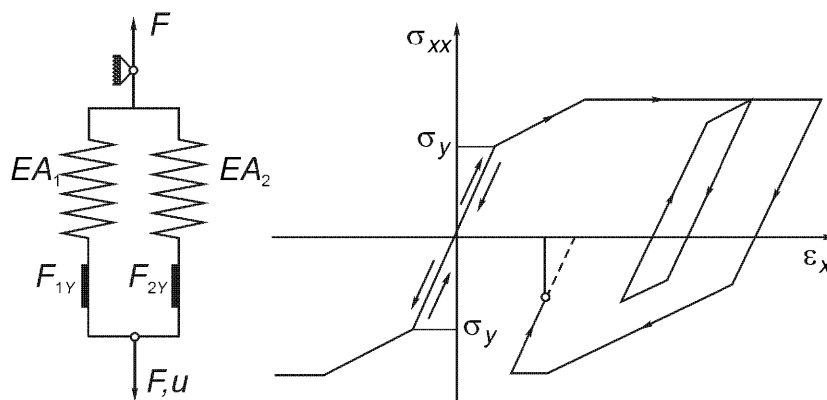


Рис. 4.12. Параллельное соединение двух идеальных упруго-пластических тел. Ограниченное линейное деформационное упрочнение.

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A_0} = \frac{F_{1Y} + F_{2Y}}{A_1 + A_2} = \text{const}, \quad \left(\varepsilon_x \geq \varepsilon_{2Y} = \frac{F_{2Y}}{E A_2} \right),$$

где A_1 и A_2 – площади поперечных сечений, F_1 и F_2 – силы в параллельном соединении двухфазных моделей. Связь напряжений и деформаций в первоначальной модели предполагается симметричной при растяжении и сжатии согласно рис. 4.12, где показаны некоторые траектории циклического нагружения.

При трёхмерном напряжённом состоянии идеальное упруго-пластическое тело рассматривается подобно тому, как это делалось для жёстко-пластической модели. В пластических зонах предполагается несжимаемая текучесть и принимается во внимание условие текучести Мизеса [см. формулу (4.120)]

$$J_2 - k^2 = 0, \quad (4.128)$$

где правило текучести Мизеса [см. соотношение (4.124)] должно быть заменено с помощью скорости пластической части деформаций ε''_{ij}

$$2G\dot{\varepsilon}''_{ij} = \lambda\sigma'_{ij}, \quad (4.129)$$

где для удобства коэффициент пропорциональности λ нормализован с помощью $2G$. Рассматривая закон Гука в скоростях (это важно для пути разгрузки)

$$\dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{\varepsilon}'_{ij} \quad (4.130)$$

и девиаторные компоненты полной деформации, полученные суперпозицией упругой части ε'_{ij} и пластической деформации ε''_{ij} ,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij}, \quad (4.131)$$

с учётом (4.129) получаем стационарный закон течения в пластических зонах

$$2G\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} + \lambda\sigma'_{ij}. \quad (4.132)$$

Если λ считается постоянным, то (4.132) представляет собой определяющее соотношение максвелловской жидкости. Однако у пластического течения есть условие текучести, которое после дифференцирования принимает вид

$$J_2 = 0 = \sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij}. \quad (4.133)$$

Подстановка скорости изменения напряжения даёт

$$J_2 = 0 = 2G \sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - 2\lambda J_2.$$

Подставляя условие текучести $J_2 = k^2$, получаем, что коэффициент λ не постоянен, а равен

$$\lambda = \frac{G}{k^2} P'_C, \quad (4.134)$$

где

$$P'_C = \sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (4.135)$$

представляет собой удельную мощность деформации искажений. Девиаторная скорость деформации входит как результат предположения о несжимаемом пластическом течении. Полная деформация равна $\varepsilon_{ij}^{(t)} = \varepsilon_{ij} + e\delta_{ij}$, где всестороннее сжатие e предполагается чисто упругим. Описанная выше плотность мощности – это внутренняя мощность напряжений минус мощность упругого сжатия, отнесённая к единице объёма: скорость удельной энергии деформации искажений. Для заданных напряжений и скоростей деформаций в пластических зонах можно вычислить P'_C и, следовательно, $\lambda > 0$. Подстановка λ даёт нелинейный закон течения Прандтля-Рейсса, который выражается следующим соотношением:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = 2G \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{P'_C}{2k^2} \sigma'_{ij} \right). \quad (4.136)$$

Эти нелинейные дифференциальные уравнения справедливы, пока выполняется условие текучести $J_2 = k^2$ вместе с условием, что пластическое течение всегда сопровождается диссипацией механической энергии, $P'_C > 0$. Они дополняются законом Гука для чисто упругой сжимаемости. В форме скоростей

$$\dot{\rho} = K \dot{e} \quad \text{и} \quad \dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} + \dot{\rho} \delta_{ij}, \quad (4.137)$$

что представляет собой полную скорость изменения напряжения.

В упругих областях тела, где $J_2 < k^2$, и в случае разгрузки от предела текучести $J_2 = k^2$, но $P'_C < 0$, все уравнения Гука в скоростях сохраняются

$$\dot{\sigma}'_{ij} = 2G \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \dot{\rho} = K \dot{e}. \quad (4.138)$$

Во многих приложениях сжимаемость имеет пренебрежимо малое влияние и, таким образом, считается, что из предела $K \rightarrow \infty$ следует приближительное равенство

$$e = 0.$$

Это дополнительное уравнение компенсирует увеличение числа неопределённых компонент напряжений из-за неизвестности среднего напряжения ρ (в отличие от жёстко-пластической модели). Предположение о несжимаемости резко

уменьшает вычислительные трудности, и особенно в задачах с малыми пластическими зонами и, следовательно, с упругими и пластическими деформациями того же (малого) порядка напряжения, возможно, приближенно определяются с недостаточной точностью.

4.3.3. Вязко-пластическое тело

Существуют реологические материалы (наподобие масляной эмали), которые априори демонстрируют вязкие эффекты при своей пластической деформации, и есть конструкционные материалы, которые проявляют сильную зависимость от скорости при деформации в условиях резко изменяющегося динамического нагружения. Простая трёхфазная модель Бингама показывает качественно те же скоростные эффекты в пластичности. На рис. 4.13 показана одномерная модель, состоящая из гукковского тела с жёсткостью c , соединенного последовательно с параллельным соединением элемента прилипания-проскальзывания Сен-Венана и ньютоновской жидкости. В интервале нагружения $|F| < F_Y$ стержень является линейно упругим. При $|F| \geq F_Y$ развивается пластическое течение и проявляются скоростные эффекты за счет вязкости η_p активированной ньютоновской жидкости. В вязко-пластическом интервале сила за счет общей деформации представляется в виде

$$F = F_Y + \eta_p \dot{u} = c u_e, \quad (4.139)$$

где u_e – упругая часть удлинения, а η_p называется пластической вязкостью.

Рассмотрение условия текучести Мизеса $J_2 = k^2$ в пластических зонах в трёхмерном напряжённом состоянии дает закон течения бингамовского материала в обобщённой форме

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}{}^p + \eta_p \dot{\varepsilon}''_{ij}, \quad \sigma'_{ij}{}^p = \frac{k}{\sqrt{J_2 \dot{\varepsilon}}} \dot{\varepsilon}''_{ij}, \quad (4.140)$$

где ε''_{ij} – девиатор неупругих деформаций; см. формулу (4.126).

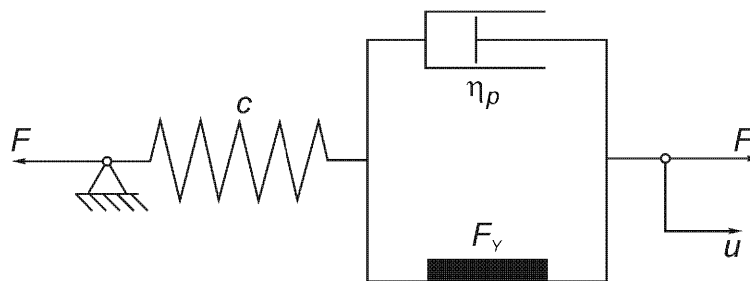


Рис. 4.13. Символическая одномерная модель упруго-вязко-пластического тела Бингама.

Замена вязкой фазы в модели Бингама на максвелловскую жидкость даёт материал Шведова, представляющий собой четырёхфазное тело. В литературе обсуждаются и многие другие обобщённые определяющие соотношения; рассматривается также нелинейная вязкость. Такое обобщение выполняется путем решения уравнения (4.140) для скорости неупругой деформации

$$\dot{\xi}_{ij}'' = \frac{1}{\eta_p} \sigma_{ij}'^V, \quad (4.141)$$

где $\sigma_{ij}'^V = (\sigma_{ij}' - \sigma_{ij}'^P)$ представляет собой девиаторное «перенапряжение». Нелинейно вязкое поведение вводится через растяжение

$$\dot{\xi}_{ij}'' = \frac{1}{\eta_p} H(J_{2\sigma V}) \sigma_{ij}'^V, \quad J_{2\sigma V} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}'^V \sigma_{ij}'^V. \quad (4.142)$$

Обычно σ_{ij}' и $\sigma_{ij}'^P$ могут быть приняты коллинеарными. Следовательно, с помощью соответствующего единичного тензора n_{ij} можно получить скалярную функцию второго инварианта тензора перенапряжений:

$$\dot{\xi}_{ij}'' = \frac{1}{\eta_p} \left[\sqrt{2J_{2\sigma V}} H(J_{2\sigma V}) \right] n_{ij}. \quad (4.143)$$

Вместо применения второго инварианта перенапряжений можно использовать разность инвариантов девиатора напряжений и пластической части напряжений. Функция

$$\bar{\Phi} \left(\sqrt{J_2} - \sqrt{J_2^P} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}k} \Phi(F), \quad F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1, \quad \sqrt{J_2^P} = k \quad (4.144)$$

подставляется вместо коэффициента в скобках в соотношение (4.143) для получения закона вязко-пластичности Пежины

$$\dot{\xi}_{ij}'' = \frac{1}{\eta_p} \{ \Phi(F) \} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4.145)$$

Фигурные скобки в Φ – это символ оператора: он показывает, что функция является полуопределенно положительной, $\Phi(F) \geq 0$, если $F \geq 0$, и $\Phi = 0$, если $F < 0$. Этот нелинейный вязко-пластический закон течения имеет то преимущество, что исключается девиатор пластических напряжений. Благодаря своей простоте его легко запрограммировать в инкрементальной форме, а благодаря своей способности описывать «выступающие» особенности реальных вязко-пластических материалов определяющее соотношение Пежины наиболее часто используется в технике и вычислительной механике, включая приложение к циклической структурной пластичности. Смотрите:

- Perzyna P. Fundamental Problems of Viscoplasticity. In: Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, 1966, pp. 243-377.

4.4. Упражнения А 4.1 – А 4.3 и решения

А 4.1: Требуется определить предельный изгибающий момент M_y^* в усиленной железобетонной балке прямоугольного поперечного сечения $H \times B$, такой, чтобы деформации в стальной арматуре и деформация сжатия в бетоне принимали свои предельно допустимые значения ε_e^* и ε_p , соответственно. Использовать нелинейно упругое определяющее соотношение для описания поведения бетона при сжатии [см. соотношение (4.52)], при допущении, что в области растяжения бетонная фаза разрушается. См. рис. А 4.1 (состояние II). Прутья стальной арматуры имеют суммарную площадь поперечного сечения A_e^* .

Решение: Нормальная сила полагается равной нулю, следовательно, $Z_e - D_b = 0$. Оставшаяся пара внутренних сил статически эквивалентна изгибающему моменту, действующему в поперечном сечении, рассмотренном на рис. А 4.1, $D_b z_b = M_y(x)$, где

$$D_b = B \int_0^{y_0} |\sigma_{xx}| dy,$$

представляет собой результирующую силу, передающуюся на неразрушенную область бетона. С помощью формулы (4.52) и заданного линейного распределения деформаций (предполагается, что поперечное сечение остается плоским) получаем $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_p y / y_0$, где $y_0 = H \varepsilon_p / (\varepsilon_p + \varepsilon_e^*)$, результирующая сила

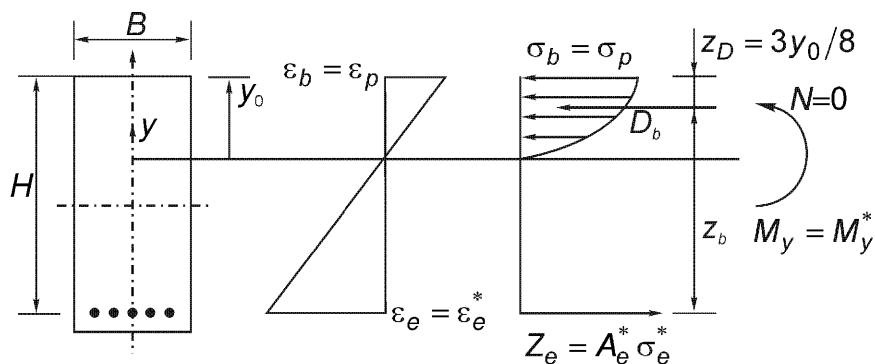


Рис. А 4.1. Железобетонная балка. Предполагается, что бетон разрушается в области растяжения, состояние II. Индекс b означает бетон, индекс e относится к стальной арматуре.

становится $D_b = (2/3) \sigma_p A_b$, где $A_b = B y_0$ – площадь неразрушенного бетона. Из условия статической эквивалентности находим, что линия действия результирующей силы проходит через точку, находящуюся на расстоянии

$$z_D = \frac{B}{D_b} \int_0^{y_0} |\sigma_{xx}| (y_0 - y) dy = \frac{3}{8} y_0$$

от нижней поверхности композитной балки. С учетом того, что $z_b = H - z_D$, предельный изгибающий момент в поперечном сечении в состоянии II принимает значение

$$M_Y^* = \frac{2}{3} \sigma_p y_0 \left(A - \frac{3}{8} A_b \right), \quad \text{где} \quad A = BH.$$

Рассматривая напряжение σ_e^* , которое сопровождает деформацию ε_e^* в прутьях арматуры, получаем требуемое поперечное сечение стали $A_e^* = D_b / \sigma_e^*$. Инструкции для железобетонных конструкций ограничивают отношение A_e / A как сверху, так и снизу.

А 4.2: Определить уменьшение срока эксплуатации при ползучести стального стержня под действием постоянной осевой силы (заданной с помощью мгновенного растягивающего напряжения 100 Н/мм^2) в случае гармонического колебания температуры с течением времени с амплитудой $\pm 50 \text{ }^\circ\text{C}$, наложенного на среднюю температуру $500 \text{ }^\circ\text{C}$. Вязкая деформация со временем становится больше мгновенной. Изобразить результат численного интегрирования как функцию периода, см. рис. А 4.2.

Указание: Использовать логарифмическую деформацию, закон ползучести Бейли-Нортон с $n = 5$ и коэффициент вязкости, зависящий от температуры по заданному ниже экспоненциальному закону:

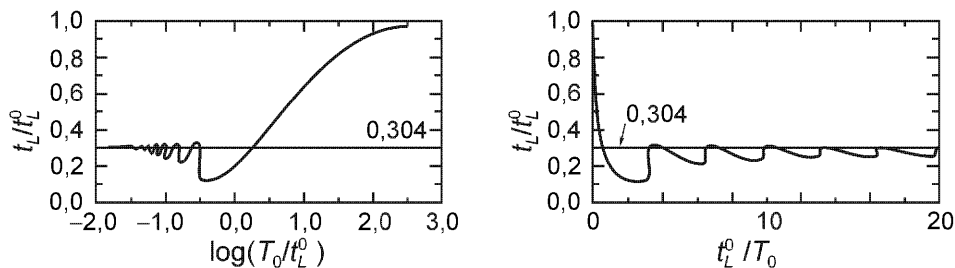


Рис. А 4.2.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k \sigma^n + \alpha \dot{\theta}, \quad \theta(t) = T(t) - T_m,$$

где $[T_m] = K$ – абсолютная температура,

$$k(t) = k_m e^{\gamma \theta(t)}, \quad k_m = c e^{\gamma T_m}, \quad T_m = 773 \text{ К}, \quad \gamma = 0,05 / \text{К},$$

$$1/k_m = \vartheta \sigma_n^n (T_m) = 33,5 \times 10^{13} \text{ [час (Н/мм}^2\text{)}^5\text{]}.$$

Решение: Изотермический срок эксплуатации составляет $t_L^0 = \vartheta \sigma_n^n (T_m) / n \sigma_0^n = 6700$ часов. С учетом обозначений $\alpha = A/A_0$, $\sigma_0 = F/A_0 = 100 \times 10^6$ Па дифференциальное уравнение с производной по времени принимает вид $\dot{\alpha} + k_m e^{2,5 \sin(2\pi t/T_0)} \sigma_0^n \alpha^{1-n} = 0$. Методом разделения переменных получаем решение: $\alpha^n = 1 - n k_m \sigma_0^n \int_0^t e^{2,5 \sin \omega_0 t} dt$, $n > 1$, где $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Следовательно, конечный срок эксплуатации определяется как функция периода колебаний температуры T_0 путем численного решения барьерной задачи, с учетом пределов

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} t_L / t_L^0 = 1, \quad \lim_{T_0 \rightarrow \infty} t_L / t_L^0 = 2\pi / C = 0,304, \quad C = \int_0^{2\pi} e^{2,5 \sin t} dt,$$

$$\left(\omega_0 t_L^0 \right) t_L / t_L^0 = \int_0^{\omega_0 t_L^0} e^{2,5 \sin \tau} d\tau = \omega_0 t_L^0.$$

А 4.3: Задан стержень, изготовленный из упруго-пластического материала с диаграммой нагружения в виде трех прямолинейных отрезков, с первоначаль-

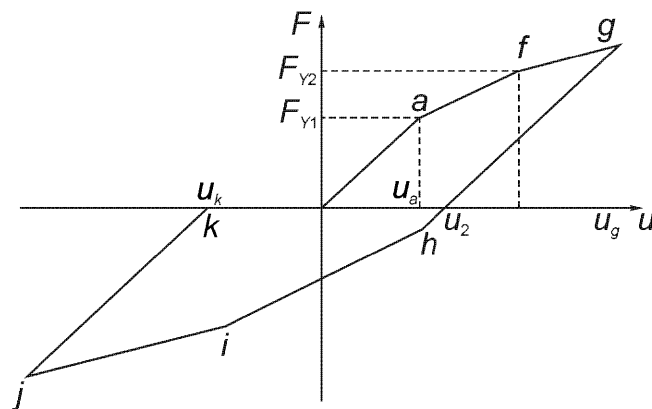


Рис. А 4.3.

ной упругой жесткостью k и пределом текучести F_{Y1} (Рис. А 4.3). Отношение к первоначальной жесткости k для первого касательного модуля равно $\alpha = 0,5$, а для второго – $\beta = 0,3$; сила, соответствующая второму пределу текучести, равна $F_{Y2} = 1,5 F_{Y1}$. Вычислить постоянную остаточную деформацию после цикла нагрузки с амплитудой $\pm 1,8 F_{Y1}$. Каково количество диссипированной работы? Учтите эффект Баушингера.

Решение: Рассматривая $u_a = \frac{F_{Y1}}{k}$, $u_g = u_a + \frac{F_{Y2} - F_{Y1}}{\alpha k} + \frac{1,8 F_{Y1} - F_{Y2}}{\beta k} = \frac{3 F_{Y1}}{k}$ и постоянное удлинение после первой разгрузки $u_2 = u_g + \frac{0 - 1,8 F_{Y1}}{k} = \frac{1,2 F_{Y1}}{k}$, благодаря симметрии получаем остаточное постоянное укорочение после завершения первого цикла нагрузки $u_k = -1,2 F_{Y1} / k$, см. опять рис. А 4.3. Диссипированная работа равна $4,2 F_{Y1}^2 / k$.

5 Принцип виртуальной работы

Рассматривается конструкция, нагруженная внешними силами, например, поверхностными нагрузками и массовыми силами, и находящаяся в положении равновесия. Свободное тело с таким набором условий изображено на рис. 5.1. Необходимым является то, что результирующая плотность силы в каждой материальной точке должна быть равна нулю, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Материальной точке с радиусом-вектором \mathbf{r} придаётся виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}$, где $|\delta\mathbf{r}| \ll l_{ХАР}$ (характерный размер тела), и, следовательно, (элементарная) удельная виртуальная работа на единицу объёма также равна нулю

$$\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{r} = 0.$$

Если предположить, что виртуальные перемещения совместимы с требованием целостности сплошной среды, интегрирование по материальному объёму приводит к равной нулю общей виртуальной работе внутренних и внешних сил

$$\delta W = \int_V (\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{r}) dV = 0, \quad \mathbf{f} = \mathbf{k} + \sum_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}, \quad (5.1)$$

где $\int_V \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{r} dV$ – виртуальная работа (заданных) внешних массовых сил.

С учетом симметрии тензора напряжений и того, что $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{u}$, второй объёмный интеграл в уравнении (5.1) заменяется с помощью интегральной теоремы Гаусса:

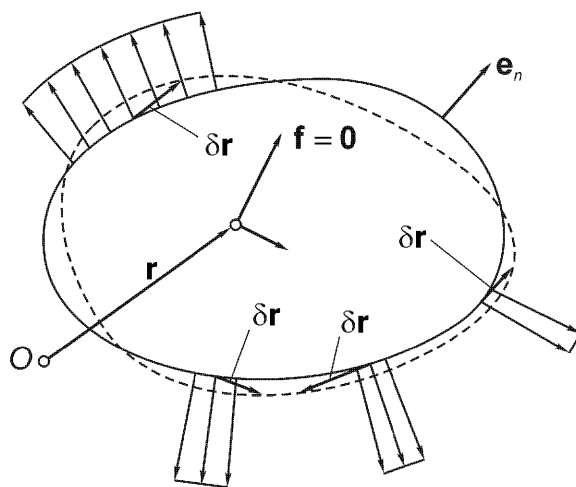


Рис. 5.1. Виртуальные перемещения. Вариация равновесной конфигурации. Точка O – начало отсчета.

$$\begin{aligned} \sum_i \int_V \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \cdot \delta \mathbf{r} \right) dV &= \sum_i \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i \cdot \delta \mathbf{r}) dV - \sum_i \int_V \sigma_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \mathbf{r}) dV = \\ &= \oint_{\partial V} (\sigma_n \cdot \delta \mathbf{r}) dS - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int_V \sigma_{ji} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV. \end{aligned}$$

Поверхностный интеграл

$$\oint_{\partial V} (\sigma_n \cdot \delta \mathbf{r}) dS$$

представляет собой виртуальную работу внешних поверхностных усилий. Так как виртуальные перемещения предполагаются достаточно малыми, к виртуальным вариациям деформаций $\delta \varepsilon_{ij}$ применяются линеаризованные геометрические соотношения [соотношение (1.21)],

$$\delta W^{(i)} = - \sum_i \sum_j \int_V \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ji} dV. \quad (5.2)$$

Формально это может продемонстрировать сравнение с дифференциальным приращением упругого потенциала [формула (3.36)] в упругом теле.

Следовательно, если мы обозначим виртуальную работу внешних сил (массовых сил и поверхностных нагрузок) через $\delta W^{(e)}$, равенство нулю суммы виртуальных работ внутренних и внешних сил можно переписать в краткой форме:

$$\delta W = \delta W^{(i)} + \delta W^{(e)} = 0. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) остаётся верным, если на некоторых частях поверхности тела заданы перемещения, и, следовательно, на этих частях поверхности их виртуальные вариации равны нулю $\delta \mathbf{r} = \mathbf{0}$, то есть поверхностные усилия (силы реакции опор), которые необходимы для создания заданных перемещений, не вносят вклада в виртуальную работу внешних сил.

Если уравнение (5.3) справедливо для всех возможных и допустимых полей виртуальных перемещений, измеряемых от исходной конфигурации, то принцип виртуальной работы (в специальной версии он называется принципом виртуальных перемещений) утверждает, что тело в исходном состоянии находится в равновесии.

В первом приложении этого принципа доказывается, что для сохранения неподвижности тела необходимо выполнение шести условий равновесия внешних сил [см. уравнения (2.58)]. Тело в деформированной равновесной конфигурации рассматривается как свободное, все опоры заменяются соответствующими силами реакций, и, сохраняя деформации замороженными,

виртуальные перемещения выбираются в соответствии с (малым) движением тела как жесткого целого. Следовательно, применяется соотношение (1.5). Пусть A – жестко связанная с телом точка отсчёта, P – произвольная материальная точка, $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A$,

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_A + \delta \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{PA} \quad (5.4)$$

и $\delta \boldsymbol{\alpha}$ – это вектор малого виртуального жесткого вращения тела. Виртуальная работа внешних сил (заданных нагрузок и сил реакций опор) должна быть равна нулю, так как виртуальная работа внутренних сил тождественно равна нулю благодаря движению тела как жесткого целого,

$$\begin{aligned} \delta W = \delta W^{(e)} = & \left[\int_V \mathbf{k} dV + \oint_{\partial V} \boldsymbol{\sigma}_n dS \right] \cdot \delta \mathbf{r}_A + \\ & + \left[\int_V (\mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{k}) dV + \oint_{\partial V} (\mathbf{r}_{PA} \times \boldsymbol{\sigma}_n) dS \right] \cdot \delta \boldsymbol{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Так как виртуальное перемещение материальной точки отсчёта $\delta \mathbf{r}_A$ и виртуальное вращение $\delta \boldsymbol{\alpha}$ независимы между собой, из уравнения (5.5) следуют два векторных условия равновесия для внешних сил

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_A = \mathbf{0}. \quad (5.6)$$

Результирующая сила и результирующий момент внешних сил должны равны нулю. Эти условия являются необходимыми, но не достаточными, так как они получены для специального поля виртуальных перемещений при движении тела как жесткого целого. Эти условия необходимы и достаточны только для равновесия модели абсолютно твердого тела, так как никакие другие перемещения не совместны в данном конкретном случае.

Принцип виртуальных перемещений особенно подходит для вывода условий равновесия механических систем с конечным числом степеней свободы по отношению к виртуальному движению. Например, конфигурация твёрдого тела, дискретизированная конечными элементами или система твёрдых тел, соединённых в сочленениях с помощью упругих пружин или без них, и рассматриваемая в покое под действием внешних сил, описывается конечным числом независимых координат, q_1, q_2, \dots, q_n . Это, например, координаты узлов конечных элементов или независимые координаты отдельных твёрдых тел (максимум шесть для каждого тела). Все радиусы-векторы точек приложения сил становятся функциями этих независимых координат

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (5.7)$$

Следовательно, виртуальное перемещение может быть выражено как полная производная

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (5.8)$$

через независимые виртуальные вариации n конфигурационных координат. Если внутренние и внешние силы могут быть представлены системой сосредоточенных сил \mathbf{F}_l , $l = 1, 2, \dots, k$, приложенных к точкам \mathbf{r}_l , то виртуальная работа выражается с помощью обобщённых сил Q_i в виде

$$\delta W = \sum_{l=1}^k \mathbf{F}_l \cdot \delta \mathbf{r}_l = \sum_{l=1}^k \mathbf{F}_l \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i = 0, \text{ где}$$

$$Q_i = \sum_{l=1}^k \mathbf{F}_l \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

и даёт точно n независимых уравнений равновесия, соответствующих n степеням свободы. Равные нулю обобщённые силы заменяют реальные силы в том смысле, что они производят ту же виртуальную работу. Все те силы, которые не вносят вклад в виртуальную работу, исключаются из условий равновесия. Примерами таких сил, которые не входят в уравнения равновесия, служат внутренняя сила в шарнире без трения и внешняя сила реакции на скользящей опоре без трения. См. также уравнение (10.7) для обобщённых сил в динамике.

5.1. Пример: Трёхшарнирная арка

Статически определяемая конструкция нагружена внешними силами H и V и «внутренним» моментом M_0 в пружине кручения (например, изначально напряжённая линейно упругая пружина, $M_0 = k\varphi_0$); см. рис. 5.2. Требуется определить горизонтальную компоненту силы реакции B_H неподвижной шарнирной опоры B методом выборочного частичного освобождения от связей с использованием уравнения (5.9). Добавление этой неизвестной силы к внешним силам и освобождение опоры B для горизонтального виртуального перемещения вносят вклад в общую виртуальную работу. Все другие силы реакций и сила в шарнире C , так же как и внутренние силы в элементах трёхшарнирной арки, которые остаются виртуально недеформированными, не вносят такого вклада. Следовательно, виртуальная работа внешних сил при виртуальном жестком движении двухстержневого механизма, изображенного на рис. 5.2, принимает вид

$$\delta W^{(e)} = -B_H \delta x_B + H \delta x_D + V \delta z_D,$$

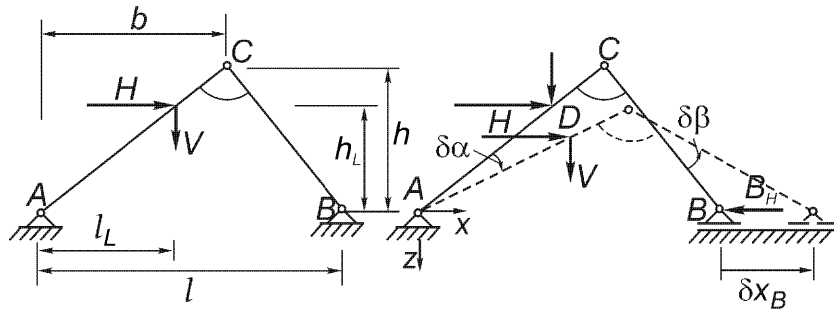


Рис. 5.2. Виртуальное перемещение трёхшарнирной балки из положения равновесия. Выборочное освобождение от связей, система с одной степенью свободы.

а вклад внутреннего момента равен

$$\delta W^{(i)} = M_0(\delta\alpha + \delta\beta).$$

Этот механизм при виртуальном движении имеет только одну степень свободы, и пять виртуальных перемещений выражаются через одну вариацию $\delta\alpha$

$$\begin{aligned} \delta x_D &= h_L \delta\alpha, \quad \delta z_D = l_L \delta\alpha, \quad \delta z_C = b\delta\alpha = (l-b)\delta\beta, \\ \delta x_B &= \delta x_C + h\delta\beta = h\left(1 + \frac{b}{l-b}\right)\delta\alpha = h\frac{l}{l-b}\delta\alpha, \end{aligned}$$

и тогда

$$\delta W = \left(-hB_H \frac{l}{l-b} + Hh_L + Vl_L + M_0 \frac{l}{l-b}\right)\delta\alpha = 0.$$

Так как $\delta\alpha \neq 0$, выражение в скобках должно быть равно нулю, откуда следует

$$B_H = H\frac{h_L}{h}\frac{l-b}{l} + V\frac{l_L}{h}\frac{l-b}{l} + M_0/h.$$

Аналогичным образом можно независимо найти вертикальную компоненту B_V , рассматривая выборочное частичное освобождение от связей, при котором разрешается виртуальное движение опоры B в вертикальном направлении.

Если опору B освободить полностью и разрешить её виртуальное движение в плоскости рисунка, обе компоненты силы реакции войдут в выражение для виртуальной работы, и механизм станет системой с двумя степенями свободы. Виртуальные повороты $\delta\alpha \neq 0$ и $\delta\beta \neq 0$ становятся независимыми, и виртуальная работа сил, показанных на рис. 5.3, равна

$$\delta W = H\delta x_D + V\delta z_D + M_0(\delta\alpha + \delta\beta) - B_H\delta x_B - B_V\delta x_B = 0,$$

где

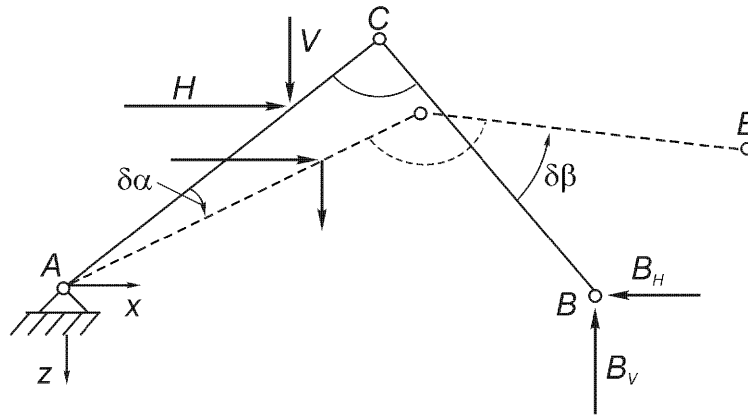


Рис. 5.3. Виртуальное перемещение трёхшарнирной балки из её положения равновесия. Выборочное освобождение от связей для определения силы реакции **B**. Система с двумя степенями свободы.

$$\delta x_D = h_L \delta\alpha, \quad \delta x_D = l_L \delta\alpha, \quad \delta x_B = h(\delta\alpha + \delta\beta), \quad \delta z_B = b\delta\alpha - (l-b)\delta\beta.$$

Равная нулю виртуальная работа в этом случае является суммой двух слагаемых

$$(Hh_L + Vl_L + M_0 - B_H h - B_V b)\delta\alpha + [M_0 - Bh + B_V(l-b)]\delta\beta = 0,$$

каждое из которых должно быть равно нулю из-за независимости вариаций обобщённых координат. Следовательно, мы приходим к линейной системе двух уравнений

$$B_H h + B_V b = Hh_L + Vl_L + M_0,$$

$$B_H h - B_V(l-b) = M_0,$$

с решением B_H (таким же, как и в приведенном выше решении) и $B_V = (Hh_L + Vl_L)/l$.

5.2. Линии влияния статически определимых конструкций

Метод выборочного частичного освобождения от связей вместе с принципом виртуальной работы позволяет непосредственно находить линии влияния статически определимых конструкций, нагруженных сосредоточенной силой $F=1$. Такая кинематическая процедура иллюстрируется линиями влияния однопролетной балки с шарнирными опорами (см. рис. 5.4).

Замена скользящей опоры силой **B** разрешает жесткий виртуальный поворот вокруг шарнира A. Из выражения для виртуальной работы $\delta W = F\delta(\xi) - B\delta_B = 0$ следует $B = F\delta(\xi)/\delta_B$. Линия влияния силы реакции опоры, по определению, равна (см. рис. 5.4):

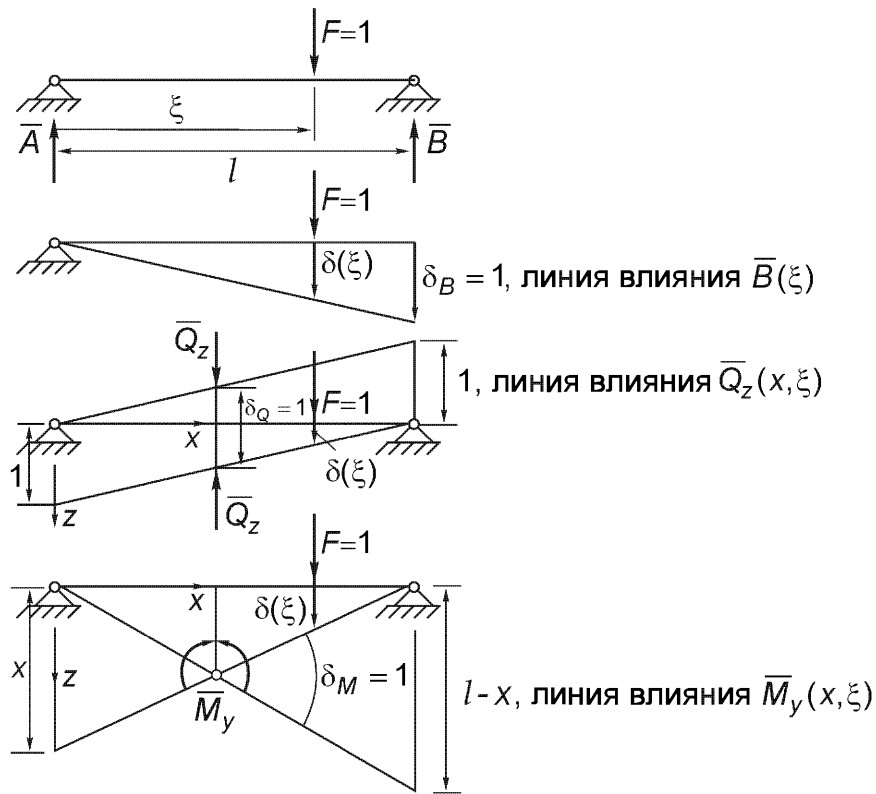


Рис. 5.4. Линии влияния силы реакции B , поперечной силы Q и изгибающего момента M_y , соответственно. Оценка с помощью кинематического метода.

$$\bar{B} = \frac{B}{F} = \frac{\delta(\xi)}{\delta_B} = \xi/l, \quad (5.10)$$

Перерезывающая сила в поперечном сечении с координатой x вносит вклад в виртуальную работу, если балка разбита на две части, и они виртуально поворачиваются, как показано на рис. 5.4, в то время как изгибающий момент, приложенный симметрично к положительному и отрицательному поперечным сечениям, не вносит вклада в виртуальную работу. Следовательно, виртуальная работа становится равной $\delta W = F\delta(\xi) - Q_z\delta_Q = 0$. Это решение даёт перерезывающую силу $Q_z = F\delta(\xi)/\delta_Q$, и линия влияния принимает вид

$$\bar{Q}_z(x; \xi) = \frac{Q_z}{F} = \frac{\delta(\xi)}{\delta_Q} = \begin{cases} -\xi/l, & 0 < \xi < x, \\ (1-\xi/l), & x < \xi < l. \end{cases} \quad (5.11)$$

Предположение о шарнирном соединении в сечении x позволяет жесткий виртуальный поворот подобно кривошипному механизму, и изгибающий момент вносит вклад в виртуальную работу через две внешние пары силы, приложенные к твёрдым телам, соединённым этим шарниром. Поперечная сила остаётся внутренней и не вносит вклада в виртуальную работу. Таким

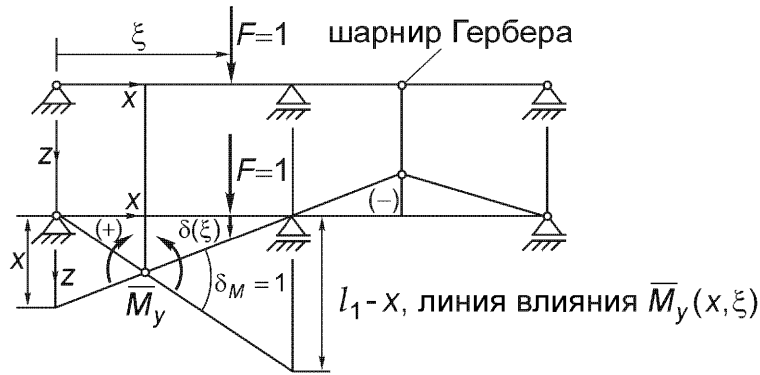


Рис. 5.5. Линия влияния изгибающего момента $M_y(x; \xi)/F$ двухпролетной балки с шарниром Гербера.

образом, из $\delta W = F \delta(\xi) - M_y \delta_M = 0$ получаем изгибающий момент $M_y = F \delta(\xi) / \delta_M$, где δ_M – относительный угол поворота (см. рис. 5.4). Линия влияния изгибающего момента равна

$$\bar{M}_y(x; \xi) = \frac{M_y}{F} = \frac{\delta(\xi)}{\delta_M} = \begin{cases} \xi(1 - x/l), & 0 < \xi < x, \\ x(1 - \xi/l), & x < \xi < l. \end{cases} \quad (5.12)$$

На рис 5.5 показана статически определимая двухпролетная барка с шарниром Гербера, и линия влияния изгибающего момента $M_y(x; \xi)/F = \delta(\xi)/\delta_M$ определяется кинематическим методом, то есть, изображена виртуально деформированная конфигурация с относительным углом поворота $\delta_M = 1$.

Кинематический метод может быть обобщён; в качестве примера на рис. 5.6 показана линия влияния силы в нижнем поясе однопролетной фермы. Точка приложения единичной силы F не перемещается непрерывно при изменении ξ , а должна «прыгать» с одного узла фермы на другой.

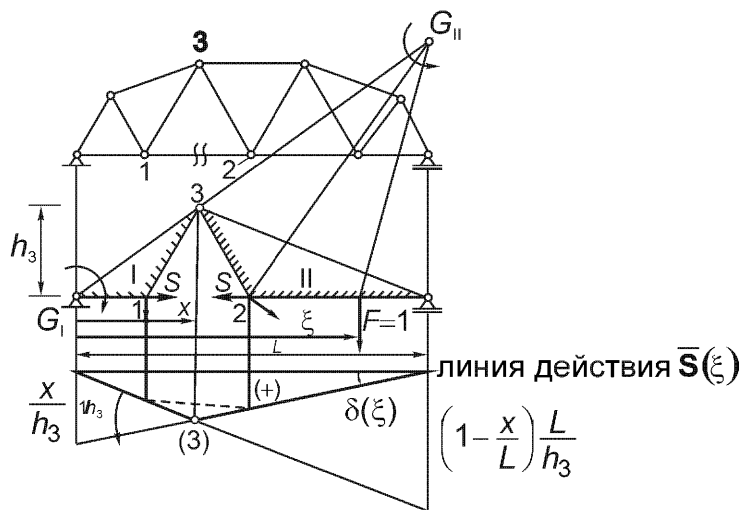


Рис. 5.6. Однопролетная ферма. Эпюра влияния силы S в элементе 12, определенная кинематическим методом.

Линия влияния справедлива только в этих дискретных точках. Виртуальное движение следует движению кривошипного механизма, и точки 1 и 2 для каждой из частей двигаются порознь по горизонтали. Показаны мгновенные центры скоростей $G_{1,II}$.

5.3. Консервативные механические системы

Принцип виртуальной работы представляет собой также изящный метод для получения дифференциальных, локальных условий равновесия сплошных (недискретизированных) конструкций. Вывод сильно упрощается, если внутренние силы являются безвихревыми, и, следовательно, определяются (упругим) потенциалом U . В этом случае виртуальная работа внутренних сил становится просто вариацией внутренней энергии $U(x, y, z)$ за счет изменения состояния равновесия,

$$\delta W^{(i)} = -\delta U, \quad (5.13)$$

и принцип принимает более простую форму

$$\delta W^{(e)} = \delta U. \quad (5.14)$$

«Виртуальная работа внешних сил равна виртуальному приращению (упругого) потенциала, обусловленному виртуальными перемещениями из состояния равновесия.»

Достаточно часто внешние силы также являются безвихревыми (например, когда они должным образом получены из нагружения силами тяжести), и в окрестности равновесной конфигурации существует потенциальная функция W_p . Так как виртуальная работа $\delta W^{(e)} = -\delta W_p$ [по аналогии с уравнением (5.13)], принцип виртуальной работы принимает форму, данную Дж. В. Гиббсом (полная потенциальная энергия внутренних и внешних сил равна сумме $\Pi = U + W_p$)

$$\delta \Pi = \delta U + \delta W_p = 0. \quad (5.15)$$

«Полная потенциальная энергия консервативной механической системы в состоянии равновесия имеет стационарное значение; то есть её первая вариация должна быть равна нулю.» Такое тело, будучи в покое без возможности виртуального движения как жесткого целого, находится в положении устойчивого равновесия, если потенциальная энергия Π имеет локальный минимум. См. раздел 9.1.

Если внешние силы не связаны с деформациями, их потенциал вычисляется как объёмный интеграл (отрицательной) работы массовых сил \mathbf{k} и поверхностный интеграл (отрицательной) работы заданных усилий $\boldsymbol{\sigma}_n$:

$$W_p = - \int_V \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\partial V_\sigma} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{u} dS, \quad (5.16)$$

где \mathbf{u} обозначает вектор перемещений, а ∂V_σ – часть поверхности тела, на которой заданы поверхностные усилия.

5.3.1. Дифференциальное уравнение прогиба линейно упругой балки

Линейно упругая балка, ось которой в ненапряжённом начальном состоянии прямолинейна, несёт поперечную распределённую нагрузку $q(x)$ на единицу длины, и прогиб $w(x)$ определяет ось изогнутой балки в деформированном состоянии. Влиянием сдвига на изгиб будем пренебрегать и примем гипотезу Бернулли-Эйлера. Плоские сечения в деформированном состоянии остаются плоскими, а также остаются ортогональными оси деформированной балки. При главном изгибе балки деформации линейно распределены по ее высоте. Если принять гипотезу о малости деформаций, то применяются линеаризованные геометрические соотношения, и нормальные напряжения в соответствии с законом Гука распределены линейно; см. соотношение (4.31), выведенное для чистого изгиба. Результирующий момент, таким образом, равен

$$M_y(x) = - \int_A z E \frac{z}{r} dA = - \frac{E}{r} \int_A z^2 dA = - \frac{E J_y}{r(x)},$$

где $1/r$ – кривизна деформированной оси балки. Работа по изгибу элемента дуги длиной ds равна [см., например, уравнение (3.25) для упругой пружины, и соотношение (3.7)]:

$$\frac{1}{2} M_y(x) \frac{ds}{r} = - \frac{E J_y}{2} \frac{ds}{r^2(x)} = -dU.$$

Если пренебречь вкладом сдвиговой деформации, энергия деформации, запасённая в балке длины l , становится равной

$$U = \int_0^l \frac{E J_y}{2} \frac{ds}{r^2(s)}.$$

Считая изгиб достаточно малым, получаем приближённую линеаризованную кривизну $1/r \approx d^2 w / dx^2 = w''$, а подстановка $ds = dx$ даёт упругий потенциал балки в соответствии с линеаризованной теорией изгиба.

$$U = \int_0^l \frac{EJ_y}{2} (w'')^2 dx. \quad (5.17)$$

Потенциал внешних сил, нагрузки от собственного веса $q(x)$ и краевых нагрузок Q_0 , M_0 и Q_1 , M_1 с учётом этих предположений принимает вид

$$W_p = -\int_0^l q(x)w(x)dx - M_0 \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} + M_1 \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l} + Q_0 w_0 - Q_1 w_1. \quad (5.18)$$

Следовательно, результирующий потенциал равняется сумме энергии изгиба и отрицательной работы внешних сил

$$\Pi = U + W_p. \quad (5.19)$$

Деформированное состояние равновесия получается, когда потенциальная энергия принимает стационарное значение. Таким образом, её первая вариация должна быть равна нулю

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_0^l EJ_y w'' \delta(w'') dx - \int_0^l q(x) \delta w(x) dx - \\ & - M_0 \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} + M_1 \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l} + Q_0 \delta w_0 - Q_1 \delta w_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Двойное интегрирование по частям первого выражения выделяет вариацию δw прогиба

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_0^l \left[\frac{d^2}{dx^2} (EJ_y w'') - q(x) \right] \delta w dx - \\ & - [EJ_y (w'')_{x=0} + M_0] \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} + [EJ_y (w'')_{x=l} + M_1] \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l} + \\ & + \left[\frac{d}{dx} EJ_y (w'')_{x=0} + Q_0 \right] \delta w_0 - \left[\frac{d}{dx} EJ_y (w'')_{x=l} + Q_1 \right] \delta w_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Так как в пределах пролета $0 \leq x \leq l$ вариация прогиба δw произвольна, то коэффициент в интеграле должен равняться нулю

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - q = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (5.22)$$

Уравнение (5.22) представляет собой дифференциальное уравнение четвёртого порядка для прогиба тонкой линейно упругой балки в состоянии главного изгиба в соответствии с приближенной теорией балок Бернулли-Эйлера.

Двойное интегрирование и учёт выражения для изгибающего момента (2.150) предоставляет линейную связь момента и кривизны (в линеаризованной форме)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EJ_y}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (5.22a)$$

Система двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, уравнения (2.150) и (5.22a), эквивалентны уравнению четвёртого порядка (5.22). Для интегрирования целесообразно использовать процедуру Мора (см. раздел 6.2.2).

Оставшиеся члены в вариационном уравнении (5.21) относятся к виртуальной работе краевых сил, которые тоже должны быть равны нулю. Таблица 5.1 даёт достаточные условия, соответствующие классическим граничным условиям инженерной теории балок. На жёстко заделанном конце используются кинематические граничные условия $w = 0$ и $dw/dx = 0$, то есть вариации должны быть равны нулю; см. таблицу 5.1. На свободном конце (например, для консольной балки) применяются динамические граничные условия $M = 0$ и $Q = 0$, которые согласно таблице 5.1 соответствуют нулевой кривизне $d^2 w/dx^2 = 0$ и $d(EJ_y d^2 w/dx^2)/dx = 0$. В шарнирной опоре задаётся прогиб $w = 0$, а момент равен нулю, $d^2 w/dx^2 = 0$; см. также раздел 1.3.4.

Таблица 5.1. Классические кинематические (задан прогиб и / или наклон) или динамические граничные условия для балки.

	Кинематические граничные условия	Динамические граничные условия
$x = 0 :$	$\delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_0 = 0$ $\delta w = 0_0$	$EJ_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_0 + M_0 = 0$ $\frac{d}{dx} \left(EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_0 + Q_0 = 0$
$x = l :$	$\delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_l = 0$ $\delta w_1 = 0$	$EJ_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_l + M_1 = 0$ $\frac{d}{dx} \left(EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_l + Q_1 = 0$

5.3.2. Уравнения Кармана для пластины

Рассматривается поперечно нагруженная линейно упругая и изотропная пластина постоянной толщины h с учетом начального напряженного состояния в своей плоскости за счет мембранных сил. В ненапряженном отсчётном состоянии срединная плоскость $Z=0$ совпадает с координатной плоскостью (X, Y) . При лагранжевом описании перемещения ее точек в плоскости пластины обозначим $u_0(X, Y)$, $v_0(X, Y)$, а прогиб – $w(X, Y)$. Перемещения произвольной материальной точки – это функции $u(X, Y, Z)$, $v(X, Y, Z)$ и $w(X, Y, Z)$, а нелинейные геометрические соотношения [формулы (1.20)], в соответствии с теорией Кармана дают приближенные выражения деформаций, учитывающие только наибольшие нелинейные слагаемые в $\partial w/\partial X$ и $\partial w/\partial Y$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right)^2, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial Z}, \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y}, & 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial Z}, & 2\varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Распределение перемещений в плоскости пластины по Z приближенно выражается условием плоской деформации $\varepsilon_{zz} = 0$, что по отношению к закону Гука является недопустимым предположением. Тогда $\partial w/\partial Z = 0$, и перемещение $w(X, Y, Z) = w(X, Y)$ становится независимым от Z . Если предположить, что внешняя нагрузка не имеет касательной компоненты, а просто задана давлением $p(X, Y)$, то касательные напряжения на поверхностях $Z = \pm h/2$ должны быть равны нулю ($S_{yz} = S_{xz} = 0$), и тогда по закону Гука сдвиговые деформации $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0$. В тонких пластинах эти сдвиговые деформации остаются малыми внутри пластины при $(-h/2 \leq Z \leq h/2)$, и ими можно пренебречь. В рамках этого приближения нормаль к срединной плоскости пластины после деформации остаётся прямой линией и, кроме того, приблизительно нормальна к деформированной срединной поверхности $w(X, Y)$. По аналогии с гипотезой Бернулли для тонких балок это приближение Кирхгоффа справедливо для тонких пластинок. Интегрирование уравнения (5.23) даёт

$$u(X, Y, Z) = u_0(X, Y) - Z \frac{\partial w}{\partial X}, \quad v(X, Y, Z) = v_0(X, Y) - Z \frac{\partial w}{\partial Y}, \quad w(X, Y, Z) = w(X, Y)$$

и

$$\varepsilon_{xx}(X, Y, Z) = \bar{\varepsilon}_{xx}(X, Y) - Z \frac{\partial^2 w}{\partial X^2}, \quad \varepsilon_{yy}(X, Y, Z) = \bar{\varepsilon}_{yy}(X, Y) - Z \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2},$$

$$2\varepsilon_{xy}(X, Y, Z) = 2\bar{\varepsilon}_{xy}(X, Y) - 2Z \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial Y},$$

где

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2, \quad \bar{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right)^2, \quad 2\bar{\varepsilon}_{xy} = \frac{\partial v_0}{\partial X} + \frac{\partial u_0}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y}.$$

Так как нормальная компонента напряжений S_{zz} имеет тот же порядок, что и заданная нагрузка p , её можно пренебречь, и напряжённое состояние в пластине приближенно является плоским (S_{xx} , S_{yy} и S_{xy} – оставшиеся напряжения). Плотность энергии деформации в гуконской пластине приближенно описывается формулой (3.47):

$$U' = \frac{G}{1-\nu} \left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + 2\nu \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2(1-\nu) \varepsilon_{xy}^2 \right). \quad (5.24)$$

Интегрирование по объёму даёт упругий потенциал пластины. Подставляя деформации срединной плоскости и прогиба w и интегрируя по толщине пластины, получаем энергию деформации в виде суммы двух слагаемых

$$U = U_M + U_B. \quad (5.25)$$

Мембранная энергия линейно зависит от h :

$$U_M = \frac{Gh}{1-\nu} \iint_A \left(\bar{\varepsilon}_{xx}^2 + \bar{\varepsilon}_{yy}^2 + 2\nu \bar{\varepsilon}_{xx} \bar{\varepsilon}_{yy} + 2(1-\nu) \bar{\varepsilon}_{xy}^2 \right) dX dY, \quad (5.26)$$

а энергия изгиба пропорциональна h^3 :

$$U_B = \frac{Gh^3}{12(1-\nu)} \iint_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X \partial Y} \right)^2 \right] dX dY. \quad (5.27)$$

Потенциал нагрузки давлением p равен отрицательной работе

$$W_p = - \iint_A w p dX dY \quad (5.28)$$

без учёта каких-либо массовых сил или краевых нагрузок. Окончательно потенциальная энергия равна сумме вкладов всех трёх факторов

$$\Pi = U_M + U_B + W_p. \quad (5.29a)$$

Первая вариация должна быть равна нулю, чтобы выполнялись условия равновесия пластины в форме вариационных дифференциальных уравнений первого порядка Эйлера-Лагранжа. Система не зависит от Z и разделяется.

$\delta\Gamma = 0$, откуда следует:

$$\frac{\partial}{\partial X}(\bar{\epsilon}_{xx} + \nu\bar{\epsilon}_{yy}) + (1-\nu)\frac{\partial\bar{\epsilon}_{xy}}{\partial Y} = 0, \quad (1-\nu)\frac{\partial\bar{\epsilon}_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}(\bar{\epsilon}_{yy} + \nu\bar{\epsilon}_{xx}) = 0. \quad (5.29b)$$

Интегрирование по толщине пластинки или, что эквивалентно, умножение на h , даёт мембранные силы в соответствии с законом Гука для плоского напряженного состояния, а именно, обращённые соотношения (4.22). Следовательно, дифференциальные уравнения равновесия при плоском напряжённом состоянии средних напряжений переопределяются; см. уравнение (2.10). Третье вариационное уравнение – это уравнение для пластины четвёртого порядка, которое даёт надёжные результаты для прогибов до величины порядка толщины пластины:

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{p}{K} + \frac{12}{h^2} \left[(\bar{\epsilon}_{xx} + \nu\bar{\epsilon}_{yy}) \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + (\bar{\epsilon}_{yy} + \nu\bar{\epsilon}_{xx}) \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} + 2(1-\nu)\bar{\epsilon}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial X\partial Y} \right] = 0, \quad (5.29c)$$

где $K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

В связанных членах этого уравнения напряжения в срединной плоскости можно заменить мембранными силами, используя закон Гука (4.22), а последние получаются из функции напряжений Эри с помощью соотношений (2.11). Таким образом, первое из уравнений Кармана для пластины в своей окончательной форме имеет вид

$$K\nabla^2\nabla^2 w = p + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y} \frac{\partial^2 w}{\partial X\partial Y}. \quad (5.30a)$$

Второе уравнение Кармана для пластины выводится с помощью требования совместности деформаций из соотношений (1.22), где $i = X$ и $j = Y$. Следовательно, члены с коэффициентом Z равны нулю, и новое соотношение между деформациями в срединной плоскости и прогибом выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_{xx}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_{yy}}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_{xy}}{\partial X\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X\partial Y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2}.$$

Исключение компонентов средних деформаций с помощью закона Гука [см. формулы (4.22)] подставляет вместо них мембранные напряжения. Последние выражаются через функцию напряжений Эри $n_x = \partial^2 F / \partial X^2$ [см. формулы (2.11)], чтобы предоставить также и второе уравнение Кармана в окончательной форме:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = -Eh \left[\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X \partial Y} \right)^2 \right]. \quad (5.30b)$$

Заметим симметричность связанного нелинейного оператора в частных производных в соотношениях (5.30a) и (5.30b). Эти линеаризованные бигармонические уравнения рассматриваются далее в уравнениях (6.225) и (6.269).

Потенциал краевых сил в (5.28) не принимается во внимание. Вариация этой дополнительной потенциальной энергии даёт соответствующие граничные условия теории пластин Кармана. В разделе 6.6 обсуждаются классические граничные условия на иллюстративных примерах в предположении теории упругости тонких пластин Кирхгоффа (линеаризованной теории первого порядка). Эти результаты получаются при рассмотрении равновесия недеформированного элемента пластины; следовательно, в этих примерах поперечная сила должна быть пополнена членами, отражающими вклад мембранных сил в поперечное условие равновесия деформированного элемента пластины по теории Кармана; см., например, уравнение (9.60) и упражнения А 9.6 и А 11.8.

5.4. Принцип дополнительной виртуальной работы

Противоположно предыдущей, более «естественной» формулировке принципа виртуальной работы, в которой виртуально производится варьирование равновесной конфигурации, ниже рассматривается вариация равновесного напряжённого состояния. Таким образом, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ имеет первую вариацию $\delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$ такую, что виртуальные напряжения также находятся в равновесии. При этом варьировании массовая сила \mathbf{k} заменяется на $\delta \mathbf{k}$, а внешние поверхностные нагрузки $\sigma_n dS$ виртуально изменяются на $\delta \sigma_n dS$. Дополнительная виртуальная работа на единицу объема от $\delta \mathbf{f}$ определяется рассмотрением действительного поля перемещений \mathbf{u} (измеряемого от недеформированной отсчётной конфигурации при состоянии тела в покое):

$$(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{f}) = 0. \quad (5.31)$$

Интегрирование по объёму тела в деформированной конфигурации даёт дополнительную виртуальную работу

$$\delta W^* = \int_V (\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{f}) dV = 0. \quad (5.32)$$

Подстановка плотности виртуальной силы $\delta \mathbf{f} = \delta \mathbf{k} + \partial(\delta \sigma_x)/\partial x + \partial(\delta \sigma_y)/\partial y + \partial(\delta \sigma_z)/\partial z$ и применение интегральной теоремы Гаусса к объёмному интегралу даёт (с учетом симметрии тензора напряжений):

$$\begin{aligned} \delta W^* &= \int_V (\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{k}) dV + \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{u} \cdot \delta \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{u} \cdot \delta \sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{u} \cdot \delta \sigma_z) \right] dV - \\ &\quad - \int_V \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \delta \sigma_x \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \delta \sigma_y \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \delta \sigma_z \right) \right] dV = \\ &= \int_V (\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{k}) dV + \oint_{\partial V} (\mathbf{u} \cdot \delta \sigma_n) dS - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int_V \delta \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Этот дополнительный принцип, называемый также принципом виртуальных сил, особенно ценен для практических приложений, когда группа состояний равновесия виртуальных напряжений расширяется для включения несовместных напряжений. Например, массовые силы виртуально не варьируются $\delta \mathbf{k} = \mathbf{0}$ в объёме тела, а также вариации нагрузок $\delta \sigma_n = \mathbf{0}$ на тех частях поверхности тела, где заданы динамические граничные условия (нагрузки). Виртуальные напряжения приложены только к тем частям поверхности, где заданы кинематические граничные условия (например, где заданы перемещения \mathbf{u}). Следовательно, уравнение (5.33) при этих предположениях упрощается:

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int_V \delta \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV - \oint_{\partial V_u} (\mathbf{u} \cdot \delta \sigma_n) dS = 0, \quad (5.34)$$

где ∂V_u – часть поверхности тела, где напряжения не заданы поверхностными нагрузками. Не обязательно предполагать упругость тела; дополнительный принцип справедлив для общего случая, если исключить разгрузку.

Если приближенно выполняются линеаризованные геометрические соотношения, можно подставить актуальные деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Если предположить существование плотности дополнительной энергии U^* (по отношению к энергии деформации U'), обладающей свойством

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U^{*'}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (5.35)$$

то дополнительный потенциал определяется как

$$\Pi^* = \int_V U^{*'} dV - \int_{\partial V_u} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n dS, \quad (5.36)$$

и принцип дополнительной энергии принимает форму, первоначально найденную Энгессером:

$$\delta \Pi^* = 0. \quad (5.37)$$

«Среди всех возможных равновесных напряжённых состояний, совместимых с динамическими граничными условиями, выбирается то, которое делает дополнительную энергию стационарной (минимальной).» Этот дополнительный принцип не ограничен гукскими твёрдыми телами.

В случае изотропного линейно упругого тела при постоянной температуре применяется закон Гука, и дополнительная энергия принимает вид

$$U^{*'} = \frac{1}{2K} p^2 + \frac{1}{2G} J_2, \quad \text{где} \quad J_2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij}{}^2, \quad (5.38)$$

см. соотношение (3.47).

При линеаризованных геометрических соотношениях дополнительная энергия получается преобразованием Лежандра энергии деформации

$$U^{*'} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - U'(\varepsilon_{ij}). \quad (5.39)$$

Это есть общий вид преобразования изменяющихся термодинамических переменных. $U^{*'}$ можно получить подстановкой закона Гука и, таким образом, исключением деформации из упругого потенциала U только для специального случая изотермического линейно упругого твёрдого тела.

5.4.1. Теорема Кастильяно и теорема Менабреа

Если нагружение тела задано системой сосредоточенных сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, дополнительный принцип принимает форму теоремы Кастильяно, которая очень хорошо подходит для инженерных приложений. Даже в вычислительной механике такой анализ можно провести путём новых возможностей символических программ обработки данных. Дополнительная энергия должна быть выражена как функция этих самоуравновешенных сил

$$U^* = \int_V U^{*'} dV = U^*(F_1, \dots, F_n). \quad (5.40)$$

Следовательно, виртуальная вариация становится полным дифференциалом в виде конечной суммы

$$\delta U^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U^*}{\partial F_i} \delta F_i, \quad (5.41)$$

и принцип, определенный уравнением (5.37), требует, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial U^*}{\partial F_i} \delta F_i = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \cdot \delta \mathbf{F}_k. \quad (5.42)$$

Так как виртуальные силы при равновесии не зависят друг от друга, получается теорема Кастильяно в виде

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_i} = u_i. \quad (5.43)$$

«Производная дополнительной энергии по силе, которая является членом системы в равновесии, равно перемещению ее точки приложения в направлении этой силы.» [см. уравнение (3.41)].

Такая сила в самоуравновешенной системе может быть статически неопределимой, $\mathbf{F}_j = \mathbf{X}_j$, и, следовательно, перемещение в направлении такой силы должно равняться нулю:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0. \quad (5.44)$$

Уравнение (5.43), специально записанное в форме, пригодной для исследования статически неопределимых систем, называется теоремой Менабреа. Перед вычислением частной производной от дополнительной энергии все силы реакций при помощи условий равновесия должны быть выражены через заданную нагрузку и соответствующим образом выбранные статически неопределимые силы. Заметим, что все участвующие силы должны быть перечислены отдельно, особенно те, которые имеют одинаковую величину (и параллельны), но имеют различные точки приложения.

Обе теоремы остаются верными, если производная берётся по паре сил с вектором-моментом \mathbf{M}_j :

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_j} = \alpha_j, \quad (5.45)$$

где α_j – угол поворота вокруг оси, заданной линией действия этого вектора-момента \mathbf{M}_j . Эта пара должна быть элементом уравновешенной системы сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$.

(§) Линейно упругий тонкий прямолинейный стержень

Этот стержень имеет довольно простое выражение дополнительной энергии.

Так как $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{zy} = 0$, то при условии, что координата x направлена вдоль оси стержня, плотность энергии принимает вид:

$$U^{*'} = \frac{1}{2E} [\sigma_{xx}^2 + 2(1+\nu)(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2)]. \quad (5.46)$$

Интегрирование первого слагаемого с учетом того, что элементарный объем равен $dV = dA dx$, даёт вклад нормального напряжения в дополнительную энергию:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \int_A \sigma_{xx}^2 dA dx = \frac{1}{2E} \int_0^l \int_A \left(\frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y \right)^2 dA dx. \quad (5.47)$$

Поперечные оси y и z проходят через центр тяжести поперечного сечения A и выбираются так, чтобы они были главными осями инерции; см. формулу (2.125). Так как результирующие внутренние силовые факторы $N(x)$, $M_y(x)$ и $M_z(x)$ постоянны под знаком интеграла по площади поперечного сечения, окончательное выражение вклада нормального напряжения принимает вид:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{M_z^2}{J_z} \right) dx. \quad (5.48)$$

Соотношение (5.48) остается справедливым и для слегка изогнутой балки малой кривизны, если вместо dx подставить элемент дуги ds .

В случае, когда нагружение происходит без кручения, касательные напряжения во втором слагаемом формулы (5.46) определяются только поперечными силами. Их распределение по поперечному сечению рассмотрено в разделе 6.2.1. Здесь нам достаточно рассмотреть соотношение

$$\int_A (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) dA = (\kappa_y Q_y^2 + \kappa_z Q_z^2) / A, \quad (5.49)$$

где κ_y и κ_z – коэффициенты, описывающие распределение касательных напряжений в поперечном сечении A , которые зависят от формы этого сечения. Для круглого поперечного сечения их величины одинаковы и равны $\kappa = 10/9$. Следовательно, вклад касательных напряжений в дополнительную энергию равен

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\kappa_z Q_z^2}{GA} + \frac{\kappa_y Q_y^2}{GA} \right) dx. \quad (5.50)$$

В случае чистого кручения сумма квадратов касательных напряжений равна квадрату касательного напряжения при кручении $\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 = \tau^2$, распределение которого будет рассмотрено в разделе 6.2.4. Это распределение зависит от формы поперечного сечения и вводит величину жесткости при кручении GJ_T . Вклад в дополнительную энергию можно выразить через крутящий момент $M_x = M_T$:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_T^2}{GJ_T} dx. \quad (5.51)$$

В формуле (4.40) для стержня с круглым поперечным сечением было получено линейное распределение касательного напряжения при кручении по радиусу, где $J_T = J_p = 2J_x$, и справедливость формулы (5.51) можно проверить.

Далее обсуждается применение теорем Кастильяно и Менабреа к простым статически неопределимым конструкциям, и на примере прогиба линейно упругой консольной балки продемонстрирован метод фиктивной силы.

(§) Плоская ферма с одной степенью внутренней статической неопределённости (рис. 5.7)

Внешнее нагружение является самоуравновешенным, если $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$. Для простоты жесткость всех элементов фермы будем считать одинаковой, $(EA)_1 = (EA)_2 = \dots = (EA)_6 = EA$. Статически неопределимая сила X в диагональном элементе сразу определяется из теоремы Менабреа:

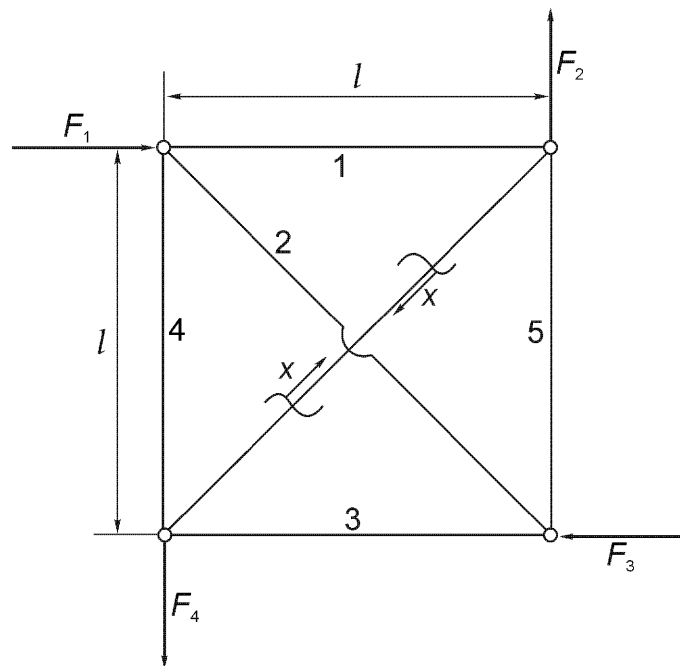


Рис. 5.7. Плоская ферма с одной степенью внутренней статической неопределённости.

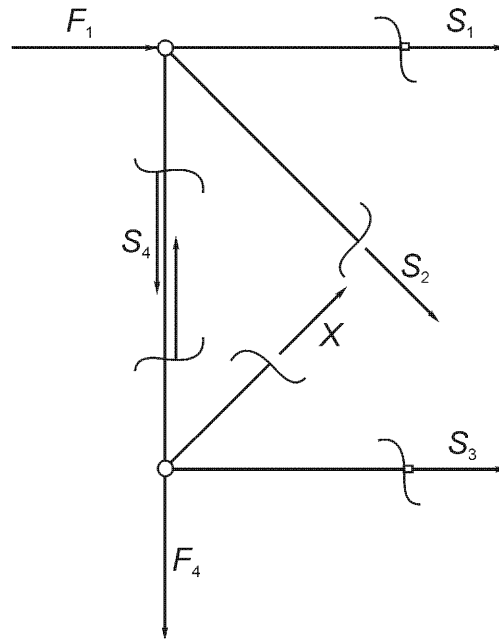


Рис. 5.8. Диаграммы сил для двух изолированных узлов, освобождённых от связей.

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = 0, \quad \text{где} \quad U^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \frac{S_i^2}{EA} l_i.$$

Входящие в это выражение силы S_i должны быть выражены через нагрузку и силу X при помощи условий равновесия сил, приложенных к каждому узлу; см. рис. 5.8 (рассмотрите более общий случай на рис. 2.50):

$$\begin{aligned} S_1 &= -X \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\partial S_1}{\partial X} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, & S_2 &= X - F\sqrt{2}, & \frac{\partial S_2}{\partial X} &= 1, \\ S_3 &= -X \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\partial S_3}{\partial X} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, & S_4 &= F - X \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\partial S_4}{\partial X} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ S_5 &= F - X \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\partial S_5}{\partial X} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, & S_6 &= X, & \frac{\partial S_6}{\partial X} &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial U^*}{\partial X} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^6 S_i l_i \frac{\partial S_i}{\partial X} = 0, \quad \text{откуда следует } X = F \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(§) Двухпролетная балка, нагруженная в соответствии с рис. 5.9

В дополнение к равномерной по каждому пролету поперечной нагрузке рассмотрены два внешних момента на концах балки. Система один раз статически неопределима, и, как показано на рис. 5.10, изгибающий момент в опоре B выбирается как $X = M_y (x = l_1)$. Применяя условия равновесия к двум статически определимым подсистемам, получаем

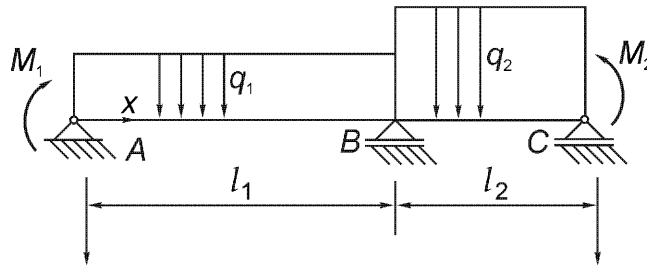


Рис. 5.9. Двухпролетная балка, находящаяся под действием постоянной в пределах каждого пролета поперечной нагрузки и заданных моментов на концах.

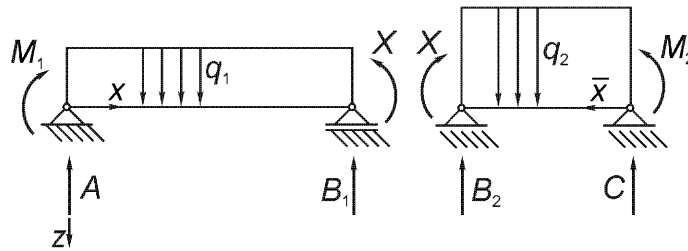


Рис. 5.10. Статически определимая система, соответствующая двухпролетной балке, изображенной на рис. 5.9.

$$A = \frac{1}{l_1} \left(X + \frac{q_1 l_1^2}{2} - M_1 \right), \quad M_y(x) = M_1 + Ax - \frac{q_1 x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq l_1,$$

$$C = \frac{1}{l_2} \left(X + \frac{q_2 l_2^2}{2} - M_2 \right), \quad M_y(\bar{x}) = M_2 + C\bar{x} - \frac{q_2 \bar{x}^2}{2}, \quad 0 \leq \bar{x} \leq l_2.$$

Для тонких балок сдвиговой деформацией обычно пренебрегают, и только изгибающий момент вносит вклад в дополнительную внутреннюю энергию

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^{l_1+l_2} \frac{M_y^2}{EJ_y} dx.$$

Применим теорему Менабреа. Вычисляя производные под знаком интеграла, получаем

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_1} \left(M_1 + Ax - \frac{q_1 x^2}{2} \right) \frac{x}{l_1} dx + \int_0^{l_2} \frac{1}{EJ_2} \left(M_2 + C\bar{x} - \frac{q_2 \bar{x}^2}{2} \right) \frac{\bar{x}}{l_2} d\bar{x} = 0.$$

Подставляя $A(X)$ и $C(X)$ (зависимость от X уже была учтена при вычислении частной производной) и интегрируя, получаем изгибающий момент в опоре B:

$$X = - \left[\frac{l_1}{EJ_1} \left(\frac{M_1}{2} + \frac{q_1 l_1^2}{2} \right) + \frac{l_2}{EJ_2} \left(\frac{M_2}{2} + \frac{q_2 l_2^2}{2} \right) \right] / \left[\frac{l_1}{EJ_1} + \frac{l_2}{EJ_2} \right],$$

где изгибная жесткость предполагается постоянной в пределах каждого пролета.

(§) Прогиб равномерно нагруженной консольной балки

На рис. 5.11 рассматривается равномерное нагружение линейно упругой балки с постоянной изгибной жесткостью $B = EJ$. Определить прогиб точки ξ на оси балки с помощью метода фиктивной силы и теоремы Кастильяно. Изгибающий момент от нагрузки и дополнительной единичной фиктивной силы H , приложенной в точке ξ , на отрезке $\xi \leq x \leq l$ не зависит от H : $M_y(x) = -q(l-x)^2/2$, а на отрезке $0 \leq x \leq \xi$ задан выражением $M_y(x) = -q(l-x)^2/2 - H(\xi-x)$. Если пренебречь деформацией сдвига, дополнительная энергия принимает вид

$$U^*(H) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_y^2}{EJ_y} dx.$$

Тогда прогиб в поперечном направлении от единичной силы H равен частной производной

$$w(\xi, H) = \frac{\partial U^*(H)}{\partial H} = \int_0^l \frac{M_y}{EJ_y} \frac{\partial M_y}{\partial H} dx.$$

После дифференцирования, переходя к пределу $H \rightarrow 0$, получаем требуемый прогиб

$$w(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{q}{EJ} \frac{(l-x)^2}{2} (\xi-x) dx = \frac{ql^2}{8B} 2\xi^2 \left(1 - \frac{2\xi}{3l} + \frac{\xi^2}{6l^2} \right).$$

Если вместо упомянутой выше единичной силы взять единичный фиктивный момент H , приложенный в точке ξ , изгибающий момент изменяется, и производная от соответствующей дополнительной энергии дает нам наклон балки в точке ξ :

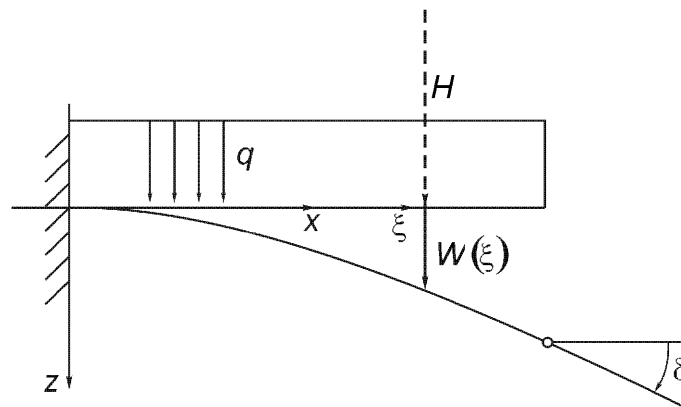


Рис. 5.11. Равномерная нагруженная консольная балка. Фиктивная сила H для определения прогиба $w(\xi)$.

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial U^*(H)}{\partial H} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{(x=\xi)}.$$

Здесь предполагается, то фиктивная пара сил с моментом H действует по ходу часовой стрелки.

(§) Плоский зажим под действием концевых сил

Пара поперечных сил F без момента вызывает изгиб и кручение в круглом зажиме, показанном на рис. 5.12. Деформация сдвига полагается пренебрежимо малой. Теорема Кастильяно дает раскрытие концов δ . Изгибающий момент $M = FR \sin \varphi$ и крутящий момент $M_T = FR(1 - \cos \varphi)$ вносят вклад во внутреннюю дополнительную энергию

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \frac{M^2}{EJ} ds + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \frac{M_T^2}{GJ_T} ds.$$

Перемещение двух точек приложения сил $F_1 = F_2 = F$ равно производной

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial F} = R \int_0^{2\pi} \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial F} d\varphi + R \int_0^{2\pi} \frac{M_T}{GJ_T} \frac{\partial M_T}{\partial F} d\varphi = FR \frac{A}{EJ} \left[1 + 6(1 + \nu) \frac{J}{J_T} \right],$$

где $A = \pi R^2$.

Для зажима с круглым поперечным сечением радиуса r жесткость при кручении пропорциональна полярному моменту инерции $J_T = J_p$, и справедливо отношение $J/J_p = 1/2$, где $J = \pi R^4/4$. Перемещение концов симметрично относительно срединной плоскости.

5.4.2. Метод Бетти

Теорема Кастильяно требует дифференцирования аналитического выражения, полученного для момента, по фиктивной силе или по статически неопределимой силе. Этот источник ошибок и неэффективного расходования людских ресурсов можно обойти, непосредственно применяя принцип виртуальных пе-

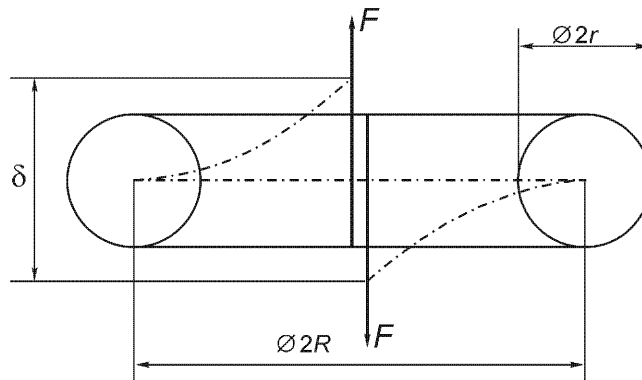


Рис. 5.12. Деформация плоского зажима двумя силами без момента.

ремещений и выбирая в качестве виртуальных перемещений малые действительные линейно упругие смещения. Граничные условия уже удовлетворены, но геометрические соотношения должны быть приблизительно линейными. Смещение δ (перемещение или угол поворота) в избранной материальной точке вычисляется путем рассмотрения соответствующей обобщенной нагрузки H (силы или момента) и выражения ее виртуальной работы $H\delta$, которая в этом случае представляет собой работу внешних сил на действительных смещениях. Фиктивные напряжения за счет фиктивной нагрузки H в выражении их виртуальной работы на действительных (малых) деформациях обозначаются сверху горизонтальной чертой:

$$- \sum_i \sum_j \int_V \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (5.52)$$

Отметим, что фиктивные напряжения постоянны при виртуальном варьировании равновесной конфигурации.

Следовательно, принцип виртуальной работы, уравнение (5.3), принимает вид метода Бетти для определения δ :

$$H\delta = \sum_i \sum_j \int_V \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (5.53)$$

(§) Тонкостенные конструкции, свободные от кручения

Рассматривая такие конструкции типа балок или рам при растяжении, сдвиге и изгибе, можно проинтегрировать их результирующие внутренние силовые факторы по площади поперечного сечения и получить уравнение (5.53) в форме, удобной для решения практических задач

$$H\delta = \int_l \bar{N} \frac{N}{EA} dx + \int_l \left[\bar{M}_y \frac{M_y}{EJ_y} + \bar{M}_z \frac{M_z}{EJ_z} \right] dx + \int_l \left[\bar{Q}_y \frac{\kappa_y Q_y}{GA} + \bar{Q}_z \frac{\kappa_z Q_z}{GA} \right] dx. \quad (5.54)$$

Полагая фиктивную нагрузку единичной, $H=1$, непосредственно получаем смещение δ . Формула (5.54) справедливо также для слегка изогнутых балок малой кривизны, если сделать подстановку $dx = ds$.

(§) Консольная балка, изображенная на рис. 5.11

Требуется вычислить угол поворота δ поперечного сечения на свободном конце $x=l$, выбирая соответствующий концевой фиктивный момент $H=1$, направленный по часовой стрелке, и рассматривая вклад только изгибной кривизны в уравнение (5.54) метода Бетти. Так как фиктивный изгибающий момент постоянен и равен -1 и действительная кривизна за счет равномерно распре-

деленной нагрузки равна $M_y/EJ_y = -q(l-x)^2/2EJ_y$, где изгибная жесткость $B = EJ_y$ для удобства интегрирования полагается постоянной, получаем

$$1 \cdot \delta = \int_0^l \frac{q}{2EJ_y} (l-x)^2 dx = \frac{ql^3}{6EJ_y} = \frac{dw}{dx} \Big|_{(x=l)}.$$

(§) Консольная балка с дополнительной подвижной опорой, рис. 5.13

Для определения статически неопределимого момента в заделке $M_e = X$ применяется метод Бетти. Тогда ассоциированной статически определимой системой является однопролетная шарнирно опертая балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой и, кроме того, концевым моментом. Поворот поперечного сечения ассоциированной балки при $x=0$ определяется для действительного равномерного нагружения с использованием фиктивного момента $H=1$, приложенного в опоре A. Следовательно,

$$A_S = B_S = ql/2, \quad M(x)/EJ = (xA_S - qx^2/2)/EJ$$

и

$$\bar{M} = 1 \cdot (l-x)l.$$

Подстановка этого выражения в формулу (5.54) (индекс y для удобства опущен) дает:

$$1 \cdot \delta_S = \int_0^l \frac{(l-x)}{l} \frac{\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}}{EJ} dx = \frac{ql^3}{24B},$$

где $B = EJ = \text{const}$.

Полагая $q=0$ и рассматривая поворот ассоциированной статически определимой системы при $x=0$ за счет нагружения только фиктивным моментом,

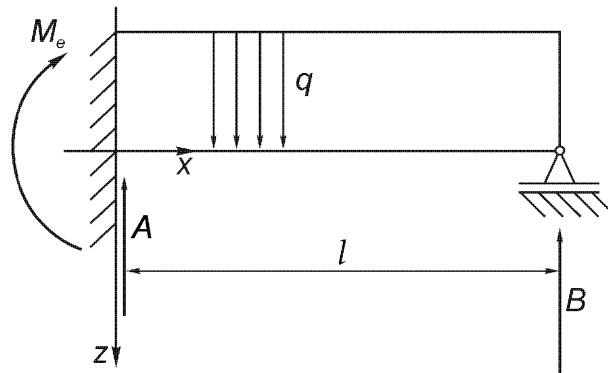


Рис. 5.13. Равномерно нагруженная статически неопределимая балка. Момент заделки считается статически неопределимым.

получаем

$$\bar{M} = M(H=1), \quad 1 \cdot \delta_1 = \int_0^l \frac{(l-x)^2}{EJl^2} dx = \frac{1}{3B}.$$

Кинематическое условие на жестко защемленном конце требует, чтобы результирующий угол поворота равнялся нулю

$$1 \cdot \delta_S + X \delta_1 = 0, \quad \text{откуда следует } X = M_e = -\delta_S / \delta_1 = -ql^2 / 8.$$

Силы реакций статически неопределимой балки теперь легко определить из условий равновесия, например, из $B l - ql^2 / 2 - M_e = 0$ следует

$$B = (ql^2 / 2 - ql^2 / 8) / l = 3ql / 8 \quad \text{и} \quad A = B - ql = -5ql / 8.$$

Действительные смещения δ статически неопределимой системы можно определить непосредственно из формулы (5.54). В ассоциированной статически определимой системе можно легко найти внутренние фиктивные силовые факторы, возникающие за счет приложения фиктивной нагрузки H , так как действительные смещения статически неопределимой системы являются допустимыми виртуальными перемещениями статически определимой системы с заданной внешней нагрузкой. Это результат теоремы снижения первого порядка в теории упругости статически неопределимых систем.

5.4.3. Преобразование принципов минимальной потенциальной и дополнительной энергии

Это преобразование иллюстрируется путем рассмотрения балки Бернулли-Эйлера из раздела 5.3.1. В дальнейшем считается, что линеаризованная кривизна $\kappa = w''$ в выражении для потенциальной энергии в формуле (5.19) должна быть независимой функцией. Дополнительные условия умножаются на множители Лагранжа (обобщенные силы) и добавляются к потенциалу

$$(\kappa - w'') M(x) = 0.$$

Если применяются кинематические граничные условия, то M_0, M_1, Q_0, Q_1 являются постоянными множителями Лагранжа для соответствующих им выражений, и следует учитывать дополнительные условия

$$M_0 \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0, \quad M_1 \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l} = 0, \quad Q_0 w_0 = 0, \quad Q_1 w_1 = 0.$$

При добавлении нулей результирующий потенциал не изменяется и определяется выражением

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_0^l \frac{EJ_y}{2} \kappa^2 dx - \int_0^l q(x) w(x) dx + \int_0^l (\kappa - w'') M_y(x) dx - \\ & - M_0 \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} + M_1 \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l} + Q_0 w_0 - Q_1 w_1. \end{aligned}$$

Функции и константы (κ , w , M , M_0 , M_1 , Q_0 , Q_1) могут варьироваться независимо друг от друга, и поэтому первая вариация функционала потенциальной энергии принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_0^l [(M_y + EJ_y \kappa) \delta \kappa - (M_y' + q) \delta w + (\kappa - w'') \delta M_y] dx + \\ & + (Q_0 - M_y'(0)) \delta w_0 + (M_y(0) - M_0) \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} - (Q_1 - M_y'(l)) \delta w_1 - \\ & - (M_y(l) - M_1) \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l} + w_0 \delta Q_0 - \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} \delta M_0 - \\ & - w_1 \delta Q_1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l} \delta M_1 = 0. \end{aligned}$$

Каждый из коэффициентов при независимых вариациях должен по отдельности обращаться в нуль, откуда следует соотношение между моментом и кривизной $\kappa = w'' = -(M_y/EJ_y)$ и локальное условие равновесия $d^2 M_y/dx^2 = -q$; множителями Лагранжа являются $Q_0 = M_y'(0)$, $M_0 = M_y(0)$, $Q_1 = M_y'(l)$, $M_1 = M_y(l)$.

Исключение кривизны κ путем подстановки $-M_y/EJ_y$, или w путем интегрирования по частям соответствующего члена в Π окончательно дает результат преобразования, то есть дополнительную энергию балки Бернулли-Эйлера (сдвиговыми деформациями все так же пренебрегаем):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_y^2}{EJ_y} dx + w_0 Q_0 - \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} M_0 - w_1 Q_1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l} M_1. \quad (5.55)$$

В дополнительном принципе изгибающий момент M_y и, в случае кинематических граничных условий, соответствующие силовые факторы Q_0 , Q_1 , M_0 , M_1 также должны виртуально варьироваться. Смотрите, например:

- Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford, Pergamon Press, 1981, 3rd ed.

Имеется русский перевод:

- Васидзу К. Вариационные принципы в теории упругости и пластичности. М., Мир, 1987.

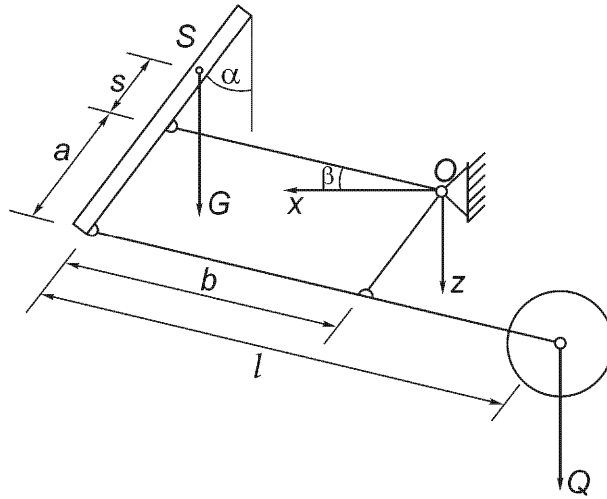


Рис. А 5.1.

5.5. Упражнения А 5.1 – А 5.4 и решения

А 5.1: Чертежный стол должен поддерживаться четырехстержневым механизмом таким образом, чтобы его вес G уравновешивался противовесом Q во всех требуемых на практике положениях; см. рис. А 5.1. Весом других жестких элементов пренебречь.

Решение: Механизм имеет две степени свободы; независимыми координатами, определяющими конфигурацию системы, являются углы α и β . Вертикальные координаты центров масс равны $z_S = -(b \sin \beta + s \cos \alpha)$, $z_Q = a \cos \alpha + (l - b) \sin \beta$, а их виртуальные вариации являются полными дифференциалами $\delta z_S = -(b \cos \beta \delta \beta - s \sin \alpha \delta \alpha)$, $\delta z_Q = -a \sin \alpha \delta \alpha + (l - b) \cos \beta \delta \beta$. Принцип возможных перемещений требует, чтобы виртуальная работа равнялась нулю: $\delta W = G \delta z_S + Q \delta z_Q = 0$. Следовательно, $[Gs - Qa] \sin \alpha \delta \alpha + [-Gb + Q(l - b)] \times \cos \beta \delta \beta = 0$. Так как виртуальные повороты не зависят друг от друга, получаем два условия равновесия:

$$\frac{G}{Q} = \frac{a}{s}, \quad \frac{G}{Q} = \left(\frac{l}{b} - 1 \right).$$

Для требуемой конструкции выполняются оба условия, и тогда стол находится в покое в любом положении за счет независимости условий равновесия от углов α и β .

А 5.2: Система из 15 тяжелых стержней одинаковой длины l и веса mg , шарнирно соединенных, как показано на рис. А 5.2, нагружена горизонтальными си-

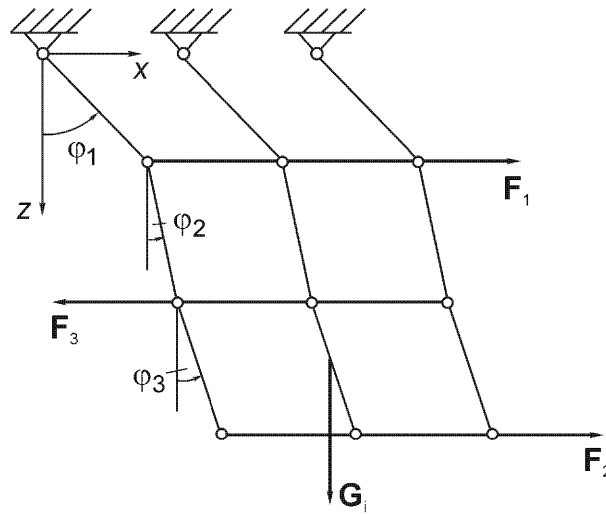


Рис. А 5.2.

лами F_1 , F_2 и F_3 . С помощью принципа возможных перемещений определить деформированную равновесную конфигурацию системы.

Решение: Все силы имеют потенциал, и принцип виртуальной работы берется в форме принципа минимума потенциальной энергии. Как видно из рис. А 5.2, эта система имеет три степени свободы, и горизонтальные координаты точек приложения сил равны $x_1 = 2l + l \sin \varphi_1$, $x_2 = x_1 + l(\sin \varphi_2 + \sin \varphi_3)$, $x_3 = l(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)$. Подобным образом с помощью трех независимых конфигурационных координат выражаются вертикальные расстояния до центров масс стержней и записывается выражение для потенциальной энергии:

$$\begin{aligned}
 W_p = W_G + W_F = & -mgl \left[\frac{3}{2} \cos \varphi_1 + 2 \cos \varphi_1 + 3 \left(\cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \cos \varphi_2 \right) + \right. \\
 & + 2(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) + 3 \left(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} \cos \varphi_3 \right) + \\
 & \left. + 2(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3) \right] - F_1 x_1 - F_2 x_2 - (-F_3) x_3.
 \end{aligned}$$

Рассматривая виртуальные повороты, получаем первую вариацию потенциальной энергии и приравниваем ее нулю:

$$\begin{aligned}
 \delta W_p = \delta W_G + \delta W_F = & -[(F_1 + F_2 - F_3) \cos \varphi_1 - 27 G \sin \varphi_1] \delta \varphi_1 - \\
 & -[(F_2 - F_3) \cos \varphi_2 - 17 G \sin \varphi_2] \delta \varphi_2 - \\
 & -[F_2 \cos \varphi_3 - 7 G \sin \varphi_3] \delta \varphi_3 = 0, \quad G = mg/2.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты при вариациях углов должны по отдельности равняться нулю, откуда получаем конфигурацию системы в состоянии покоя

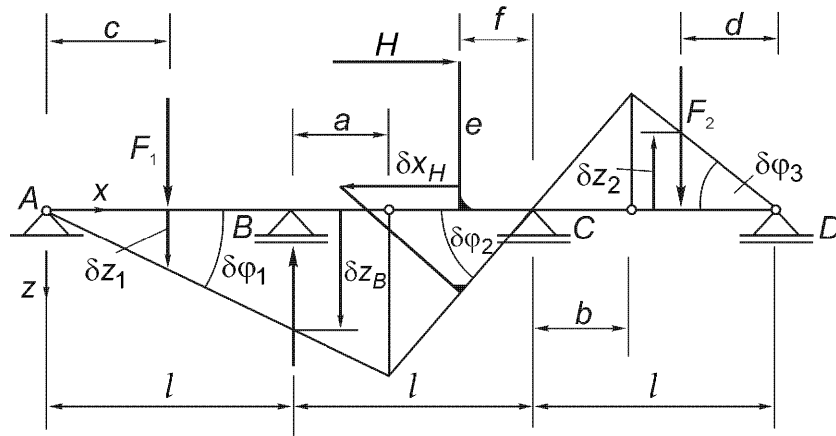


Рис. А 5.3.

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{F_1 + F_2 - F_3}{27G},$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{F_2 - F_3}{17G}, \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{F_2}{7G}.$$

А 5.3: С помощью специально выбранного способа освобождения от связей определить отдельно силу реакции в опоре B статически определимой трехпролетной балки, изображенной на рис. А 5.3.

Решение: Заменяя опору вертикальной силой B , получаем механизм с одной степенью свободы, где в качестве возможных перемещений можно взять перемещения абсолютного твердого тела. Виртуальные перемещения выражаются через виртуальный поворот $\delta \varphi_1$: $\delta z_1 = c \delta \varphi_1$, $\delta z_B = l \delta \varphi_1$, $\delta z_2 = -d[b/(l-b)][(l+a)/(l-a)] \delta \varphi_1$, $\delta x_H = -e[(l+a)/(l-a)] \delta \varphi_1$. Виртуальная работа должна равняться нулю: $\delta W = F_1 \delta z_1 + H \delta x_H + F_2 \delta z_2 - B \delta z_B = 0$, откуда получаем силу реакции

$$B = F_1 \frac{c}{l} - H \frac{e}{l} \frac{l+a}{l-a} - F_2 \frac{d}{l} \frac{b}{l-b} \frac{l+a}{l-a}.$$

А 5.4: При помощи принципа возможных перемещений требуется определить силу S_1 в элементе статически определимой фермы, изображенной на рис. 2.52.

Решение: Поле виртуальных перемещений выбрано удачно, если в уравнение принципа входят заданные нагрузки и неизвестная двойная сила без момента S_1 . Силы реакций опор A и B не должны вносить вклада в виртуальную работу. Таким образом, удаление соответствующего элемента в нижнем поясе

фермы дает возможность виртуального поворота жесткой подсистемы ACD, и виртуальная работа принимает вид

$$\delta W = F_1 \delta\alpha + F_2 a\delta\alpha + F_3 2a\delta\alpha - S_1 a\delta\alpha - S_1 a2\delta\alpha = 0.$$

Так как $\delta\alpha \neq 0$, то $S_1 = F_1 + F_2/3$.

6 Избранные вопросы статической теории упругости

В этой главе рассмотрены только линеаризованные задачи, то есть используются линеаризованные геометрические соотношения и закон Гука [см. формулы (1.21) и (4.15)]. Следствия этих предположений проиллюстрированы на примере линейно упругого тела, нагруженного по своей поверхности самоуравновешенной системой сосредоточенных сил F_1, F_2, \dots, F_n (в эту систему включены и силы реакций в опорных точках). Нагрузка прикладывается к телу посредством единого коэффициента нагружения λ , который медленно возрастает в пределах $0 \leq \lambda \leq 1$, чтобы достичь конечной конфигурации, последовательно проходя через состояния равновесия. В предположении, что исходная конфигурация свободна от напряжений, перемещение u_i материальной частицы в деформированное состояние определяется обобщенным линейным законом гуконской пружины [см. формулы (4.3) и (3.46)] и отменой единого коэффициента нагружения λ

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j, \quad (6.1)$$

где коэффициенты влияния a_{ij} не зависят от интенсивности нагрузки. Они зависят от расположения и направления перемещений и являются функциями точек приложения сил F_j , а также их направлений.

Уравнение (6.1) выражает принцип суперпозиции линейных систем, и, таким образом, не ограничено предположением о существовании единого коэффициента нагружения: перемещения не зависят от порядка приложения сил F_j . Без потери общности это показано ниже путем рассмотрения только двух сил и перемещения u_3 в точке номер 3. Действие одной только силы F_1 дает, скажем, $u_3 = a_{31}F_1$. При тех же условиях опирания для одной только сосредоточенной силы F_2 получаем $u_3 = a_{32}F_2$. Умножение суммарной нагрузки $F_1 + F_2$ на единый коэффициент нагружения дает, скажем, $u_3 = a'_{31}F_1 + a'_{32}F_2$. Если при разгрузке сначала $F_1 \rightarrow 0$, то это перемещение изменяется до $u_3 = a'_{31}F_1 + a'_{32}F_2 - a''_{31}F_1$. Тело все еще нагружено силой F_2 . Дальнейшая разгрузка приводит к недеформированной исходной конфигурации и, следовательно,

$$u_3 = a'_{31} F_1 + a'_{32} F_2 - a''_{31} F_1 - a_{32} F_2 = 0,$$

или

$$u_3 = (a'_{31} - a''_{31}) F_1 + (a'_{32} - a_{32}) F_2 = 0.$$

Нагрузки F_1 и F_2 предполагаются независимыми между собой и, следовательно, $a'_{32} = a_{32}$ и, кроме того, $a_{31} = a'_{31} = a''_{31}$. «Кoeffициенты влияния a_{ij} определяют суперпозицию перемещений независимо от последовательности нагружения.»

Работа внешних сил F_i вычисляется при предположении о едином коэффициенте нагружения λ . Пусть u_i – проекция перемещения точки приложения силы F_i на направление этой силы. Так как приращение $du_i = u_i d\lambda$, то видно, что работа не зависит от последовательности нагружения и, следовательно, также не зависит от какого бы то ни было единого фактора нагружения λ и равна дополнительной энергии [см. соотношение (3.40)]:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^1 \lambda F_i u_i d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j F_i = U^*. \quad (6.2)$$

Уравнением (6.2) иллюстрируется теорема взаимности Максвелла, так как коэффициенты влияния соответствующих перемещений и сил симметричны, $a_{ij} = a_{ji}$.

«Перемещение в i -ой точке за счет единичной силы в j -ой точке равно перемещению точки j за счет единичной силы в точке i , при условии, что перемещения в точках приложения сил измеряются, соответственно, в направлениях приложенных сил.» Симметрия показывается для двух сил. Последовательность нагружений меняется местами и должна давать ту же работу

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_1 u_1 + \frac{1}{2} F_2 u_2 &= \frac{1}{2} a_{11} F_1^2 + a_{12} F_1 F_2 + \frac{1}{2} a_{22} F_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} a_{22} F_2^2 + a_{21} F_2 F_1 + \frac{1}{2} a_{11} F_1^2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Следовательно, $a_{12} = a_{21}$, то есть проекция перемещения точки приложения силы F_1 на направление силы F_1 под действием силы $F_2 = 1$ равна проекции перемещения точки приложения силы F_2 на направление силы F_2 под действием силы $F_1 = 1$. Обобщение иногда является более удобным в приложениях и формулируется ниже.

Теорема взаимности Бетти-Рэлея рассматривает две системы сил, имеющих те же точки приложения в линейно упругом теле и действующих

вдоль той же (общей) группы линий действия, а их поля смещений даны соответствующими проекциями перемещений на направления приложенных сил.

Первая система задана силами F_1, F_2, \dots, F_n с ассоциированными перемещениями u_1, u_2, \dots, u_n , а вторая система (со штрихами) обозначена силами F'_1, F'_2, \dots, F'_n с соответствующими перемещениями u'_1, u'_2, \dots, u'_n . Благодаря симметрии коэффициентов влияния работа сил первой системы на перемещениях со штрихами равна работе сил второй системы на перемещениях без штрихов. Математическое выражение теоремы имеет вид

$$\sum_{i=1}^n F_i u'_i = \sum_{k=1}^n F'_k u_k. \quad (6.4)$$

В приложениях к расчету конструкций рассматриваются также моменты пар сил и соответствующие углы поворота в плоскостях их действия вместе с их вкладом в работу (6.4); см. формулу (3.7).

Коэффициенты влияния a_{ij} являются элементами симметричной матрицы податливости. Будучи обращенной, эта матрица дает симметричную матрицу жесткости с элементами k_{ij} ; см. формулу (3.44). Таким образом, работа внешних сил определяет дополнительную внутреннюю энергию [см. соотношение (6.2)], а также энергию деформаций

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i = U^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} u_i u_j = U, \quad (6.5)$$

где деформации понимаются как изотермические; см. также формулу (3.45).

6.1. Теория континуума в линеаризованной теории упругости

Симметричный тензор напряжений [см. соотношение (2.24)] входит в локальные уравнения равновесия в каждой материальной точке, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ [см. уравнение (2.19)], и если мы рассматриваем изотропное и однородное линейно упругое тело, то закон Гука дает шесть линейных соотношений между напряжениями и деформациями [см. соотношения (4.15)]. Предполагая, что деформации достаточно малы, мы видим, что применяются также шесть линеаризованных геометрических соотношений из формул (1.21), и в результате получается система 15 основных линейных уравнений изотермической и линеаризованной теории упругости. Входящие в них 15 неизвестных – это переменные поля: компоненты вектора перемещений и элементы тензоров напряжений и деформаций. Исключение напряжений и деформаций приводит к системе трех линейных диффе-

ренциальных уравнений в частных производных относительно (малых) компонент перемещений, которые в честь их автора названы уравнениями Навье,

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x_i} = -\frac{k_i}{G}, \quad e = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.6)$$

где $\nabla^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа.

При отсутствии массовых сил эти уравнения являются однородными и, будучи просуммированными, при изотермических условиях дают потенциальное уравнение для объемной деформации e :

$$\nabla^2 e = 0. \quad (6.7)$$

Исключая из основной системы перемещения и деформации, получаем систему шести дифференциальных уравнений в частных производных для компонент тензора напряжений. Эти уравнения для напряжений, называемые уравнениями Бельтрами-Митчелла, также имеют второй порядок

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = -\left(\frac{\partial k_i}{\partial x_j} + \frac{\partial k_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{k} \delta_{ij}, \quad (6.8)$$

$$p = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Если рассмотреть постоянную массовую силу $k = \text{const}$, положить $i = j$ и просуммировать уравнения (6.8), мы получим потенциальное уравнение для среднего нормального напряжения

$$\nabla^2 p = 0. \quad (6.9a)$$

И p , и объемная деформация e являются решениями уравнения Лапласа и, следовательно, гармоническими функциями координат. В качестве дополнительных условий для уравнений в напряжениях (6.8) должны быть приняты во внимание уравнения (2.19), имеющие первый порядок. Кроме того, однородные уравнения (6.8) при использовании оператора Лапласа и подстановки уравнения (6.9a) становятся бигармоническими уравнениями

$$\nabla^2 \nabla^2 \sigma_{ij} = 0. \quad (6.9b)$$

В математической теории линейной упругости стратегии аналитического решения обычно развиваются путем рассмотрения уравнений Навье. Мощным средством для решения плоских задач является метод функций комплексного переменного Е. Гурса и Н.И. Мусхелишвили. Смотрите:

- Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва, Наука, 1966.

Функции действительных переменных используются в методах Нейбера-Папковича и Вестергаарда-Галеркина. Для простых геометрий и граничных условий получены точные решения. Дальнейшие подробности можно найти в обширной литературе, например:

- Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge, University Press, 1892 (первое издание). Переиздание: New York, Dover Publ., 1963). Имеется русский перевод: Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л., ОНТИ, 1935.

Также:

- Little R.Wm. Elasticity. N.Y. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили Н.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Под ред. В.Д. Купрадзе. 2-е изд. М., Наука, 1976.
- Parkus H. Thermoelasticity. 2nd ed., New York, Springer-Verlag, 1976.

(§) Одномерные задачи линейной теории упругости

Решения для этого класса задач рассмотрены ниже. Для простого случая одноосного растяжения, например, в направлении оси x (где задано одноосное деформированное состояние, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_1 \neq 0$, а все остальные компоненты деформации равны нулю), для осесимметричного случая радиальной деформации цилиндра (в условиях плоской деформации) и для центрально-симметричной деформации сферы получено единое решение, зависящее от параметра α . Общее дифференциальное уравнение для ненулевой компоненты перемещения u получается путем надлежащего упрощения уравнений (6.6) при предположении об однородности и отсутствия массовых сил:

$$u'' + \alpha \left(\frac{u}{r} \right)' = 0. \quad (6.10)$$

Параметр $\alpha = 0$ и $u' = \partial u / \partial x$ применяются для одноосной деформации, а $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ – для цилиндрической и сферической задач, соответственно, где в последних случаях r – радиальная координата, а $u' = \partial u / \partial r$. Общее решение является суперпозицией двух базовых решений

$$u(r) = Ar + B \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha. \quad (6.11)$$

Константы A и B должны быть определены из двух заданных граничных условий. Соответствующее нормальное напряжение определяется из закона Гука (4.15) или (4.18):

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu)u' + \alpha\nu \frac{u}{r} \right] = 2G \left[\frac{1+(\alpha-1)\nu}{1-2\nu} A - \alpha B \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha \frac{1}{r} \right]. \quad (6.12)$$

Общее решение проиллюстрировано рассмотрением толстостенного цилиндра и полый сферы с радиусами R_i и R_e под действием внутреннего и внешнего давлений p_i и p_e . Граничные условия на поверхностях, нагруженных нормальными растягивающими усилиями, вместе с соотношением (6.12) дают

$$\frac{p_{i,e}}{2G} = - \left[\frac{1+(\alpha-1)\nu}{1-2\nu} A - \alpha B \left(\frac{r_0}{R_{i,e}} \right)^\alpha \frac{1}{R_{i,e}} \right]. \quad (6.13)$$

Находя A и B , получаем радиальную компоненту напряжения

$$\sigma_{rr}(r) = -p_i \frac{(R_e/r)^{\alpha+1} - 1}{\rho^{\alpha+1} - 1} - p_e \frac{1 - (R_i/r)^{\alpha+1}}{1 - (1/\rho)^{\alpha+1}}, \quad \text{где } \rho = R_e/R_i, \quad (6.14)$$

и радиальное перемещение, которое также является суперпозицией решений для внутреннего и внешнего нагружений,

$$2G\alpha \frac{u(r)}{r} = p_i \left[\alpha \frac{1-2\nu}{1+(\alpha-1)\nu} + (R_e/r)^{\alpha+1} \right] / \left[\rho^{\alpha+1} - 1 \right] - p_e \left[\alpha \frac{1-2\nu}{1+(\alpha-1)\nu} + (R_i/r)^{\alpha+1} \right] / \left[1 - (1/\rho)^{\alpha+1} \right]. \quad (6.15)$$

Окружное напряжение определяется из закона Гука, формулы (4.15):

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \left\{ u' + [1+(\alpha-2)] \frac{u}{r} \right\} = 2G \left[\frac{1+(\alpha-1)\nu}{1-2\nu} A - B \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha \frac{1}{r} \right] \quad (6.16)$$

и, подставляя A и B , получаем:

$$\alpha \sigma_{\vartheta\vartheta} = p_i \frac{[\alpha + (R_e/r)^{\alpha+1}]}{[\rho^{\alpha+1} - 1]} - p_e \frac{[\alpha + (R_i/r)^{\alpha+1}]}{[1 - (1/\rho)^{\alpha+1}]}. \quad (6.17)$$

В сфере третье главное нормальное напряжение равно окружному напряжению при $\alpha = 2$ в формуле (6.17). Для цилиндра параметр $\alpha = 1$, и в условиях плоской деформации получаем осевое напряжение:

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta}).$$

Заметим, что среднее напряжение не зависит от радиальной координаты r , так как

$$\sigma_{rr} + \alpha \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{(1+\alpha)p_i}{\rho^{\alpha+1} - 1} - \frac{(1+\alpha)p_e}{1 - (1/\rho)^{\alpha+1}}. \quad (6.18)$$

(§) Посадка с натягом

Эти формулы полезны также и для расчета упругих напряжений в технически важных случаях. Вставляемое упругое тело в ненапряженной исходной конфигурации имеет диаметр $2R_i + h$, превышающий диаметр отверстия. После посадки контактирующие тела принимают общую постоянную исходную температуру, и полностью окруженная вставка находится под действием постоянного радиального напряжения $\sigma_{rr} = -p_i$. Благодаря существованию общей границы раздела используется следующее кинематическое условие

$$R_i + u(R_i) = R_i + \frac{h}{2} + u(R_i^{(-0)}),$$

где $u(R_i^{(-0)})$ – радиальное перемещение поверхности вставки. Случай упругой посадки с натягом для двух полых тел является несколько более сложным и здесь не рассматривается. Решение становится совсем простым, если выполняется предельное условие $R_e \rightarrow \infty$, это приближенно выполняется, например, для очень толстостенного цилиндра, и давление на границе раздела в этом случае определяется как

$$p_i = \frac{E h}{4(1-\nu^2) R_i}. \quad (6.19)$$

Вал при такой простой конфигурации посадки находится под действием постоянных нормальных напряжений

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = -p_i, \quad \sigma_{zz} = -2\nu p_i. \quad (6.20)$$

6.1.1. Термоупругие деформации

Однородное и изотропное линейно упругое тело имеет определяющие соотношения, задаваемые законом Гука [соотношения (4.15)]. Изменение температуры $\theta(x, y, z)$ относительно постоянной отсчетной температуры определяет температурное поле, измеряемое, например, в ($^{\circ}\text{C}$) (градусах Цельсия), и вызывает температурные деформации, то есть деформации, которые в общем случае несовместны. Они не подчиняются условиям совместности (1.22), и, таким об-

разом, являются источниками температурных напряжений в гукковом твердом теле.

Единица измерения в температурной шкале Цельсия равна единице измерения термодинамической температуры, названной в честь Кельвина, $1^\circ\text{C} = 1^\circ\text{K}$. Предложено, чтобы для указания разности температур также использовалась эта единица (Кельвин). Она определяется как $1/273,16$ доля от термодинамической (абсолютной) температуры тройной точки воды. Температура по Цельсию относится к ней как $T_0 = 273,16\text{ K}$, точка замерзания воды. Разность температур θ должна измеряться по отношению к отсчетной температуре тела в свободном от напряжений состоянии.

Предполагается, что температурные деформации являются нормальными деформациями, которые линейно и изотропно (прямо пропорционально) зависят от температуры

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \alpha \theta, \quad i = x, y, z, \quad (6.21)$$

где α – линейный коэффициент температурного расширения с размерностью $[\alpha] = 1/\text{K}$. Суперпозиция этих деформаций приводит к обобщенному закону Гука для термоупругости; сравните его с соотношением (4.12) и с формулой (4.14) для изменения объема:

$$e = \frac{\rho}{K} + 3\alpha\theta, \quad K = E/3(1-2\nu), \quad (6.22)$$

где 3α – изотропный коэффициент объемного расширения. Линейная зависимость для девиаторных компонент остается без изменения, а зависимость модуля упругости от температуры является слабой, и в рамках применения линейной теории упругости ею обычно пренебрегают:

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij}. \quad (6.23)$$

Плотность упругой потенциальной энергии в изотермическом состоянии, определяемая соотношением (3.47), увеличивается за счет температурного расширения объема, и, следовательно, формально определяется тем же выражением (может быть добавлена любая произвольная функция температуры):

$$U' = \frac{K}{2} e^2 + 2G J_2, \quad J_2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \varepsilon'_{ij}{}^2, \quad (6.24)$$

где e – суммарное изменение объема из формулы (6.22).

Однако плотность обобщенной дополнительной энергии, определяемая выражением

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U^{*'}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6.25)$$

становится нетривиальной:

$$U^{*'} = \frac{1}{2K} p^2 + \frac{1}{4G} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}^2 + 3\alpha\theta p. \quad (6.26)$$

Это выведено путем преобразования Лежандра обобщенной энергии деформации U'

$$U^{*'}(\sigma_{ij}, \theta) = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - U'(\varepsilon_{ij}, \theta), \quad (6.27)$$

где деформации $\varepsilon_{ij} = e \delta_{ij} + \varepsilon'_{ij}$ исключаются путем подстановки обобщенного закона Гука [соотношения (6.22) и (6.23)].

Доказательство следует общему термодинамическому подходу: рассматривается малое изменение состояния путем вычисления полного дифференциала плотности дополнительной энергии в левой и правой частях соотношения (6.27), соответственно,

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_j \frac{\partial U^{*'}(\sigma_{ij}, \theta)}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial U^{*'}(\sigma_{ij}, \theta)}{\partial \theta} d\theta = \\ & = \sum_i \sum_j (\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) - \sum_i \sum_j \frac{\partial U'(\varepsilon_{ij}, \theta)}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial U'(\varepsilon_{ij}, \theta)}{\partial \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Из сравнения коэффициентов вытекают соотношения, соответствующие закону Гука в его обобщенной форме,

$$\frac{\partial U^{*'}(\sigma_{ij}, \theta)}{\partial \theta} = - \frac{\partial U'(\varepsilon_{ij}, \theta)}{\partial \theta}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U'(\varepsilon_{ij}, \theta)}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial U^{*'}(\sigma_{ij}, \theta)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (6.28)$$

Частные производные соотношения (6.24) по компонентам деформаций дают обобщенный закон Гука в обратной форме

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right). \quad (6.29)$$

(§) Дополнительная энергия термически нагруженного бруса

Рассматривается линейно упругий брус с прямолинейной осью в исходной конфигурации. В линеаризованной (первого порядка) теории упругости термическое нагружение не связано с деформацией кручения. Пренебрежение дефор-

мацией сдвига дает дополнительную внутреннюю энергию изгиба и растяжения в виде объемного интеграла от ее плотности

$$U^* = \int_0^l dx \int_A \left(\frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2 + \alpha \theta \sigma_{xx} \right) dA. \quad (6.30)$$

В соответствии с гипотезой Бернулли-Эйлера в каждом поперечном сечении деформации распределены по линейному закону. Предполагается, что поперечные сечения после приложения нагрузки остаются плоскими, а при изгибе балки они поворачиваются на угол $\chi(x) = (-dw/dx)$ относительно главной центральной оси балки y . Если мы обозначим деформацию на оси балки при $z = 0$ как $\varepsilon_{xx}^{(0)}$, то одноосный обобщенный закон Гука принимает вид:

$$\sigma_{xx}(x, z) = E \left(\varepsilon_{xx}^{(0)} + z \frac{d\chi}{dx} - \alpha \theta \right), \quad (6.31)$$

где в случае нелинейного распределения температуры температурные напряжения даже в используемой здесь линеаризованной теории могут оказаться нелинейными функциями от z . Можно проинтегрировать это выражение по площади поперечного сечения и получить нормальную силу

$$N(x) = \int_A \sigma_{xx} dA = E A \left(\varepsilon_{xx}^{(0)} - \alpha n_\theta \right), \quad (6.32)$$

зависящую от средней температуры (осредненной по площади поперечного сечения)

$$n_\theta(x) = \frac{1}{A} \int_A \theta dA, \quad (6.33)$$

и главный изгибающий момент

$$M_y(x) = \int_A z \sigma_{xx} dA = E J_y \left(\frac{d\chi}{dx} - \alpha m_\theta \right), \quad (6.34)$$

зависящий от первого момента температуры по поперечному сечению

$$m_\theta(x) = \frac{1}{J_y} \int_A z \theta dA, \quad [m_\theta] = \text{K} / \text{м}. \quad (6.35)$$

Подстановка приближенного выражения $\chi = -dw/dx$ в соотношение (6.34) дает линеаризованное дифференциальное уравнение изгиба

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{d\chi}{dx} = -\left(\frac{M_y}{E J_y} + \alpha m_\theta \right), \quad (6.36)$$

куда входит суперпозиция кривизны за счет изгибающего момента и за счет температуры; сравните с уравнениями (5.22а) и (6.70). Интегрирование этого уравнения обсуждается в следующем разделе.

Исключение всех градиентов деформаций дает зависимость нормальных напряжений от результирующих силовых факторов и температуры

$$\sigma_{xx}(x, z) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M_y(x)}{J_y} z + E \alpha (n_\theta + z m_\theta - \theta). \quad (6.37)$$

В дополнение к линейному распределению напряжений, вызванных внутренними силовыми факторами, любое нелинейное отклонение температурных деформаций от линейного распределения вызывает систему самоуравновешенных температурных напряжений в соответствии с членами в круглых скобках в формуле (6.37); см. раздел 2.5.1 и соотношение (4.31). Главный вектор и главный момент этих температурных напряжений равны нулю:

$$\int_A E \alpha (n_\theta + z m_\theta - \theta) dA = 0, \quad \int_A E \alpha (n_\theta + z m_\theta - \theta) z dA = 0.$$

Интегрирование по площади поперечного сечения с учетом формулы (6.37) дает дополнительную энергию линейно упругого бруса длины l ; причем любой функцией, зависящей только от температуры, можно пренебречь,

$$U^*(N, M_y, n_\theta, m_\theta) = \int_0^l \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{M_y^2}{2EJ_y} + N \alpha n_\theta + M_y \alpha m_\theta \right) dx. \quad (6.38)$$

Для слегка искривленной балки dx следует заменить элементом дуги ds .

Косой изгиб первоначально прямолинейной балки представляется в виде линейной суперпозиции изгибов в двух главных плоскостях

$$U^* = \int_0^l \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{M_y^2}{2EJ_y} + \frac{M_z^2}{2EJ_z} + N \alpha n_\theta + M_y \alpha m_{\theta y} + M_z \alpha m_{\theta z} \right) dx, \quad (6.39)$$

где

$$m_{\theta z}(x) = -\frac{1}{J_z} \int_A y \theta dA. \quad (6.40)$$

При должном учете выражений (6.38) и (6.39) теоремы Кастильяно и Менабреа расширяются на область линеаризованной термоупругости.

(§) Пример: Однопролетная статически неопределимая балка

Такая балка длины l и постоянной изгибной жесткости EJ_y , с граничными условиями жесткого защемления на обоих концах, нагружена по всему пролету

постоянной термической кривизной $\alpha m_{\theta y} = \alpha m_0$ и служит в качестве примера, иллюстрирующего применение теоремы Менабреа. Сдвиговое усилие равно нулю из соображений симметрии, поперечное нагружение отсутствует, и изгибающий момент постоянен: $M_y(x) = M_0$. Он равен статически неопределимому моменту защемления. Дополнительная энергия определяется выражением

$$U^* = \int_0^l \left(\frac{M_y^2}{2EJ_y} + M_y \alpha m_{\theta y} \right) dx = l \left(\frac{M_0^2}{2EJ_y} + M_0 \alpha m_0 \right).$$

Из условия равенства нулю производной по M_0

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_0} = l \left(\frac{M_0}{EJ_y} + \alpha m_0 \right) = 0$$

следует решение

$$M_0 = -EJ_y \alpha m_0. \quad (6.41)$$

Таким образом, соотношение (6.36) дает нулевую суммарную кривизну, и заделанная балка остается прямой, $w(x) \equiv 0$; см. также соотношение (6.96).

Если мы дополнительно рассмотрим балку с двумя шарнирными опорами на концах в качестве ассоциированной статически определимой системы, находящейся под действием заданных выше условий термического нагружения, то постоянная термическая кривизна приводит к дугообразному прогибу балки без изгибающего момента [см. также соотношение (6.89)]

$$w(x) = \alpha m_0 l^2 (x/2l)(1-x/l). \quad (6.41a)$$

Суперпозиция дугообразного прогиба

$$w(x) = - (M_0 / EJ_y) l^2 (x/2l)(1-x/l) \quad (6.41b)$$

от изотермического нагружения и краевого момента $M_0 = (-EJ_y \alpha m_0)$ дает приведенный выше результат нулевой суммарной деформации.

(§) Формула Майзеля теории термоупругости

Метод Бетти линеаризованной изотермической теории упругости [см. формулу (5.53)] обобщен для учета вклада температурной деформации в перемещение δ_i точки приложения фиктивной нагрузки H в направлении этой единичной сосредоточенной силы. Формула Майзеля выводится в два приема путем двукратного применения принципа виртуальных перемещений в двух различных состояниях равновесия упругого тела.

1. Упругое тело рассматривается в изотермическом состоянии ($\theta = 0$) и в покое под действием фиктивной нагрузки H . Часть поверхности тела свободна от фиктивных усилий, а на оставшейся части заданы перемещения (тело должно быть должным образом опертым). Фиктивная нагрузка, фиктивные силы реакций и фиктивные напряжения, обозначенные чертой сверху, находятся в равновесии; фиктивные деформации также отмечены чертой сверху.

2. Фиктивная нагрузка сопровождается надлежащим ростом температуры до $\theta(x, y, z)$; вследствие этого появляются квазистатические температурные напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} .

Рассмотрение фиктивного состояния равновесия и выбор достаточно малых температурных деформаций для возможного изменения конфигурации в уравнении принципа виртуальной работы (5.3) приводит к соотношению

$$H\delta_i = \sum_k \sum_l \int_V \bar{\sigma}_{kl} \varepsilon_{kl} dV. \quad (6.42)$$

С помощью изотермического закона Гука [формулы (4.15)] фиктивные напряжения заменяются фиктивными деформациями. Обобщенный закон Гука [соотношения (6.22) и (6.23)] дает суммарные деформации ε_{ij} как функции температурных напряжений σ_{ij} и температуры θ . В результате подстановки получаем уравнение (6.42) в следующей форме

$$H\delta_i = \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{kl} \bar{\varepsilon}_{kl} dV + \int_V 3\alpha\theta \bar{p} dV. \quad (6.43)$$

В актуальном состоянии термически нагруженного тела температурные напряжения σ_{ij} и силы реакций опор находятся в равновесии. Следовательно, выбирая теперь для виртуальных перемещений фиктивные деформации и второй раз применяя принцип виртуальной работы, получаем нулевую работу внутренних сил, так как силы температурных реакций не вносят вклада в виртуальную работу внешних сил. Поэтому двойная сумма в уравнении (6.43) должна быть равна нулю. Беря единичную фиктивную силу $H=1$, мы выводим формулу Майзеля в виде

$$\delta_i = \int_V 3\alpha\theta \bar{p} dV, \quad \bar{p} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \bar{\sigma}_{jj}. \quad (6.44)$$

«Температурное перемещение $\delta_i(P)$ точки P задано взвешенным интегралом по объему от изотропного температурного расширения. Подынтегральная функция – это фиктивное изотермическое среднее нормальное напряжение в точке Q от сосредоточенной силы фиктивной нагрузки $H=1$ с направлением e_i , приложенной в точке P того же упругого тела. Элемент

объема dV_Q и температурное поле $\theta(Q)$ должны быть выражены в координатах переменной точки Q .» Заметим отличие от метода функций влияния в изотермической статике; см., например, формулы (2.159), где суммирование производится по координатам переменного точечного источника, то есть точки приложения фиктивной силы. Градиент по координатам этого точечного источника можно взять под знаком интеграла, но надо соблюдать осторожность в отношении интеграла, который становится сингулярным. Формально температурные напряжения выражаются через обобщенный закон Гука.

Соотношение (6.44), как и в статике, является решением общей трехмерной задачи термоупругости. Температурное поле полагается известным [оно должно быть рассчитано заранее с помощью уравнения теплопроводности (6.354)]. Как показано ниже, формула Майзеля может быть адаптирована для расчета конструкций из термически нагруженных балок, рам, пластин и оболочек. С помощью сути этой формулы, то есть формулировки виртуальной работы, можно легко рассмотреть задачи для сплошной среды с осевой или центральной симметрией. В этих случаях сосредоточенная фиктивная сила заменяется фиктивными кольцевыми нагрузками или фиктивными усилиями на сферической поверхности. Эти особенности проиллюстрированы для термически нагруженных цилиндров и сфер.

(§) Полая сфера с центральной симметрией и толстостенный цилиндр с осевой симметрией, формула Майзеля

Пусть единичное радиальное фиктивное усилие $\sigma_H = 1$ на некотором внутреннем радиусе R определяет радиальное температурное перемещение, вызванное заданным температурным полем $\theta(R)$. Фиктивная виртуальная работа принимает вид

$$\sigma_H \delta_R 2\pi \bar{\alpha} R^{\bar{\alpha}} = \int_{R_i}^{R_e} 3\alpha \theta(R^*) \bar{\rho}(R^*, R) 2\pi \bar{\alpha} R^{*\bar{\alpha}} dR^*, \quad (6.45)$$

где $\alpha = 2$ для сферической задачи, $\alpha = 1$ для цилиндрической задачи.

Если мы примем фиктивную нагрузку $\sigma_H = 1$ и рассмотрим изотермическую функцию влияния

$$3\bar{\rho}(1+\nu)^{\bar{\alpha}-2} = \bar{\sigma}_{rr} + \bar{\alpha}\bar{\sigma}_{\theta\theta},$$

то получим выражение для радиального перемещения

$$\delta_R = R^{-\bar{\alpha}} \int_{R_i}^{R_e} 3\alpha \theta(R^*) \bar{\rho}(R^*, R) R^{*\bar{\alpha}} dR^*. \quad (6.46)$$

Среднее нормальное напряжение в изотермической задаче о нагружении фиктивной нагрузкой полых тел со свободными от усилий поверхностями легко находится путем суперпозиции решений для двух тел, имеющих общую границу раздела с радиусом R , которые заданы соотношениями (6.14) и (6.15). усилия на поверхности радиуса R определяются как $p_i = p_e + \sigma_H$, $\sigma_H = 1$, а радиальное перемещение должно быть непрерывным

$$(1-\nu)(1+\nu)^{(\bar{\alpha}-2)} \left[1 - \rho^{\bar{\alpha}+1} \right] 3\bar{p}(R^*, R) = \\ = \bar{\alpha}(1-2\nu)(R/R_e)^{\bar{\alpha}+1} + \begin{cases} [1 + (\bar{\alpha}-1)\nu] & \dots R^* < R \\ [1 + (\bar{\alpha}-1)\nu] \rho^{\bar{\alpha}+1} & \dots R^* > R \end{cases}, \quad \rho = R_i/R_e. \quad (6.47)$$

Для интегрирования уравнения (6.46) в аналитическом виде требуется разбить диапазон интегрирования на подинтервалы $[R_i, R]$ и $[R, R_e]$.

6.1.2. Принцип Сен-Венана

Возможность найти конкретные решения уравнений Навье [см. уравнения (6.6)] для конкретных задач сильно зависит от геометрии упругого тела и от сложности граничных условий. Поэтому для упрощения задачи на тех частях границы, где заданы кинематические граничные условия, усилия с неизвестным законом распределения приближенно заменяются более простыми, статически эквивалентными системами сил. Во многих случаях приближенные напряжения и деформации в удаленной области, то есть на достаточно большом расстоянии от "малого" участка поверхности, где граничные условия заменены упрощенными, приближаются к точному решению. Этот подход иллюстрирует консольная балка на рис. 6.1. Однако в ближней области напряжения в большей или меньшей степени зависят именно от точного распределения поверхностных усилий. Такого рода приближения делают многие технические задачи разрешимыми, в противном случае они бы выпали из области практических инженерных наук и стали бы сложными математическими упражнениями.

В 1855 году Барре де Сен-Венан сформулировал принцип, обоснование

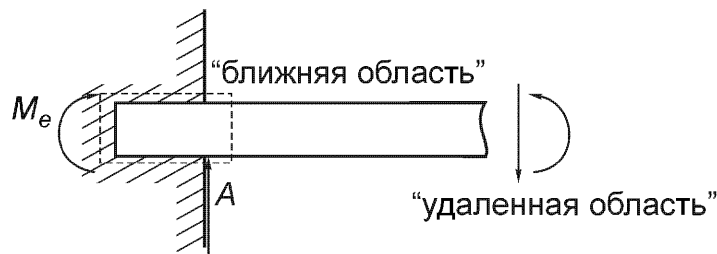


Рис. 6.1. Статически эквивалентные силы реакций и результирующие силовые факторы в удаленной области. «Ближняя область» обведена пунктирным прямоугольником.

которого до сих пор остается в основном эмпирическим: «Если к малой части тела приложены статически эквивалентные силы, то на достаточно большом удалении от этой нагруженной области они вызывают примерно те же напряжения и деформации.»

Без обсуждения этот принцип много раз применяется в этой книге, см., например, испытание на простое растяжение, где концы испытуемого образца защемлены в зажимах испытательной машины, но принимается, что их действие на контрольной длине образца примерно такое же, как если бы в поперечных сечениях на концах образцов были бы приложены равномерно распределенные силы.

В литературе, ориентированной на теоретические аспекты проблемы, имеются некоторые математические формулировки этого принципа. Важнее всего предусмотреть, чтобы нагружение было самоуравновешенным и сконцентрированным в малой части тела. Такая система может быть найдена, например, на свободных концах термически нагруженной балки; см. формулу (6.37). Как положительно определенная мера интенсивности (самоуравновешенных) напряжений в упругом теле вводится энергия деформаций. Однако пределы применимости этого принципа не так просто распознать. Надо соблюдать осторожность, когда этот принцип применяется к тонкостенным конструкциям, таким как балки коробчатого сечения, оболочки, композитные конструкции и т.п., даже в упругом диапазоне нагружения. Если нужно рассмотреть поведение упруго-вязко-пластического материала, пределы применимости этого принципа становятся даже еще менее очевидными. Например, формирование пластического шарнира в статически неопределимой конструкции перераспределяет напряжения в удаленной области, а статически определимая конструкция становится механизмом.

6.1.3. Гипотезы напряжений и деформаций

Напряженность материала при многоосном напряженном состоянии, то есть интенсивность напряженного состояния, обычно измеряется эквивалентным напряжением. Пределы упругости, например, разрушение хрупкого материала или течение вязко-пластического тела, задаются критическими величинами эквивалентного напряжения в соответствии с соответствующей гипотезой напряжений или деформаций. Здесь упоминается только гипотеза главных деформаций (она работает подобно гипотезе главных напряжений) и обсуждаются две простые гипотезы напряжений, уже успешно использующиеся в практических приложениях.

(§) Гипотеза главного нормального напряжения

Хрупкие материалы, в которых доминирующей является чувствительность к растягивающей компоненте напряженного состояния, могут быть описаны в

своем диапазоне упругости законом Гука или нелинейным законом упругости, пока наибольшее растягивающее главное напряжение не достигнет заданного предела. Влиянием двух других главных напряжений на предел упругости пренебрегают.

(§) Энергетическая гипотеза Генки – Мизеса

Напряженность упруго-пластического твердого тела может быть измерена нормой упругой энергии, определенной по плотности энергии искажений (энергии изменения конфигурации): энергия деформаций минус работа, запасенная при сжатии. Упругую энергию объемного расширения учитывать не надо, так как течение вязко-пластического материала не происходит даже при высоком гидростатическом давлении. Используя девиаторные компоненты напряжений и формулы (5.38) и (3.47), мы видим, что дополнительная энергия изменения конфигурации в упругом материале принимает вид

$$U_C^{*'} = \frac{1}{2G} J_2, \quad J_2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij}{}^2, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}.$$

Плотность энергии в образце на растяжение из того же материала при напряжении σ_e равна $J_2 = \sigma_e^2/3$, и тогда

$$U_C^{*'} = \frac{1}{2G} J_2.$$

Эквивалентность напряженности при многоосном и одноосном напряженном состоянии представляется через эквивалентное напряжение σ_e , и тогда, учитывая, что при одноосном напряженном состоянии предел упругости задан напряжением текучести σ_Y , которое считается одинаковым при растяжении и сжатии, диапазон упругости определяется выражением

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \leq \sigma_Y.$$

См. также условие Мизеса для течения идеально-пластического твердого тела [соотношение (4.127)], где через σ_1 , σ_2 и σ_3 обозначены главные напряжения в исследуемой точке материала. В условиях плоского напряженного состояния, при $\sigma_3 = 0$, эквивалентное напряжение принимает вид

$$\sigma_e = \left[\sigma_{xx}^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2 \right]^{1/2} \leq \sigma_Y.$$

(§) Гипотеза напряжений Мора – Кулона

При возрастании скорости деформации многие материалы демонстрируют переход от вязко-пластичности к более хрупкому поведению. В условиях плоского

напряженного состояния такое поведение может быть описано движением центра круга Мора в сторону увеличения нормальных напряжений и уменьшением его радиуса, то есть максимально допустимого сдвигового напряжения. Огибающая в гипотезе Мора задается двумя сходящимися прямыми, а в гипотезе Кулона – двумя параллельными линиями. Усовершенствование дано параболической огибающей Леона, куда включена гипотеза главных нормальных напряжений для абсолютно хрупкого поведения материала. Подробности можно найти в литературе:

- Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids. 2nd ed., New York, McGraw-Hill, 1950. Имеется русский перевод: Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Том I, М., ИЛ, 1954. Том II, М., Мир, 1969.
- Slattenschek A. Zähes und sprödes Verhalten metallischer Werkstoffe bei mechanischen Beanspruchungen. Schweißen und Schneiden, **3** (1951), S. 90 – 100.
- Slattenschek A. Grundsätzliches zur Theorie des Sprödbruches. Radex-Rundschau, 1953, S. 186 – 199.

(§) Концепция допускаемого напряжения

Эта концепция широко применяется в технике для тех задач, где напряжения пропорциональны коэффициенту нагрузки. Например, рассматривая коэффициент запаса прочности по отношению к достижению предела текучести упруго-пластического материала $\nu_Y > 1$, получаем допускаемое напряжение (в упругом диапазоне) $\sigma_a = \sigma_Y / \nu_Y$. Будучи выраженным через эквивалентное напряжение, это условие принимает простой вид $\sigma_e \leq \sigma_a$.

6.2. Стержни и балки с прямолинейными осями

Стержни – это такие элементы конструкций, у которых размеры поперечных сечений малы по сравнению с длиной, или, в случае тонких балок, малы по сравнению с длиной пролета. Статика стержней обсуждается в разделе 2.5.1. В общем случае напряженное состояние задается нормальным напряжением σ_{xx} и компонентами касательного напряжения $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ и $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$. Координатная ось x направлена вдоль прямолинейной оси балки. Если деформации малы, используются линейризованные геометрические соотношения и не делается никакого различия между недеформированным исходным состоянием и деформированной конфигурацией. Распределение напряжений в поперечных сечениях выводится из предварительно определенных силовых факторов – осевой силы $N(x)$, поперечных сил $Q_y(x)$ и $Q_z(x)$, главных изгибающих моментов $M_y(x)$, $M_z(x)$ и крутящего момента $M_x = M_T$. Нагрузка обычно считается за-

данной сосредоточенными силами, а также силами, распределенными по длине: продольной $q_x(x)$ и поперечными $q_y(x)$, $q_z(x)$. В дополнение к ним через идеализированные условия опирания задаются граничные условия. Случаи нагружения, в которых применяются распределенные по длине внешние моменты, здесь не рассматриваются.

(§) Нормальная сила и изгибающие моменты

Эти силовые факторы в рамках гипотезы Бернулли-Эйлера (поперечные сечения остаются плоскими также и в случае наличия поперечных сил) порождают линейное распределение нормального напряжения в поперечных сечениях с продольной координатой x [см. формулу (4.31); подразумевается зависимость от осевой координаты]

$$\sigma_{xx}(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y. \quad (6.48)$$

Это линейное распределение становится точным решением уравнений Навье (6.6) для чистого изгиба и постоянной изгибной жесткости прямоугольного поперечного сечения относительно его главных осей.

Нормальное напряжение всегда достигает своих экстремальных значений на наружных поверхностях. Если нормальная сила не равна нулю, она может быть приведена к такой точке A_N ($y_N = b$, $z_N = c$), смещенной относительно центра тяжести поперечного сечения, где момент от распределения нормальных напряжений равен нулю [формулы (2.135)]. Отсюда главные изгибающие моменты задаются соответствующими парами сил, возникающими из-за внецентренного действия осевой силы N ,

$$M_z = -Nb, \quad M_y = Nc. \quad (6.49)$$

Тогда линейное распределение напряжений (6.48) принимает вид

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{cz}{i_y^2} + \frac{by}{i_z^2} \right), \quad J_{y,z} = A i_{y,z}^2. \quad (6.50)$$

Это выражение определяет прямую линию, в точках которой нормальные напряжения равны нулю (нейтральную ось),

$$1 + \frac{cz}{i_y^2} + \frac{by}{i_z^2} = 0, \quad (6.51)$$

и которая делит поперечное сечение на области растяжения и сжатия. Балки и колонны из материалов с низкой прочностью на растяжение, таких как бетон или кирпич, при внецентренном сжатии силой $N < 0$ должны быть спроектиро-

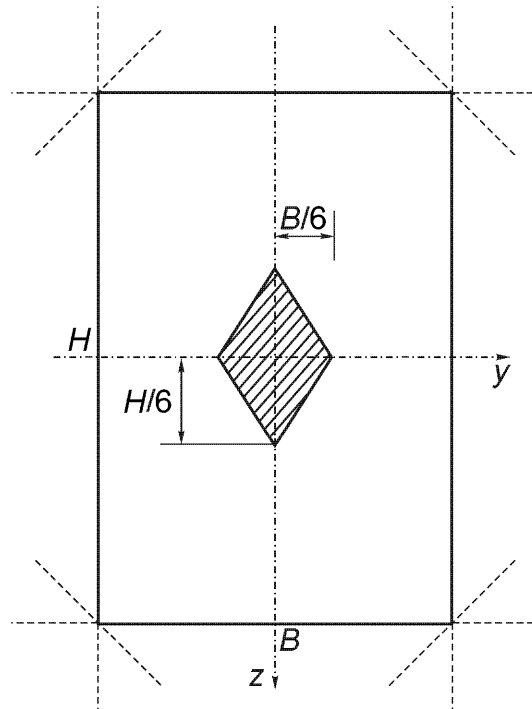


Рис. 6.2. Ядро поперечного сечения прямоугольной формы.

ваны таким образом, чтобы линия нулевых напряжений лежала вне поперечного сечения. Точки A_N приложения нормальной силы N заполняют подобласть поперечного сечения вокруг его центра тяжести, которая называется ядром поперечного сечения. Чтобы определить его форму, нужно расположить нейтральную ось по касательной к контуру поперечного сечения и решить уравнение (6.51) относительно координат b и c . Последние являются координатами противоположных полюсов всех касательных к наименьшей выпуклой огибающей поперечного сечения. Прямолинейный отрезок этой огибающей порождает точку линии, окружающей ядро, и наоборот.

Ядром поперечного сечения в форме прямоугольника ($H \times B$) с квадратами главных радиусов инерции $i_y^2 = H^2/12$ и $i_z^2 = B^2/12$ является параллелограмм. Угловая точка получается при подстановке прямолинейного отрезка $z = H/2$ в уравнение (6.51), решение которого из соображений симметрии имеет вид $c = -H/6$, $b = 0$; см. рис. 6.2. Так как для кругового поперечного сечения квадрат радиуса инерции $i^2 = R^2/4$ изотропен, противоположные полюсы расположены на концентрической окружности радиуса $R/4$, и точки приложения продольной силы должны лежать внутри заштрихованной на рис. 6.3 круговой области.

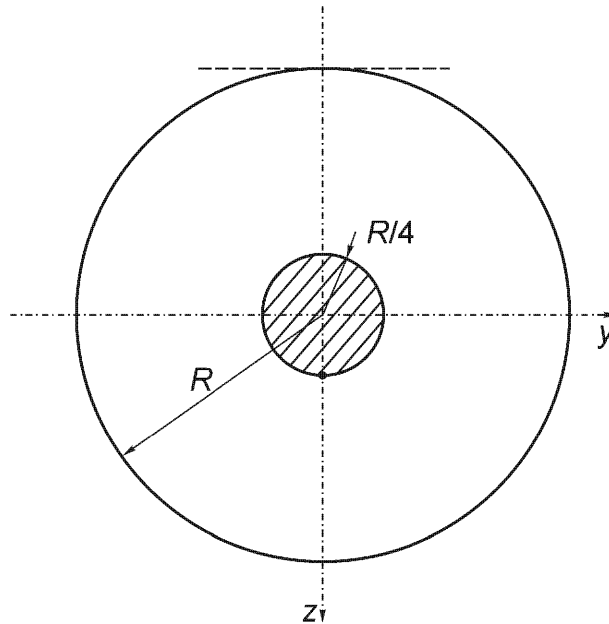


Рис. 6.3. Ядро кругового поперечного сечения.

6.2.1. Касательные напряжения и деформации, возникающие из-за поперечной силы

Нахождение распределения в поперечном сечении касательных напряжений, появляющихся из-за изгиба при наличии ненулевой поперечной силы и крутящего момента, является довольно сложной задачей. Только для тонкостенных конструкций толщины h в поперечном сечении и с поверхностями, свободными от нагрузок, это распределение априори является достаточно простым: благодаря симметрии тензора напряжений сдвиговые напряжения на свободных поверхностях должны равняться касательным напряжениям в поперечном сечении. Если мы рассмотрим среднее по толщине касательное напряжение и поток касательных напряжений $T(s) = \tau(s) h(s)$, где s – длина дуги вдоль тонкостен-

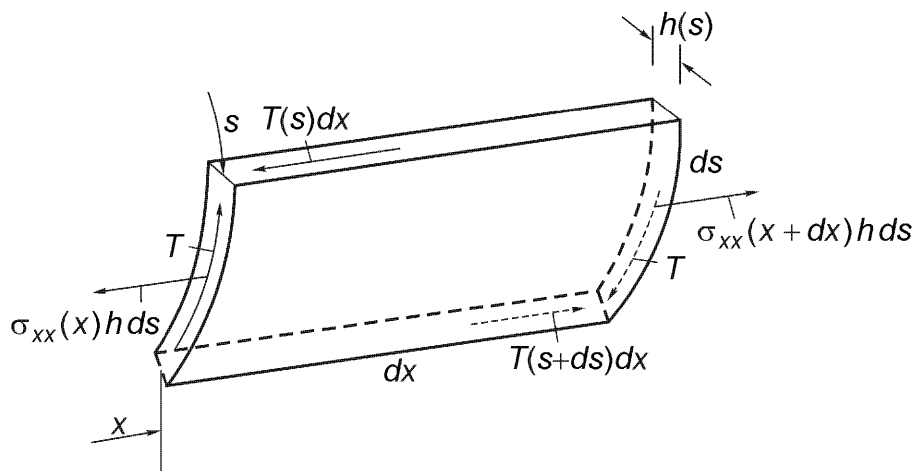


Рис. 6.4. Бесконечно малый элемент тонкостенного стержня. Равновесие внутренних сил при поперечном изгибе.

ного поперечного сечения, то из равновесия элемента (см. схему равновесия элемента на рис. 6.4) следует:

$$\frac{\partial T}{\partial s} + h(s) \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0. \quad (6.52)$$

Подстановка линейного распределения нормальных напряжений при ком изгибе

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y \quad (6.53)$$

вместе с соотношением (2.147), где $ds = dx$, и соотношением (2.152) для сдвиговых сил приводит к уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial s} + h(s) \left[\frac{Q_z}{J_y} z + \frac{Q_y}{J_z} y \right] = 0. \quad (6.54)$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения первого порядка дает поток касательных напряжений

$$T(s) = T_0 - \left[\frac{Q_z}{J_y} \int_0^s z h(s) ds + \frac{Q_y}{J_z} \int_0^s y h(s) ds \right]. \quad (6.55)$$

Следовательно, среднее касательное напряжение равно $\tau = T/h$. Для тонкостенных и незамкнутых поперечных сечений, если $s = 0$ – это край, свободный от сдвига, то поток $T_0 = T(s = 0)$ равен нулю, а для коробчатых (замкнутых) поперечных сечений он остается неопределенной константой. Случай тонкостенного сечения с одной ячейкой, где постоянный поток касательных напряжений, возникающий благодаря крутящему моменту M_T , становится статически определенным, рассмотрен в формуле Бредта (2.171). Интегралы в формуле (6.55) – это статические моменты площади сечений с длиной дуги s относительно главных центральных осей y и z ; они определяются как

$$S_y(s) = \int_0^s z h(s) ds \quad \text{и} \quad S_z(s) = \int_0^s y h(s) ds. \quad (6.56)$$

Таким образом, среднее касательное напряжение в поперечном сечении с отрицательной нормалью, возникающее из-за поперечной силы, принимает вид

$$\tau(s) = \frac{T}{h(s)} = \frac{T_0}{h(s)} - \left[\frac{Q_z S_y(s)}{J_y h(s)} + \frac{Q_y S_z(s)}{J_z h(s)} \right]. \quad (6.57)$$

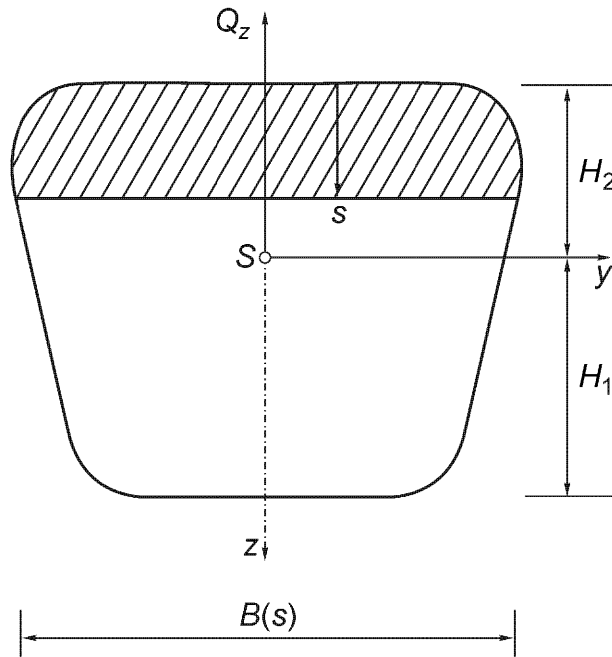


Рис. 6.5. Сплошное поперечное сечение, нагруженное поперечной силой $Q_z(x)$. Приближенное распределение касательных напряжений принимается пропорциональным статическому моменту заштрихованной области и параллельным оси z .

Распределение касательных напряжений в толстостенных поперечных сечениях становится более сложным. Тогда инженерная теория балок в качестве грубого приближения применяет к сплошному поперечному сечению ту же формулу, что и для тонкостенных балочных конструкций. См. рис. 6.5, где $s = z + H_2$. Полагая $Q_y = 0$, получаем

$$\sigma_{xz}(s) = \frac{T}{B(s)} = -\frac{Q_z S_y(s)}{J_y B(s)}. \quad (6.58)$$

Соотношение (6.58), например, не принимает во внимание граничное условие на свободной поверхности балки переменной ширины $B(s)$, где касательное напряжение τ должно быть параллельным наклонному контуру, как показано на рис. 6.5.

(§) Прямоугольное поперечное сечение

В этом случае, когда $B = \text{const}$ и $A = B \times H$, статический момент является квадратичной функцией

$$S_y(s) = -\frac{A}{2} s \left(1 - \frac{s}{H} \right), \quad (6.59)$$

где $H = H_1 + H_2$, и, так как $J_y = BH^3/12$, касательное напряжение распределено по параболическому закону

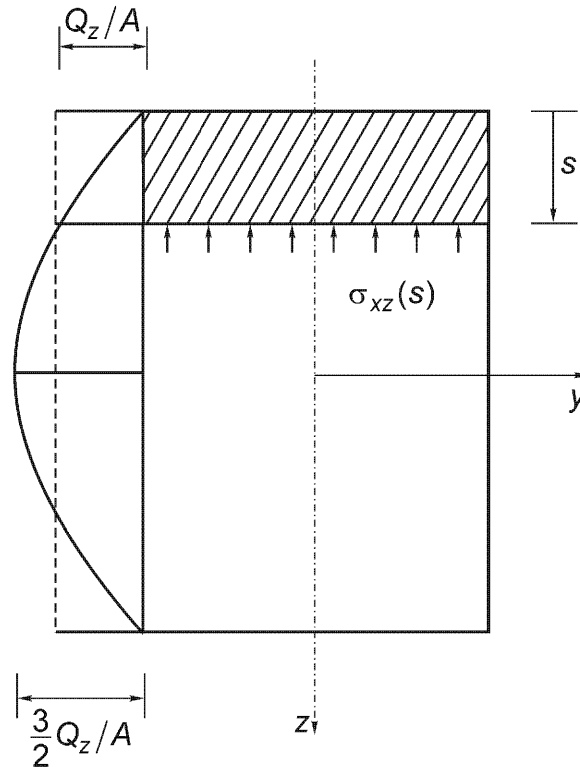


Рис. 6.6. Распределение касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении (с отрицательной нормалью), центрально нагруженном поперечной силой Q_z и свободном от кручения.

$$\sigma_{xz}(s) = \frac{Q_z}{A} \frac{6s}{H} \left(1 - \frac{s}{H}\right) \quad (6.60)$$

с экстремумом при $s = H/2$, $z = 0$ (см. рис. 6.6):

$$\max|\sigma_{xz}| = \frac{3}{2} \frac{|Q_z|}{A}. \quad (6.61)$$

Этот максимум превышает среднее значение Q_z/A на 50%.

(§) Максимальное касательное напряжение в эллиптическом или круговом поперечном сечении

Это максимальное касательное напряжение в поперечном сечении площади A , нагруженном поперечной силой Q_z , определяется аналогичным образом и равно

$$\max|\sigma_{xz}| = \frac{4}{3} \frac{|Q_z|}{A}. \quad (6.62)$$

(§) Применение соотношения (6.58) к Т-образному поперечному сечению

Распределение касательных напряжений в тонкостенной полке профиля имеет вид (см. рис. 6.7):

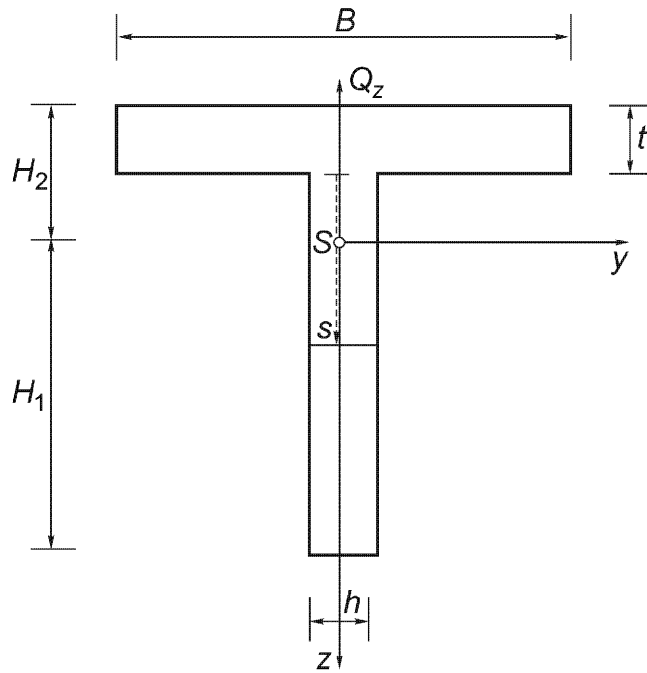


Рис. 6.7. Тонкостенное Т-образное поперечное сечение (с отрицательной нормалью), нагруженное поперечной силой Q_z .

$$\sigma_{xz}(s) = \frac{Q_z}{J_y} B \left[\left(H_2 - \frac{t}{2} \right) \frac{t}{h} + \frac{s}{B} \left(H_2 - t - \frac{s}{2} \right) \right], \quad s \geq 0. \quad (6.63)$$

Соотношение (6.63) справедливо также и для двутавровых балок при подстановке соответствующего момента инерции поперечного сечения J_y ; см. упражнение А 6.14 для центра сдвига. Более важно, что при $s = 0$ касательное напряжение $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, то есть первое постоянное слагаемое в соотношении (6.63) представляет собой касательное напряжение на поверхности раздела между полкой и стенкой при изгибе, которое должно быть передано в осевом направлении. Оно также нагружает сварной шов при сварном соединении или болты при болтовом соединении.

Деформация при сдвиге вносит такой вклад в прогиб балки, что для тонких балок им можно пренебречь, но для высоких балок он становится того же порядка, что и прогиб от изгиба. В рамках приближенного распределения касательных напряжений [формула (6.58)] можно вычислить прогиб при сдвиге. Предположение о постоянстве касательного напряжения σ_{xz} в поперечном сечении, теперь с нормалью, направленной в положительном направлении оси x , сохраняет поперечное сечение плоским и приводит к дополнительному повороту за счет сдвига

$$\gamma_{xz} = 2 \varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} = \frac{Q_z}{GA}. \quad (6.64)$$

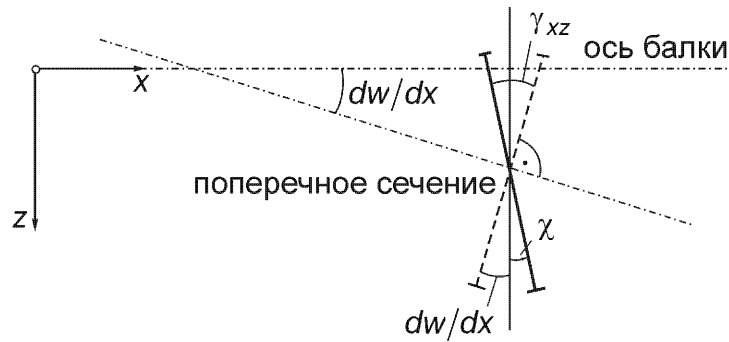


Рис.6.8 Усредненный поворот поперечного сечения за счет чистого изгиба и сдвиговой деформации.

Вследствие этой (приближенной) деформации при сдвиге плоскость поперечного сечения больше не остается ортогональной деформированной оси балки. Если мы рассмотрим поворот за счет чистого изгиба [см. уравнения (5.22а) и (6.36)], где главным изгибающим моментом является M_y],

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{M_y}{EJ_y} \quad (6.65)$$

и примем во внимание переменное распределение касательных напряжений путем замены деформации сдвига в соотношении (6.64) на усредненный поворот, то наклон суммарного прогиба принимает вид

$$\frac{dw}{dx} = -\chi + \bar{\gamma}_{xz}, \quad (6.66)$$

где $\bar{\gamma}_{xz}$ обозначает малое уменьшение прямого угла: см. рис. 6.8.

При усредненном повороте поперечная сила Q_z и статически эквивалентные распределенные касательные напряжения σ_{xz} совершают одинаковую работу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q_z dw &= \frac{1}{2} \sigma_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} dx dA = -\frac{1}{2} \chi dx \int_A \sigma_{xz} dA + dx \int_A \frac{\sigma_{xz}^2}{2G} dA = \\ &= \frac{dx}{2} \left[-\chi Q_z + \int_A \frac{\sigma_{xz}^2}{G} dA \right]. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Подстановка соотношения (6.58) (для положительного поперечного сечения знак минус не применяется) приводит к работе в виде

$$\frac{1}{2} Q_z dw = \frac{dx}{2} \left[-\chi + \frac{Q_z}{GJ_y^2} \int_A \frac{S_y^2}{B^2} dA \right] Q_z = \frac{dx}{2} [-\chi + \bar{\gamma}_{xz}] Q_z.$$

Из сравнения коэффициентов, с учетом скорректированной константы поворота сдвига, вытекает

$$\bar{\gamma}_{xz} = \kappa_z \frac{Q_z}{GA}, \quad (6.68)$$

где геометрический коэффициент коррекции [см. соотношение (5.49)] равен:

$$\kappa_z = \frac{A}{J_y^2} \int_A \left(\frac{S_y}{B} \right)^2 dA. \quad (6.69)$$

При поперечном изгибе относительно двух главных осей появляется второй коэффициент.

Для простых поперечных сечений коэффициенты коррекции легко вычисляются, например, для сечения прямоугольной формы с шириной B $\kappa_z = 6/5$; для кругового поперечного сечения изотропное значение равно $\kappa_z = 10/9$; а для тонкостенного двутаврового профиля $\kappa_z \approx A/A_{\text{стенки}}$.

Вычисляя производную от уравнения (6.66) и подставляя поперечную нагрузку $q_z = -dQ_z/dx$ в продифференцированное соотношение (6.68), получаем линейризованную кривизну как суперпозицию кривизны при чистом изгибе и кривизны за счет деформации сдвига [сравните это с уравнением (6.36)]:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EJ_y} - \frac{\kappa_z q_z}{GA}, \quad A = \text{const}. \quad (6.70)$$

Сдвиговая деформация зависит также и от граничных условий, например, жестко защемленный конец ограничивает поворот поперечного сечения за счет чистого изгиба $\chi = 0$, но из-за сдвиговой деформации $dw/dx \neq 0$.

Уравнение (5.49) было выведено путем математической аргументации. Вклад сдвига в дополнительную энергию на единицу длины можно выразить через корректирующие коэффициенты [соотношение (6.69)], и путем установления связи с помощью закона Гука между усредненными поворотами вокруг двух осей при сдвиге и средними величинами касательных напряжений получается аналогичное выражение

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2}{2G} dA &= \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} \int_A \sigma_{xy} dA + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xz} \int_A \sigma_{xz} dA = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} Q_y + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xz} Q_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_y Q_y^2}{GA} + \frac{\kappa_z Q_z^2}{GA} \right). \end{aligned} \quad (6.71)$$

(§) Пример: Прогиб консольной балки при поперечном изгибе

Линейно упругая консольная балка длины l нагружена равномерно распределенной нагрузкой $q_z = q$ и имеет постоянную жесткость при изгибе ($B = EJ_y$) и при сдвиге ($S = GA$), соответственно. С учетом того, что изгибающий момент изменяется по параболическому закону $M_y(x) = -(q/2)(l-x)^2$ [заметим, что поперечная сила равна $Q_z(x) = dM_y(x)/dx = -q(l-x)$], дифференциальное уравнение (6.70), скорректированное для учета сдвиговой деформации, легко интегрируется:

$$w(x) = \frac{q}{24B} (l-x)^4 - \frac{\kappa_z q}{S} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Постоянные интегрирования могут быть определены из кинематических граничных условий на жестко защемленном конце при $x = 0$:

$$w(0) = 0: \quad C_2 = -\frac{ql^4}{24B},$$

$$\chi(0) = 0: \quad \frac{dw}{dx}(x=0) = \bar{\gamma}_{xz} = \frac{\kappa_z}{S} Q_z(0), \quad C_1 = \frac{ql^3}{6B} + \kappa_z \frac{ql}{S}.$$

Если обозначить вклад чистого изгиба в прогиб через w_B , а соответствующую часть за счет сдвига через w_S , их отношение на конце консоли равно

$$\frac{w_S}{w_B}(x=l) = 8(1+\nu)\kappa_z \left(\frac{i_y}{l}\right)^2.$$

Так как i_y – главный радиус инерции поперечного сечения, а l – длина пролета, то для достаточно тонких балок коэффициент $\kappa_z (i_y/l)^2 \ll 1$. Таким образом, для не слишком высоких балок доля w_S из-за сдвиговой деформации пренебрежимо мала. При рассмотрении более сложных моделей сдвиговой деформации порядок величины отношения прогибов за счет сдвига и чистого изгиба не изменяется.

6.2.2. Метод Мора вычисления перемещений

Первоначально этот метод был разработан путем рассмотрения только вклада чистого изгиба в кривизну тонких балок; следовательно, применяется уравнение (5.22а):

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EJ_y}, \quad (6.72)$$

которое является линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Кинематические или динамические граничные условия обеспечивают получение прогиба, удовлетворяющего условиям опирания. Таблица 5.1 дает $w = 0$ и $dw/dx = 0$ для жестко заземленного конца, $M_y = 0$ и $Q_z = dM_y/dx = 0$ для свободного конца, $w = 0$ и $M_y = 0$ (смешанные условия) для шарнирной опоры.

Аналогично перемещению w в уравнении (6.72) изгибающий момент M_y является решением уравнения, которое выражает локальное условие равновесия и также является линейным дифференциальным уравнением второго порядка [см. уравнение (2.152)], задающим распределенную поперечную нагрузку q_z :

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z. \quad (6.73)$$

Граничные условия задаются известными концевыми силами и парами: $M_y = M_0$, $Q_z = dM_y/dx = Q_0$.

При условии удовлетворения граничным условиям для интегрирования уравнения (6.72) можно использовать любую стратегию решения, которая пригодна для решения уравнения (6.73). Методика графического решения уравнения статики – это метод силового и веревочного многоугольников. Изгибающий момент в балке с заданной нагрузкой также удобно находится путем рассмотрения равновесия конечного элемента длины x . Следовательно, сравнение правых частей приведенных выше уравнений дает сопряженную нагрузку, пропорциональную заданному изгибающему моменту,

$$\bar{q}_z = M_y \frac{J_0}{J_y}, \quad (6.74)$$

где J_0 – номинальный момент инерции. Сравнение также и левых частей дает соответствие между действительным прогибом w и обобщенным изгибающим моментом в сопряженной балке, если она должным образом нагружена сопряженной нагрузкой,

$$w = \frac{\bar{M}_y}{EJ_0}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{\bar{Q}_z}{EJ_0}. \quad (6.75)$$

Соответствие между действительным углом наклона и сопряженной поперечной силой также было отмечено выше; это легко увидеть, вычисляя производную от прогиба и сопряженного изгибающего момента по x . Следовательно, аналогия должна быть завершена путем рассмотрения правильных граничных условий для сопряженной балки через соответствие уравнений (6.75) и задан-

ных условий опирания действительной балки. Только шарнирная опора соответствует шарнирной опоре сопряженной балки, так как

$$w = 0 \Rightarrow \bar{M}_y = 0, \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dx} \neq 0 \Rightarrow \bar{Q}_z \neq 0.$$

Свободный конец действительной балки (применяются однородные динамические граничные условия) соответствует жестко заземленному концу сопряженной балки (действительные динамические условия преобразуются в однородные кинематические граничные условия). Промежуточная опора неразрезной многопролетной балки соответствует шарниру Гербера сопряженной балки, так как

$$w = 0 \Rightarrow \bar{M}_y = 0,$$

и из непрерывности $\frac{dw}{dx}$ следует непрерывность \bar{Q}_z .

Заметим, что это соответствие является обратимым. Как аналитическая, так и графическая аналогии, называемые методом Мора, проиллюстрированы ниже при рассмотрении упругой консольной балки.

(§) Применение аналитического метода Мора к консольной балке, изображенной на рис. 6.9

Нагрузка задана сосредоточенной силой F и моментом M_0 , приложенными на конце консольной балки длины l с постоянной жесткостью при изгибе $B = EJ_0$. Изгибающий момент задан линейной функцией $M_y = M_0 - F(l - x)$. Формально она является поперечной нагрузкой сопряженной балки Мора, которая тоже является консолью, но ее граничные условия изменены в соответствии с уравнениями (6.75). Сопряженная система, как показано на рис. 6.9, статически опре-

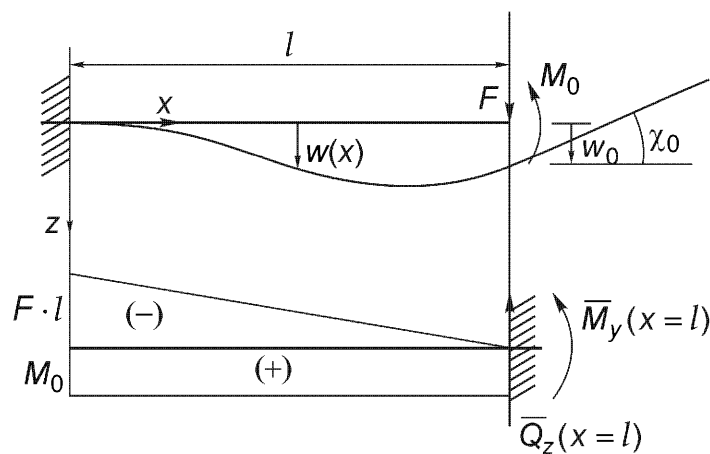


Рис. 6.9. Консольная балка постоянной изгибной жесткости с заданной нагрузкой F и M_0 . Сопряженная консоль Мора, поперечно нагруженная изгибающим моментом $M_y(x)$.

делима. Если нужно определить действительное перемещение конца $w(x=l) = w_0$ и поворот концевого сечения $dw/dx(x=l) = -\chi_0$, то аналогия требует определить только сопряженные опорные реакции

$$\bar{Q}_z(x=l) = \frac{1}{2}Fl^2 - M_0l, \quad \bar{M}_y(x=l) = \frac{1}{2}Fl^2 \cdot \frac{2l}{3} - M_0l \cdot \frac{l}{2}.$$

Уравнения (6.75) дают следующие результаты:

$$\chi_0 = -\frac{dw}{dx}(x=l) = -\frac{\bar{Q}_z(x=l)}{EJ_0} = \frac{l}{B}M_0 - \frac{l^2}{2B}F,$$

$$w_0 = w(x=l) = \frac{\bar{M}_y(x=l)}{EJ_0} = -\frac{l^2}{2B}M_0 + \frac{l^3}{3B}F.$$

Собирая локальные деформации в матрицу-столбец \mathbf{u}_F [это транспонированная матрица-строка $\mathbf{u}_F^T = (\chi_0, w_0)$] и делая то же самое с ассоциированной нагрузкой, где обобщенный вектор силы становится $\mathbf{F}^T = (M_0, F)$, получаем линейное векторное соотношение:

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}, \quad (6.76a)$$

где \mathbf{f} – симметричная, размером 2×2 , матрица податливости консоли, изображенной на рис. 6.9:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{B} & -\frac{l^2}{2B} \\ -\frac{l^2}{2B} & \frac{l^3}{3B} \end{pmatrix}. \quad (6.76b)$$

Ее элементами являются коэффициенты влияния при $x=l$, то есть деформации за счет специальных единичных нагружений $M_0 = 1, F = 0$ и $M_0 = 0, F = 1$, соответственно.

Инвертирование матрицы податливости дает матрицу жесткости консоли при $x=l$, и линейное соотношение (6.76a) обращается:

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_F, \quad \text{где } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{4B}{l} & \frac{6B}{l^2} \\ \frac{6B}{l^2} & \frac{12B}{l^3} \end{pmatrix}. \quad (6.77)$$

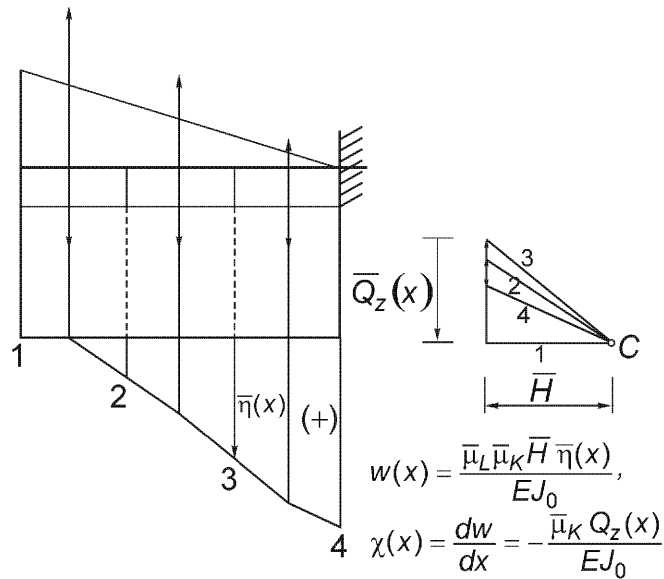


Рис. 6.10. Сопряженная балка Мора. Графическое определение действительного прогиба консоли, изображенной на рис. 6.9, с помощью силового и веревочного многоугольников.

(§) Применение графического метода Мора к консольной балке, изображенной на рис. 6.9

Нагружение сопряженной балки действительным изгибающим моментом считается заданным, и графический метод используется для определения сопряженной поперечной силы с помощью силового многоугольника и сопряженного изгибающего момента с помощью веревочного многоугольника; см. раздел 2.5.1.2. Распределенная сопряженная нагрузка аппроксимируется конечным числом результирующих силовых факторов; рис. 6.10 показывает стандартную процедуру использования трех подинтервалов.

Альтернативно, эти результирующие силовые факторы в каждом из интервалов могут быть эквивалентно приведены к прилежащим узлам интервала. Если точки приложения результирующих силовых факторов выбраны правильно (в смысле статической эквивалентности), то значения прогиба w и наклона $(-dw/dx)$ в промежуточных точках, где стыкуются два смежных интервала, являются точными. На рис. 6.10 средние точки выбраны ради удобства, и поэтому результаты в узлах также являются приближенными. Веревоочный многоугольник аппроксимирует действительный прогиб консоли на рис. 6.9.

(§) Линии влияния деформаций по методу Мора

Эта аналогия дает удобное средство для анализа линий влияния балок. Процедура показана на примере функции влияния прогиба двухопорной балки с постоянной изгибной жесткостью $B = EJ_0$ в соответствии с рис. 6.11. Сопряженная балка Мора имеет ту же длину пролета l и идентичные условия опирания, но

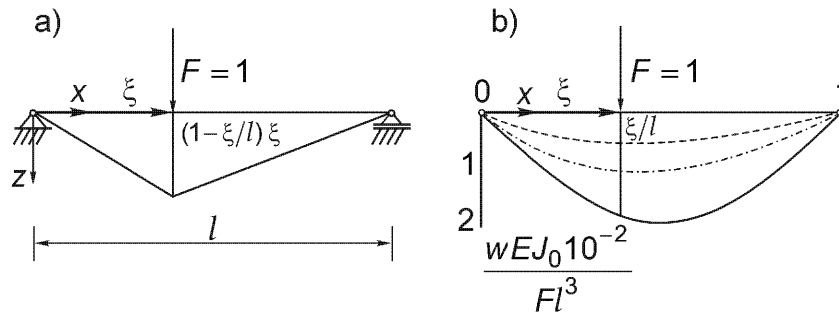


Рис. 6.11. (а) Однопролетная балка и ее сопряженная балка. Действительная единичная нагружающая сила и сопряженная поперечная нагрузка от треугольного распределения действительного изгибающего момента.

(b) Линия влияния прогиба в трех выбранных положениях: $\frac{x}{l} = 0,1$ — — — — —, $\frac{x}{l} = 0,2$ — — — — —, $\frac{x}{l} = 0,5$ — — — — — (расчеты с помощью пакета программ «Математика»).

нагружена треугольной эпюрой момента с максимумом $(1 - \xi/l)\xi$ от единичной силы $F = 1$ в действительной задаче. Сопряженные силы реакций равны:

$$\bar{A} = \frac{l^2}{3} \frac{\xi}{l} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \left(1 - \frac{\xi}{2l}\right), \quad \bar{B} = \frac{l^2}{6} \frac{\xi}{l} \left(1 - \frac{\xi^2}{l^2}\right),$$

и линия влияния прогиба определяется как

$$\bar{w}(x; \xi) = \frac{\bar{M}_y(x)}{EJ_0} = \begin{cases} \frac{l^3}{6B} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \left[\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) - \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^2 \right] \frac{x}{l}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{l^3}{6B} \frac{\xi}{l} \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{l^2}\right) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \right] \left(1 - \frac{x}{l}\right), & 0 \leq \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (6.78)$$

(§) Метод Мора

Этот метод также дает зависимые от деформаций уравнения для определения статически неопределимых сил в балках с избыточными связями. Процедура сначала продемонстрирована для простой задачи однородно нагруженной консольной балки с дополнительной шарнирной опорой в конце пролета длиной l (см. рис. 6.12). Если мы рассматриваем момент заделки $X = M_e$ как статически неопределимую пару сил, то изгибающий момент в ассоциированной основной системе, двухопорной шарнирно опертой балке, находится суперпозицией момента за счет заданной нагрузки $q_z = q_0$ и за счет концевой нагрузки X : $M_y(x) = (q_0 x/2)(l - x) + (X/l)(l - x)$. Сопряженная балка Мора в соответствии с этой аналогией [см. формулы (6.75)] становится механизмом и, следовательно,

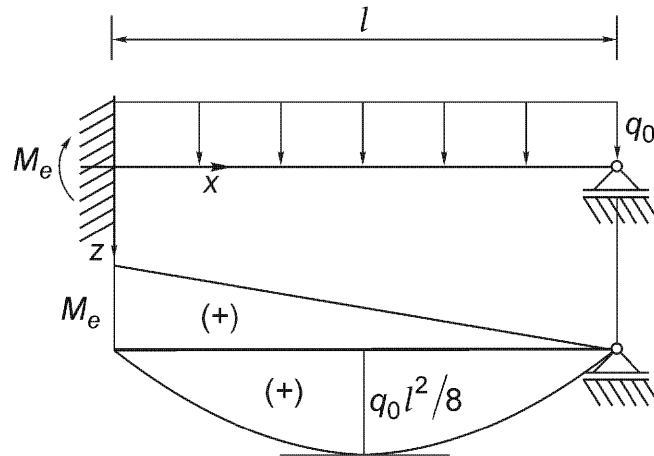


Рис. 6.12. Определение момента статически неопределимой пары $X = M_e$ методом Мора.

является кинематически неопределимой. Если она уравновешена, получаем условие

$$\bar{M}_y(x=l) = 0 = \frac{2}{3} \frac{q_0 l^2}{8} l \frac{l}{2} + X \frac{l}{2} \frac{2}{3} l, \quad (6.79)$$

которое является дополнительным уравнением для неизвестного момента X . Получаем удивительное решение

$$X = M_e = - (q_0 l^2) / 8. \quad (6.80)$$

Его абсолютная величина больше, чем аналитический экстремум изгибающего момента в пролете балки.

(§) Многопролетная балка, изображенная на рис. 6.13

Эта статически неопределимая система с заданной нагрузкой $q_z = q(x)$ является более сложной и демонстрирует возможности метода Мора в определении статически неопределимых сил. Рассматривая подробнее два из n пролетов, рис. 6.13 показывает шарнирно опертые подсистемы эквивалентной балки, соединенные на опорах шарнирами Гербера и дополнительно нагруженные неизвестными парами сил $X_k = M_k$; $k = 1, 2, \dots, (n-1)$; внутри каждого пролета действительный изгибающий момент выражается через заданную нагрузку и статически неопределимые пары сил на опорах. Сопряженные балки Мора вообще не имеют опор, за исключением концов всей балки, и они нагружены сосредоточенными моментами, определенными в соответствии с изгибной жесткостью, которая считается постоянной в пределах каждого пролета, как показано на рис. 6.13. Главный момент, то есть площадь под эпюрой моментов от этой нагрузки, обозначен Φ_k и приложен подобно сосредоточенной силе в соответствующей точке приложения на расстоянии ξ_k от правой опоры, это расстояние

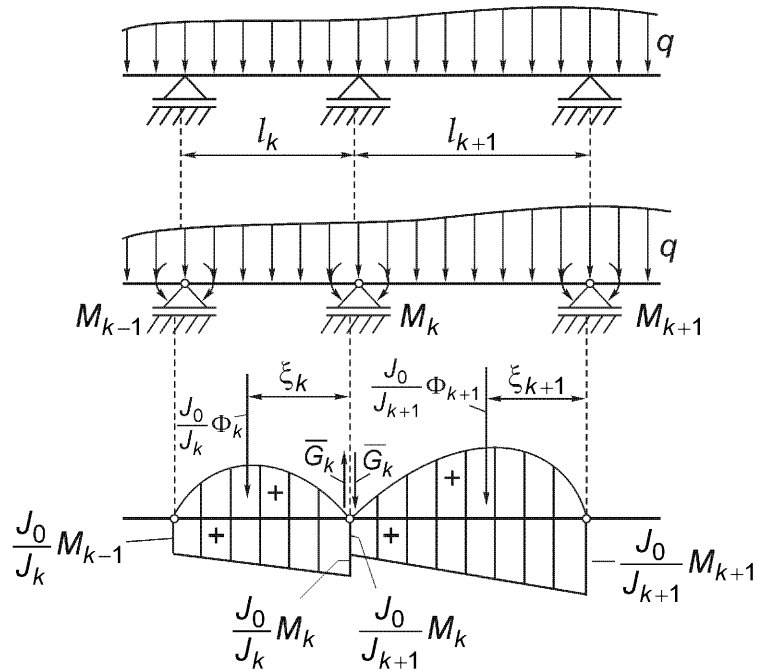


Рис. 6.13. Многопролетная балка с поперечной нагрузкой $q(x)$. Эквивалентная статически определимая система, нагруженная заданной нагрузкой $q(x)$ и неизвестными парами сил X_k . Сопряженная балка Мора с шарнирами Гербера, нагруженная приведенной эпюрой моментов (кривизна).

определяется из условия статической эквивалентности. В качестве альтернативы можно предпочесть приведение к прилегающим узлам. Кинематически неопределимая сопряженная система находится в равновесии, если

$$\bar{M}_{k-1} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{M}_{k+1} = 0,$$

где k – номер промежуточной опоры. Следовательно, обозначая поперечную силу в промежуточном шарнире через \bar{G}_k , получаем два независимых уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{J_0}{J_k} \Phi_k (l_k - \xi_k) + \frac{J_0}{J_k} M_{k-1} l_k \frac{l_k}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{J_0}{J_k} M_k - \frac{J_0}{J_k} M_{k-1} \right) l_k \frac{2l_k}{3} - \bar{G}_k l_k = 0, \\ & \frac{J_0}{J_{k+1}} \Phi_{k+1} \xi_{k+1} + \frac{J_0}{J_{k+1}} M_k l_{k+1} \frac{l_{k+1}}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{J_0}{J_{k+1}} M_{k+1} - \frac{J_0}{J_{k+1}} M_k \right) l_{k+1} \frac{l_{k+1}}{3} + \bar{G}_k l_{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Сопряженную силу в промежуточном шарнире можно исключить, что дает уравнение трех моментов (в частном случае, когда во всех пролетах $J_k = J_0 = \text{const}$, это уравнение называется уравнением Клапейрона):

$$\begin{aligned} \frac{l_k}{J_k} M_{k-1} + 2 \left(\frac{l_k}{J_k} + \frac{l_{k+1}}{J_{k+1}} \right) M_k + \frac{l_{k+1}}{J_{k+1}} M_{k+1} = \\ = -6 \left(\frac{l_k - \xi_k}{J_k l_k} \Phi_k + \frac{\xi_{k+1}}{J_{k+1} l_{k+1}} \Phi_{k+1} \right). \end{aligned} \quad (6.81)$$

Записывая такое уравнение для каждого из $(n-1)$ шарниров Гербера сопряженной балки, получаем легко решаемую неоднородную систему линейных уравнений с ленточной структурой.

Длинные балки постоянной изгибной жесткости $B = EJ_0$ с большим числом равноотстоящих опор и длиной пролета l можно в пределе рассмотреть как имеющие бесконечную длину. В случае однородной поперечной нагрузки $q_z = q_0$ изгибающий момент на опорах принимает экстремальное значение периодического распределения в пролетах

$$M_k = -\frac{q_0 l^2}{12}, \quad \text{так как:} \quad M_k l = -\Phi, \quad \Phi = \frac{2}{3} \frac{q_0 l^2}{8} l = \frac{q_0 l^3}{12}. \quad (6.82)$$

В случае многопролетных балок конечной длины это приближение становится достаточно точным на некотором расстоянии от концов балки.

6.2.3. Температурные напряжения в балках

Разность температур в балке по отношению к постоянной отсчетной температуре (в ненапряженном состоянии) может зависеть от осевой координаты x и может быть распределена по поперечному сечению как, возможно, нелинейная функция координат y и z . В неустановившихся процессах теплопереноса температура может изменяться со временем. Скорость изменения температуры считается достаточно малой, так что каждая мгновенная конфигурация может рассматриваться как находящаяся в состоянии равновесия. Таким образом, в процессе деформации время является только параметром, и инерционными эффектами можно пренебречь. Истинно нестационарными являются только задачи термического удара. Зависимость от времени в этой квазистационарной формулировке не учитывается, так что последующие формулы являются стационарными выражениями, где температура считается заданной функцией пространственных координат. Применяется формула Майзеля (6.44), которая выражает термоупругие перемещения центральных точек на оси балки. Так как $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, гидростатическое напряжение влияния равно

$$\bar{p} = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{3}. \quad (6.83a)$$

Нормальное напряжение в поперечном сечении с координатой ξ возникает за счет нагрузки, состоящей из единичной растягивающей силы и единичной поперечной сосредоточенной силы (обе силы приложены в сечении с координатой x), и его линейное распределение зависит от нормальной силы и главных изгибающих моментов [см. формулу (6.48)]:

$$\bar{\sigma}_{xx}(\xi, y, z, x) = \frac{\bar{N}}{A} + \frac{\bar{M}_y}{J_y} z - \frac{\bar{M}_z}{J_z} y. \quad (6.83b)$$

Среднее напряжение влияния постоянно в поперечном сечении, и интегрирование по объему в явном виде определяет термоупругое удлинение прямого стержня в некоторой точке x :

$$\delta_x = \int_{\xi=0}^{\xi=l} \alpha \frac{\bar{N}(\xi, x)}{A} d\xi \int_A \theta(\xi, y, z) dA_{y,z} = \int_{\xi=0}^{\xi=l} \alpha n_\theta(\xi) \bar{N}(\xi, x) d\xi, \quad (6.84)$$

где n_θ – средняя температура в поперечном сечении с координатой ξ ,

$$n_\theta(\xi) = \frac{1}{A} \int_A \theta(\xi, y, z) dA_{y,z}. \quad (6.85)$$

Нормальная сила в сечении ξ в общем случае равна единичной силе $F = 1$ или равна нулю.

Термоупругий прогиб в этой теории первого порядка не зависит от осевой деформации и, например, определяется формулой Майзеля при подстановке соответствующей функции влияния

$$\begin{aligned} \delta_z &= \int_{\xi=0}^{\xi=l} d\xi \int_A \left[\frac{\bar{M}_y(\xi, x)}{J_y} z \alpha \theta(\xi, y, z) - \frac{\bar{M}_z(\xi, x)}{J_z} y \alpha \theta(\xi, y, z) \right] dA_{y,z} = \\ &= \int_{\xi=0}^{\xi=l} \alpha \left[m_{\theta_y}(\xi) \bar{M}_y(\xi, x) + m_{\theta_z}(\xi) \bar{M}_z(\xi, x) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Моменты первого порядка от распределения температуры в поперечном сечении имеют вид

$$m_{\theta_y}(\xi) = \frac{1}{J_y} \int_A z \theta(\xi, y, z) dA_{y,z}, \quad m_{\theta_z}(\xi) = -\frac{1}{J_z} \int_A y \theta(\xi, y, z) dA_{y,z}, \quad (6.87)$$

и, будучи умноженными на коэффициент линейного температурного расширения α , они определяют главные температурные кривизны; см. также формулы (6.33) и (6.35). Главные изгибающие моменты влияния в сечении ξ возникают

за счет нагружения сосредоточенной поперечной силой $F = 1$ в сечении x . Если вместо силы $F = 1$ выбрать функцию влияния за счет единичной внешней пары сил $M = 1$ в сечении x , то из формулы Майзеля (6.86) получим термоупругий поворот этого поперечного сечения.

В заключение следует отметить, что термоупругие перемещения центральных точек оси балки и термоупругие повороты поперечных сечений получены путем интегрирования по длине пролета при условии, что линии влияния осевой силы и главных изгибающих моментов известны [см. раздел 2.5.1.2], и что средняя температура и главные термические кривизны заданы.

Подстановка $w = \delta_z$ и $v = \delta_y$ в обобщенный закон Гука (6.29) дает температурное напряжение; частную производную по x можно взять под знаком интеграла формулы Майзеля

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = E \left[\frac{\partial \delta_x}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2} - \alpha \theta(x, y, z) \right]. \quad (6.88)$$

Из-за нелинейного распределения температуры в поперечном сечении возникает нелинейное распределение температурных напряжений. Нелинейное отклонение от линейной функции от (y, z) порождает систему самоуравновешенных напряжений; равнодействующие этих напряжений равны нулю; см. σ''_{xx} в соотношении (2.136). Они являются единственными источниками температурных напряжений в балках при статически определимых условиях опирания и имеют особую важность, например, для мостов.

(§) Однопролетная шарнирно опертая балка

И изгибная жесткость $B = EJ_y$, и нагрузка от главной термической кривизны $\alpha m_{\theta y} = \alpha m_0$ заданы постоянными. Линия влияния изгибающего момента задана уравнением (5.12), а формула Майзеля (6.86) дает температурный прогиб, не зависящий от главного (температурного) изгибающего момента

$$w(x) = \int_{\xi=0}^{\xi=x} \alpha m_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \xi d\xi + \int_{\xi=x}^{\xi=l} \alpha m_0 x \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) d\xi = \frac{\alpha m_0 l^2}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (6.89)$$

Следовательно, линеаризованная кривизна является постоянной,

$$d^2 w / dx^2 = -\alpha m_0, \quad (6.90)$$

и из закона Гука следуют нелинейные температурные напряжения

$$\sigma_{zz}(z) = E\alpha [n_{\theta} + z m_{\theta} - \theta(z)], \quad (6.91)$$

которые являются самоуравновешенными, то есть, благодаря статической определенности условий опирания, их результирующие силовые факторы должны равняться нулю. На свободных от нагрузок концах балки эти напряжения должны быть равны нулю. Если они не равны нулю, то предполагается, что имеет силу принцип Сен-Венана, и решение становится хорошим приближением на достаточно большом расстоянии от концов. Напряжения совершенно исчезают, если температура распределена по высоте балки H по линейному закону:

$$\theta(z) - n_\theta = \frac{\theta_{нижн} - \theta_{верх}}{H} z, \quad (6.92)$$

куда входит разность температур нижней и верхней поверхностей. Момент первого порядка в прямоугольной области принимает значение

$$m_\theta = \frac{1}{J_y} \int_A z \theta(z) dA = \frac{\theta_{нижн} - \theta_{верх}}{H}, \quad (6.93)$$

и, следовательно, в этом частном случае легко проверить, что выражение в квадратных скобках в формуле (6.91) становится равным нулю. Подвижная опора должна позволять удлинение балки за счет средней термической деформации αn_θ , которая для прямоугольного поперечного сечения определяется выражением

$$\alpha n_\theta = \alpha (\theta_{нижн} + \theta_{верх}) / 2. \quad (6.94)$$

(§) Статически неопределенная однопролетная балка

Эта балка с постоянной изгибной жесткостью $B = EJ_0$, жестко заземленная на обоих концах, нагружена постоянной главной термической кривизной αm_0 . Линия влияния изгибающего момента определена сначала при изотермических условиях

$$\begin{aligned} \bar{M}_y(\xi, x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[\left(1 + \frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2}\right) \xi - \left(1 - \frac{x}{l}\right) x \right], & 0 \leq \xi \leq x, \\ \bar{M}_y(\xi, x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[\left(1 + \frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2}\right) \xi - \left(1 - \frac{x}{l}\right) x \right] - \xi + x, & x \leq \xi \leq l. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Вследствие этого термический прогиб, полученный по формуле Майзеля (6.86), тождественно равен нулю

$$w(x) = \alpha m_0 \int_0^l \bar{M}_y(\xi, x) d\xi \equiv 0. \quad (6.96)$$

Температурные напряжения равны

$$\sigma_{xx}(z) = -E \alpha \theta(z), \quad (6.97)$$

и главный изгибающий момент является постоянным (он равен моменту заделки)

$$M_y = \int_A z \sigma_{xx}(z) dA = -E \alpha \int_A z \theta(z) dA = -E J_y \alpha m_0. \quad (6.98)$$

В этом случае проще решить расширенное дифференциальное уравнение прогиба [см. уравнение (6.36)] с однородными кинематическими ограничениями $w = w' = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, чем применять формулу Майзеля. Заметим, что из соображений симметрии силы реакций опор должны равняться нулю.

6.2.4. Кручение

Кручение прямолинейного стержня с постоянным поперечным сечением в виде одной тонкостенной ячейки дает статически определимый поток касательных напряжений $T = \sigma_{xs} h$, который связан с крутящим моментом первой формулой Бредта (2.171). Ниже рассмотрено линейно упругое деформирование и далее обсуждено его расширение на статически неопределимые задачи многоячеистых поперечных сечений. Введение функции депланации дает возможность анализа комбинированного нагружения при кручении и сдвиге, который представляет особую важность для тонкостенных незамкнутых поперечных сечений с малой жесткостью при кручении. Следовательно, особое внимание уделяется центру кручения. Рассмотрены некоторые детали кручения с ограниченной депланацией, которые проиллюстрированы на примере С-профиля (швеллера). Завершают это введение в технически ориентированную теорию закручивание сплошных профилей, в том числе с выемками, и мембранная аналогия Прандтля.

6.2.4.1. Тонкостенные одно- и многоячеистые поперечные сечения

Постоянный поток касательных напряжений в одноячеистом сечении связан с крутящим моментом первой формулой Бредта (2.171), выведенной в 1896 году,

$$M_T = 2 A T, \quad (6.99)$$

где A – площадь внутри контура поперечного сечения. Чистое кручение, или кручение Сен-Венана – это механическое состояние бруса с постоянным поперечным сечением, находящегося под действием постоянного крутящего момента, при условии, что на депланацию в осевом направлении, если она имеется, не наложено ограничений. Относительный угол закручивания $\Theta = d\chi / dx$ становится постоянным, и взаимный поворот двух поперечных сечений, находящихся между собой на расстоянии x , становится, таким образом, линейной функцией

$\chi = \Theta x$. Благодаря жесткому повороту каждого поперечного сечения точка контура, находящаяся на расстоянии ρ по нормали от центральной оси, перемещается в окружном направлении на $\rho\chi(x)$ и в осевом направлении на $u = \Theta\varphi(s)$, где s – криволинейная координата, измеряемая вдоль контура, а $\varphi(s) = u(s)/\Theta$ – функция депланации, которая не должна зависеть от x . Угол закручивания χ предполагается достаточно малым, и тогда линеаризованные геометрические соотношения (1.21) и (1.31) дают деформацию сдвига

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial(\rho\chi)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} = \Theta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \rho \right). \quad (6.100)$$

Из интегрирования по контуру ячейки (при неизменной функции депланации) следует выражение

$$\oint \gamma_{xs} ds = \Theta \oint \rho ds = 2 A \Theta, \quad (6.101)$$

которое все еще не зависит от какого бы то ни было определяющего соотношения. Если разрешить соотношение (6.101) относительно угла закручивания с помощью закона Гука [см. формулу (4.8)]

$$\gamma_{xs} = \sigma_{xs}/G = T/Gh = M_T/2GAh, \quad (6.102)$$

то получается вторая формула Бредта

$$\Theta = \frac{M_T}{4GA^2} \oint \frac{ds}{h}, \quad (6.103)$$

причем толщина стенки h может быть переменной. Угол закручивания и крутящий момент при линейно упругом кручении связаны линейной зависимостью $\Theta = M_T/GJ_T$, и жесткость при кручении для стержня с одноячейстым поперечным сечением принимает вид

$$J_T = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{h}}, \quad M_T = GJ_T\Theta, \quad (6.104)$$

причем для стенки постоянной толщины $\oint \frac{ds}{h} = \frac{L}{h}$. Для круглой тонкостенной трубы, где периметр $L = 2\pi R$, $A = \pi R^2$ и $\Theta = M_T/GJ_T$, жесткость при кручении принимает вид степенного закона $J_T = 2\pi h R^3$.

Формулы Бредта для одной ячейки остаются справедливыми также и в случае переменного потока касательных напряжений, например, для многоячейстого поперечного сечения, где отдельные ячейки разделены промежуточ-

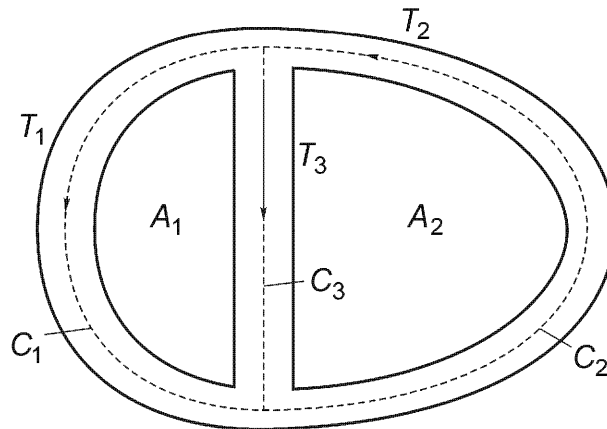


Рис. 6.14. Многоячеестое поперечное сечение с одной промежуточной перемычкой. Разветвление потока касательных напряжений.

ными перемычками; случай одной перемычки C_3 показан на рис. 6.14. В каждой части стенки поток касательных напряжений должен быть постоянным, но в многоячеестых поперечных сечениях поток касательных напряжений в перемычках становится статически неопределимым. В качестве дополнительного условия применяется условие совместного деформирования: все поперечное сечение жестко поворачивается, и то же происходит с каждой одноячейстой подсистемой. В пересечениях (узлах) для потока касательных напряжений справедливы уравнения баланса, аналогичные тем, что использовались для секундного массового расхода при течении несжимаемой жидкости [см. соотношение (1.86)]. Следовательно, в соответствии с рис. 6.14, входящий поток касательных напряжений T_2 разделяется на поток касательных напряжений T_1 и поток касательных напряжений T_3 в перемычке

$$T_2 = T_3 + T_1. \quad (6.105a)$$

То же справедливо и для противоположного узла. Первая формула Бредта применяется отдельно для каждой одноячейстой подсистемы, и тогда суперпозиция n ячеек дает главный крутящий момент

$$2 \sum_{i=1}^n A_i T_i = M_T, \quad \text{на рис. 6.14 } n=2, \quad (6.105b)$$

где A_i , $i=1, 2, \dots, n$ – внутренние площади, ограниченные одноячейстыми подсистемами. Считая поток касательных напряжений постоянным в каждой отдельной ячейке и направленным против часовой стрелки (см. рис. 6.14), с помощью суперпозиции и в соответствии с условием (6.105a) получаем поток касательных напряжений в перемычке C_3 . В соответствии с наличием общего угла закручивания для обеих ячеек на рис. 6.14 из второй формулы Бредта следует соотношение

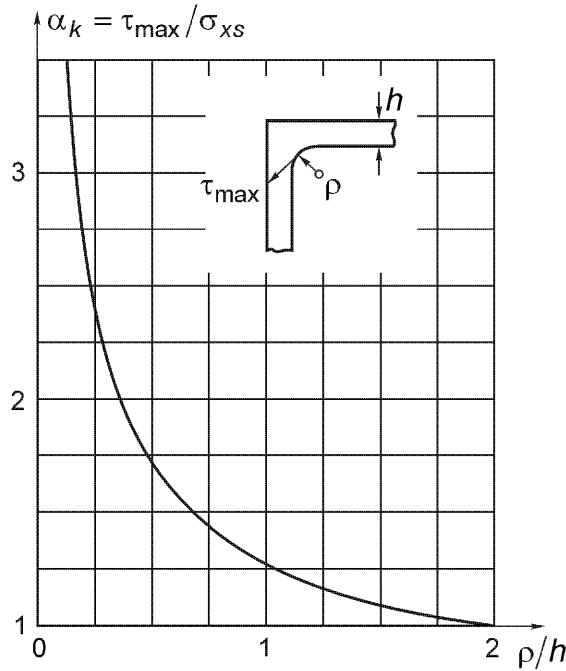


Рис. 6.15. Геометрический коэффициент увеличения касательных напряжений в угле с радиусом закругления ρ .

$$2G\Theta = \frac{1}{A_1} \left(T_1 \int_{C_1} \frac{ds}{h} - T_3 \int_{C_3} \frac{ds}{h} \right) = \frac{1}{A_2} \left(T_2 \int_{C_2} \frac{ds}{h} - T_3 \int_{C_3} \frac{ds}{h} \right). \quad (6.106)$$

Таким образом, при $n=2$ формулы (6.105а, б) и (6.106) определяют три неизвестные величины T_1 , T_2 , T_3 , а также угол закручивания Θ .

Если в перегородке отсутствует поток касательных напряжений (например, в случае геометрии сечения, показанного на рис. 6.14, $T_3 = 0$), то перегородка совсем не вносит вклада в жесткость при кручении (она является слепой, или фиктивной).

Среднее значение касательного напряжения до сих пор задавалось величиной $\sigma_{xs} = T_i/h$, но в углах (узлах) тонкостенного поперечного сечения, где перемычки соединяются с контуром, возникает концентрация напряжений. Максимальная величина касательного напряжения на внутренней поверхности такого закругленного угла зависит от отношения радиуса кривизны к толщине стенки. Геометрический коэффициент увеличения напряжений, то есть отношение пиковой величины к невозмущенному среднему значению напряжения, определил расчетным путем J.H. Huth. Смотрите:

- Huth J.H. ASME Journal of Applied Mechanics, 17, 1950, p. 388.

Эти результаты воспроизведены на рис. 6.15. Сравните с распределением скорости несжимаемой жидкости при обтекании угла; см. рис.13.12.

Соединяя касательные деформации, выраженные формулой (6.100), с законом Гука (6.102) и интегрируя по контуру, получаем функцию депланации, причем поток касательных напряжений может быть переменным в смысле, об- сужденном выше:

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \frac{1}{G\Theta} \int_0^s T \frac{ds}{h} - \int_0^s p ds. \quad (6.107)$$

Подставляя постоянный поток касательных напряжений при чистом кручении $T = M_T/2A$ и обозначая через $a(s)$ площадь треугольной области, покрываемой нормалью p при своем повороте, получаем выражение для осевого перемещения $u(s)$, которое все еще не определено из-за наличия константы интегрирования:

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \frac{M_T}{2GA\Theta} \int_0^s \frac{ds}{h} - 2a(s) = \frac{u(s)}{\Theta}, \quad \text{где} \quad a(s) = \frac{1}{2} \int_0^s p ds.$$

Если в качестве центра сдвига выбран полюс вращения поперечного сечения [см. формулы (6.118)], то осевое перемещение полностью определяется. В рамках линейной теории упругости подстановка второй формулы Бредта (6.103) дает функцию депланации, зависящую от геометрии поперечного сечения:

$$\varphi_0 - \varphi(s) = 2 \left[a(s) - \frac{A}{B} b(s) \right], \quad (6.108)$$

где

$$a(s) = \frac{1}{2} \int_0^s p ds, \quad b(s) = \int_0^s \frac{ds}{h} \quad \text{и} \quad B = b(L) = \oint \frac{ds}{h}, \quad L = \oint ds. \quad (6.109)$$

Для тонкостенной круглой трубы, у которой центр сдвига совпадает с центром тяжести поперечного сечения, соотношения (6.108) и (6.109) дают $a(s) = Rs/2$, $b(s) = s/h$, $A = \pi R^2$, $B = 2R\pi/h$, и, следовательно, $\varphi(s) = \varphi_0$, то есть нет никакой депланации поперечного сечения. Из подобных соображений симметрии имеются и другие поперечные сечения, свободные от депланации, например, ячейка со стенкой постоянной толщины и с контуром в виде замкнутого многоугольника, составленного из прямолинейных отрезков. Труба с поперечным сечением треугольной формы свободна от депланации также и для более общего случая, когда каждая сторона отличается по толщине. Такое свойство отсутствия депланации имеет особую важность для технических приложений.

Более часто действительные условия нагружения представляют собой комбинацию кручения и поперечного изгиба; основные статические уравнения

рассмотрены в разделе 2.5.1. Сочетание крутящего момента и ненулевой поперечной силы может быть представлено в виде равнодействующей, параллельной поперечной силе. Следовательно, расположение центра сдвига определяется через условие равенства осевого момента поперечной силы со специальной точкой приложения и осевого момента «заданного» потока касательных напряжений T в поперечном сечении. Рассмотрим сначала компоненту поперечной силы Q_z , а $Q_y = 0$. В этом случае формула (6.55) приводится к виду

$$T(s) = T_0 - \frac{Q_z}{J_y} S_y(s), \quad S_y(s) = \int_0^s z h(s) ds, \quad (6.110)$$

где y и z – главные центральные оси поперечного сечения. При использовании условия статической эквивалентности из равенства осевых моментов относительно центра тяжести поперечного сечения следует соотношение:

$$Q_z y_D = \oint T p(s) ds, \quad (6.111)$$

и выражение для центральной координаты центра сдвига y_D принимает вид

$$y_D = 2 A \frac{T_0}{Q_z} - \frac{1}{J_y} \oint p(s) S_y(s) ds. \quad (6.112)$$

Если заметить, что элементарный статический момент равен $dS_y = z h ds$ и $p ds = 2 d[a(s)]$, то интегрирование по частям при $S_y(0) = S_y(L) = 0$ приводит к выражению

$$y_D = 2 \left[\frac{1}{J_y} \oint z a(s) h ds + A \frac{T_0}{Q_z} \right]. \quad (6.113)$$

Координата центра сдвига z_D выводится аналогично путем рассмотрения компоненты поперечной силы Q_y при $Q_z = 0$; таким образом, в формуле (6.113) заменяем J_y на J_z , множитель z на y и изменяем знак. Статически неопределимый поток касательных напряжений T_0 получается из условия, что угол закручивания равен нулю, если поперечная сила Q_z приложена к центру кручения. Интегрирование по замкнутому контуру в уравнении (6.107) при условии, что функция депланации постоянна, $\varphi(L) = \varphi(0)$, дает:

$$\frac{1}{G \Theta} \oint \frac{T}{h} ds = 2 A. \quad (6.114)$$

Подстановка потока касательных напряжений из соотношений (6.110) при условии $\Theta = 0$ приводит к соотношению

$$T_0 \oint \frac{ds}{h} - \frac{Q_z}{J_y} \oint S_y(s) \frac{ds}{h} = 0. \quad (6.115)$$

Если поперечная сила зависит от осевой координаты $Q_z(x)$, это уравнение в общем случае становится, по крайней мере, приближенным. Исключение из уравнения (6.113) постоянного потока касательных напряжений T_0 и вычисление по частям интеграла по замкнутому контуру в вышеуказанном уравнении окончательно определяет координату центра сдвига, зависящую от геометрии поперечного сечения:

$$y_D = \frac{2}{J_y} \oint z \left[a(s) - \frac{A}{B} b(s) \right] h ds. \quad (6.116)$$

Это выражение имеет силу в рамках линейной теории упругости, но явно в него не входит ни один упругий параметр. Аналогично

$$z_D = -\frac{2}{J_z} \oint y \left[a(s) - \frac{A}{B} b(s) \right] h ds. \quad (6.117)$$

В вышеприведенных интегралах выражение в квадратных скобках равно функции депланации $[\varphi_0 - \varphi(s)]$, соотношение (6.108). Почленно интегрируя с учетом равенства нулю статических моментов поперечного сечения, получаем центральные координаты центра сдвига:

$$y_D = -\frac{1}{J_y} \oint z \varphi(s) h ds, \quad z_D = \frac{1}{J_z} \oint y \varphi(s) h ds. \quad (6.118)$$

Так как $h ds = dA$ – элементарная площадь тонкостенного поперечного сечения, то криволинейные интегралы по контуру можно рассматривать как интегралы по площади поперечного сечения. Функция депланации определена для всех форм поперечных сечений, а также и для сплошных стержней. Таким образом, при рассмотрении интегралов по площади поперечного сечения формулы (6.118) определяют центр сдвига в общем случае, они не ограничены предположением о тонкостенной конструкции. См. литературу:

- Trefftz E., ZAMM, 15, 1935, p. 220.

Поперечная сила должна быть постоянной. Эти формулы не содержат никаких упругих констант, но следует иметь в виду, что они ограничены областью линейной упругости. В общем случае нелинейное поведение материала влияет на положение центра сдвига.

6.2.4.2. Тонкостенные незамкнутые поперечные сечения

Жесткость при кручении для стержня с незамкнутым поперечным сечением очень низка, и крутящий момент приводит как к большому закручиванию, так и к

большим осевым смещениям. Сдвиговые напряжения σ_{xs} должны быть направлены по касательным к свободным от усилий поверхностям, но для образования пар сил должны быть переменными по толщине h . Поток касательных напряжений для вращательной части сдвиговых напряжений равен нулю. Функция депланации, определяемая соотношением (6.107), для чистого кручения при $T = 0$ принимает вид:

$$\varphi(s) = \varphi_0 - 2a(s), \quad \text{где} \quad a(s) = \frac{1}{2} \int_0^s p(s) ds. \quad (6.119)$$

Например, концы круглой трубы (с разрезом) радиуса R под действием крутящего момента $M_T = (G J_T \Theta)$ отдаляются друг от друга в осевом направлении. В этом случае незамкнутое поперечное сечение является симметричным, и в качестве начала координат можно взять центр тяжести сечения (подходит любая точка на оси симметрии). Тогда $a(s) = R s / 2$, и соотношение (6.119) при умножении на Θ принимает вид

$$u(s=0) - u(s=2R\pi) = \Theta [\varphi(0) - \varphi(2R\pi)] = 2\pi R^2 \Theta, \quad (6.120)$$

где предполагается нестесненная депланация поперечных сечений.

(§) Кручение тонкостенного стержня с прямоугольным поперечным сечением

Поперечное сечение имеет двойную симметрию, и центр тяжести совпадает с центром сдвига. Полагая для поперечного сечения на рис. 6.16 $L \gg h$ и рассматривая площадь $a(s) = z s / 2$ (расстояние z выбрано по отношению к некоторой точке отсчета на оси симметрии), получаем приближение для функции депланации в виде $\varphi(s) = \varphi_0 - z s$. Определяя произвольную постоянную из условия $\varphi(s = L/2) = 0$ и принимая обозначение $y = s - L/2$, получаем приближенное выражение

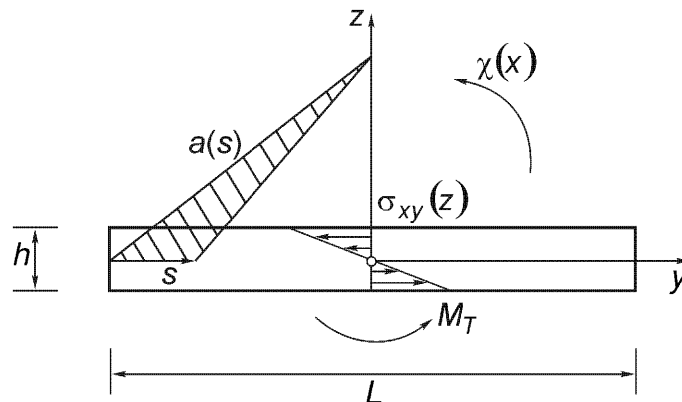


Рис. 6.16. Кручение стержня с длинным и узким прямоугольным поперечным сечением, $L \gg h$.

$$\varphi(y, z) = -y z. \quad (6.121)$$

где y и z – центральные оси. При заданном угле закручивания на единицу длины осевое смещение аппроксимируется выражением

$$u(y, z) = \Theta \varphi(y, z) = -\Theta y z. \quad (6.122)$$

При условии жесткого поворота поперечного сечения две другие компоненты перемещения для малых углов закручивания определяются выражениями

$$v(x, y, z) = -z \chi(x) = -z \Theta x, \quad w(x, y, z) = y \chi(x) = y \Theta x. \quad (6.123)$$

Градиенты смещений, то есть производные от приведенных выше перемещений, подставляем в закон Гука [формулы (4.8)] и получаем линейное распределение

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G(-\Theta z - \Theta z) = -2G\Theta z, \\ \sigma_{xz} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G(-\Theta y + \Theta y) = 0. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Максимальное касательное напряжение при кручении возникает в средней точке длинной стороны прямоугольника ($y = 0, z = \pm h/2$) и в первом приближении достаточно точно определяется соотношением (6.124)

$$\max |\sigma_{xy}| = G\Theta h. \quad (6.125)$$

Касательными напряжениями вдоль короткой стороны $h \ll L$ пренебрегают из-за второго приближения в соотношении (6.124), и условие на свободной от усилий поверхности нарушается. Лорд Кельвин уже обращал внимание на тот факт, что пары распределенных касательных напряжений, определенных соотношением (6.124), в сумме не равны заданному крутящему моменту

$$M_x = \int_A (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA = 2G\Theta \int_A z^2 dA = 2G\Theta J_y \neq M_T = G\Theta J_T. \quad (6.126)$$

Увеличенная ошибка в соотношении (6.124) происходит из-за дифференцирования приближенной функции депланации. Главный момент в формуле (6.126) относится к парам «больших» компонент касательных напряжений σ_{xy} с малым плечом h и должен включать еще и слагаемое того же порядка от пар «малых» компонент касательных напряжений σ_{xz} (которыми выше пренебрегли), имеющих большое плечо L . Следовательно, требуется лучшее приближение для жесткости при кручении GJ_T . Для этого вместо приближения функции депла-

рации рассматривается функция напряжений при кручении (2.11), и касательные напряжения находятся через ее производные:

$$\sigma_{xy} = 2G\Theta \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \sigma_{xz} = -2G\Theta \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \text{где } \Psi = \Psi(y, z). \quad (6.127)$$

Так как $\sigma_{xx} = 0$, локальное условие равновесия удовлетворяется тождественно

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 2G\Theta \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} \right) \equiv 0. \quad (6.128)$$

Интегрирование приближенного распределения напряжений в соотношениях (6.124) дает функцию напряжений, ошибки теперь несколько уменьшены за счет сглаживания, и это приближение настолько же хорошо, как и функция депланации (6.121)

$$\Psi(y, z) = -\int z dz = C - z^2/2. \quad (6.129)$$

Динамическое граничное условие на свободной от усилий поверхности с контуром $z = z(y)$ может быть рассмотрено только на длинной стороне $z = \pm h/2$. С учетом формул (6.127) получаем условие для функции напряжений

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xy}} \Rightarrow \sigma_{xy} dz - \sigma_{xz} dy = 2G\Theta d\Psi = 0 \Rightarrow \Psi = \text{const}.$$

Имеется только один замкнутый контур; следовательно, предполагается, что на поверхности прямоугольника функция напряжений принимает нулевое значение. Постоянная интегрирования равна $C = h^2/8$, и

$$\Psi = \frac{h^2}{8} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (6.130)$$

Это приближение не зависит от y ; граничное условие при $y = \pm L/2$ не удовлетворяется. Осевой момент (6.126) получается путем подстановки функции напряжений [формулы (6.127)], проведения тождественного преобразования и интегрирования:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA = -2G\Theta \int_A \left(y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) dA = \\ &= -2G\Theta \left[-2 \int_A \Psi dA + \iint_A \frac{\partial (y\Psi)}{\partial y} dy dz + \iint_A \frac{\partial (z\Psi)}{\partial z} dz dy \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2G\Theta \left[2 \int_A \Psi dA - \int_{z_1}^{z_2} \{y_2(z) - y_1(z)\} \Psi dz + \int_{y_2}^{y_1} \{z_2(y) - z_1(y)\} \Psi dy \right] = \\
&= 2G\Theta \left[2 \int_A \Psi dA + \oint_{\partial A} \Psi(y, z) (z dy - y dz) \right]. \quad (6.131)
\end{aligned}$$

Эта формула справедлива для произвольной формы поперечного сечения с площадью A . Для односвязных поперечных сечений функция напряжений на контуре ∂A принимается равной нулю, и момент определяется простым выражением

$$M_T = G\Theta 4 \int_A \Psi dA = G\Theta J_T, \quad J_T = 4 \int_A \Psi dA. \quad (6.132)$$

Крутящий момент и, таким образом, жесткость прямоугольника при кручении получается подстановкой соотношения (6.130) и интегрированием приближенной функции напряжений; в связи с этим ошибки снижаются за счет сглаживания:

$$M_T = G\Theta 4 \frac{h^2}{8} \int_A \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) dA = G\Theta \frac{h^2}{2} \left(A - \frac{4}{h^2} J_y \right) = G\Theta J_T. \quad (6.133)$$

Момент инерции равен $J_y = Lh^3/12$, и жесткость при кручении тонкого прямоугольника хорошо аппроксимируется выражением

$$J_T = \frac{Lh^3}{3}. \quad (6.134)$$

Сравнивая формулы (6.133) и (6.126), легко увидеть, что пары касательных напряжений эквивалентны осевому моменту $M_x = M_T/2$. Таким образом, недостающая половина крутящего момента вносится парами касательных напряжений σ_{xz} , пренебрежимо малыми компонентами касательных напряжений при кручении. Распределение напряжений из формул (6.124), которое получено дифференцированием приближенного выражения, пригодно только в малой окрестности центра тяжести поперечного сечения $|z| \leq h/2$, $|y| \ll L/2$, но достаточно хорошо аппроксимирует максимальное касательное напряжение.

(§) Обобщение соотношения (6.134)

Эти приближения для максимального касательного напряжения и жесткости при кручении выведены для тонкого прямоугольника и обобщены для учета переменной толщины стенки $h(s)$ и для тонкостенных незамкнутых поперечных сечений с искривленными профилями,

$$\max |\sigma_{xs}| = G \Theta h_{\max}, \quad J_T = \frac{1}{3} \int_0^L h^3 ds, \quad (6.135)$$

где s – длина дуги, измеренная вдоль контура. В частности, жесткость при кручении незамкнутого профиля, состоящего из прямоугольников, соединенных, например, сваркой, приблизительно пропорциональна сумме

$$J_T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i^3 L_i. \quad (6.136)$$

Жесткость круглой трубы с разрезом, имеющей постоянную толщину, определяется выражением

$$J_T = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} h^3 R d\theta = 2\pi R \frac{h^3}{3}, \quad (6.137)$$

и оказывается, что она намного меньше, чем у круглой трубы с замкнутым поперечным сечением

$$J_T = 2\pi h R^3. \quad (6.138)$$

Отношение углов закручивания становится большим, а именно $3R^2/h^2 \gg 1$.

В заключение следует отметить, что балки с незамкнутыми поперечными сечениями при нагружении поперечными силами следует предохранять от кручения. Они имеют малую жесткость при кручении, поэтому и угол закручивания, и осевые смещения при деформации становятся большими даже при малых или умеренных крутящих моментах. Следовательно, особую важность имеет то, чтобы точкой приложения поперечной нагрузки был центр сдвига. Он все так же определяется формулами (6.118):

$$y_D = -\frac{1}{J_y} \oint z \varphi(s) h ds, \quad z_D = \frac{1}{J_z} \oint y \varphi(s) h ds, \quad (6.139)$$

$$a(s) = \frac{1}{2} \int_0^s \rho ds, \quad \varphi(s) = \varphi_0 - 2a(s).$$

В этом случае поперечная сила может быть переменной. Поток касательных напряжений в незамкнутых поперечных сечениях при поперечном изгибе с кручением зависит только от поперечной силы [см. формулу (6.55)]:

$$T(s) = -\left[\frac{Q_z}{J_y} S_y(s) + \frac{Q_y}{J_z} S_z(s) \right]. \quad (6.140)$$

В случае комбинированного нагружения в выражение для касательных напряжений при кручении следует подставить соответствующее среднее напряжение $T(s)/h$.

(§) Стесненная деформация

Чистое кручение нуждается в свободе смещений в осевом направлении. В инженерной практике деформация всегда в большей или меньшей степени стеснена, например, опорами балки; такой иллюстрацией стесненной деформации при кручении может служить жесткое защемление консольной балки. В таких условиях в первую очередь значительно изменяется также и напряженное состояние. Этот эффект резко выражен в стержнях с незамкнутыми поперечными сечениями. Теперь поворот поперечных сечений надо рассматривать происходящим вокруг специально определенной оси, проходящей через центр сдвига. Чтобы упростить теорию кручения в условиях стесненной деформации, функция деформации из формулы (6.119) преобразована, и центр сдвига принят за начало координат. Координаты точек поперечного сечения изменяются: $y^* = y - y_D$, $z^* = z - z_D$, и $u = \Theta\varphi$ или $u = \Theta\varphi^*$, $v = -z\chi$, $w = y\chi$. Касательные напряжения при чистом кручении, полученные с помощью закона Гука, должны быть инвариантными при трансляционном переносе системы координат

$$\sigma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G \Theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) = G \Theta \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} - z^* \right), \quad (6.141)$$

$$\sigma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \Theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) = G \Theta \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial z^*} + y^* \right). \quad (6.142)$$

Из интегрирования и сравнения результатов следует линейное преобразование функции деформации

$$\varphi^* = \varphi - y z_D + z y_D. \quad (6.143)$$

Основное допущение в теории стесненной деформации, в которой относительный угол закручивания становится переменным по длине стержня $\Theta(x)$, состоит в представлении осевого перемещения в форме разделяемых функций: результат аналогичен чистому кручению, но с центром сдвига в качестве начала координат

$$u(x, s) = \Theta(x) \varphi^*(s). \quad (6.144)$$

Так как в соответствии с теорией тонких стержней $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, напряжения деформации выводятся из одноосного закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^*(x, s) &= E \frac{\partial u}{\partial x} = E \varphi^*(s) \frac{d\Theta(x)}{dx} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_A \sigma_{xx}^* dA &= \int_A y \sigma_{xx}^* dA = \int_A z \sigma_{xx}^* dA = 0 \end{aligned} \quad (6.145)$$

и распределены в каждом поперечном сечении как система самоуравновешенных нормальных напряжений. Следовательно, константа в функции деформации определяется из уравнения

$$\int_A \varphi^*(s) dA = \int_A \varphi(s) dA = \varphi_0 A - 2 \int_A a(s) dA = 0. \quad (6.146)$$

Остальные условия отсутствия главных осевых моментов представляют центр сдвига как центр вращения при кручении (при использовании приближения разделяемой функции)

$$\int_A y \varphi^*(s) dA = \int_A y \varphi(s) dA - z_D J_z = 0, \quad (6.147)$$

$$\int_A z \varphi^*(s) dA = \int_A z \varphi(s) dA + y_D J_y = 0. \quad (6.148)$$

Самоуравновешенные нормальные напряжения деформации переменны в осевом направлении, и, таким образом, для уравнивания сил, приложенных к бесконечно малому элементу тонкостенного стержня, требуется дополнительное касательное напряжение [обратитесь к уравнению (6.52) и см. рис. 6.4]:

$$h \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial T^*}{\partial s} = 0. \quad (6.149)$$

Интегрирование этого уравнения с учетом однородного граничного условия на свободном конце незамкнутого поперечного сечения $T^*(s=0) = 0$ дает

$$T^*(x, s) = - \int_0^s z \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} ds = -E \frac{d^2 \Theta}{dx^2} \int_0^s h \varphi^*(s) ds. \quad (6.150)$$

Дополнительные касательные напряжения σ_{xs}^* и соответствующий поток касательных напряжений T^* в вышеприведенном приближении не производят никаких дополнительных сдвиговых деформаций. Обозначая расстояние по нормали от элементарных площадок до центра сдвига через ρ^* , получаем смещения в плоскости как жесткий поворот $\rho^* \chi$ ($\partial \chi / \partial x = \Theta$) и выражение преобразованной функции деформации. Следовательно, сдвиговые деформации обращаются в нуль,

$$\varphi^*(s) = \varphi_0 - \int_0^s p^* ds, \quad \gamma_{xs}^* = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial(p^* \chi)}{\partial x} = \Theta \frac{d\varphi^*}{ds} + p^* \Theta = 0. \quad (6.151)$$

Поток касательных напряжений деформации T^* , направленный по касательной к контуру, вносит вклад в крутящий момент в виде осевого момента относительно оси x , проходящей через центр сдвига,

$$M_x^*(x) = \int_0^L T^* p^* ds = -E \frac{d^2 \Theta}{dx^2} \int_0^L p^*(s) ds \int_{\sigma=0}^{\sigma=s} h \varphi^*(\sigma) d\sigma.$$

Интегрирование по частям с дифференциалом $d\varphi^* = -p^* ds$ и с учетом того, что интеграл от функции деформации по площади поперечного сечения равен нулю, приводит к соотношению

$$M_x^*(x) = -E \frac{d^2 \Theta}{dx^2} \int_0^L \varphi^{*2} h ds = -E C^* \frac{d^2 \Theta}{dx^2}. \quad (6.152)$$

Константу, зависящую от формы поперечного сечения,

$$C^* = \int_0^L \varphi^{*2} h ds = \int_A \varphi^{*2} dA, \quad [C^*] = \text{м}^6, \quad (6.153)$$

можно назвать геометрическим коэффициентом жесткости деформации. Она имеет размерность длины в шестой степени. Следовательно, крутящий момент задается суперпозицией осевого момента при чистом кручении и дополнительного слагаемого за счет стесненной деформации:

$$M_T = GJ_T \Theta(x) + M_x^*(x), \quad (6.154)$$

где J_T определяется формулой (6.135). Подстановка соотношения (6.152) приводит к линейному дифференциальному уравнению второго порядка для относительного угла закручивания при кручении со стесненной деформацией

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} - a^{-2} \Theta = -\frac{M_T}{EC^*}, \quad \text{где} \quad a^2 = 2(1+\nu)C^*/J_T. \quad (6.155)$$

Полагая заданный крутящий момент постоянным, $M_T = \text{const}$, и считая постоянным соответствующий интеграл, получаем общее решение в виде

$$\Theta(x) = \frac{M_T}{GJ_T} \left(1 + D_1 \cosh \frac{x}{a} + D_2 \sinh \frac{x}{a} \right), \quad \text{где} \quad a = \sqrt{2(1+\nu)C^*/J_T}. \quad (6.156)$$

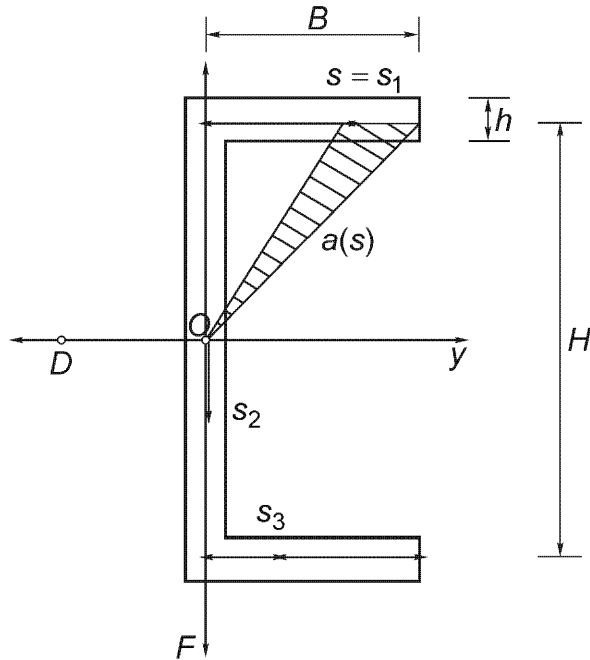


Рис. 6.17. Консольная балка длины l с С-профилем (швеллер), нагруженная на конце силой F . Центр сдвига расположен в точке D .

Постоянные интегрирования D_1 и D_2 определяются из двух граничных условий. Жестко заземленный конец требует равенства нулю осевых перемещений $u = 0$ и совместимого с этим условия, что угол закручивания $\Theta = 0$. На свободном конце при нестесненной деформации нормальные напряжения деформации должны быть равны нулю, $\sigma_{xx}^* = 0$, и, следовательно, $d\Theta/dx = 0$.

(§) Консольная балка с С-профилем (швеллер), изображенная на рис. 6.17 Эта консольная балка рассматривается как пример, иллюстрирующий сложное нагружение при поперечном изгибе с кручением в условиях стесненной деформации. Балка нагружена на конце сосредоточенной силой F , проходящей через стенку* (перемычку) профиля. При ориентации осей координат, показанной на этом рисунке, выражения для поперечной силы и главного изгибающего момента принимают вид

$$Q_z = -F, \quad M_y = F(l - x), \quad (6.157)$$

причем поперечная сила также проходит через перемычку. Крутящий момент может быть определен лишь в том случае, если известен центр сдвига. Прежде всего надо определить функцию деформации (6.119) и так выбрать ее константу, чтобы выполнялось уравнение (6.146). Для удобства начало координат 0

* Швеллер состоит из стенки (вертикальной части профиля на рис. 6.17) и двух полок (горизонтальных частей профиля). (Прим. перев.)

выбирается на оси симметрии (но не совпадает с центром тяжести сечения), и координата s отсчитывается вдоль профиля против часовой стрелки:

$$\text{верхняя полка: } a(s_1) = \frac{1}{2} \frac{H}{2} s_1, \quad \varphi = \varphi_0 - 2a(s_1), \quad \varphi^* = \frac{H}{2}(B - s_1 + y_D),$$

$$\text{перемычка: } a(s_2) = \frac{1}{2} \frac{H}{2} B = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{H}{2} B, \quad \varphi^* = \left(\frac{H}{2} - s_2 \right) y_D,$$

$$\text{нижняя полка: } a(s_3) = \frac{1}{2} \frac{H}{2} B + \frac{1}{2} \frac{H}{2} s_3, \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{H}{2}(B + s_3), \quad \varphi^* = -\frac{H}{2}(s_3 + y_D).$$

Из-за симметрии швеллера $z_D = 0$, и выражение (6.143) упрощается: $\varphi^* = \varphi + z y_D$. Статический момент относительно центральной оси y равен нулю, а интеграл в уравнении (6.146) равен интегралу по площади поперечного сечения от функции депланации φ . Следовательно, $\varphi_0 = HB/2$, причем толщина профиля $h = \text{const}$. Уравнение (6.148) дает расстояние до центра сдвига

$$y_D = -\frac{1}{J_y} \int_A z \varphi(s) dA =$$

$$= -\frac{1}{J_y} \left[\int_0^B \frac{H}{2} \frac{H}{2} (B - s_1) h ds_1 + \int_0^B \left(-\frac{H}{2} \right) \left(-\frac{H}{2} s_3 \right) h ds_3 \right] = -\frac{H^2 B^2 h}{J_y 4},$$

где

$$J_y \cong \frac{h H^3}{12} + 2Bh \left(\frac{H}{2} \right)^2 = \frac{H^2 B}{2} \left(1 + \frac{H}{6B} \right) h.$$

Подставляя вышеприведенное приближение момента инерции, приходим к следующему результату:

$$y_D = -\frac{B}{2(1 + H/6B)}. \quad (6.158)$$

По отношению к перемычке профиля этот центр находится в стороне, противоположной его полкам. Следовательно, крутящий момент задается как $M_T = -y_D Q_z = F y_D = \text{const}$, и благодаря жестко заземленному концу при $x = 0$ кручение происходит в условиях стесненной депланации. Напряжения в некотором поперечном сечении с осевой координатой x распределены следующим образом:

$$(a) \text{ изгибающий момент } M_y: \sigma_{xx}(x, z) = \frac{M_y}{J_y} z,$$

(b) поперечная сила Q_z : $\sigma_{xs}(s) = -\frac{Q_z S_y(s)}{h J_y}$ (в перемычке),

(c) чистое кручение \bar{M}_T : $\sigma_{xy}(x, s) = \frac{\bar{M}_T}{J_T} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right)$, $\sigma_{xz} = 0$,

(в верхней полке профиля $\partial/\partial y = -\partial/\partial s_1$, а в нижней полке $\partial/\partial y = \partial/\partial s_3$),

$$\sigma_{xz}(x, s) = \frac{\bar{M}_T}{J_T} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad (\text{в перемычке } \partial/\partial z = -\partial/\partial s_2). \quad (6.159)$$

Из формулы (6.136) следует $J_T = (h^3/3)(2B + H) = (2/3)Bh^3(1 + H/2B)$.

К этим напряжениям следует добавить напряжения депланации. Жесткость депланации швеллера согласно соотношению (6.153) пропорциональна следующей величине:

$$C^* = \int_A \varphi^{*2} dA = \int_A \varphi^2 dA - J_y y_D^2 = \frac{hH^2 B^3 [1 + (2H/3B)]}{24(1 + h/6B)}, \quad (6.160)$$

а коэффициент a^{-2} из уравнения (6.155) принимает вид

$$a^{-2} = \frac{J_T}{2(1+\nu)C^*} = \frac{8h^2(1+H/2B)(1+H/6B)}{(1+\nu)[1+(2h/3B)]H^2B^2}. \quad (6.161)$$

Используя граничные условия консольной балки длины l , получаем решение

$$\Theta(x) = \frac{M_T}{G J_T} \left[1 - \cosh \frac{x}{a} + \tanh \left(\frac{l}{a} \right) \sinh \frac{x}{a} \right], \quad (6.162)$$

и угол закручивания в условиях стесненной депланации является нелинейной функцией

$$\chi(x) = \frac{a M_T}{G J_T} \left\{ \frac{x}{a} - \sinh \frac{x}{a} + \tanh \left(\frac{l}{a} \right) \left[\cosh \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (6.163)$$

Выражение (6.145) представляет нормальные напряжения депланации

$$\sigma_{xx}^*(x, s) = E \varphi^*(s) \frac{M_T}{a G J_T} \left[\tanh \left(\frac{l}{a} \right) \cosh \frac{x}{a} - \sinh \frac{x}{a} \right]. \quad (6.164)$$

Эти напряжения достигают максимума при $x = 0$. Опасными точками являются $s_1 = 0$, $s_1 = B$ и $s_3 = 0$, $s_3 = B$. Поток касательных напряжений депланации согласно соотношению (6.150) принимает вид

$$T^*(x, s) = -E \frac{d^2 \Theta}{dx^2} \int_0^s h \varphi^*(s) ds, \quad (6.165)$$

где интегралы вычисляются по участкам:

$$\text{верхняя полка: } \int_0^s \varphi^* ds = \frac{H}{2} \left(B - \frac{s_1}{2} + y_D \right) s_1, \quad \text{максимум при } s_1 = B + y_D,$$

$$\text{перемычка: } \int_0^s \varphi^* ds = \frac{y_D}{2} (H - s_2) s_2 + \frac{H}{2} \left(\frac{B}{2} + y_D \right) \frac{B}{2}, \quad \text{максимум при } s_2 = \frac{H}{2},$$

$$\text{нижняя полка: } \int_0^s \varphi^* ds = -\frac{H}{2} \left(y_D + \frac{s_3}{2} \right) s_3 + \frac{H}{2} \left(\frac{B}{2} + y_D \right) \frac{B}{2}, \quad \text{максимум при } s_3 = -y_D,$$

и

$$\frac{d^2 \Theta(x)}{dx^2} = -\frac{M_T}{a^2 G J_T} \left[\cosh \frac{x}{a} - \tanh \frac{l}{a} \sinh \frac{x}{a} \right].$$

Следовательно, соотношение (6.152) определяет осевой момент, который является вкладом в крутящий момент за счет стесненной деформации швеллера,

$$M_x^*(x) = -E C^* \frac{d^2 \Theta(x)}{dx^2}, \quad M_T = \bar{M}_T(x) + M_x^*(x), \quad (6.166)$$

где коэффициент C^* определяется формулой (6.160). Максимальные напряжения деформации (нормальные и касательные) находятся в защемленном сечении при $x = 0$.

На свободном конце при $x = l$ осевые перемещения достигают максимальных значений в углах полок. Соотношение (6.144) дает:

$$|u| = |\Theta| \frac{HB}{4} \frac{1 + H/3B}{1 + H/6B}. \quad (6.167)$$

При $M_T > 0$ нижний край движется вперед, а верхний край – назад. Другой пример обсуждается в упражнении А 6.13.

6.2.4.3. Кручение эллиптического и цилиндрического, сплошного и полого цилиндров

Определение функции деформации φ или, что эквивалентно, функции напряжений Ψ при кручении стержней со сплошным поперечным сечением является значительно более сложной задачей математической теории упругости, и, таким образом, теории потенциала. После получения потенциальных уравнений,

справедливых для общего случая, частные случаи их решения обсуждаются только для поперечных сечений эллиптической формы. Приближенное решение методом Галеркина для стержня с прямоугольным или квадратным поперечным сечением дано в разделе 11.3.3.

Поперечные сечения все так же жестко поворачиваются, и перемещения в плоскости задаются для достаточно малых углов поворота, $\chi = \Theta x$, следующими выражениями:

$$v = -z\chi, \quad w = y\chi,$$

а осевые перемещения пропорциональны функции деформации

$$u = \Theta \varphi(y, z), \quad \Theta = \frac{d\chi}{dx}.$$

Из уравнений Навье (6.6) сразу следует однородное потенциальное уравнение для функции деформации с двумерным оператором Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \text{где} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.168)$$

Решения являются гармоническими функциями. Линеаризованное объемное расширение при кручении равно нулю, $e = 0$. Динамические граничные условия на свободной от усилий поверхности, будучи выражены через производные функции деформации, становятся довольно сложными. Поэтому удобнее рассмотреть функцию напряжений $\Psi(x, y)$ из формул (6.127). В этом случае локальные уравнения равновесия тождественно удовлетворяются [см. уравнение (6.128)]. Неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, которое называется уравнением Пуассона, является результатом исключения функции деформации из закона Гука,

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G\Theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) = 2G\Theta \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ \sigma_{xz} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G\Theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) = -2G\Theta \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.169)$$

При неизменных смешанных производных функции деформации путем вычитания получаем

$$-2G\Theta = 2G\Theta \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение Пуассона для функции напряжений при кручении выводится в форме

$$\nabla^2 \Psi = -1, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.170)$$

Касательные напряжения параллельны касательным к контуру поперечного сечения на поверхности, и, таким образом, граничное условие вдоль контура имеет вид $\Psi = \text{const}$, см. также формулу (6.130). Для односвязных областей эта константа принимается равной нулю. Полый стержень имеет, по меньшей мере, вторую замкнутую свободную поверхность, и функция напряжений является постоянной и ненулевой на втором контуре. В многосвязной области эти константы в общем случае принимают разные значения вдоль различных контуров. Если для какого-то конкретного поперечного сечения задана функция напряжений, то с помощью формулы (6.131) она определяет жесткость при кручении следующим выражением

$$M_T = G\Theta J_T = G\Theta \left[4 \int_A \Psi dA + 2 \oint_{\partial A} \Psi (z dy - y dz) \right], \quad (6.171)$$

где требуется вычислить интегралы по площади и по контуру поперечного сечения от функции напряжений.

(§) Эллиптическое поперечное сечение

Такой контур задан уравнением

$$f(y, z) = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

и допускает аналитическое решение уравнения (6.170), согласно которому функция напряжений имеет вид $\Psi = Cf(y, z)$, так как на контуре $\Psi = 0$. Параметр C , найденный из уравнения Пуассона, равен

$$C = -\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}.$$

Сдвиговые компоненты напряжений являются точными и линейно распределенными

$$\sigma_{xy} = -2G\Theta \frac{a^2}{(a^2 + b^2)} z, \quad \sigma_{xz} = 2G\Theta \frac{b^2}{(a^2 + b^2)} y. \quad (6.172)$$

Следовательно, нелинейное распределение касательных напряжений при кручении определяется выражением

$$\tau = \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2} = 2G\Theta \frac{ba^2}{(a^2 + b^2)} \sqrt{\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \frac{b^2}{a^2}}. \quad (6.173)$$

Изолиниями напряжений являются эллипсы, которые определяются заданием условия $\tau = \text{const}$. Их полуоси возрастают пропорционально касательному напряжению τ с параметром q , пока не будет достигнут максимум при $q = 1$:

$$f(y, z; q) = \frac{y^2}{(qa^2/b)^2} + \frac{z^2}{(qb)^2} - 1 = 0, \quad q = \frac{\tau}{2G\Theta} \frac{(a^2 + b^2)}{ba^2}. \quad (6.174)$$

Следовательно, максимальные касательные напряжения при кручении возникают в точках поверхности с координатами $(y = 0, z = \pm b)$, $b < a$. Для сильно вытянутых эллипсов ($b \ll a$) этот максимум равен максимуму для прямоугольника, формула (6.125), где $h = 2b$. Переход к пределу $(b/a) \rightarrow 0$ при $L = 2a$ дает геометрическую интерпретацию приближения функции напряжений при кручении (6.130) для узкого прямоугольника, где $h \ll L$.

Вычисляя в выражении (6.171) интеграл по площади поперечного сечения (интеграл по контуру исчезает, так как на контуре $\Psi = 0$), получаем

$$J_T = 2 \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} (A - J_z/a^2 - J_y/b^2), \quad (6.175)$$

где $A = (\pi ab)$ – площадь, а $J_y = \pi ab^3/4$ и $J_z = \pi ba^3/4$ – главные моменты поперечного сечения эллипса.

Если проинтегрировать соотношения закона Гука (6.169), получаем точное выражение функции деформации для эллиптического поперечного сечения

$$\varphi(y, z) = -\frac{1 - b^2/a^2}{1 + b^2/a^2} yz. \quad (6.176)$$

Осевые перемещения пропорциональны этой функции, $u(y, z) = \Theta \varphi(y, z)$, а поперечные сечения деформируются к поверхностям по закону гиперболического параболоида (седловой поверхности). Главные оси инерции остаются недеформированными.

Полагая в решении для эллиптического поперечного сечения $a = b = d/2$, получаем решение для кручения кругового цилиндра диаметра d . Изолинии напряжений являются концентрическими окружностями, и линейно распределенное касательное напряжение при кручении $\tau = G\Theta r$ достигает максимума на свободной поверхности, $\max \tau = G\Theta (d/2)$. Жесткость при кручении пропорциональна полярному моменту инерции $J_T = J_p = (\pi d^4/32)$, а выражение для отно-

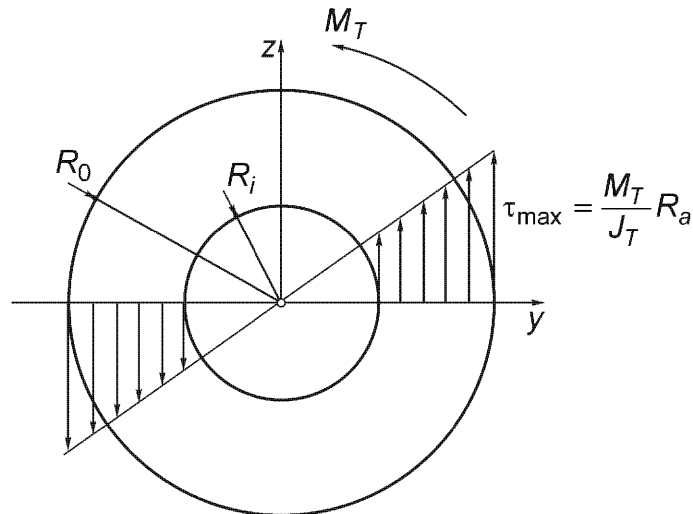


Рис. 6.18. Линейное распределение касательных напряжений при кручении толстостенного цилиндра.

сительного угла закручивания принимает вид $\Theta = M_T / GJ_T = (32/\pi)M_T / Gd^4$. В круглом поперечном сечении депланация отсутствует, $\varphi \equiv 0$.

Функция напряжений при кручении полого цилиндра, $R_i \leq r \leq R_e$, задается простым выражением

$$\Psi(r) = (R_e^2/4)(1 - r^2/R_e^2), \quad \Psi(R_e) = 0, \quad \Psi(R_i) = (R_e^2 - R_i^2)/4. \quad (6.177)$$

Жесткость при кручении выводится путем вычисления обоих интегралов в формуле (6.171)

$$J_T = 4 \int_A \Psi dA + 2 \int_0^{2\pi} \Psi R_i^2 d\theta = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4). \quad (6.178)$$

Ее можно определить также как разность жесткости внешнего и внутреннего круговых цилиндров, то есть «площадь внутреннего цилиндра потеряна». Касательные напряжения при кручении остаются линейно распределенными (см. рис. 6.18)

$$\tau = 2G\Theta \left| \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right| = G\Theta r, \quad \max \tau = G\Theta R_e. \quad (6.179)$$

Поперечное сечение в виде круглого кольца остается свободным от депланации.

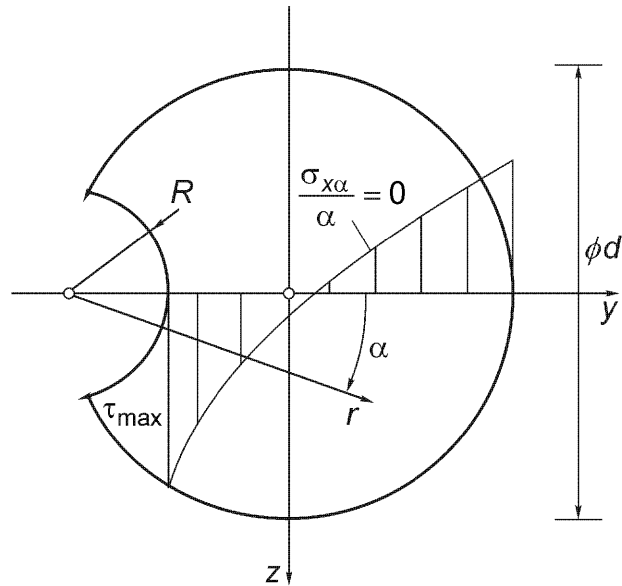


Рис. 6.19. Круглый вал с полукруглой канавкой, $R \ll d$. Максимальное касательное напряжение при сдвиге.

6.2.4.4. Кручение круглого вала с канавкой

Можно ожидать, что максимум касательных напряжений при кручении достигается в самой глубокой точке закругленной канавки. Решение для круговой цилиндрической канавки (рис. 6.19) получил К. Вебер:

- Weber C. Die Lehre der Drehfestigkeit. VDI-Forschungsheft, 1921, S. 249.

Если рассмотреть функцию напряжений при кручении и ее уравнение Пуассона, определенное уравнением (6.170) в полярных координатах (r, α) с началом координат в центре круговой канавки,

$$\nabla^2 \Psi = -1, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \alpha^2} \quad (6.180)$$

вместе с граничным условием $\Psi = 0$ на контуре $r = d \cos \alpha$ и $r = R$, получаем решение в форме произведения

$$\Psi(r, \alpha) = (d \cos \alpha - r) f(r), \quad f(r = R) = 0. \quad (6.181)$$

Подстановка в дифференциальное уравнение в частных производных (6.180) дает два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$r f'' + 3f' + \frac{1}{r} f = 1, \quad \text{где} \quad f' = \frac{df}{dr}, \quad (6.182)$$

и [аналогично уравнению (6.10) при $\alpha = 1$]

$$f'' + \left(\frac{1}{r} f\right)' = 0. \quad (6.183)$$

Следовательно, решение имеет вид [см. уравнение (6.11)]:

$$f(r) = Cr + \frac{D}{r}. \quad (6.184)$$

Из неоднородного уравнения (6.182) определяется $C = 1/4$. Вторая константа следует из граничного условия $f(r = R) = R/4 + D/R = 0$, и функция напряжений окончательно принимает вид

$$\Psi(r, \alpha) = \frac{r}{4}(d \cos \alpha - r) \left[1 - (R/r)^2\right]. \quad (6.185)$$

Обычно $R \ll d$, и остающийся интеграл по площади в (6.171) дает приближение для $J_T < J_p = \pi d^4/32$:

$$J_T = 4 \int_A \Psi(r, \alpha) dA = J_p \left\{1 - 8(R/d)^2 \left[1 + (R/d)^2 - (16R/3\pi d)\right]\right\}. \quad (6.186)$$

Компоненты напряжений определяются формулами (6.169) в полярных координатах

$$\begin{aligned} \sigma_{xr} &= 2G\Theta \frac{\partial \Psi}{r \partial \alpha} = -G\Theta \left[1 - (R/r)^2\right] \frac{d}{2} \sin \alpha, & \Theta &= M_T / GJ_T, \\ \sigma_{x\alpha} &= -2G\Theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -G\Theta \left\{\left[1 + (R/r)^2\right] \cos \alpha - 2r/d\right\} \frac{d}{2}. \end{aligned} \quad (6.187)$$

Касательное напряжение при кручении вдоль линии $\alpha = 0$ распределено по гиперболическому закону (рис. 6.19)

$$\tau = G\Theta \left\{1 + (R/r)^2 - 2r/d\right\} \frac{d}{2} \quad (6.188)$$

с максимумом при $r = R$:

$$\max \tau = \sigma_{x\alpha}(r = R, \alpha = 0) = G\Theta d (1 - R/d) = \alpha_k \frac{M_T}{J_p} \frac{d}{2}. \quad (6.189)$$

Коэффициент концентрации напряжений α_k , отнесенный к максимуму касательных напряжений при кручении круглого вала без канавки, определяется выражением

$$\alpha_k = \frac{2(1-\rho)}{1-8\rho^2(1+\rho^2-16\rho/3\pi)}, \quad \text{где } \rho = R/d. \quad (6.190)$$

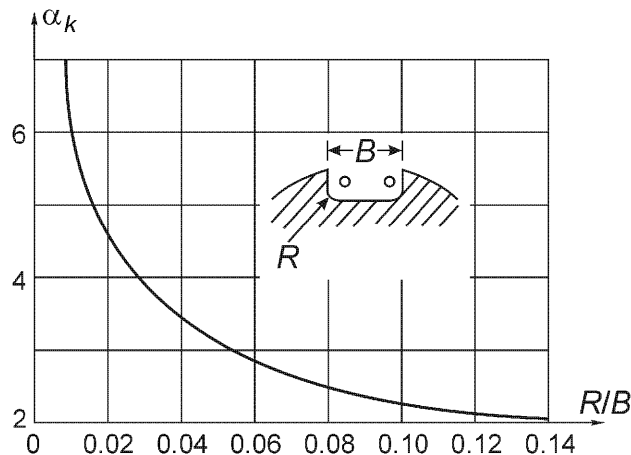


Рис. 6.20. Коэффициент концентрации напряжений вала, имеющего прямоугольную канавку ширины B с закругленными заплечками радиуса R .

В пределе при $R \rightarrow 0$ канавка становится просто царапиной на поверхности круглого вала, но все еще дает концентрацию напряжений с коэффициентом 2 по сравнению с невозмущенным валом. Это демонстрирует чувствительность вала и опасность, вызванную даже обычными мелкими поверхностными трещинами. Технология производства валов включает высококачественную финишную обработку поверхности.

На рис. 6.20 представлен график зависимости коэффициента концентрации касательных напряжений при кручении круглого вала, имеющего прямоугольную канавку с углами, закругленными радиусом R , взятый из работы Г. Паркуса:

- Parkus H., Österr. Ing.-Archiv, 3, 1949, p.336.

Провести анализ этого случая очень трудно из-за сложной геометрии.

6.2.4.5. Мембранная аналогия Прандтля и электрическая аналогия

Для поперечных сечений сложной геометрической формы определение жесткости при кручении и распределения касательных напряжений при кручении становится очень трудной задачей. Чтобы обойти громоздкие вычисления, Л. Прандтль разработал удобный экспериментальный метод, основанный на идентичности дифференциального уравнения Пуассона для функции напряжений при кручении Ψ и для прогиба $u(y, z)$ мембраны, нормально нагруженной равномерным давлением $p = \text{const}$. Тонкая мембрана (например, мыльная пленка) имеет пренебрежимо малую изгибную жесткость, и при прогибе, подобно идеальной нити, испытывает только растягивающие напряжения в своей плоскости. Если линеаризовать главные кривизны, получаем условие равновесия предварительно напряженного элемента мембраны в виде

$$\nabla^2 u = -p/S, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (6.191)$$

где $S = \text{const}$ – изотропная интенсивность сил натяжения.

На контуре шарнирно опертой мембраны перемещения равны нулю, $u = 0$. Тогда функция напряжений при кручении, определяемая уравнением (6.170), задается в виде

$$\Psi = \frac{S}{\rho} u. \quad (6.192)$$

Таким образом, объем под поверхностью мембраны пропорционален жесткости при кручении поперечного сечения той же формы и размера в проекции [см. формулу (6.171)], а градиент поверхности в точках мембраны соотносится с касательными напряжениями в соответствующих точках поперечного сечения при кручении [см. формулы (6.169)]. Реализация метода не требует особых затрат; в тонкой металлической пластинке вырезается отверстие в форме поперечного сечения, и мыльная пленка деформируется приложением к ее поверхности с одной стороны слегка увеличенного давления. Использование для измерений оптических приборов позволяет правильно получить необходимые данные, не внося никаких искажений из-за механического контакта с мембраной. Осложнения встречаются в случае многосвязных областей.

Более точные данные можно получить при помощи электрической аналогии. Поперечное сечение материализуется путем вырезания соответствующего куска электропроводящей бумаги. В области течет ток постоянной плотности i на единицу площади. В этом случае уравнение Пуассона применяется к напряжению U :

$$\nabla^2 U = -\rho i, \quad (6.193)$$

где ρ – сопротивление Ома бумаги. На контуре нужно поддерживать постоянное напряжение U . Эта аналогия подобна соотношению (6.192). Линии постоянного напряжения легко определяются с помощью вольтметра. Для более глубокого обсуждения см. литературу:

- Beadle and Conway: ASME Journal of Applied Mechanics, 30, 1963, pp. 138-141, а также Experimental Mechanics, 1963, pp. 198-200.

Гидродинамическая аналогия упоминается из-за ее теоретической важности. Ж. Буссинеск дал ее формулировку при рассмотрении ламинарного течения вязкой жидкости. А. Г. Гринхилл представил эту аналогию по отношению к идеальному (невязкому) течению жидкости с однородной циркуляцией; см. соотношение (13.1). Функция напряжений при кручении в этом случае соответствует функции тока (потенциалу поля скоростей двумерного потока); см. формулы (13.48а).

6.3. Многопролетные балки и рамы

Неразрезные балки и рамы с многочисленными опорами являются (многократно) статически неопределимыми системами. Так как они играют важную роль в проектировании конструкций, для них разработаны эффективные методы анализа напряжений и упругих деформаций: ниже рассмотрены метод сил и метод перемещений. Формула трех моментов (6.81) является именно такой возможностью метода сил применительно к многопролетным балкам.

(§) Метод сил для многопролетной балки

Основное содержание метода приведено на рис. 6.21, где показана основная статически определимая система для однопролетного отрезка между шарнирами (опорами) с номерами 1 и 2. В многопролетной балке статически неопределимый изгибающий момент на левой опоре пролета M_1 считается положительным, а момент на правой опоре пролета M_2 – отрицательным; углы поворота поперечных сечений ассоциированной шарнирно опертой однопролетной балки



Рис. 6.21. Деформации однопролетной шарнирно опертой балки, представляющей собой статически определимую систему, ассоциированную с неразрезной балкой на многочисленных опорах; см. также рис. 6.13. Метод сил.

обозначены, соответственно, через φ_1 и φ_2 , в смысле вклада положительной работы. Метод сил определяет статические неизвестные M_1, M_2, \dots из соответствующих условий деформации: угол наклона балки на опорах должен представлять собой непрерывную функцию. Следовательно, путем суперпозиции, углы поворота в начале и конце участка, рассмотренного на рис. 6.21, принимают вид

$$\varphi_1 = \varphi_{1L} + \varphi_{11}M_1 + \varphi_{12}M_2, \quad \varphi_2 = \varphi_{2L} + \varphi_{21}M_1 + \varphi_{22}M_2, \quad (6.194)$$

где первое слагаемое – это деформация шарнирно опертой балки под действием заданной нагрузки $q_z(x)$, а φ_{ij} – коэффициенты влияния этой статически определенной однопролетной балки. Метод Мора [см. раздел 6.2.2] может применяться также и в случае переменной по длине пролета изгибной жесткости. Для левого и правого пролетов, примыкающих к опоре, проводятся одинаковые вычисления, которые дают угол поворота φ'_1 на опоре 1. На опоре 2 угол поворота обозначен φ'_2 . Из условий непрерывности угла наклона в этих шарнирах следуют два уравнения с двумя неизвестными

$$\varphi_1 - \varphi'_1 = 0, \quad \varphi_2 - \varphi'_2 = 0. \quad (6.195)$$

Это условие применяется к каждой из промежуточных опор, а дополнительные уравнения замыкают систему уравнений для определения неизвестных в многопролетной балке.

(§) Метод перемещений

В противоположность методу сил с многопролетной балкой ассоциируется кинематически определенная система. Вместо статически неопределимых изгибающих моментов в промежуточных опорах в качестве неизвестных в одном пролете рассматриваются углы поворота φ_1 и φ_2 . Следовательно, рассматривается кинематически определенная балка (см. рис. 6.22), жестко защемленная на обоих концах и находящаяся под действием заданной поперечной нагрузки $q_z(x)$. Для анализа ассоциированной системы, которая является статически неопределимой низкого порядка, удобно использовать метод Мора (раздел 6.2.2). Сопряженная балка Мора со свободными концами также показана на рис. 6.22. Суперпозиция концевых моментов, то есть моментов заделки балки, жестко защемленной на обоих концах, M_{1L} и M_{2L} , соответственно, и моменты влияния для заданных поворотов поперечных сечений приводят к уравнениям для углов наклона балки

$$M_1 = M_{1L} + M_{11}\varphi_1 + M_{12}\varphi_2, \quad M_2 = M_{2L} + M_{21}\varphi_1 + M_{22}\varphi_2, \quad (6.196)$$

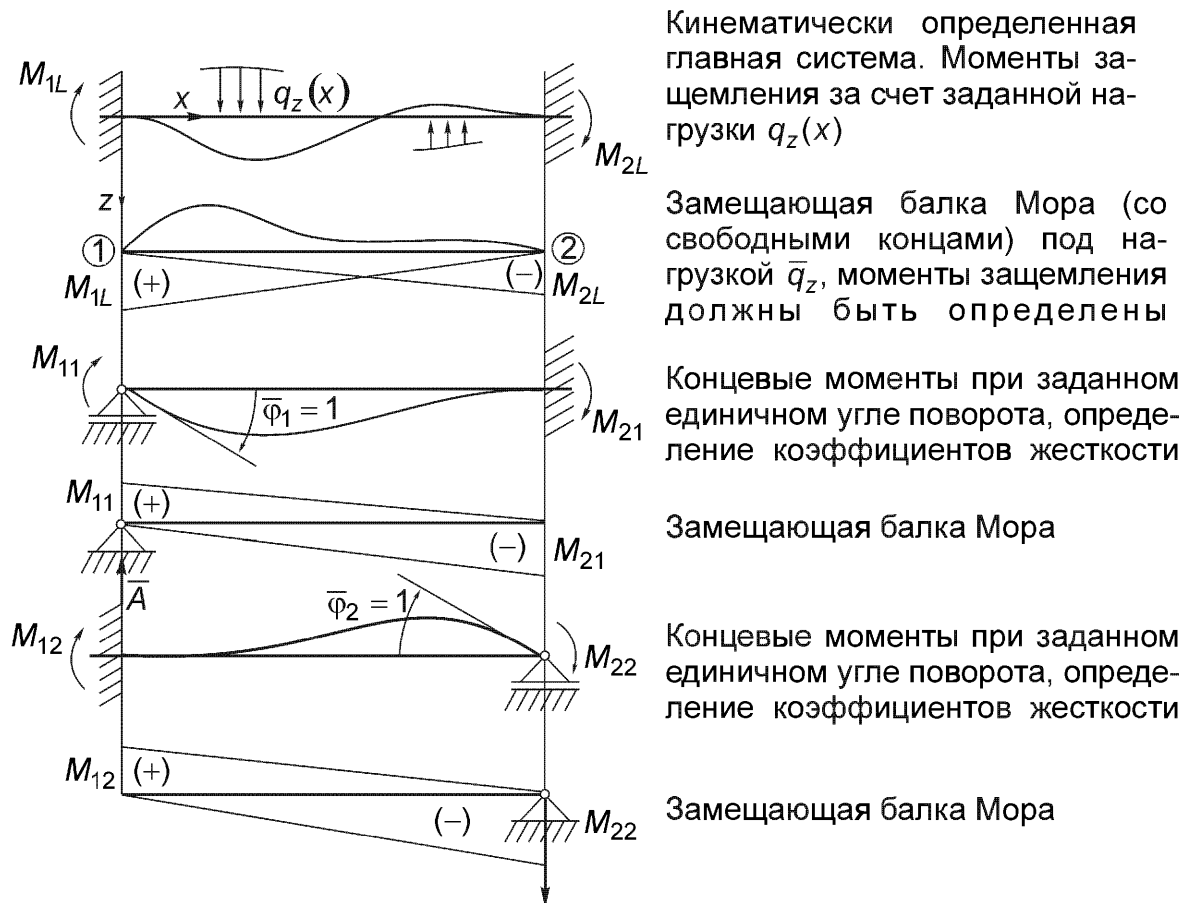


Рис. 6.22. Кинематически определяемая балка, жестко защемленная на концах, ассоциированная с участком многопролетной балки, изображенной на рис. 6.13. Метод перемещений. Замещающие балки Мора.

где M_{ij} – упругие константы при вращении статически неопределимых систем, также показанные на рис. 6.22. Они удобно определяются методом Мора при заданных единичных поворотах. Неизвестные заданы условиями равновесия моментов в шарнирах при рассмотрении примыкающих пролетов

$$M_1 + M'_1 = 0, \quad M_2 + M'_2 = 0. \quad (6.197)$$

В случае дополнительного сингулярного моментного нагружения многопролетной балки как раз в промежуточной опоре такой внешний момент следует добавить к упомянутым выше условиям равновесия этого соединения. Благодаря геометрическим ограничениям ассоциированной кинематически определенной системы (рис. 6.22) увеличивается жесткость каждого участка по сравнению с действительной балкой. Прогибы, вызванные действительной поперечной нагрузкой q_z , уменьшаются. Эти факты противоположны поведению подсистем метода сил (рис. 6.21), где жесткость уменьшается, а перемещения возрастают.

Если промежуточные опоры не являются жесткими, например, в случае пружинных опор (слабых оснований), угловые перемещения в шарнирах 1 и 2

различны, и происходит дополнительный жесткий поворот на угол ψ . В противовес φ_k он считается положительным против часовой стрелки, то есть $\psi > 0$, если шарнир 1 движется к более низкому уровню, чем шарнир 2. В общем случае суперпозиция дает:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{1L} + M_{11}\varphi_1 + M_{12}\varphi_2 + (M_{11} + M_{12})\psi, \\ M_2 &= M_{2L} + M_{21}\varphi_1 + M_{22}\varphi_2 + (M_{21} + M_{22})\psi. \end{aligned} \quad (6.198)$$

Применяются дополнительные условия равновесия, и угол ψ также легко определяется.

(§) Применение метода перемещений к рамам

Эффективные процедуры для исследования рам с высокой степенью статической неопределимости основаны на специальной версии метода перемещений, в которой углы поворота выбираются. Метод проиллюстрирован путем рассмотрения плоской рамы, изображенной на рис. 6.23, где составляющие раму стержни жестко соединены в узле сваркой. В процессе нагружения такой узел жестко поворачивается, конфигурация составляющих его элементов сохраняется, и углы между ними остаются неизменными. Следовательно, в методе перемещений появляется один неизвестный угол поворота этого узла, в то время как в методе сил число неизвестных изгибающих моментов в узле имеет порядок числа элементов, соединенных в этой точке. На рис. 6.23 сосредоточенная сила F создает внешний момент Fl_1 относительно узла. В дополнение к этому

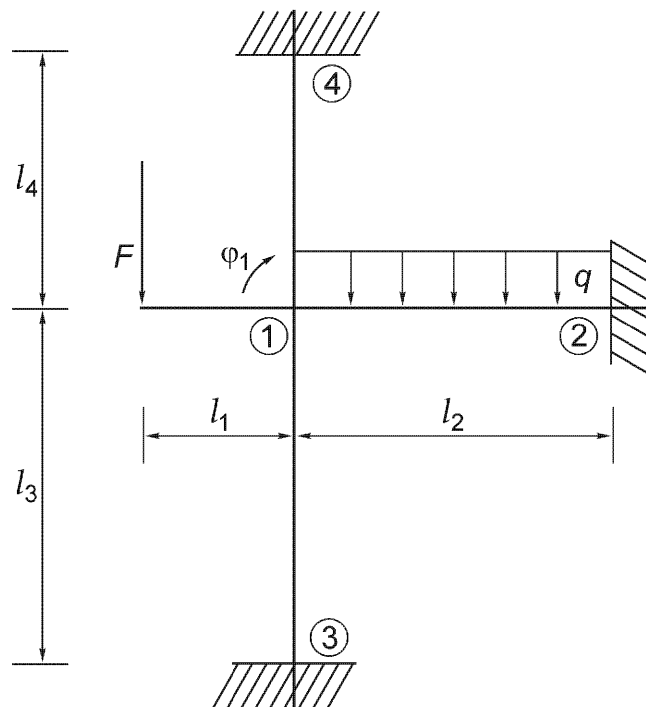


Рис. 6.23. Плоская рама. Анализ методом перемещений.

элемент между узлами 1 и 2 нагружен равномерно распределенной нагрузкой q . Жесткость при изгибе EJ постоянна в пределах каждого участка. Узел 1 полагается зафиксированным в пространстве, его перемещение равно нулю. Благодаря симметрии элемента 1-2 моменты заземления $M_{1L} = -M_{2L} = -ql^2/12$. Суперпозиция дает уравнения для углов поворота сечений

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= M_{1L} + M_{11,2} \varphi_1, & M_{1,3} &= M_{11,3} \varphi_1, & M_{1,4} &= M_{11,4} \varphi_1, \\ M_{2,1} &= M_{2L} + M_{21,1} \varphi_1, & M_{3,1} &= M_{31,1} \varphi_1, & M_{4,1} &= M_{41,1} \varphi_1, \end{aligned}$$

где φ_1 – общий угол поворота узла.

Упругие константы поворота элементов равны

$$M_{11,i} = 4 \frac{(EJ)_i}{l_i} \quad M_{i1,1} = 2 \frac{(EJ)_i}{l_i}, \quad i = 2, 3, 4.$$

Условие равенства нулю главного момента (узел 1 рассматривается как свободный) дает уравнение

$$Fl_1 + \sum_{i=2}^4 M_{1,i} = 0,$$

решая его относительно угла поворота узла 1, получаем

$$\varphi_1 = -\frac{(Fl_1 + M_{1L})}{4 \sum_{i=2}^4 \frac{(EJ)_i}{l_i}}. \quad (6.199)$$

Для эффективного анализа рам с высокой степенью статической неопределенности Кросс и Кани разработали итерационную процедуру, представляющую собой метод перемещений с углами поворота, объединенный с процедурой равновесия моментов.

Смотрите также литературу:

- Cross H. Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments. Transactions ASCE, 96 (1932), pp. 1-10;
- Kani G. Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen. Stuttgart, Wittwer, 1949. Имеется русское издание: Кани Г. Расчет многоэтажных рам. М., Гостехиздат, 1963.

Введение в методы, ориентированные на использование компьютеров и использующие матричную запись, дано в книге:

- McGuire W. and Gallagher R.H. Matrix Structural Analysis. New York, Wiley, 1979.

6.3.1. Плоская одноярусная рама

Рама, изображенная на рис. 6.24, имеет две стойки, жестко заделанные в основании, и, таким образом, является трижды статически неопределимой. Изгибная жесткость стоек предполагается равной $B = EJ$, а изгибная жесткость балки равна $B_B = EJ_B$. Анализ такой небольшой системы, если проводить его методом сил или перемещений, требует одинаковых усилий. Нагружение задано горизонтальной сосредоточенной силой F и равномерно распределенной поперечной нагрузкой q , в качестве неизвестных выбраны результирующие внутренние силовые факторы в среднем сечении поперечного стержня N_0, Q_0, M_0 .

Для решения этой небольшой системы можно использовать теорему Менабреа (5.44). В энергии деформаций для простоты рассмотрены только кривизны при изгибе. Однако деформации за счет нормальной и поперечной сил в таких конструкциях обычно не бывают пренебрежимо малыми. Изгибающие моменты в стойках и в балке должны быть выражены через заданную нагрузку и неизвестные силовые факторы,

$$-L \leq x \leq L: \quad M_y(x) = M_0 + x Q_0 - \frac{qx^2}{2}, \quad \frac{\partial M_y}{\partial Q_0} = x, \quad \frac{\partial M_y}{\partial M_0} = 1,$$

$$\text{Стойка 1: } M_y(x_1) = M_0 - L Q_0 - \frac{qL^2}{2} - x_1 (F + N_0),$$

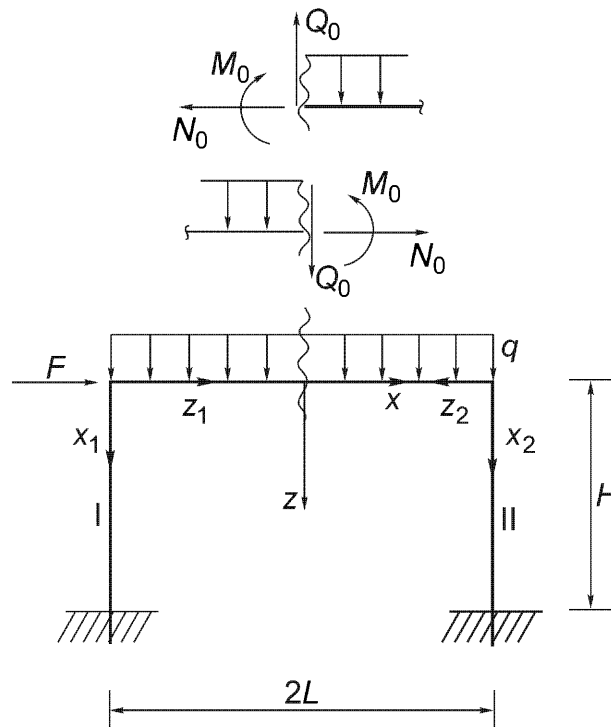


Рис. 6.24. Плоская одноярусная рама. Применение теоремы Менабреа.

$$\frac{\partial M_y}{\partial N_0} = -x_1, \quad \frac{\partial M_y}{\partial Q_0} = -L, \quad \frac{\partial M_y}{\partial M_0} = 1.$$

$$\text{Стойка 2: } M_y(x_2) = M_0 + LQ_0 - \frac{qL^2}{2} - x_2 N_0,$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial N_0} = -x_2, \quad \frac{\partial M_y}{\partial Q_0} = L, \quad \frac{\partial M_y}{\partial M_0} = 1.$$

В теореме Менабреа производные дополнительной энергии по неизвестным силовым факторам берутся под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*}{\partial N_0} = 0 &= \int \frac{M_y}{B} \frac{\partial M_y}{\partial N_0} dx, & \frac{\partial U^*}{\partial Q_0} = 0 &= \int \frac{M_y}{B} \frac{\partial M_y}{\partial Q_0} dx, \\ \frac{\partial U^*}{\partial M_0} = 0 &= \int \frac{M_y}{B} \frac{\partial M_y}{\partial M_0} dx. \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление интегралов, которые по предположению равны нулю, представляет неизвестные в явном виде:

$$\frac{2}{B_B} \int_0^L Q_0 x^2 dx + \frac{1}{B} \int_0^H (2Q_0 L^2 + Fx_1 L) dx_1 = 0 \Rightarrow Q_0 = -\frac{FH}{4L} \left(1 + \frac{L}{3H} \frac{B}{B_B}\right)^{-1}, \quad (6.200)$$

и после решения линейных уравнений мы получаем

$$\begin{aligned} \int_0^H \left[-Fx_1 + 2 \left(M_0 - \frac{q}{2} L^2 N_0 x_1 \right) \right] (-x_1) dx_1 &= 0, \\ \frac{2}{B_B} \int_0^L \left(M_0 - \frac{q}{2} x^2 \right) dx + \frac{1}{B} \int_0^H \left[-Fx_1 + 2 \left(M_0 - \frac{q}{2} L^2 - N_0 x_1 \right) \right] dx_1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$M_0 = \frac{qL^2}{6} \left(1 + \frac{3HB_B}{4LB}\right) \left(1 + \frac{HB_B}{4LB}\right)^{-1}, \quad -N_0 = \frac{F}{2} + \frac{qL^2}{2H} \left(1 + \frac{HB_B}{4LB}\right)^{-1}. \quad (6.201)$$

6.4. Плоские криволинейные балки и арки

Ось балки в недеформированном состоянии является плоской кривой, и предполагается нагружение силами, лежащими в этой плоскости, так что после деформации ось остается в той же плоскости. Обычно поперечное сечение является симметричным, это является гарантией того, что кручение в балке отсутствует. Локальные условия равновесия заданы уравнениями (2.145), (2.146) и (2.147); см. рис. 2.31. В этом разделе рассмотрены смещения и распределение

напряжений. Поперечное сечение имеет главную ось инерции y , которая должна быть ортогональна плоскости нагрузки. Предполагается, что поперечные сечения при поперечном изгибе остаются плоскими, и кинематика деформации в полярных координатах зависит от радиального перемещения w и тангенциального перемещения u центральных точек. В соответствии с рис. 6.25 при линейризованных геометрических соотношениях радиальная деформация принимает вид

$$\varepsilon_R = \frac{\partial w}{\partial R}. \quad (6.202)$$

Это соотношение подтверждается рассмотрением радиальных перемещений двух соседних точек: $w(R)$ и $w(R + dR) = w(R) + (\partial w / \partial R) dR + \dots$. Отношение удлинения волокна $(\partial w / \partial R) dR$ к недеформированной длине dR и является приведенной выше деформацией. Окружная деформация состоит из двух слагаемых. При радиальном перемещении недеформированного волокна $R d\varphi$ длина его элементарной дуги увеличивается на $(R + w) d\varphi - R d\varphi$, и, таким образом, вклад этого перемещения в деформацию равен w/R , а приращение полярного угла $d\varphi$ сокращается. Второе слагаемое происходит за счет разности тангенциальных перемещений двух точек, находящихся на малом расстоянии $R d\varphi$. Волокно, ориентированное в окружном направлении, удлиняется на $u(\varphi + d\varphi) - u(\varphi) = (\partial u / \partial \varphi) d\varphi$. После сокращения $d\varphi$ это слагаемое принимает вид $(1/R) \partial u / \partial \varphi$ и должно быть прибавлено к первому:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{w}{R} + \frac{\partial u}{R \partial \varphi}. \quad (6.203)$$

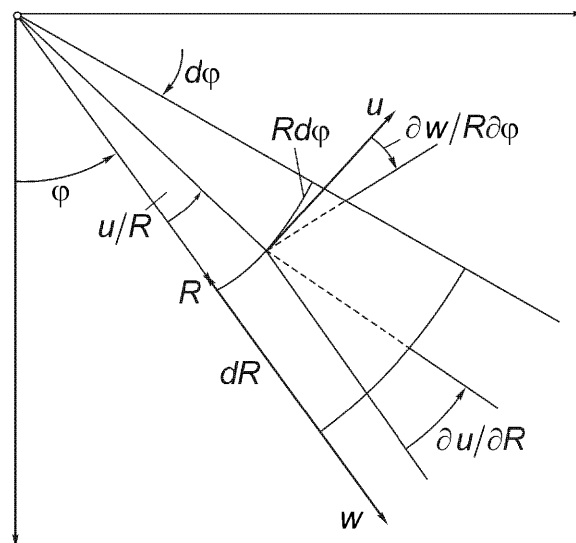


Рис. 6.25. Деформации в полярных координатах. Линейризованные геометрические соотношения.

Сдвиговая деформация выводится из рис. 6.25 путем рассмотрения уменьшения прямого угла между двумя волокнами. Окружной элемент за счет разности радиальных перемещений поворачивается по часовой стрелке на $\partial w/R \partial \varphi$, а радиально ориентированное волокно за счет разности тангенциальных перемещений при условии исключения жесткого поворота поворачивается на $(\partial u/\partial R) - (u/R)$, и тогда

$$\gamma_{R\varphi} = 2\varepsilon_{R\varphi} = \frac{\partial w}{R \partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R}. \quad (6.204)$$

Если пренебречь вкладом сдвиговой деформации в поворот оси балки, $\gamma_{R\varphi} = 0$, это уравнение можно разрешить относительно поворота касательной к оси (который представляет собой приращение полярного угла φ после деформации):

$$\chi = \frac{\partial u}{\partial R} = \frac{u_S}{R_S} - \frac{\partial w_S}{R_S \partial \varphi}. \quad (6.205)$$

Здесь компоненты перемещения центра тяжести поперечного сечения $C = S$ обозначены как u_S и w_S ; а $(1/R_S)$ – начальная кривизна оси балки в ненапряженном состоянии. В соответствии с теорией тонких стержней считается, что радиальная деформация равна нулю, и из соотношения (6.202) следует однородное смещение всех точек поперечного сечения $w = w_S = \text{const}$. Последнее предположение принято для сохранения плоскости после деформации. Таким образом, принимая $u = Rf(\varphi)$, получаем окружную деформацию в форме

$$\varepsilon_\varphi = \frac{w_S}{R} + f', \quad f' = \frac{df(\varphi)}{d\varphi}.$$

Подстановка в одноосный закон Гука дает гиперболическое распределение нормальных напряжений

$$\sigma_{\varphi\varphi} = E\varepsilon_\varphi = E \left(\frac{w_S}{z + R_S} + f' \right), \quad R = z + R_S, \quad (6.206)$$

и интегрированием по площади поперечного сечения получаем главную нормальную силу

$$N = \int_A \sigma_{\varphi\varphi} dA = E w_S \int_A \frac{dA}{(z + R_S)} + EA f' \quad (6.207)$$

и главный момент относительно центральной оси y

$$M_y = \int_A z \sigma_{\varphi\varphi} dA = E w_S \int_A \frac{z dA}{(z + R_S)}. \quad (6.208)$$

Интеграл в формуле (6.208) зависит от формы поперечного сечения и связан с начальной кривизной недеформированной оси балки. Обычно эта зависимость

путем интегрирования по частям выражается следующим соотношением с помощью нового параметра κ :

$$-\frac{1}{A} \int_A \frac{z dA}{(z+R_S)} = \kappa \frac{J_y}{AR_S^2}, \quad \text{где} \quad \kappa = 1 - \frac{1}{J_y} \int_A \frac{z^3 dA}{(z+R_S)}. \quad (6.209)$$

С использованием этого параметра изгибающий момент принимает вид

$$M_y = -\kappa \frac{w_S}{R_S} \frac{EJ_y}{R_S}. \quad (6.210)$$

Это отношение можно разрешить относительно w_S/R_S , и тогда нормальная сила равна

$$N = EA \left(1 + \kappa \frac{J_y}{AR_S^2} \right) \frac{w_S}{R_S} + EA f'. \quad (6.211)$$

Следовательно, f' в формуле (6.206) зависит от нормальной силы и через соотношение (6.210) зависит от момента

$$f' = \frac{N}{EA} + \left(1 + \kappa \frac{J_y}{AR_S^2} \right) \frac{M_y}{\kappa EJ_y} R_S. \quad (6.212)$$

Нелинейное распределение напряжений (6.206) выражается через главный вектор, главный момент, начальную кривизну $1/R_S$ и зависит от параметра κ

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{N}{A} + \left[\frac{J_y}{AR_S} + \frac{1}{\kappa} z \left(1 - \frac{z}{z+R_S} \right) \right] \frac{M_y}{J_y}. \quad (6.213)$$

Заметим, что при $z=0$ изгибные напряжения не равны нулю. Таким образом, нейтральная ось смещается, также и при $N=0$, к новой координате

$$z_0 = -\kappa \frac{J_y}{\left(1 + \kappa \frac{J_y}{AR_S^2} \right) AR_S}. \quad (6.214)$$

Так как координата z направлена наружу, изгибные напряжения возрастают у внутренней поверхности и принимают более низкие значения на внешней поверхности по сравнению с линейным распределением напряжений zM_y/J_y в эквивалентной балке с прямолинейной осью [см. соотношение (6.48)]. Последнее выводится из формулы (6.213) в пределе, когда начальная кривизна $1/R_S \rightarrow 0$, а параметр $\kappa \rightarrow 1$.

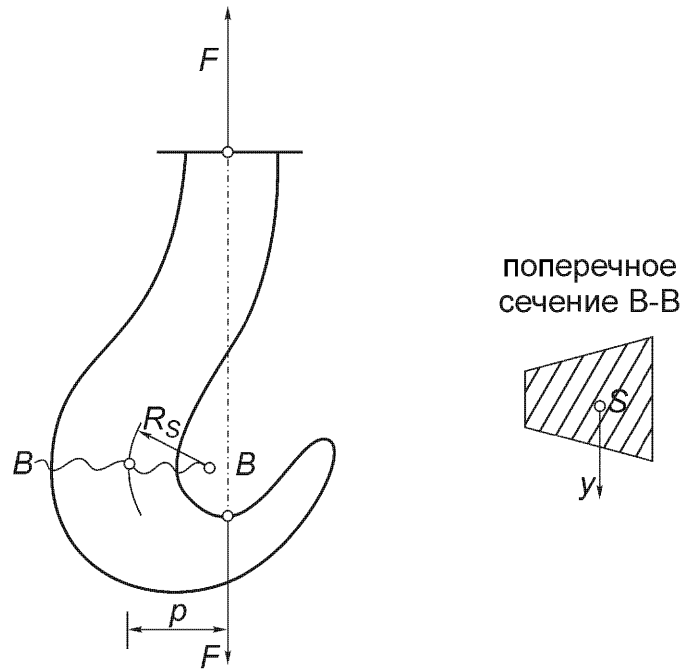


Рис. 6.26. Крюк, нагруженный силой F . Пример сильно искривленной балки.

В случае прямоугольного поперечного сечения $H \times B$ главный момент инерции равен $J_y = BH^3/12$, и этот параметр можно аппроксимировать выражением

$$\kappa = \frac{AR_S^2}{J_y} \left[\frac{R_S}{H} \ln \frac{1+H/2R_S}{1-H/2R_S} - 1 \right] = 1 + \frac{3H^2}{20R_S^2} + \dots \quad (6.215)$$

Соотношение (6.213) обычно используется для аппроксимации экстремального распределения напряжений в критическом поперечном сечении крюка, изображенного на рис. 6.26, несмотря на сильно меняющееся поперечное сечение изогнутой балки. В действительности такая переменность приводит к трехмерному напряженному состоянию, подобному тому, что возникает в жестком угле рамы. Это поперечное сечение ортогонально линии действия силы F и, следовательно, нормальная сила $N = F$. Момент задается выражением $M_y = -F\rho$, где ρ – расстояние по нормали до центра тяжести сечения S ; см. рис. 6.26.

(§) Дополнительная энергия криволинейной балки

Вышеупомянутая энергия определяется выражением, аналогичным полученному для прямолинейной балки [соотношение (5.48)], путем объединения нормальной силы с моментом, умноженным на начальную кривизну, для создания обобщенной силы $N_H = N + M_y/R_S$, которая подставляется вместо осевой силы

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N_H^2}{EA} ds + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_y^2}{\kappa EJ_y} ds. \quad (6.216)$$

Это выражение все так же не зависит от порядка нагружения растяжением и изгибом. Подобным образом формула, аналогичная формуле (5.54), выводится путем применения принципа виртуальных перемещений с использованием этой обобщенной нормальной силы

$$1 \cdot \delta = \int_0^l \bar{N}_H \frac{N_H}{EA} ds + \frac{1}{2} \int_0^l \bar{M}_y \frac{M_y}{\kappa EJ_y} ds. \quad (6.217)$$

Таким образом, теоремы Кастильяно и Менабреа, обсужденные выше в разделе 5.4.1, а также формула (6.217) могут быть использованы для решения задач статики сильно искривленных балок. Наконец, ниже приведены связанные дифференциальные уравнения, которые отражают связи между результирующими силовыми факторами и смещениями искривленной оси балки,

$$\frac{du_S}{ds} + \frac{w_S}{R_S} = \frac{N_H}{EA}, \quad \frac{d^2 w_S}{ds^2} + \frac{w_S}{R_S^2} - u_S \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R_S} \right) = -\frac{M_y}{\kappa EJ_y}, \quad (6.218)$$

где $ds = R_S d\varphi$ – элемент дуги. Отметим, что это связанная система с переменными коэффициентами.

6.4.1. Балки и арки малой кривизны

В случае малой начальной кривизны тонкой балки из соотношения (6.215) в пределе следует $\kappa \rightarrow 1$, а обобщенная нормальная сила $N_H \rightarrow N$. Распределение напряжений (6.213) становится приблизительно линейным, так как $|z|/(R_S + |z|) \ll 1$. Полагается, что при $N=0$ нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения. При допущении о нерастяжимости оси балки уравнение (6.218) дает

$$\frac{du_S}{ds} = -\frac{w_S}{R_S}. \quad (6.218a)$$

(§) Параболическая арка малой кривизны, изображенная на рис. 6.27

При нагружении постоянной силой p на единицу длины горизонтальной проекции эта арка иллюстрирует применение упрощенного соотношения (6.217). Высота пологой арки считается малой по сравнению с длиной пролета, $H \ll L$, и изгибная жесткость принимается постоянной, $B = EJ_y = \text{const}$. Симметрия требует, чтобы силы реакций были одинаковы и равны $pL/2$. Благодаря скользящей опоре в горизонтальные компоненты отсутствуют, и изгибающий момент задается выражением

$$M_y(x) = -pLx/2 + px^2/2.$$

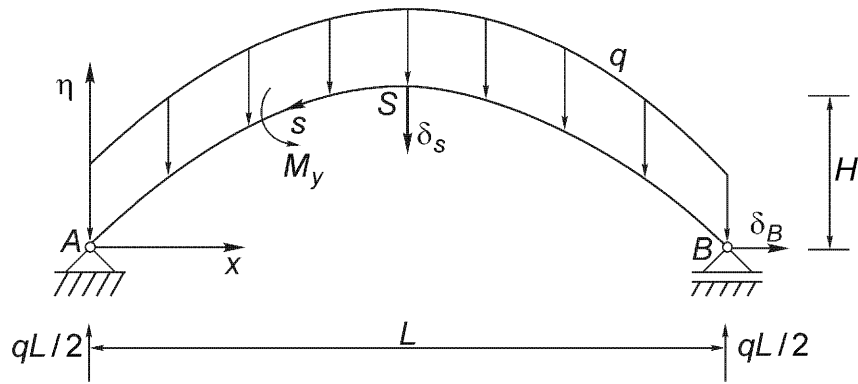


Рис. 6.27. Пологая параболическая арка, равномерно нагруженная постоянной силой p на единицу длины горизонтальной проекции, $p dx = q ds$.

Горизонтальное перемещение δ_B опоры B определяется с помощью работы фиктивной единичной нагрузки $H_B = 1$, приложенной в направлении этого перемещения. Фиктивный момент распределен по параболическому закону

$$\bar{M}_y(x) = -1 \cdot \eta, \quad \eta = 4Hx(L-x)/L^2.$$

Интегрирование в соотношении (5.54), которое является пределом соотношения (6.217), может быть проведено по длине пролета L вместо интегрирования вдоль искривленной оси, так как $H \ll L$ (рис. 6.27):

$$\delta_B = \frac{1}{B} \int_0^L \frac{p}{2L^2} (Lx - x^2) 4Hx(L-x) dx = \frac{pHL^3}{15B}, \quad \text{где } B = EJ_y, \quad p dx = q ds.$$

Прогиб наивысшей точки S определяется аналогично путем рассмотрения фиктивной единичной силы, направленной вертикально вниз; интегрирование проводится по половине пролета, и результат удваивается,

$$\delta_S = \frac{2}{B} \int_0^{L/2} \frac{p}{2} (Lx - x^2) \frac{x}{2} dx = \frac{5pL^4}{384B}, \quad B = EJ_y.$$

Рассматривая шарнирную опору B неподвижной (что обычно является целью проекта), получаем, что горизонтальные компоненты сил реакций в опорах A и B равны по величине и противоположны по направлению, и система становится один раз статически неопределимой, скажем, за счет неизвестной X . Определение горизонтального перемещения скользящей опоры B арки, изображенной на рис. 6.27, при нагружении единичной силой $H_B = 1$

$$\delta_1 = \frac{1}{B} \int_0^L \eta^2 dx = \frac{8LH^2}{15B}, \quad B = EJ_y,$$

вместе с геометрическим условием, что действительное перемещение в опоре В за счет заданной нагрузки p и неизвестной реакции X должно быть равно нулю

$$\delta_B + X \delta_1 = 0,$$

дает $X = -\delta_B / \delta_1 = -pL^2 / 8H$. Следовательно, изгибающий момент в статически неопределимой арке тождественно равен нулю $M_y(x) \equiv 0$. Параболическая арка является веревочной кривой однородной нагрузки p по отношению к горизонтальной проекции; см. уравнение (2.192). Этот результат справедлив также и в случае жестко защемленных опор и остается правильным даже для опор, расположенных на различных уровнях. Поэтому параболическая арка с двумя закрепленными опорами является при проектировании важным конструктивным элементом (например, из бетона, который обладает высокой прочностью при сжатии).

(§) Слегка изогнутое кольцо

Это кольцо можно проанализировать таким же образом. В общем случае такая балка с осью, образующей замкнутую фигуру в плоскости, является трижды статически неопределенной (N_0, Q_0, M_0). Круглое кольцо, изображенное на рис. 6.28, в случае симметричной нагрузки, например, диаметрально противоположными силами F рассмотрено подробно. Подобные проблемы возникают в рамах, имеющих контур в форме замкнутого многоугольника. Рассматривая одну из симметричных половинок как свободное тело, сразу получаем поперечную

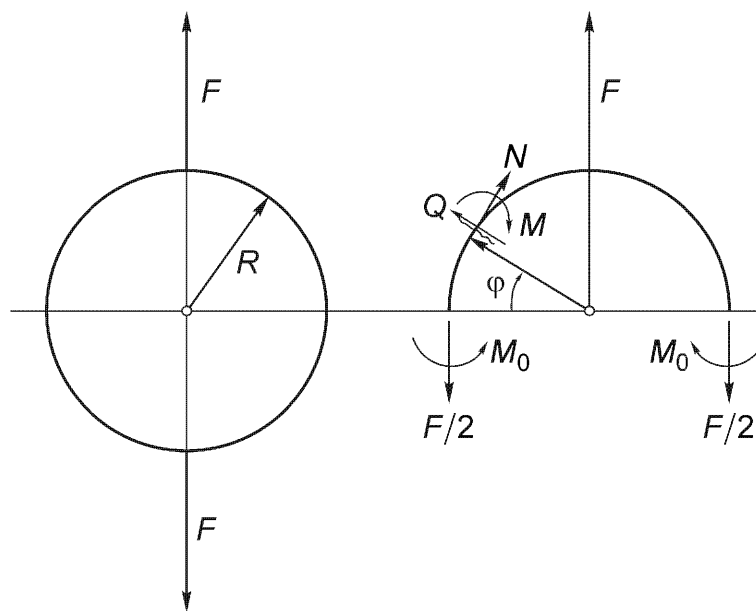


Рис. 6.28. Слегка изогнутое круглое кольцо, нагруженное диаметрально противоположными силами F (две силы без момента). Показано симметричное сечение и рассмотрена симметричная половина как свободное тело.

силу $Q_0 = 0$, а также нормальная сила из соображений симметрии становится статически определенной, $N_0 = F/2$. Неизвестным остается только изгибающий момент $X = M_0$. Распределение момента определяется заданной нагрузкой и этой неизвестной, $M_y(\varphi) = X + (FR/2)(1 - \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Пренебрегая влиянием как нормальной, так и поперечной силы и считая изгибную жесткость постоянной, из теоремы Менабреа (5.44) получаем:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = \frac{4}{EJ_y} \int_0^{\pi/2} M_y \frac{\partial M_y}{\partial X} R d\varphi = 0.$$

Решением этого уравнения является статически неопределимый момент

$$X = -\frac{FR}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Распределение моментов принимает вид

$$M_y = \frac{FR}{2} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \varphi\right), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \max |M_y| = \frac{FR}{\pi} \quad \text{при} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (6.219)$$

(§) Вращающиеся кольца

Эти кольца часто опираются, скажем, на n спиц. Важным техническим устройством для запасания энергии является маховик. На рис. 6.29 показана секция колеса, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω ; $v = R\omega$ – окружная скорость точек обода. Последний нагружен радиально распределенной нагрузкой $q = \rho A v^2 / R = \text{const}$, в то время как спицы испытывают переменную нагрузку $q_s = \rho A_s r \omega^2$. Сегмент обода между симметричными сечениями приближенно считается слегка изогнутой балкой. Краевыми нагрузками являются статически

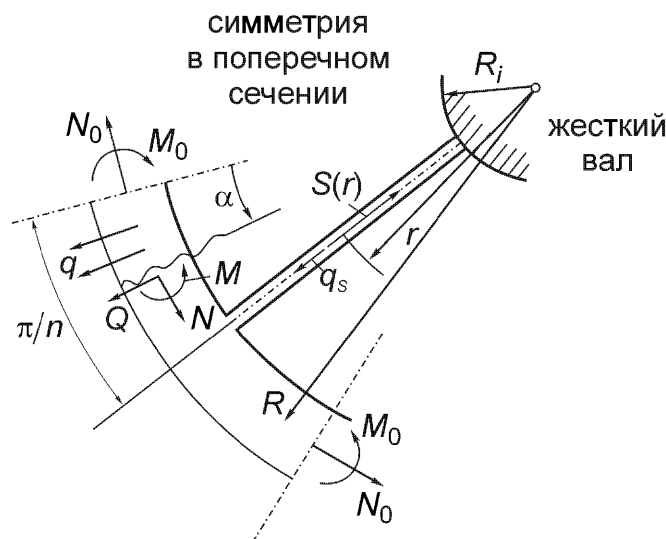


Рис. 6.29. Сегмент маховика со спицами. Показан элемент симметрии.

неопределимые нормальная сила N_0 и изгибающий момент M_0 ; поперечная сила Q_0 равна нулю из соображений симметрии. Тогда распределение результирующих силовых факторов выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} M_y(\alpha) &= M_0 + RN_0(1 - \cos \alpha) - qR^2 2 \sin^2(\alpha/2), \\ Q(\alpha) &= (N_0 - qR) \sin \alpha, \\ N(\alpha) &= N_0 \cos \alpha + qR 2 \sin^2(\alpha/2), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/n. \end{aligned} \quad (6.220)$$

Растягивающее усилие в спице на радиальном расстоянии r от оси просто равно сумме

$$\begin{aligned} S(r) &= -2Q(\alpha = \pi/n) + \int_r^R q_S(\bar{r}) d\bar{r} = \\ &= 2(qR - N_0) \sin \pi/n + \frac{qR A_S}{2A} \left(1 - r^2/R^2\right). \end{aligned} \quad (6.221)$$

Подстановка в дополнительную энергию (при условии пренебрежения сдвиговой деформацией)

$$U^* = \frac{2n}{2} \int_0^{\pi/n} \frac{M_y^2}{EJ_y} R d\alpha + \frac{2n}{2} \int_0^{\pi/n} \frac{N^2}{EA} R d\alpha + \frac{n}{2} \int_{R_i}^R \frac{S^2}{EA_S} dr$$

и применение теоремы Менабреа (5.44) (где частное дифференцирование по неизвестным N_0 и M_0 производится под знаком интеграла), дает

$$M_0 = -(N_0 - qR) R \left[1 - \frac{n}{\pi} \sin(\pi/n)\right], \quad f(n) = \cos(\pi/n) + \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}, \quad (6.222)$$

$$N_0 - qR = \frac{-4qR/3}{f(n) + 4(A/A_S) \sin(\pi/n) + (AR^2/J_y)[f(n) - 2(\pi/n) \sin(\pi/n)]}. \quad (6.223)$$

Кольцо без спиц, радиально нагруженное равномерной нагрузкой q , находится в состоянии чистого растяжения: $N_0 = qR$ и $M_0 = 0$. Следовательно, из соотношений (6.220) следует изгибающий момент $M_y(\alpha) \equiv 0$ и $N(\alpha) = N_0 = \text{const}$. В этом случае радиальное перемещение кольца принимает вид $u(R) = R\varepsilon_{\alpha\alpha} = qR^2/EA$. Нормальная сила в ободе вносит значительный вклад в деформацию также и в случае конструкции колеса со спицами.

6.5. Пластины, нагруженные в своей плоскости

Тонкие пластины представляют собой плоские двумерные конструкции. Они остаются плоскими после деформирования под действием нагрузок, лежащих в той же плоскости (по поводу выпучивания пластин под действием сжимающей нагрузки, превышающей критическую, см. раздел 9.1.6). Иллюстрирующими примерами являются короткие балки прямоугольного поперечного сечения, или стенки (перемычки) высоких двутавровых балок, поперечные стенки и т.д., а также вращающиеся диски. Напряжения интегрируются по толщине h для учета мембранных напряжений (сил на единицу длины) n_x , n_y , n_{xy} в срединной плоскости пластины. Среднее по толщине напряжение получается делением на h и характеризует плоское напряженное состояние пластины. Лицевые поверхности пластины полагаются свободными от усилий. Изменения действительных напряжений по толщине малы, и поэтому ими обычно пренебрегают. Введение функции напряжений Эри [формулы (2.11)] тождественно удовлетворяет локальные уравнения равновесия для случая постоянных массовых сил или при их отсутствии. Уравнение в частных производных для этой функции напряжений выводится путем исключения деформаций из уравнения совместности (1.22) с помощью закона Гука [формулы (4.44)]. Эта система уравнений, переписанная в терминах мембранных напряжений, имеет вид

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{x,y} = (n_{x,y} - \nu n_{y,x})/Eh, \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = n_{xy}/Gh,$$

$$\varepsilon_z = -\nu(n_x + n_y)/Eh, \quad n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

откуда следует бигармоническое дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (6.224)$$

С помощью оператора Лапласа это уравнение можно записать в виде, не зависящем от какой-либо конкретной системы координат:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0, \quad (6.225)$$

где оператор Лапласа имеет вид $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в декартовых ортогональных

координатах или $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ в полярных координатах.

Дополнительная энергия [формулы (5.40) и (5.38)] может быть выражена через функцию напряжений путем интегрирования по площади срединной плоскости A :

$$U^* = \frac{1}{2Eh} \int_A \left\{ (\nabla^2 F)^2 - 2(1+\nu) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA. \quad (6.226)$$

Элементарная краевая задача возникает для прямоугольной пластины, если два ее противоположных края $x = \pm a$ равномерно нагружены напряжениями n_0 , в то время как два других края остаются свободными от усилий.

Квадратичная функция $F_1 = Cy^2$ является частным решением бигармонического уравнения, откуда следует, что мембранное напряжение является постоянным:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2C, \quad n_y = n_{xy} = 0, \quad C = n_0/2. \quad (6.227)$$

Аналогичным образом находится точное решение, если равномерно нагружены два края $y = \pm b$. Следовательно, суперпозиция дает функцию напряжений Эри для равновесия пластины, нагруженной по всем четырем сторонам,

$$F_2 = \frac{1}{2} (n_0 y^2 + n_1 x^2). \quad (6.228)$$

Полагая $n_0 = n_1$, получаем изотропное растяжение. Подобным образом при нагружении $n_0 = -n_1$ получается специальный случай чистого сдвига, и этот случай проиллюстрирован при рассмотрении круга Мора (см. рис. 2.7). Отметим, что максимальное касательное напряжение равно $\tau_{\max} = n_0/h$.

Чистый изгиб в плоскости пластины производится приложением момента M_0 к краям $x = \pm a$; если силы распределены по линейному закону $n_0 = 12M_0 y/(2b)^3$. Двойное интегрирование при условии, что на границе $n_x = -n_0$, дает функцию напряжений

$$F = -M_0 y^3/4b^3. \quad (6.229)$$

Так как все граничные условия удовлетворены, уравнение (6.229) является точным решением, и $n_x = -3M_0 y/2b^3$, $n_y = n_{xy} = 0$. После деформации поперечные сечения остаются плоскими, как и в случае чистого изгиба тонкой балки.

6.5.1. Полубесконечная пластина

Напряжения в ближайшей окрестности сосредоточенной силы имеют большое значение для правильного проектирования. Возможно, что граничные условия заданы на краях, которые находятся на большом удалении и не оказывают особого влияния; следовательно, можно рассмотреть полубесконечную пластину (см. рис. 6.30), нагруженную усилиями n_0 . Последние полагаются равномерно распределенными на интервале $|x| \leq c$. Нагрузка представлена в виде интеграла Фурье; см., например, Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., Наука, 1980 (таблица в разделе 4.4.2.2):

$$n_0(x) = \frac{2}{\pi} n_0 \int_0^{\infty} \frac{\sin(c\xi)}{\xi} \cos(x\xi) d\xi, \quad -\infty < x < \infty. \quad (6.230)$$

Напряжения должны асимптотически стремиться к нулю при $y \rightarrow 0$. Они связаны с функцией напряжений вторыми производными, и решение можно записать в виде

$$F(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{A(\xi) + y\xi B(\xi)}{\xi^2} e^{-y\xi} \cos(x\xi) d\xi. \quad (6.231)$$

Формулы (6.224) дают (вторые производные этой пробной функции взяты под знаком интеграла):

$$n_x(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \int_0^{\infty} [A(\xi) - 2B(\xi) + y\xi B(\xi)] e^{-y\xi} \cos(x\xi) d\xi,$$

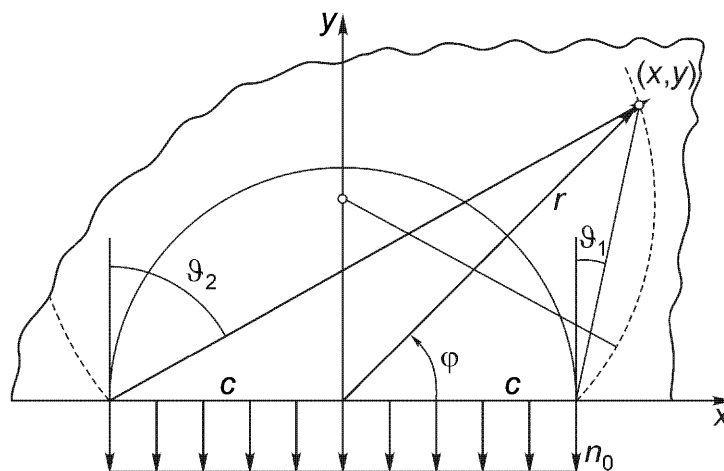


Рис. 6.30. Полубесконечная пластина толщины h с поверхностными усилиями n_0 . Полуокружность $r = c$ является изолинией максимального касательного напряжения $\tau_{\max} = n_0/\pi h$.

$$n_y(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = - \int_0^{\infty} [A(\xi) + y\xi B(\xi)] e^{-y\xi} \cos(x\xi) d\xi, \quad (6.232)$$

$$n_{xy}(x, y) = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = - \int_0^{\infty} [A(\xi) - B(\xi) + y\xi B(\xi)] e^{-y\xi} \sin(x\xi) d\xi.$$

На границе $y = 0$ справедливо следующее условие

$$\frac{2}{\pi} n_0 \int_0^{\infty} \frac{\sin(c\xi)}{\xi} \cos(x\xi) d\xi = n_y(y = 0) = - \int_0^{\infty} A(\xi) \cos(x\xi) d\xi, \quad (6.233)$$

и, сравнивая коэффициенты, получаем

$$A(\xi) = - \frac{2}{\pi} n_0 \frac{\sin(c\xi)}{\xi}. \quad (6.233a)$$

Из однородного динамического граничного условия отсутствия касательных напряжений $n_{xy}(y = 0) = 0$ следует $A(\xi) = B(\xi)$. Все полубесконечные интегралы в соотношениях (6.232) имеют решения в замкнутой форме, которые можно найти в таблицах интегралов. С помощью двух угловых координат, показанных на рис. 6.30, распределение напряжений задается в виде, не зависящем от модуля упругости, но справедливом только в пределах применимости линеаризованной теории упругости:

$$n_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \frac{n_0}{2\pi} [2(\vartheta_2 - \vartheta_1) \pm (\sin 2\vartheta_1 - \sin 2\vartheta_2)], \quad n_{xy} = \frac{n_0}{2\pi} (\cos 2\vartheta_1 - \cos 2\vartheta_2). \quad (6.234)$$

Линии постоянных главных касательных напряжений определяются при помощи круга Мора (рис. 2.7) и формулой (6.234)

$$\tau = \frac{n_0}{2\pi} \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \text{const} \quad (6.235)$$

и являются дугами окружностей, проходящих через точки поверхности на концах участка с заданными усилиями ($x = \pm c, y = 0$). Их центры расположены на оси симметрии. Максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = n_0/\pi h$ достигается на полуокружности радиуса $r = c$.

(§) Задача Буссинеска

Эта задача получается при неограниченном увеличении равномерной нагрузки n_0 при соблюдении конечности ее главного вектора $F = 2cn_0$ путем соответствующего перехода к пределу $c \rightarrow 0$. Асимптотическим результатом этого являются напряжения, возникающие за счет нагружения сосредоточенной силой $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_y$, приложенной в точке поверхности $(0, 0)$. Таким образом, вычисляя

эти пределы в соотношениях (6.234) и рассматривая систему полярных координат на рис. 6.31, получаем декартовы компоненты

$$n_x = \frac{2}{\pi} F x^2 y / r^4, \quad n_y = \frac{2}{\pi} F y^3 / r^4, \quad n_{xy} = \frac{2}{\pi} F x y^2 / r^4, \quad \text{где } r^2 = x^2 + y^2. \quad (6.236)$$

Следуя Ж. Буссинеску, главные нормальные напряжения записываются в полярных координатах и образуют систему сходящихся сил

$$n_r = \frac{2}{\pi} \frac{F}{r} \sin \varphi, \quad n_\varphi = n_{r\varphi} = 0. \quad (6.237)$$

Линии постоянных радиальных напряжений, или изолинии напряжений, являются окружностями, проходящими через точку приложения сосредоточенной силы, с центрами, лежащими на оси симметрии (рис. 6.31):

$$\frac{\sin \varphi}{r} = 1/d = \text{const}, \quad n_r = \frac{2}{\pi} \frac{F}{d}. \quad (6.238)$$

Вдоль этих окружностей главное касательное напряжение $\tau = F/\pi h d$ также является постоянным. Декартовы компоненты мембранных напряжений равны

$$n_x(r, \varphi) = n_r \cos^2 \varphi, \quad n_y(r, \varphi) = n_r \sin^2 \varphi, \quad n_{xy}(r, \varphi) = \frac{n_r}{2} \sin 2\varphi. \quad (6.239)$$

Напряжения в задаче Буссинеска также остаются независимыми от выбора упругих параметров.

(§) Функция напряжений в случае тангенциальной сосредоточенной силы
При нагрузке на поверхности $\mathbf{F} = -F_t \mathbf{e}_x$ эта функция получается аналогичным образом

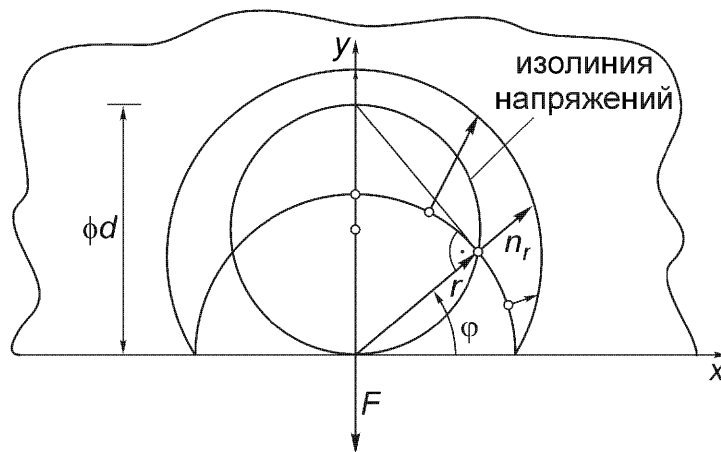


Рис. 6.31. Полубесконечная пластина, нагруженная сосредоточенной силой F . Изолинии постоянных радиальных напряжений.

$$F(x, y) = -\frac{F_t}{\pi} \int_0^{\infty} y \frac{\sin(x\xi)}{\xi} e^{-y\xi} d\xi. \quad (6.240)$$

Главное нормальное радиальное напряжение в полярной системе координат, показанной на рис. 6.31, распределено по закону косинуса; сравните с соотношением (6.237):

$$n_r(r, \varphi) = \frac{2 F_t}{\pi r} \cos \varphi, \quad n_\varphi = n_{r\varphi} = 0. \quad (6.241)$$

Решения для других, более сложных видов нагружения приведены в литературе; см., например,

- Girkmann K. Flächentragwerke. 6. Auflage, Wien, Springer-Verlag, 1963.
- К. Гиркман был профессором Венского технического университета.

6.5.2. Стационарно вращающиеся диски

Если считать угловую скорость постоянной, $\omega = \text{const}$, задача становится осесимметричной. На рис. 6.32 изображен свободный элемент диска, и условие равновесия в радиальном направлении при предельном стягивании этого элемента к материальной точке дает соотношение между главными нормальными напряжениями и нагрузкой q [см. также q_x в упражнении А 11.6 и формулу (1.16)]:

$$r \frac{dn_r}{dr} + n_r - n_\varphi = -rq, \quad q = \rho h r \omega^2. \quad (6.242a)$$

Выбор функции напряжений $f(r)$ в соответствии с условиями $n_r = f/r$, $n_\varphi = \rho h r^2 \omega^2 + df/dr$ тождественно удовлетворяет локальному уравнению равновесия. Следовательно, условие совместности главных деформаций $\varepsilon_r = -d(r\varepsilon_\varphi)/dr$, полученное из формул (6.202) и (6.203) при $u=0$, где $\varepsilon_r = du/dr$, $\varepsilon_\varphi = u/r$, при исключении деформаций с помощью закона Гука [см. формулы (6.224)] приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

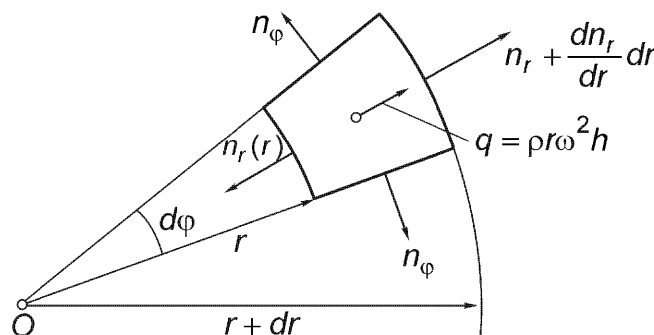


Рис. 6.32. Свободный плоский элемент в условиях радиального нагружения.

$$r f'' + \left(1 - \frac{r}{h} \frac{dh}{dr}\right) f' - \left(\frac{1}{r} - \frac{\nu}{h} \frac{dh}{dr}\right) f = -(3 + \nu) \rho h r^2 \omega^2, \quad (6.242b)$$

где $f' = df/dr$.

Решение в замкнутой форме существует, если толщина диска изменяется в соответствии с потенциальной функцией $h = Hr^n$ (постоянная толщина получается при $n = 0$):

$$f(r) = Cr^{\alpha_1} + Dr^{\alpha_2} - \frac{(3 + \nu) \rho h \omega^2}{8 + (3 + \nu)n} r^{3+n}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + 1 - \nu n}. \quad (6.243)$$

Постоянные интегрирования C и D в случае цилиндрической пластинки с центральным круговым отверстием определяются с помощью граничных условий, заданных на внутренней и внешней поверхностях $r = R_{i,e}$. Однако в случае сплошного диска условие при $r = R_e$ дополняется требованием конечности напряжений при $r = 0$. Главные нормальные напряжения в полем вращающемся диске постоянной толщины со свободными от усилий поверхностями приведены ниже:

$$n_r = N \left(\frac{r^2}{R_i^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{r^2}{R_e^2} \right) \frac{R_e^2}{r^2}, \quad N = K R_i^2, \quad K = (3 + \nu) \rho H \omega^2 / 8,$$

$$n_\varphi = N \left[1 + \left(\frac{R_e^2}{R_i^2} + 1 \right) \frac{r^2}{R_e^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} \frac{r^4}{(R_i R_e)^2} \right] \frac{R_e^2}{r^2}. \quad (6.244)$$

Окружное напряжение становится максимальным на внутренней поверхности; см. рис. 6.33,

$$\max(n_\varphi) = 2N \left[R_e^2 / R_i^2 + (1 - \nu) / (3 + \nu) \right]. \quad (6.245)$$

Даже в пределе бесконечно малого внутреннего радиуса $R_i \rightarrow 0$ окружное напряжение остается в два раза больше, чем для сплошного диска, вращающегося с той же угловой скоростью,

$$\lim_{R_i \rightarrow 0} (n_\varphi) = \alpha n, \quad n = \bar{n}_r = \bar{n}_\varphi = K R_e^2, \quad \alpha = 2, \quad (6.246)$$

где n – изотропное растяжение в центре сплошного диска (рис. 6.33).

Плоское напряженное состояние тонкостенных пластин рассмотрено выше. Эти решения применимы также для вращающихся толстостенных валов, находящихся в плоском деформированном состоянии, если заменить коэффициент Пуассона ν функцией $\nu/(1 - \nu)$.

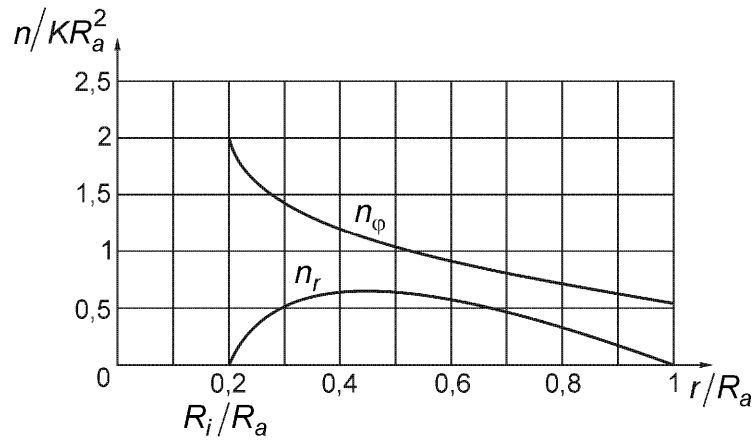


Рис. 6.33. Безразмерные мембранные напряжения в стационарно вращающемся полом диске со свободными от усилий поверхностями.
 $n = K R_e^2$ – изотропное растяжение в центре сплошной пластины.

6.5.3. Бесконечная пластина с круговым отверстием: задача Кирша

Рассматривается бесконечная пластина с круговым отверстием под действием равномерного растягивающего усилия, приложенного на бесконечности. Напряжения увеличиваются по сравнению с невозмущенной сплошной пластиной. Это решение независимо друг от друга получили Г. Кирш и А. Леон (А. Леон был профессором Венского технического университета). Следуя подходу, обрисованному для растягиваемого стержня [см. формулы (2.6)], нагрузка на бесконечности $n_x = n_0 = \text{const}$, $n_y = n_{xy} = 0$ проектируется на оси полярной системы координат, показанные на рис. 6.34:

$$n_r = n_0 \cos^2 \varphi = \frac{n_0}{2} + \frac{n_0}{2} \cos 2\varphi, \quad n_{r\varphi} = -\frac{n_0}{2} \sin 2\varphi. \quad (6.247)$$

Напряжения, возникающие за счет постоянного радиального растяжения $n_r = n_0/2 = -hp_e$, можно взять из формул (6.14) и (6.17), где $\alpha = 1$ и $R_e \rightarrow \infty$:

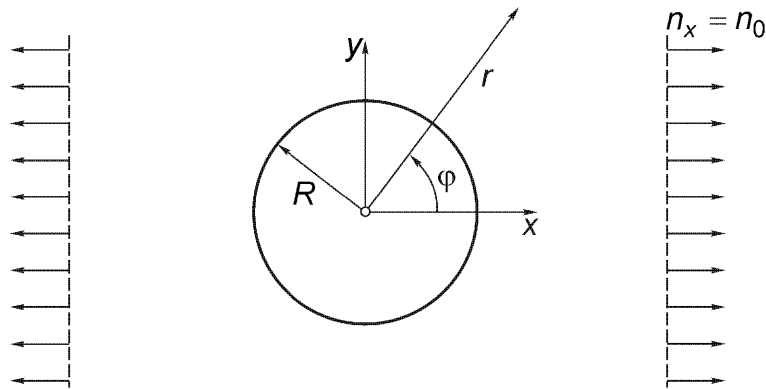


Рис. 6.34. Бесконечная пластина с круговым отверстием: задача Кирша.

$$\bar{n}_r = \frac{n_0}{2} [1 - (R/r)^2], \quad \bar{n}_\varphi = \frac{n_0}{2} [1 + (R/r)^2]. \quad (6.248)$$

Следовательно, необходимо определить и добавить напряжения, возникающие от нагрузки, распределенной в пределах двойного угла 2φ в формуле (6.247). Предполагается, что функция напряжений имеет ту же азимутальную зависимость и является разделяемой

$$\bar{F}(r, \varphi) = f(r) \cos 2\varphi. \quad (6.249)$$

Таким образом, уравнение (6.225) в полярных координатах сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с общим решением

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + Cr^{-2} + D. \quad (6.250)$$

На бесконечности напряжения остаются конечными, если в пределе при $r \rightarrow \infty$ конечна вторая производная выражения (6.250); следовательно, $B = 0$. Остальные три константы определяются из двух однородных динамических граничных условий на свободной от усилий поверхности $r = R$, $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$, и из условия равновесия на удаленной цилиндрической поверхности $r \gg R$:

$$A = -n_0/4, \quad C = -n_0 R^4/4, \quad D = n_0 R^2/2. \quad (6.251)$$

Суперпозиция главных нормальных напряжений, полученных из результирующей функции напряжений $F(r, \varphi)$, оставляет поверхность отверстия свободной от усилий благодаря специально использованным граничным условиям при $r = R$:

$$\begin{aligned} n_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{n_0}{2} \left[1 - \frac{R^2}{r^2} + \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ n_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{n_0}{2} \left[1 + \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ n_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = -\frac{n_0}{2} \left(1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (6.252)$$

Асимптотически напряжения на бесконечности определяются выражениями

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} n_r &= \frac{n_0}{2} [1 + \cos 2\varphi], \quad \lim_{r \rightarrow \infty} n_\varphi = \frac{n_0}{2} [1 - \cos 2\varphi], \\ \lim_{r \rightarrow \infty} n_{r\varphi} &= -\frac{n_0}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (6.253)$$

Эти пределы доказывают, что главные напряжения на бесконечности достигают правильных величин заданной нагрузки $n_x = n_0 = \text{const}$ и $n_y = 0$ при любых значениях угла φ . Отметим круг напряжений Мора.

Критическое окружное напряжение $n_\varphi = 3 n_0$ на внутренней поверхности при $\varphi = \pm\pi/2$ [формула (6.252)] оказывается не зависящим от радиуса отверстия R . Таким образом, коэффициент концентрации напряжений, равный 3, полученный для кругового выреза, является просто коэффициентом формы. Он остается постоянным даже в пределе при $R \rightarrow 0$. Подобные задачи, имеющие большое значение в технике, собраны в книге: Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, Наукова думка, 1968. Нужно помнить об этой концентрации напряжений, назначая сверление отверстий для экономии веса тонкостенных конструкций.

6.5.4. Температурные мембранные напряжения в пластинах

Температурное поле в тонких пластинах вызывает напряжения в их плоскости, если среднее значение по толщине h не равно нулю. Формула Майзеля (6.44) полностью пригодна для определения термоупругих перемещений: фиктивная сила $H = 1$ действует в направлении e_i в срединной плоскости и совершает работу

$$1 \cdot \delta_i = \iint_A d\xi d\eta \int_{-h/2}^{h/2} 3\alpha\theta(\xi, \eta, \zeta) \bar{p}(\xi, \eta, \zeta; x, y) d\zeta, \quad \text{где} \quad 3\bar{p} = (\bar{n}_x + \bar{n}_y)/h.$$

Следовательно, интегрирование по толщине и введение средней температуры $n_\theta(x, y)$ приводит к выражению

$$\delta_i = \int_A \alpha n_\theta(\xi, \eta) \bar{n}(\xi, \eta; x, y) dA_{\xi, \eta}, \quad \text{где} \quad n_\theta = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \theta(\xi, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (6.254)$$

Изотермическая функция влияния для бесконечной пластины за счет нагрузки $H = 1$, приложенной в начале координат и направленной в отрицательном направлении оси x , является совсем простой и приводится здесь для удобства:

$$\bar{n}(\xi, \eta; 0, 0) = \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\xi}{r^2}, \quad \text{где} \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2. \quad (6.255)$$

Параллельный перенос системы координат приводит к общей форме. Формула (6.254), будучи дополненной соответствующим интегралом по замкнутому контуру, становится отправной точкой метода граничных элементов (МГЭ), если подставлена функция ядра бесконечной области. Неизвестное распределение сил вдоль действительной границы пластины конечных размеров должно быть определено путем численного решения интегрального уравнения. Эта процедура требует дискретизировать только границу области.

6.6. Изгиб пластин

Рассматриваются тонкие пластины под действием поперечных сил. Первоначально плоская срединная поверхность прогибается и образует поверхность $w(x, y)$. Как и у прямолинейных балок, деформация зависит от изгибной жесткости и в основном управляется граничными условиями. По аналогии с линейно упругой балкой предполагается линейное распределение нормальных напряжений σ_{xx} и σ_{yy} по толщине h . Их моменты на единицу длины являются главными моментами. Заметим, что нижний индекс относится скорее к пространственной ориентации элемента поперечного сечения и потому не определяет направление компоненты вектора

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz. \quad (6.256)$$

Крутящий момент на единицу длины определяется путем суммирования моментов касательных напряжений σ_{xy}

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz. \quad (6.257)$$

Так как напряжения являются элементами симметричного тензора 2×2 , а интегрирование является линейной операцией, тензорные свойства сохраняются и для симметричной матрицы моментов. Поворот системы координат к главным осям следует правилам построения круга Мора (рис. 2.7). Формулы (2.13) и (2.14) представляют главные моменты $m_{1,2}$, и, следовательно, изгибные напряжения

$$\sigma_{11} = \frac{12 m_1}{h^3} z, \quad \sigma_{22} = \frac{12 m_2}{h^3} z. \quad (6.258)$$

Они достигают своих экстремальных значений при $z = \pm h/2$. Гипотеза Бернулли о том, что поперечные сечения балки при изгибе остаются плоскими, обобщена для тонких пластин в виде гипотезы Кирхгоффа. «Материальная нормаль к срединной плоскости пластины остается нормалью к изогнутой срединной плоскости и сохраняет свою длину неизменной, то есть пластина предполагается нерастяжимой в поперечном направлении.» Следовательно, в этом приближении $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$. Кроме того, пренебрегают нормальным напряжением σ_{zz} , которое имеет только порядок нормального давления. В случае очень малых прогибов $|w| \ll h$ волокна срединной плоскости считаются нерастяжимыми; см. также раздел 5.3.2, где нелинейные связанные члены уравнения (5.30), имеющие вид произведений частных производных, становятся бесконеч-

но малыми величинами. Однако на условия деформирования наложено больше ограничений по сравнению с балочной теорией Бернулли-Эйлера. Следовательно, при деформировании пластины углы наклона $\partial w/\partial x$ и $\partial w/\partial y$ (см. рис. 6.35) в этой теории первого порядка пластин Кирхгоффа принимаются равными углам поворота нормали при деформации, а компоненты перемещения точек, расположенных на расстоянии z от срединной поверхности пропорциональны этому расстоянию,

$$u(z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v(z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6.259)$$

Из линеаризованных геометрических уравнений следует пропорциональность деформаций линеаризованным кривизнам (в явном виде показана только их зависимость от z):

$$\varepsilon_x(z) = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y(z) = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (6.260)$$

Сдвиговая деформация пропорциональна смешанной производной от прогиба

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}(z) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.261)$$

Полагая в законе Гука (4.20) $\sigma_{zz} = 0$, умножая на z и интегрируя по толщине пластины h , получаем соотношения между моментами и кривизнами, а также соотношение для крутящего момента:

$$m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$m_{xy} = -(1-\nu)K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad J = \frac{1 \cdot h^3}{12}. \quad (6.262)$$

В формулах (6.262) K – изгибная жесткость, J – момент инерции полосы еди-

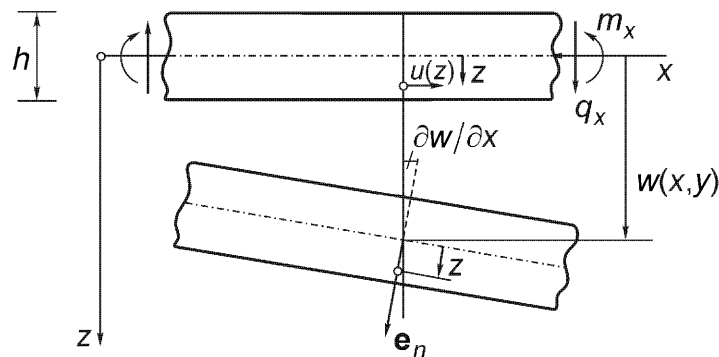


Рис. 6.35. Перемещения, углы наклона и результирующие силовые факторы в поперечно нагруженной пластине.

ничной ширины. Следовательно, принимая коэффициент Пуассона $\nu = 0$, получаем изгибную жесткость балки единичной ширины, $B = EJ$. Эти уравнения являются точными при малой кривизне для пластин в состоянии чистого изгиба, то есть в случае, когда пластина нагружена только самоуравновешенными краевыми моментами m_1 и m_2 . По аналогии с балкой [соотношение (4.23)], где кривизна при чистом изгибе равна $1/R = -M/EJ$, можно легко показать, используя суперпозицию, что справедливо расширение этого выражения для главных кривизн пластины $1/R_1$ и $1/R_2$:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{12}{Eh^3}(m_1 - \nu m_2), \quad \frac{1}{R_2} = \frac{12}{Eh^3}(m_2 - \nu m_1). \quad (6.263)$$

Инверсия этих линейных уравнений приводит к желаемым соотношениям для чистого изгиба

$$m_1 = K \left(\frac{1}{R_1} + \nu \frac{1}{R_2} \right), \quad m_2 = K \left(\frac{1}{R_2} + \nu \frac{1}{R_1} \right). \quad (6.264)$$

Линеаризация кривизн дает соотношения для главных моментов из формул (6.262), причем $m_{12} = 0$.

Прогибы срединной поверхности в форме кругового цилиндра или сферы представляют практическую важность для специальных случаев длинной прямоугольной пластины или круглой пластины при условиях шарнирного опирания, соответственно. В первом случае $1/R_2 = 0$; во втором случае главные кривизны равны, $1/R_1 = 1/R_2 = 1/R$, следовательно, $m_1 = m_2$.

В приближенной теории тонких пластин Кирхгоффа, по аналогии с теорией тонких балок Бернулли-Эйлера, сдвиговые деформации не рассматриваются. Поперечные силы на единицу длины входят в условия равновесия элемента пластины (рис. 6.36) и связаны с эпюрой моментов соотношениями

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}, \quad q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}. \quad (6.265)$$

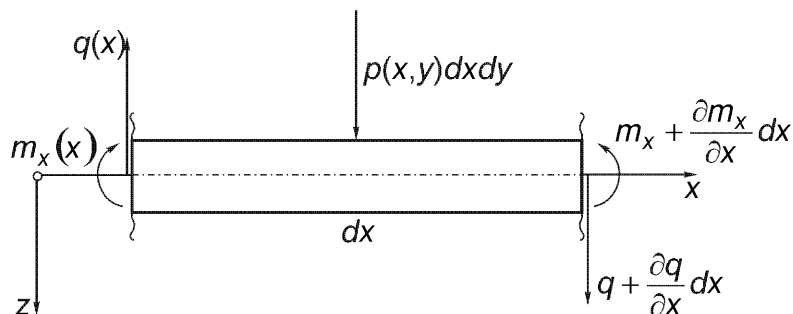


Рис. 6.36. Схематическое изображение элемента пластины как свободного тела.

Подстановка соотношений между моментами и кривизной (6.262) представляет поперечные силы пропорциональными третьей производной от прогиба:

$$q_x = -K \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x}, \quad q_y = -K \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y}, \quad \text{где} \quad \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (6.266)$$

Равновесие сил в поперечном направлении z на рис. 6.36 связывает градиенты с заданным нагружением давлением p

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p(x, y). \quad (6.267)$$

Исключая поперечные силы путем подстановки соотношений (6.265), получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p(x, y). \quad (6.268)$$

Подстановка формул (6.262) исключает моменты и даёт неоднородное бигармоническое уравнение пластины

$$K \Delta \Delta w = p(x, y), \quad \text{где} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (6.269)$$

Первый инвариант тензора момента $m = m_x + m_y$ получается суммированием соотношений (6.262). Результатом является первое дифференциальное уравнение Пуассона для прогиба

$$\Delta w = -\frac{1}{K(1+\nu)} m(x, y), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (6.270)$$

Подстановка в уравнение (6.269) даёт второе, парное уравнение Пуассона для суммы моментов

$$\Delta m = -(1+\nu) p(x, y), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (6.271)$$

В тех случаях, когда известно граничное значение суммы моментов, например, на прямолинейном шарнирно опертом краю полигональной пластины, где применяется предельное условие Навье, а именно, $m = 0$, решение легче найти, если вместо интегрирования эквивалентного бигармонического уравнения решать систему двух уравнений второго порядка (6.270) и (6.271). Сначала (6.271) интегрируется независимо, давая в результате распределение суммы моментов, которые входят в уравнение Пуассона (6.270) как силовая функция. Реше-

ние для прогиба и линеаризованных кривизн определяет индивидуальные моменты подстановкой в формулы (6.262). Система уравнений более низкого порядка также более предпочтительна в алгоритмах численного интегрирования, например, в методе конечных разностей.

Дополнительная энергия пластины Кирхгофа задается интегралом по площади срединной плоскости

$$U^* = \frac{1}{2} \int_A \frac{12}{Eh^3} \left[m^2 + 2(1+\nu)(m_{xy}^2 - m_x m_y) \right] dA, \quad \text{где } m = m_x + m_y. \quad (6.272)$$

Теорема Кастильяно (5.43) даёт прогиб в точке приложения сосредоточенной силы. Обобщение метода Бетти (5.54) на тонкие пластины выполняется достаточно просто, если пренебречь сдвиговыми деформациями.

Ниже для специального случая круглой в плане пластины будет показано, что для того, чтобы выбрать частное решение из общего решения, в общем случае на крае пластины должны быть заданы два граничных условия. На свободном крае пластины с нормалью e_n и единичным вектором касательной e_s , например, нагрузка предполагается нулевой, но три результирующих силовых фактора m_n , m_{ns} и q_n нельзя считать равными нулю по отдельности. Поэтому Томсон и Тэйт предложили комбинацию, которая даёт два независимых условия в соответствии с теорией пластин: они заменили вращающий момент статически эквивалентной парой поперечных сил. При бесконечно малом плече ds сила $(\partial m_{ns} / \partial s) ds$ остается направленной по оси z , что приводит к эффективной поперечной силе Кирхгофа на единицу длины

$$\bar{q}_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}. \quad (6.273a)$$

Она заменяет действительную поперечную силу q_n в формулировке динамических граничных условий, то есть на свободной поверхности два динамических эффективных условия, будучи совместимыми с теорией пластин Кирхгофа, имеют вид

$$m_n = 0, \quad \bar{q}_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = 0. \quad (6.273b)$$

Кроме того, сосредоточенная сила появляется там, где вращающий момент имеет конечный разрыв с бесконечной производной. В таких точках границы пластины нуждается в особой опоре. Не укрепленные должным образом углы могут загнуться вверх.

6.6.1. Осесимметричный изгиб круглых пластин Кирхгоффа

В условиях полярной симметрии оператор Лапласа становится обыкновенным дифференциальным оператором второго порядка в области изменения переменной r , и тогда уравнение четвертого порядка для пластины (6.269) имеет общее решение в форме многократного интеграла от взвешенного заданного распределения внешнего давления $p(r)$:

$$\Delta \Delta w = \frac{p(r)}{K}, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad w_p(r) = \int \frac{dr}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int \frac{p(r)}{K} r dr, \quad (6.274a)$$

$$w(r) = A + B r^2 + C \ln \frac{r}{R_e} + D r^2 \ln \frac{r}{R_e} + w_p.$$

Четыре константы интегрирования определяются граничными условиями на внешнем и внутреннем (концентрическом) крае круглой пластины с отверстием. Прогиб $w(0)$ и кривизна в центре сплошной круглой пластины должны быть конечными, отсюда $C = 0$ и $D = 0$. Пример сингулярного нагружения сосредоточенной силой F , приложенной в центре, см. в упражнении А 6.19, где $D = F/8\pi K \neq 0$. В частном случае равномерного нагружения $p = p_0 = \text{const}$ решение принимает вид

$$w_p(r) = \frac{p_0}{64K} r^4. \quad (6.274b)$$

Константы A и B в выражении для прогиба равномерно нагруженной сплошной пластины легко определяются из граничных условий на внешней границе $r = R_e$.

Геометрические условия на жестко заземленной круглой кромке имеют вид $w = \partial w / \partial r = 0$, и тогда получаем: $A = p_0 R_e^4 / 64K$, $B = -p_0 R_e^2 / 32K$.

На шарнирно опертой границе условие $w = 0$ дополняется динамическим граничным условием $m_r = 0$, где r указывает направление нормали к круглому краю, и константы становятся связанными с приведенными выше величинами: $A_h = (5 + \nu) A / (1 + \nu)$, $B_h = (5 + \nu) B / (1 + \nu)$.

6.6.2. Бесконечная плоская полоса

Параллельные края $x = 0$ и $x = a$ очень длинной полосы оперты шарнирно, и предполагается, что заданное внешнее давление изменяется только по ширине, $p = p(x)$. Решением упрощенного уравнения для пластины

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{K} \quad (6.275)$$

будет цилиндрический изгиб $w = w(x)$. Он соответствует обыкновенному дифференциальному уравнению для прогиба балки (5.22). Сравнение изгибных жесткостей дает прогиб плоской полосы в $(1 - \nu^2)$ раз больше, чем у балки прямоугольного сечения $1 \times h$. В дополнение к главному изгибающему моменту m_x , одинаковому для обеих конструкций, у пластины есть вторая главная компонента момента $m_y = \nu m_x$. В случае равномерной нагрузки $p = p_0 = \text{const}$ решение имеет вид:

$$w(x) = \frac{\rho_0 a^4}{24 K} \left(\frac{x^3}{a^3} - 2 \frac{x^2}{a^2} + 1 \right) \frac{x}{a}, \quad m_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\rho_0 a^2}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \frac{x}{a}. \quad (6.276)$$

6.6.3. Прямоугольная пластина с четырьмя шарнирно опертыми краями

Граничные условия $w = 0$ и $m = 0$ [см. уравнение (6.270)] на краях $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$ определяют общее решение в виде двойного ряда Фурье. Впервые оно было получено Навье:

$$w(x, y) = \sum_j \sum_k w_{jk} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (6.277)$$

Коэффициенты w_{jk} определяются сравнением коэффициентов в уравнении для пластины (6.269) после того, как проведено периодическое разложение поверхностного давления для представления его в виде нечетной двойной суммы с периодами $2a$ и $2b$:

$$p(x, y) = \sum_j \sum_k p_{jk} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (6.278)$$

Предполагая, что коэффициенты разложения p_{jk} известны, получаем следующий результат

$$w_{jk} = p_{jk} / \pi^4 K \left(j^2 / a^2 + k^2 / b^2 \right)^2. \quad (6.279)$$

Коэффициенты разложения для равномерной нагрузки $p = p_0 = \text{const}$ имеют нечётные номера:

$$p_{jk} = 16 p_0 / \pi^4 jk, \quad j, k = 1, 3, 5, \dots \quad (6.280)$$

Сосредоточенная сила F , приложенная в произвольной точке $x = \xi$, $y = \eta$, имеет коэффициенты разложения в виде произведений

$$p_{jk} = \frac{4F}{ab} \sin \frac{j\pi\xi}{a} \sin \frac{k\pi\eta}{b}, \quad j, k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.281)$$

Следовательно, функция влияния суммы моментов при $F = 1$ после суммирования одного из рядов Фурье становится равной

$$m(x, y; \xi, \eta) = 2(1+\nu) \sum_j \frac{\sin \alpha_j x \sin \alpha_j \xi \sinh \alpha_j (b-y) \sinh \alpha_j \eta}{\alpha_j a \sinh \alpha_j b}, \quad (6.282)$$

$$0 \leq \eta \leq y, \quad \alpha_j = j\pi/a, \quad \sinh z = (e^z + e^{-z})/2.$$

Экспоненциально возрастающее слагаемое следует исключить из численной оценки путем подстановки функции гиперболического синуса \sinh . В интервале $y \leq \eta \leq b$ координаты y и η меняются местами. Представление в виде одного ряда демонстрирует быструю сходимость.

6.6.4. Температурный прогиб пластин

При заданном перепаде температуры $\theta(x, y, z)$ по отношению к постоянной отсчётной температуре эффективным инструментом для исследования прогиба пластины и температурных напряжений является формула Майзеля. Сумма изотермических нормальных напряжений за счет нагружения пластины единичной сосредоточенной силой выражается в виде суммы моментов (координаты в функциях влияния (6.282) следует поменять местами)

$$3\bar{p} = \frac{12}{h^3} (\bar{m}_x + \bar{m}_y) \zeta = \frac{12}{h^3} \bar{m} \zeta. \quad (6.283)$$

Можно провести интегрирование по толщине пластины h . Тогда температурный прогиб становится интегралом по площади срединной плоскости

$$w(x, y) = \iint_A dA \left[\int_{-h/2}^{h/2} \alpha \theta(\xi, \eta, \zeta) \frac{12}{h^3} \bar{m} \zeta d\zeta \right] = \quad (6.284)$$

$$= \iint_A \alpha m_\theta(\xi, \eta) \bar{m}(\xi, \eta; x, y) dA_{\xi, \eta}.$$

По аналогии с формулами (6.87) для балки в выражение входит момент первого порядка от температуры по толщине

$$m_\theta(\xi, \eta) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \zeta \theta(\xi, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (6.285)$$

Умножение на линейный коэффициент температурного расширения определяет температурную кривизну, которая накладывается на изгибную кривизну. Ин-

версия даёт обобщённые моменты тензора моментов [сравните с формулами (6.262)]:

$$\begin{aligned} m_x &= -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1+\nu) \alpha m_\theta \right), \\ m_y &= -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1+\nu) \alpha m_\theta \right), \\ m_{xy} &= -(1-\nu) K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad J = \frac{1 \cdot h^3}{12}. \end{aligned} \quad (6.286)$$

Тогда температурные напряжения (возможно, нелинейные) находятся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{12 m_x}{h^3} z + \frac{E\alpha}{1-\nu} (n_\theta + z m_\theta - \theta), \quad \sigma_{xy} = \frac{12 m_{xy}}{h^3} z, \\ \sigma_{yy} &= \frac{12 m_y}{h^3} z + \frac{E\alpha}{1-\nu} (n_\theta + z m_\theta - \theta). \end{aligned} \quad (6.287)$$

В теории первого порядка средние напряжения n_x/h , n_y/h , n_{xy}/h являются несвязанными, и, в конечном счете, складываются.

(§) Квадратная в плане пластина

В предположении, что все четыре края шарнирно закреплёны, такая пластина служит иллюстративным примером эффектов нагружения постоянной температурной кривизной. Главные моменты принимают свои максимальные значения в центре

$$m_x = m_y = -\frac{1-\nu^2}{2} K \alpha C, \quad m_\theta = C = \text{const}. \quad (6.288a)$$

В произвольных точках пластины сумма моментов остаётся пропорциональной температурной кривизне, это выполняется также и для шарнирно опертых пластин более общей многоугольной формы в плане

$$m = m_x + m_y = -(1-\nu^2) K \alpha m_\theta. \quad (6.288b)$$

(§) Бесконечная пластина

Такая пластина изучается для вывода частных решений. Ассоциированной является изотермическая логарифмически сингулярная функция влияния суммы моментов

$$\bar{m} = \bar{m}_x + \bar{m}_y = -\frac{(1+\nu)}{2\pi} \ln r, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2. \quad (6.289)$$

Например, нагружение постоянной температурной кривизной внутри круга $r \leq R$ дает главные моменты, соответствующие центральной полярной системе координат,

$$m_{\{r\}} = -\frac{1-\nu^2}{2} K \alpha C \begin{cases} (\pm)(R/r)^2, & r > R \\ 1, & r \leq R \end{cases}, \quad m_{\theta} = C = \text{const}. \quad (6.290)$$

Следовательно, окружной момент претерпевает скачок на термически изолированной «границе» при $r = R$ на величину

$$[m_{\varphi}] = -(1-\nu^2) K \alpha C. \quad (6.291)$$

Вышеуказанная величина скачка не зависит от особенностей геометрии температурной границы. Если мы перейдем к пределу $A = \pi R^2 \rightarrow 0$, но при этом $C \rightarrow \infty$, так, чтобы их произведение, определяющее результирующую наибольшую интенсивность изгиба, оставалось конечным, сингулярное решение с учётом (6.289) принимает вид

$$w(r) = -\alpha \kappa \bar{m}, \quad \text{где} \quad \kappa = \lim_{R \rightarrow 0} \pi R^2 C. \quad (6.292)$$

Формула (6.292) определяет температурную функцию влияния, имеющую большое значение для расчета конструкций.

6.7. Тонкие оболочки вращения

В отличие от пластины, которая в недеформированном состоянии является плоской, оболочка имеет искривленную срединную поверхность уже в исходной конфигурации. С этой точки зрения хорошей иллюстрацией служит сравнение несущей способности таких одномерных конструкций как прямолинейная балка и ее искривленный аналог – арка. Пологая оболочка может рассматриваться в рамках теории пластин подстановкой (линеаризованной) начальной кривизны в правую часть первого уравнения Кармана (5.30а). Далее рассматриваются тонкие оболочки вращения произвольной кривизны, находящиеся под действием осесимметричной нагрузки, включая реакции опор. Положение точек срединной поверхности определяется углами долготы ϑ и широты φ . Положение произвольной материальной точки далее определяется нормальным расстоянием z от срединной поверхности (см. рис. 6.37). Оболочка считается свободной от кручения, $\sigma_{\varphi\vartheta} = 0$, а нормальное напряжение σ_{zz} , имеющее тот же порядок, что и нормальная нагрузка, считается пренебрежимо малым. Насчет цилиндрической и сферической оболочек под действием внутреннего давления см. рис. 2.21. По аналогии с теорией пластин остальные напряжения интегрируются по толщине оболочки h , и результаты показаны на рис. 6.37.

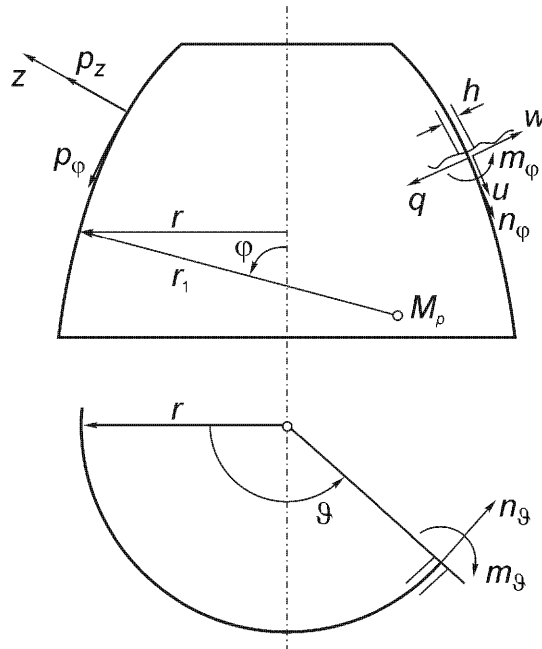


Рис. 6.37. Тонкая оболочка вращения. Осесимметричная нагрузка. Опоры не показаны. Перемещения и результирующие силовые факторы. См. также рис. 2.21.

$$\text{Мембранные напряжения: } n_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\varphi\varphi} dz, \quad n_\vartheta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\vartheta\vartheta} dz, \quad (6.293)$$

$$\text{изгибающие моменты: } m_\varphi = - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\varphi\varphi} dz, \quad m_\vartheta = - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\vartheta\vartheta} dz, \quad (6.294)$$

$$\text{поперечная сила: } q = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\varphi z} dz. \quad (6.295)$$

В случае гладко распределённых поверхностных усилий их можно разложить на компоненты p_z и p_φ (см. рис. 6.37), для постоянной кривизны срединной поверхности и постоянной или слабо меняющейся толщины поперечная сила изменяется медленно и не вносит значительного вклада в локальные условия равновесия. Поэтому мембранные напряжения приблизительно уравнивают заданные поверхностные усилия. См. также мембранное напряжённое состояние цилиндрической и сферической оболочек под действием внутреннего давления, формула (2.98).

(§) Мембранные напряжения

Из равновесия сил в осевом направлении для части оболочки, полученной разрезом по некоторой широте $\varphi = \text{const}$ (параллельный круговой разрез срединной поверхности) вытекает внутреннее статически определимое тангенциальное мембранное напряжение на единицу длины (с учётом осевой симметрии)

$$2\pi r n_\varphi \sin \varphi = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} r (\rho_z \cos \varphi - \rho_\varphi \sin \varphi) r_1 d\varphi + C. \quad (6.296)$$

Постоянная интегрирования C равна главному вектору заданной нагрузки на верхней кромке открытой оболочки при $\varphi = \varphi_0$, который обязательно параллелен оси оболочки или должен быть равным нулю. Для куполообразной оболочки $C \neq 0$ соответствует сосредоточенной осевой силе (растягивающее нагружение). В данном случае мембранное напряженное состояние закрытой оболочки становится сингулярным на вершине. В окрестности сосредоточенной силы преобладают напряжения изгиба. Рассматривая равновесие сил в нормальном направлении z к элементу оболочки $r_1 d\varphi r d\vartheta$, после деления на произведение дифференциалов $d\varphi d\vartheta$ и перехода к пределу площади элемента, стремящейся к нулю, получаем точное выражение для определения внутреннего статически определимого (второго) окружного мембранного напряжения

$$n_\vartheta r_1 \sin \varphi = r r_1 \rho_z - r n_\varphi. \quad (6.297)$$

Мембранные напряжения могут по-прежнему быть внешне статически неопределимыми. Упругие деформации срединной поверхности, связанные с мембранными напряжениями, в общем случае не совместимы с фактическими граничными условиями. Следовательно, мембранное напряжённое состояние (которое обычно ожидается только вблизи границы, что и является целью проектирования) возмущено изгибающими напряжениями. Изгибное возмущение связано с деформациями мембранного состояния. Закон Гука определяет мембранные деформации в срединной поверхности [см. формулы (6.224); h – толщина оболочки]:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh} (n_\varphi - \nu n_\vartheta), \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{Eh} (n_\vartheta - \nu n_\varphi). \quad (6.298)$$

Линеаризованные геометрические соотношения определяются аналогично изогнутой балке (рис. 6.25):

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_1} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right), \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{r} (u \cos \varphi + w \sin \varphi), \quad (6.299)$$

где u , w – тангенциальная и нормальная компоненты перемещения точек на растянутой срединной поверхности, а $1/r_1$ – начальная кривизна меридиана $\vartheta = \text{const}$.

(§) Изгибное возмущение мембранного состояния

После вышеизложенных соображений оболочка теперь предполагается свободной от любых гладко распределённых поверхностных усилий. Освобождён-

ное от связей параллельное круговое сечение оболочки содержит дополнительные нормальные напряжения, обозначенные n_φ^* , поперечную силу q и изгибающий момент m_φ . Равновесие требует выполнения следующих соотношений (см. рис. 6.37 в отсутствие внешних нагрузок):

$$2\pi r \left(n_\varphi^* \cos \varphi + q \sin \varphi \right) = 0, \quad n_\varphi^* = -q \operatorname{ctg} \varphi. \quad (6.300)$$

Формула (6.300) включает также условие скачка непостоянного нормального напряжения и непостоянной сдвиговой силы на любой параллельной окружности, где приложена внешняя кольцевая нагрузка. Локальное условие равновесия в нормальном направлении z свободного от поверхностных нагрузок элемента оболочки $r_1 d\varphi r d\vartheta$ приводит к соотношению

$$\left[\frac{d(rq)}{d\varphi} + r n_\varphi^* + r_1 n_\vartheta^* \sin \varphi \right] d\varphi d\vartheta = 0, \quad (6.301)$$

где n_ϑ^* – дополнительное окружное нормальное напряжение.

Исключение n_φ^* с помощью формулы (6.300) приводит к точному выражению для n_ϑ^* через поперечную нагрузку

$$(r_1 \sin \varphi) n_\vartheta^* = - \left[\frac{d(rq)}{d\varphi} - r q \operatorname{ctg} \varphi \right]. \quad (6.302)$$

Таким образом, знание поперечной силы определяет дополнительные нормальные напряжения в области любых изгибных возмущений мембранного состояния, которые должны быть наложены на статически определимые мембранные напряжения. Тогда дополнительные деформации срединной поверхности в зонах изгиба неявно связаны с поперечной силой через закон Гука

$$\varepsilon_\varphi^* = \frac{1}{Eh} (n_\varphi^* - \nu n_\vartheta^*), \quad \varepsilon_\vartheta^* = \frac{1}{Eh} (n_\vartheta^* - \nu n_\varphi^*). \quad (6.303)$$

При деформации меридиональная касательная поворачивается на угол χ , положительный в смысле увеличения широты φ [см. формулу (6.205)] :

$$\chi = \frac{u}{r_1} - \frac{dw}{r_1 d\varphi}, \quad (6.304)$$

и таким образом связывает тангенциальное перемещение срединной поверхности u с нормальным перемещением w . Следовательно, совместность деформаций (6.299) требует также выполнения соотношения

$$\chi = \frac{1}{\sin\varphi} \left[(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\vartheta) \cos\varphi - \frac{r}{r_1} \frac{d\varepsilon_\vartheta}{d\varphi} \right]. \quad (6.305)$$

При малом дополнительном повороте в зоне изгибного возмущения, обозначенном χ^* , элементарное волокно $r_1 d\varphi$ на расстоянии z по нормали удлиняется на $z d\chi^*$. Кроме того, радиус параллельной окружности $(r + z \sin\varphi)$ увеличивается до $r + z \sin(\varphi + \chi)$. Так как $\chi^* \ll 1$ и $|z| \ll r$, элементарное волокно $r d\vartheta$ удлиняется на $z \chi^* \cos\varphi d\vartheta$. Таким образом, деформации в зоне изгиба аппроксимируются линейным распределением по толщине оболочки

$$\varepsilon_\varphi(z) = \varepsilon_\varphi^* + \frac{z}{r_1} \frac{d\chi^*}{d\varphi}, \quad \varepsilon_\vartheta(z) = \varepsilon_\vartheta^* + \frac{z}{r} \chi^* \cos\varphi, \quad -h/2 \leq z \leq h/2. \quad (6.306)$$

Если выразить соотношение (6.305) через эти изгибные возмущения, из него вытекает искомая зависимость между поперечной силой q и углом χ^* . Подставляя линейно распределенные деформации в закон Гука (4.20), умножая на z и интегрируя по толщине оболочки, получаем зависимость главных изгибающих моментов от χ^* :

$$m_\varphi = -K \left(\frac{1}{r_1} \frac{d\chi^*}{d\varphi} + \frac{\nu}{r} \chi^* \cos\varphi \right), \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (6.307)$$

$$m_\vartheta = -K \left(\frac{\chi^*}{r} \cos\varphi + \frac{\nu}{r} \frac{d\chi^*}{d\varphi} \right).$$

Равновесие осевых моментов относительно касательной к параллельной окружности свободного от нагрузок элемента $r_1 d\varphi r d\vartheta$ дает статическое соотношение между изгибающими моментами и поперечной силой

$$\frac{d(r m_\varphi)}{d\varphi} - r_1 m_\vartheta \cos\varphi - r r_1 q = 0. \quad (6.308)$$

Интегрирование системы четырех связанных дифференциальных уравнений (6.305) – (6.308) с учетом граничных условий представляет собой довольно сложную математическую задачу. Точные решения для моментов m_φ , m_ϑ , поперечной нагрузки q и угла поворота χ^* в случае некоторых геометрических форм оболочек указывает на возможность значительного упрощения этих уравнений, так как изгибное возмущение в общем случае ограничено пограничным слоем. Это означает, что изгибающие моменты быстро убывают при увеличении расстояния от любого источника возмущения мембранного напряженного состояния. Пока радиус параллельной окружности r в такой возмущенной зоне не становится слишком малым (только производная высшего порядка яв-

ляется ведущим членом), неизвестными и их производными более низкого порядка можно пренебречь. Исключение изгибающих моментов влечет за собой следующее приближение пограничного слоя

$$\frac{d^2 q}{d\varphi^2} = Eh \left(\frac{r_1 \sin \varphi}{r} \right)^2 \chi^*, \quad \frac{d^2 \chi^*}{d\varphi^2} = -\frac{q}{K} r_1^2. \quad (6.309)$$

Далее, исключая χ^* , приходим к приближенному дифференциальному уравнению четвертого порядка для поперечной силы

$$\frac{d^4 q}{d\varphi^4} + 4 \kappa^4 q = 0, \quad \kappa^4 = 3(1-\nu^2) \frac{r_1^4}{h^2 r^2} \sin^2 \varphi. \quad (6.310)$$

Конструкция оболочки должна ограничивать изгибное возмущение. Следовательно, $|\kappa(\varphi)| \gg 1$, и при таком условии это приближение становится достоверным. В общем случае уравнение (6.310) требует численного решения. Однако, если $\kappa = \text{const}$, например, для сферической оболочки, где $\kappa_S^4 = 3(1-\nu^2)(R/h)^2$, поперечная сила выражается функцией в форме «затухающих колебаний», где вместо времени подставлена широта

$$q = e^{\kappa\varphi} (C_1 \cos \kappa\varphi + C_2 \sin \kappa\varphi) + e^{-\kappa\varphi} (C_3 \cos \kappa\varphi + C_4 \sin \kappa\varphi). \quad (6.311)$$

Постоянные интегрирования определяются граничными условиями на нижней кромке открытой оболочки $\varphi = \varphi_1$ и на верхней кромке $\varphi = \varphi_0$. Если и $(\varphi_1 - \varphi_0)$, и широта φ_0 достаточно велики, зоны возмущения мембранного состояния не перекрываются. В таком случае можно приближенно считать, что на нижней кромке открытой оболочки $C_3 = C_4 = 0$, а на верхней параллельной окружности $C_1 = C_2 = 0$.

В общем случае решение уравнения (6.310) дает поперечную силу, и, дважды интегрируя, получаем χ^* . Подстановка в соотношения (6.300) и (6.302) дает дополнительные мембранные напряжения. Изгибающие моменты определяются соотношениями (6.307). Полные нормальные напряжения получаются суперпозицией

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{n_\varphi + n_\varphi^*}{h} - \frac{12 m_\varphi}{h^3} z, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{n_\vartheta + n_\vartheta^*}{h} - \frac{12 m_\vartheta}{h^3} z. \quad (6.312)$$

Поперечная сила q вызывает касательные напряжения, которые, как и в случае балок или пластин, считаются распределенными по толщине оболочки по параболическому закону

$$\sigma_{\varphi z} = -\frac{3q}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]. \quad (6.313)$$

6.7.1. Тонкие круговые цилиндрические оболочки

Переходя к пределу $r_1 \rightarrow \infty$, $d\varphi \rightarrow 0$, $r_1 d\varphi = dx$ и полагая $\varphi = \pi/2$, $r = R = \text{const}$, получаем простое уравнение

$$\chi = -\frac{dw}{dx}. \quad (6.314)$$

Приближенные уравнения для изгибных возмущений принимают вид

$$\frac{d^2 \chi^*}{dx^2} = -\frac{q}{K}, \quad \frac{d^2 q}{dx^2} = \frac{Eh}{R^2} \chi^* \Rightarrow \frac{d^4 q}{dx^4} + 4 \frac{\kappa^4}{R^4} q = 0, \quad (6.315)$$

где κ – постоянная величина. Последнее соотношение формально задается выражением κ_S сферы. Формула (6.311) остается решением для поперечной силы, если подставить x/R вместо широты φ . Возмущенные результирующие силовые факторы в пограничном слое имеют вид

$$n_x^* = 0, \quad n_\vartheta^* = -R \frac{dq}{dx} = \frac{Eh}{R} w^*, \quad m_x = -K \frac{d\chi^*}{dx} = K \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad m_\vartheta = \nu m_x. \quad (6.316)$$

Следовательно,

$$\frac{du^*}{dx} = -\nu \frac{w^*}{R}, \quad (6.317)$$

и из формул (6.316) следует

$$w^* = -\frac{R^2}{Eh} \frac{dq}{dx}. \quad (6.318)$$

Мембранные напряжения все так же являются статически определяемыми, и в пределе соотношений (6.296) и (6.297) они перестают быть связанными:

$$n_\vartheta = R p_z, \quad n_x = -\int_0^x p_x dx + n_0. \quad (6.319)$$

Закон Гука определяет деформации в срединной поверхности

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (n_x - \nu n_\vartheta), \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{Eh} (n_\vartheta - \nu n_x), \quad (6.320)$$

и тогда можно найти перемещения с помощью линеаризованных геометрических соотношений

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{w}{R}. \quad (6.321)$$

(§) Открытый цилиндрический резервуар

Этот резервуар, наполненный жидкостью плотности ρ_F , служит наглядным примером теории тонких цилиндрических оболочек. Плотность материала однородной оболочки обозначена ρ , а распределённые нагрузки задаются ее собственным весом $p_x = \rho g h$ и гидростатическим давлением $p_z = g \rho_F x$. Верхняя кромка оболочки $x=0$ одновременно является свободной границей жидкости; резервуар полностью заполнен; см. рис. 6.38. Главные мембранные напряжения в данном случае являются линейными функциями аксиальной координаты: $n_x = (-\rho g h x)$ и $n_\vartheta = (\rho_F g h x)$; см. также формулы (2.95) и (2.98) нагруженной оболочки. На нижней кромке резервуара, скажем, при $x=L$, согласно теории мембран можно поставить граничное условие $u=0$, тогда радиальное перемещение принимает вид $w_0 = [(R/Eh)(\rho_F R + \nu \rho h)gL]$, а поворот равен $\chi_0 = -dw/dx = -w_0/L$. В общем случае должно накладываться изгибное возмущение. Если стенки жёстко прикреплены к плоскому днищу, полное перемещение, как и полный угол поворота, должны быть равны нулю: $w_0 + w^* = 0$, $\chi_0 + \chi^* = 0$. В пределе при $\varphi \rightarrow (L-x)/R$ соотношение (6.31) даёт поперечную силу

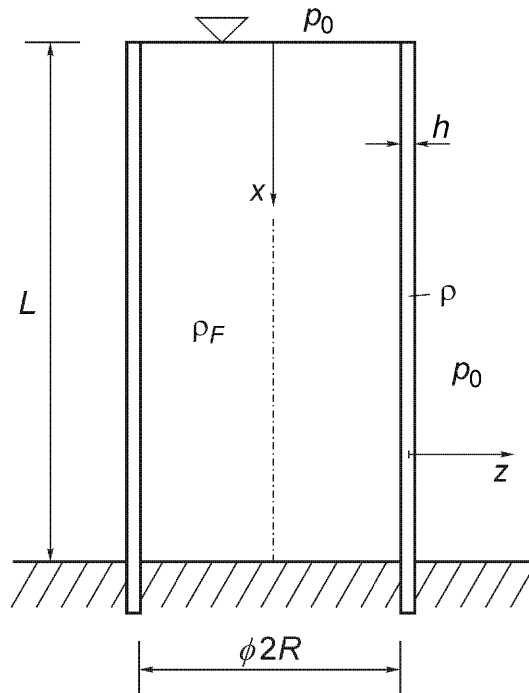


Рис. 6.38. Круговая цилиндрическая оболочка, полностью заполненная жидкостью. Нижняя кромка жёстко закреплена в основании.

$$q = \left[A \cos\left(\kappa \frac{L-x}{R}\right) + B \sin\left(\kappa \frac{L-x}{R}\right) \right] e^{-\kappa(L-x)/R},$$

и с помощью уравнений (6.318) и (6.315) радиальное изгибное перемещение выражается в форме экспоненциально затухающей функции

$$w^* = -\frac{\kappa R}{Eh} \left\{ q + \left[A \sin\left(\kappa \frac{L-x}{R}\right) - B \cos\left(\kappa \frac{L-x}{R}\right) \right] e^{-\kappa(L-x)/R} \right\},$$

и тогда дополнительный поворот в граничном слое принимает вид

$$\chi^* = 2 \frac{\kappa^2}{Eh} \left[A \sin\left(\kappa \frac{L-x}{R}\right) - B \cos\left(\kappa \frac{L-x}{R}\right) \right] e^{-\kappa(L-x)/R}.$$

Граничные условия при $x = L$ дают два линейных уравнения для A и B

$$\chi_0 = -\frac{w_0}{L} = 2 \frac{\kappa^2}{Eh} B, \quad w_0 = \frac{\kappa R}{Eh} (A - B),$$

которые легко решаются.

Изгибающий момент

$$m_x = -K \frac{d\chi^*}{dx}$$

максимален на нижней кромке, где принимает значение $2K \kappa \chi_0 (1 - \kappa L/R)/R$.

Так как $m_\vartheta = \nu m_x$ и $n_\vartheta^* = Eh w^*/R$, найдены все внутренние силовые факторы. Исследование достаточно длинного цилиндрического сосуда давления, закрытого торцевыми пластинами с обеих сторон, проводится аналогично.

6.7.2. Полусферический купол, изображенный на рис. 6.39

Тонкостенная сферическая оболочка, показанная на рис. 6.39, нагружена собственным весом, и соответствующие компоненты давления имеют вид $p_z = -\rho g h \cos \varphi$ и $p_\varphi = \rho g h \sin \varphi$. Так как $C = 0$, $r_1 = R = \text{const}$, соотношения (6.296) и (6.297) дают статически определимые мембранные напряжения:

$$n_\varphi = -\frac{\rho g h R}{1 + \cos \varphi}, \quad n_\vartheta = -(1 - \cos \varphi - \cos^2 \varphi) n_\varphi.$$

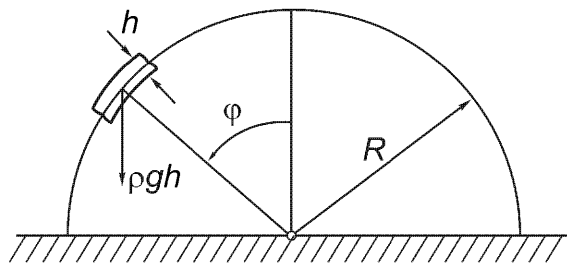


Рис. 6.39. Сферический купол под действием собственного веса, $\rho g h = \text{const}$.

На границе мембранные напряжения принимают значения $n_\varphi = -n_\vartheta = (-\rho g h R)$. Таким образом, смещения на наибольшей параллельной окружности в условиях мембранного напряжения равны $w_0 = R\varepsilon_\vartheta = = R(n_\vartheta - \nu n_\varphi)/Eh = (1+\nu)\rho g R^2/E$ и $\chi_0 = -(2+\nu)\rho g R/E$.

Граничные условия на свободно скользящей границе $\varphi = \pi/2$ в виде $q = 0$ и $m_\varphi = 0$ совместимы с мембранным решением. Сдвиговая сила также равна нулю.

Однако, если граница купола нерастяжима из-за жесткой связи, радиальное перемещение также равно нулю, $w_0 + w^* = 0$, и, в соответствии с условием на шарнирно опертой границе, $m_\varphi = 0$ при $\varphi = \pi/2$. Эти условия дают изгибное возмущение мембранного состояния. Так как $\kappa = \text{const}$, соотношения (6.311), (6.309), (6.307), (6.300) и (6.302) принимают особую форму, пригодную для сферических оболочек постоянной толщины:

$$q = e^{\kappa\varphi} (C_1 \cos \kappa\varphi + C_2 \sin \kappa\varphi), \quad \chi^* = \frac{2\kappa^2}{Eh} e^{\kappa\varphi} (-C_1 \sin \kappa\varphi + C_2 \cos \kappa\varphi),$$

$$m_\varphi = -\frac{K}{R} \left[(\kappa + \nu \text{ctg} \varphi) \chi^* - \frac{2\kappa^3}{Eh} q \right], \quad m_\vartheta = \nu m_\varphi - (1 - \nu^2) \frac{K}{R} \chi^* \text{ctg} \varphi,$$

$$n_\varphi^* = -q \text{ctg} \varphi, \quad n_\vartheta^* = -\left(\kappa q + \frac{Eh}{2\kappa} \chi^* \right).$$

Из системы двух линейных уравнения при условии, что $m_\varphi = 0$ при $\varphi = \pi/2$, следует соотношение

$$\chi^* = \frac{2\kappa^2}{Eh} q \quad \Rightarrow \quad C_1 \left(\cos \kappa \frac{\pi}{2} + \sin \kappa \frac{\pi}{2} \right) + C_2 \left(\sin \kappa \frac{\pi}{2} - \cos \kappa \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Кроме того, $w^* = R\varepsilon_\vartheta^* = -w_0 = -(1+\nu)\rho g R^2/E$. Изгибное возмущение полностью определяется константами C_1 и C_2 :

$$q = \frac{1+\nu}{2\kappa} \rho g h R e^{-\kappa\psi} (\cos \kappa\psi - \sin \kappa\psi), \quad \chi^* = \frac{1+\nu}{E} \rho g R \kappa e^{-\kappa\psi} (\cos \kappa\psi + \sin \kappa\psi),$$

где $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

В случае границы, жёстко прикреплённой к основанию, используются граничные условия $w_0 + w^* = 0$ и $\chi_0 + \chi^* = 0$, которые дают экспоненциально уменьшающееся изгибное возмущение мембранного состояния:

$$q = \frac{1+\nu}{\kappa} \rho g h R e^{-\kappa \psi} [\cos \kappa \psi - \mu (\cos \kappa \psi + \sin \kappa \psi)],$$

$$\chi^* = \frac{2(1+\nu)}{E} \rho g R \kappa e^{-\kappa \psi} [\sin \kappa \psi + \mu (\cos \kappa \psi - \sin \kappa \psi)],$$

где $\mu = \frac{2+\nu}{2(1+\nu)\kappa}$, $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

6.7.3. Температурные напряжения в тонких оболочках вращения

Предполагается, что температурное поле осесимметрично и применима формула Майзеля (6.44). Соответствующая фиктивная нагрузка выбирается так, чтобы образовать равномерное кольцо силы $q_0 = 1$ с углом наклона Ψ к локальному направлению нормали z . Мембранные силы, как и фиктивное изгибное возмущение, вносят вклад в изотермическую функцию влияния:

$$3\bar{\rho} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} + \bar{\sigma}_{\vartheta\vartheta} = \frac{\bar{n}_\varphi + \bar{n}_\vartheta}{h} - 12 \frac{\bar{m}_\varphi + \bar{m}_\vartheta}{h^3} z. \quad (6.322)$$

Затем в соотношении (6.44) производится интегрирование по толщине оболочки h , и тогда средняя температура

$$n_\vartheta = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \theta(\varphi, z) dz \quad (6.323)$$

и момент первого порядка от температуры по толщине

$$m_\vartheta = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z \theta(\varphi, z) dz \quad (6.324)$$

входят в оставшийся интеграл по поверхности оболочки

$$(u \sin \Psi + w \cos \Psi) =$$

$$= \frac{1}{r} \int_{\varphi_0}^{\varphi} [\alpha n_\vartheta(\varphi^*) \bar{n}(\varphi^*, \varphi) - \alpha m_\vartheta(\varphi^*) \bar{m}(\varphi^*, \varphi)] r^* r_1^* d\varphi^*, \quad (6.325)$$

где $\bar{n} = \bar{n}_\varphi + \bar{n}_\vartheta$, $\bar{m} = \bar{m}_\varphi + \bar{m}_\vartheta$, а $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ – температурные перемещения срединной поверхности; геометрия показана на рис. 6.37.

Температурные напряжения выводятся из этих равнодействующих аналогично тому, как это делалось для пластины,

$$n_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r_1} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right) + \frac{\nu}{r} (u \cos \varphi + w \sin \varphi) - (1+\nu) \alpha n_\vartheta \right],$$

$$n_{\vartheta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\nu}{r_1} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right) + \frac{1}{r} (u \cos \varphi + w \sin \varphi) - (1+\nu) \alpha n_{\theta} \right], \quad (6.326)$$

$$m_{\varphi} = -K \left[\frac{1}{r_1} \left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right) \frac{d(r_1^{-1})}{d\varphi} + \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{du}{d\varphi} - \frac{d^2w}{d\varphi^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{r r_1} \left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right) \cos \varphi - (1+\nu) \alpha m_{\theta} \right],$$

$$m_{\vartheta} = -K \left[\frac{\nu}{r_1} \left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right) \frac{d(r_1^{-1})}{d\varphi} + \frac{\nu}{r_1^2} \left(\frac{du}{d\varphi} - \frac{d^2w}{d\varphi^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r r_1} \left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right) \cos \varphi - (1+\nu) \alpha m_{\theta} \right]. \quad (6.327)$$

(§) Радиальное температурное растяжение круговой цилиндрической оболочки
Такое растяжение определяется с помощью интеграла по продольной оси оболочки

$$1 \cdot w(x) = \alpha \int_0^L [n_{\theta} \bar{n}_{\vartheta}(\xi, x) - m_{\theta} \bar{m}(\xi, x)] d\xi. \quad (6.328a)$$

В этот интеграл нужно подставить изотермические функции влияния радиальной «растягивающей» единичной кольцевой нагрузки, приложенной в сечении x . Путем соответствующей суперпозиции можно получить специальные решения из функции влияния бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки

$$\bar{w}(\xi, x=0) = \frac{1 \cdot R^3}{8K \kappa^3} \left(\cos \frac{\kappa \xi}{R} + \sin \frac{\kappa \xi}{R} \right) e^{-\kappa \xi / R}. \quad (6.328b)$$

Температурные напряжения во входном сечении полубесконечной цилиндрической оболочки и другие решения обсуждаются в докладе:

- Ziegler F., Irschik H. Thermal Stress Analysis Based on Maysel's Formula, in: Thermal Stresses, Vol.2 (ed. R.B. Hetnarski), Amsterdam, Elsevier Science Publ., 1987.

Изотермические решения приведены в книге:

- Timoshenko S.P. and Woinowski-Krieger S. Theory of Plates and Shells. 2nd ed., New York, McGraw-Hill, 1959. Имеется русский перевод: Тимошенко С.П. и Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Наука, 1966.

6.8. Контактные задачи (теория Герца)

Если два линейно упругих тела с гладкими поверхностями соприкасаются в единственной точке, или если два цилиндра соприкасаются по прямой линии, то существует общая касательная плоскость. Следовательно, ее ориентацию определяет общий вектор нормали. Приложение коллинеарной двойной силы без момента F производит такие деформации, что в малой контактной зоне давление остается конечным. Первым шагом анализа является определение размера и формы этой контактной области при упрощающем предположении о том, что касательные усилия, если они имеются, пренебрежимо малы. Герц считал, что в окрестности плоскости контакта тела должны быть достаточно плоскими, чтобы можно было аппроксимировать напряжения с помощью напряженного состояния в полупространстве. Ж. Буссинеск получил пространственное решение об упругом полупространстве, нагруженном сосредоточенной силой F в точке ($r = 0$, $z = 0$) свободной от других усилий поверхности. В центральной цилиндрической системе координат ненулевые осесимметричные компоненты напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{F}{2\pi} \left[(1-2\nu) \frac{(1-z/R)}{r^2} - 3 \frac{zr^2}{R^5} \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{F}{2\pi} (1-2\nu) \left[\frac{(1-z/R)}{r^2} - \frac{z}{R^3} \right], \\ \sigma_{rz} &= -\frac{3F}{2\pi} \frac{rz^2}{R^5}, \quad \sigma_{zz} = \frac{z}{r} \sigma_{rz}, \quad \text{где } R^2 = r^2 + z^2.\end{aligned}\tag{6.329}$$

Сингулярное усилие, действующее на внутреннюю поверхность элемента с нормалью \mathbf{e}_z на глубине z – это вектор, направленный к точке приложения силы,

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \sigma_{zr} \mathbf{e}_r + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z = \frac{1}{r} \sigma_{rz} (r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z),\tag{6.330}$$

то есть в двумерном случае (см. рис. 6.31) центральная система внутренних сил уравнивает нагрузку. Абсолютная величина этого усилия постоянна на сферической поверхности, на которой точка приложения силы F принята за северный полюс,

$$|\boldsymbol{\sigma}_z| = \frac{3F}{2\pi R^2} \cos^2 \varphi, \quad \text{где } \cos \varphi = z/R.\tag{6.331}$$

Его экстремальная величина постоянна на сфере диаметра $d = R / \cos \varphi$. Ассоциированные перемещения определяются законом Гука

$$\begin{aligned} u &= r \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{r}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] = \\ &= -\frac{1-2\nu}{G} \frac{F}{4\pi R} \left[1 - \frac{z}{R} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{z r^2}{R^3} \right] \end{aligned} \quad (6.332)$$

и интегрированием производных

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})], \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \gamma_{rz} - \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sigma_{rz}}{G} - \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (6.333)$$

Таким образом, вертикальное перемещение принимает вид

$$w = \frac{F}{2\pi R G} \left(1 - \nu + \frac{z^2}{2R^2} \right). \quad (6.334)$$

Плоская поверхность $z = 0$ деформируется в поверхность вращения, которая сдвигается в направлении оси z на некоторое постоянное перемещение

$$w(r, z = 0) = \frac{(1-\nu)F}{2\pi r G}, \quad (6.335)$$

а радиальное перемещение принимает вид

$$u(r, z = 0) = -\frac{(1-2\nu)F}{4\pi r G}. \quad (6.336)$$

Это решение приближенно определяет зону контакта двух сферических тел без трения. Это является специальным случаем теории Герца с круговой областью контакта. Недеформированные выпуклые поверхности этих тел имеют в точке контакта постоянные положительные кривизны $1/R_1$ и $1/R_2$, соответственно. Беря радиальную координату в общей касательной плоскости, получаем поверхностные точки недеформированных тел 1 и 2 на расстояниях

$$Z_1 = \frac{r^2}{2R_1}, \quad Z_2 = \frac{r^2}{2R_2}. \quad (6.337)$$

Эти величины достаточно точны в малой окрестности начала координат (согласно теореме о высоте r в прямоугольном треугольнике с гипотенузой $2R_i$, $i = 1, 2$). Следовательно, недеформированное расстояние между двумя точками перед контактом равно сумме

$$Z_1 + Z_2 = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} r^2. \quad (6.338)$$

Если мы обозначим перемещения на поверхностях через $w_i(r)$, считая их положительными в направлениях Z_i , $i=1,2$, а уменьшение расстояния между двумя точками, расположенными вдали от оси симметрии, обозначим w_0 , то условие контакта двух поверхностных точек внутри круга $r \leq R$ принимает вид

$$w_0 - (w_1 + w_2) = Z_1 + Z_2 = \kappa r^2, \quad \text{где} \quad \kappa = \frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2}. \quad (6.339)$$

Формула (6.335) приближенно определяет эти перемещения в виде:

$$w_i(r) = \frac{1-\nu_i}{2\pi G_i} \iint_A \frac{p(s,\varphi) ds s d\varphi}{s} = k_i \iint_A p ds d\varphi, \quad (6.340)$$

$$k_i = \frac{1-\nu_i}{2\pi G_i}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

где $p(s, \varphi)$ означает давление в зоне контакта A (см. рис. 6.40), ds – дифференциал хорды $2R \cos \theta$ контактной окружности. После подстановки вертикальных перемещений уравнение (6.339) становится интегральным уравнением относительно еще неизвестного распределения давления $p(r)$ в зоне контакта

$$(k_1 + k_2) \iint_A p ds d\varphi = w_0 - \kappa r^2. \quad (6.341)$$

Грубое приближение этого решения получается при предположении, что давление распределено по закону полуэллипса с максимумом $p(r=0) = p_0 = kR$. Интегрирование такой функции по s дает

$$\int p ds = k \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2 \sin^2 \varphi), \quad (6.342)$$

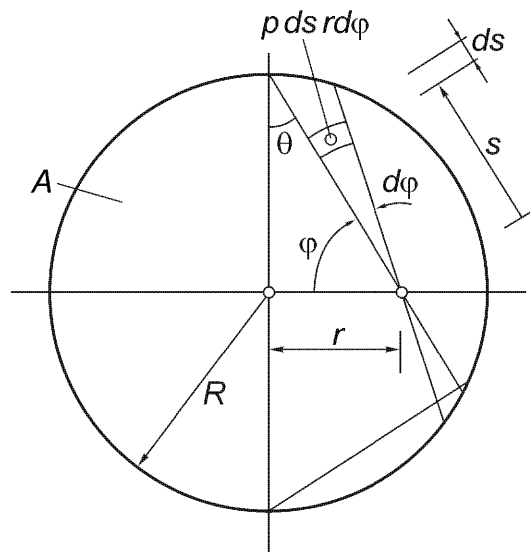


Рис. 6.40. Круговая область контакта в осесимметричной задаче Герца.

и при вычислении определенного интеграла от оставшейся симметричной функции получаем квадратичный полином

$$2 \int_0^{\pi/2} (R^2 - r^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = A - \frac{\pi r^2}{2}, \quad \text{где} \quad A = \pi R^2. \quad (6.343)$$

Сравнение коэффициентов в выражении (6.341) уменьшает число параметров с трех до одного; остается определить ρ_0 ,

$$w_0 = (k_1 + k_2) \pi A \frac{\rho_0}{2R}, \quad (6.344)$$

и решение

$$\kappa = (k_1 + k_2) \pi^2 \frac{\rho_0}{4R} \quad (6.345)$$

дает радиус области контакта R как функцию от ρ_0 :

$$R = (k_1 + k_2) \pi^2 \frac{\rho_0}{4\kappa}. \quad (6.346)$$

Главный вектор сил давления уравнивает нагрузку, $F = 2 \rho_0 A/3$, и максимальное контактное давление $\rho_0 = (3/2)F/A$ получается умножением среднего давления F/A на коэффициент $3/2$. Подстановка дает зависимость диаметра зоны контакта от геометрии, упругих параметров и силы F :

$$2R = \left[3F \left(\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2} \right) \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \right]^{1/3}. \quad (6.347)$$

Предположения, сделанные в теории Герца об условии контакта и распределении давления, не совместимы.

Напряжения вблизи контактной области без трения приближенно выражаются напряжениями, развивающимися в полупространстве под действием равномерной нагрузки, приложенной в круговой области радиуса R поверхности, свободной от других усилий. Решение находится путем надлежащего интегрирования сингулярного напряженного состояния. Распределение вдоль оси симметрии определяется через ($\zeta = z/R$):

$$\frac{\sigma_{rr}}{\rho_0} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\rho_0} = -(1+\nu)[1 - \zeta \operatorname{arctg}(1/\zeta)] - \frac{\sigma_{zz}}{2\rho_0}, \quad \frac{\sigma_{zz}}{\rho_0} = -(1+\zeta^2)^{-1}. \quad (6.348)$$

Таблицы и дополнительные данные приведены в работе:

- Lundberg G. and Odqvist F.K.G. Ing. Vetenskaps Akad'Handl., 116 (1932), p. 64.

Единственным оставшимся параметром материала является коэффициент Пуассона ν . Его надо подставить в соотношение (6.348) в соответствии со свойствами материала тела 1 или 2. Абсолютный максимум касательного напряжения достигается на глубине $\zeta = 0,47$ при $\nu = 0,3$. Эта величина равна $\tau_{\max} = 0,31\rho_0$. Наибольшее растягивающее напряжение наблюдается, однако, на границе области контакта при $r = R$, $z = 0$ и равно

$$\frac{\sigma_{rr}(r=R, z=0)}{\rho_0} = \frac{(1-2\nu)}{3}. \quad (6.349)$$

Насчет более общей эллиптической области контакта и насчет обобщения нагрузки, включающего тангенциальную силу см. классическую монографию:

- Timoshenko S.P. and Goodier J.N. Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1970. Имеется русский перевод: Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., Наука, 1975.

Контакт при качении, как и влияние трения, все еще является предметом теоретических исследований, см., например,

- Proceedings of IUTAM-Symposium on «The Mechanics of the Contact Between Deformable Bodies», (ed. A.D. de Pater and J.J. Kalker), Delft University Press, The Netherlands, 1975.

6.9. Температурные поля, не вызывающие напряжений, закон теплопроводности Фурье

Рассматривается конструкция со статически определенными опорами. Вопрос о том, при каких условиях температурное поле не вызывает температурных напряжений (такие внутренние силы обязательно должны быть самоуравновешенными), имеет большое значение в технике. С другой стороны, такими же важными могут быть условия, накладываемые на распределение температуры, не вызывающее температурных деформаций. Для этого последнего случая см. упражнение А 6.22, а для более глубокого изучения обратитесь к работе:

- Ziegler F. and Irschik H. Thermal Stress Analysis Based on Maysel's Formula, in: Thermal Stresses, Vol.2 (ed. R.B. Hetnarsky), Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1987.

Пусть в односвязной линейно упругой области, которая может свободно расширяться, отсутствуют температурные напряжения, $\sigma_{ij} = 0$. При приложении температурного поля $\theta(x, y, z)$ ненулевыми остаются только температурные деформации

$$\varepsilon_{ii} = \alpha\theta, \quad \varepsilon_{ij} = 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3. \quad (6.350)$$

Эти температурные деформации должны быть совместными [см. уравнения (1.22)]; иначе появятся напряжения. Условия этого имеют вид

$$\frac{\partial^2(\alpha\theta)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2(\alpha\theta)}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2(\alpha\theta)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3. \quad (6.351)$$

Общим решением для всех этих дифференциальных уравнений является линейное распределение температуры в декартовой системе координат

$$\alpha\theta = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z \quad (6.352)$$

с произвольными коэффициентами, которые могут также медленно изменяться с течением времени.

Так как в диапазоне температур, при котором твердое тело остается упругим, перенос тепловой энергии излучением пренебрежимо мал, рассматривается перенос тепла с помощью теплопроводности. Закон Фурье утверждает, что для однородного и изотропного твердого тела тепловой поток q_n на единицу площади и в единицу времени в направлении e_n пропорционален градиенту температуры, взятому со знаком минус (на рис. 6.41 показан пример элемента поверхности с нормалью e_n):

$$q_n = -k \frac{\partial \theta}{\partial n}, \quad (6.353)$$

где коэффициент k с размерностью $[k] = \text{Вт/мК}$ – коэффициент изотропной теплопроводности. В малом диапазоне допустимых изменений температуры он полагается постоянным. Аналогично рассмотрению скорости потока массы в уравнении неразрывности (1.74), уравнение локальной теплопроводности выводится при переходе к пределу $dV \rightarrow 0$ уравнения баланса теплового потока, проходящего через элементарный контрольный объем $dV = dx dy dz$. В результате получаем

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \nabla^2 \theta + \frac{S}{\rho c}, \quad a = k/\rho c, \quad (6.354)$$

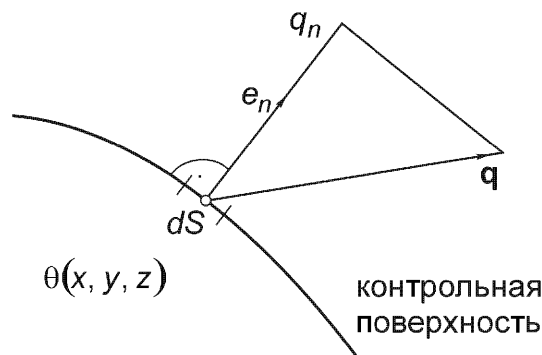


Рис. 6.41. Тепловой поток через элемент поверхности, $(q \cdot e_n) dS$.

где коэффициент a с размерностью $[a] = \text{м}^2/\text{с}$ – коэффициент температуропроводности. Произведение ρc – изохорическая удельная теплоемкость на единицу объема. Краевые задачи для уравнения теплопроводности (6.354) с начальными и граничными условиями подробно обсуждаются в монографии:

- Carslaw H.S. and Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids. 2nd ed., Oxford, Clarendon Press, 1959. Имеется русский перевод: Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964. См. также: Schuh H. Heat Transfer in Structures. London, Pergamon Press, 1965.

Это уравнение является неоднородным в случае действия внутри твердого тела внешних тепловых источников с мощностью S . Они также включают тепло, выделяемое или поглощаемое при деформации. В линейной теории упругости, когда скорости деформации достаточно малы, связанностью полей напряжений и температуры обычно пренебрегают. Подстановка не вызывающего напряжений температурного поля (6.352) дает ограничение на распределение внешних тепловых источников

$$\dot{a}_0 + \dot{a}_1 x + \dot{a}_2 y + \dot{a}_3 z = S/\rho c \alpha. \quad (6.355)$$

В случае $S = 0$, когда нет никаких тепловых источников, получается, что коэффициенты должны быть постоянными, $a_k = \text{const}$, и линейное температурное поле должно быть стационарным. Таким образом, статически определяемые балки остаются свободными от напряжений, если температура является линейной функцией координат поперечного сечения [см. формулу (6.91)].

В многосвязных телах уравнение (6.355) является только необходимым условием интегрируемости. Дальнейшие подробности можно найти в монографии:

- Boley B.A. and Weiner J. Theory of Thermal Stresses. New York, Wiley, 1960. Имеется русский перевод: Боли Б., Уэйнер Д. Теория температурных напряжений. М., Мир, 1964.

6.10. Упруго-вязко-упругая аналогия

В разделе 4.2.2 рассмотрены линейные определяющие соотношения вязкоупругих материалов и обсуждены комплексные модули. Т. Алфрей (1944) и позже Е. Ли (1955) разработали теорию, связывающую упругие и вязкоупругие решения. Довольно общая формулировка этой аналогии получена путем применения преобразования Лапласа (4.78) к локальным уравнениям равновесия (2.19), линеаризованным геометрическим соотношениям (1.21) и линейно зависящему от скорости деформации материальному закону [соотношения (4.101)], а также к граничным условиям. Преобразованные уравнения формально имеют

тот же вид, что и уравнения линейно упругого твердого тела той же конфигурации, и в отдельном случае с теми же граничными условиями. Таким образом, предполагается, что любое зависимое от времени нагружение можно разложить в конечный ряд, где временной коэффициент будет отделен. В этом случае соответствие является полным, и комплексные модули задаются соотношениями [см. формулу (4.102)]:

$$G^*(s) = \frac{1}{2} \frac{Q_n(s)}{P_m(s)}, \quad K^*(s) = \frac{\bar{Q}_q(s)}{\bar{P}_p(s)}, \quad n \leq m, \quad q \leq p. \quad (6.356)$$

Комплексный коэффициент Пуассона выражается в виде

$$v^*(s) = \frac{1}{2} \frac{K^*(s) - 2G^*(s)}{K^*(s) + G^*(s)}, \quad (6.357)$$

где s – комплексная переменная преобразования. Для этих квазистационарных задач подразумеваются однородные начальные условия. В случае чисто упругого объемного расширения (или сжатия) модуль $K^* = K = 2G(1+\nu)/(1-2\nu)$ является действительным, и справедливо соотношение (4.12). Остальные комплексные параметры, например, жидкости Максвелла [см. формулу (4.87)], равны:

$$G^*(s) = G \frac{s}{(s + \vartheta^{-1})}, \quad v^*(s) = \nu \frac{s + 1/2\nu\vartheta^*}{s + 1/\vartheta^*}, \quad \vartheta^* = \frac{3}{2(1+\nu)}\vartheta. \quad (6.358)$$

Эта аналогия имеет особую ценность для практики в тех случаях, когда линейно упругое решение уже известно и его зависимость от упругих параметров G и ν выражена аналитически. Преобразованный по Лапласу вязко-упругий образ той же конструкции после переключения на нагрузку в момент времени $t = 0$ находится умножением на $1/s$ и подстановкой комплексных модулей $G^*(s)$ и $v^*(s)$. Обратное преобразование этого изображения по Лапласу производится интегрированием по контуру в комплексной плоскости или подбором; см., например:

- Doetch G. Anleitung zum practischen Gebrauch der Laplace-Transformation. 2. Aufl, München, R. Oldenbourg, 1961. Имеется русский перевод: Дойч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., Наука, 1965.

Таблицы имеются в книге:

- Erdelyi A., et al. Tables of Integral Transforms (Bateman Project), New York, McGraw Hill, 1954.

В результате получаются зависящие от времени деформации ползучести и, возможно, перераспределенные нестационарные напряжения. Непосредствен-

ное применение этого принципа аналогии демонстрируют два простых примера.

6.10.1. Ползучесть шарнирно опертой однопролетной балки

Линейно упругий прогиб шарнирно опертой балки под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки q_0 и при постоянной главной изгибной жесткости $B = EJ = 2(1 + \nu)GJ$ легко находится, например, надлежащим интегрированием уравнения (6.72):

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{24B} \frac{x}{l} \left[1 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]. \quad (6.359)$$

Квазистатический упругий отклик на скачок нагрузки $q_0 H(t)$, где $H(t) = 1$ при $t > 0$ является функцией Хевисайда и имеет изображение

$$w^*(x, s) = \frac{1}{s} w(x). \quad (6.360)$$

Комплексный модуль Юнга, например, жидкости Максвелла

$$E^*(s) = E \frac{s}{s + 1/\vartheta''} \quad (6.361)$$

подставляется в изгибную жесткость вместо E , и путем непосредственного применения принципа соответствия получается изображение прогиба при ползучести

$$w^*(x, s) = \frac{s + 1/\vartheta''}{s^2} w(x). \quad (6.362)$$

Обратное преобразование Лапласа производится почленно и дает временную функцию Хевисайда, соответствующую мгновенному упругому отклику тела Максвелла, и его интеграл по времени

$$w_c(x, t) = H(t)(1 + t/\vartheta'')w(x), \quad t \geq 0. \quad (6.363a)$$

Деформация ползучести неограниченно возрастает в соответствии с упругим прогибом в масштабе времени

$$\vartheta'' = 3\vartheta/2(1 + \nu), \quad (6.363b)$$

который пропорционален времени релаксации материала Максвелла, соотношение (4.84). При разгрузке балки Максвелла после нагружения конечной продолжительности остается необратимый прогиб. Для изучения различных эффектов ползучести необходимо подставлять в вышеприведенное уравнение другие материальные законы, например те, что обсуждались в разделе 4.2.2.

6.10.2. Нагреваемая толстостенная труба (рис. 6.42)

Температура на внутренней поверхности трубы $r = R_i$, в которой движется поток нагретой жидкости, может поддерживаться постоянной, $\theta = \theta_i = \text{const}$. На наружной поверхности $r = R_e$ сохраняется нулевая температура. Нетрудно получить соответствующее осесимметричное стационарное решение уравнения теплопроводности (6.354):

$$\theta(r) = \frac{\theta_i}{\ln \beta} \ln(R_e/r), \quad \text{где} \quad \beta = R_e/R_i. \quad (6.364)$$

В условиях плоской деформации, которые применяются для длинной линейно упругой трубы, температурные напряжения легко вычисляются путем суперпозиции частного решения неоднородной тепловой задачи и изотермического решения для трубы, находящейся под действием внутреннего и внешнего давления [см. формулу (6.14)], таким образом, получаем границы, свободные от любых усилий. Главные упругие напряжения, которые получил Э. Мелан (Э. Мелан был профессором Венского технического университета), взяты из книги:

- Parkus H. Thermal Stresses in Handbook of Engineering Mechanics (W. Flügge, ed.). New York, McGraw-Hill, 1962, Chap. 43.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta_i \left(\frac{\ln(R_e/r)}{\ln \beta} - \frac{(R_e/r)^2 - 1}{\beta^2 - 1} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta_i \left(\frac{\ln(R_e/r) - 1}{\ln \beta} + \frac{(R_e/r)^2 + 1}{\beta^2 - 1} \right), \\ \sigma_{zz} &= -G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta_i \left(\frac{2 \ln(R_e/r)}{\ln \beta} + 2\nu \left[\frac{1}{\beta^2 - 1} - \frac{1}{2 \ln \beta} \right] \right). \end{aligned} \quad (6.365)$$

Напряженное состояние в вязком материале получается умножением на $1/s$ и подстановкой комплексных модулей $G^*(s)$ и $\nu^*(s)$ вместо упругих параметров

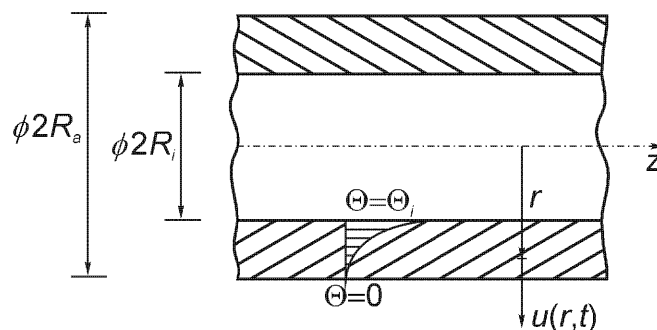


Рис. 6.42. Нагреваемая изнутри толстостенная вязко-упругая труба.

G и ν . Из формул (6.365) видно, что осевое напряжение состоит из двух частей, которые по-разному зависят от времени, и должно быть надлежащим образом перераспределено путем обратного преобразования Лапласа. Выбор материала Максвелла для демонстрации эффектов ползучести определяет эти подстановки. Определяем первый коэффициент

$$\frac{1}{s} G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta_i \Rightarrow \frac{1}{s} G^*(s) \frac{1+\nu^*(s)}{1-\nu^*(s)} \alpha \theta_i = G \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{s+1/\vartheta'} \alpha \theta_i, \quad (6.366)$$

$$\vartheta' = 3 \frac{1-\nu}{1+\nu} \vartheta,$$

и второй коэффициент

$$\frac{1}{s} G \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \alpha \theta_i \Rightarrow \frac{1}{s} G^*(s) \frac{\nu^*(s)[1+\nu^*(s)]}{1-\nu^*(s)} \alpha \theta_i =$$

$$= G \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \frac{1}{s+1/\vartheta'} \frac{s+1/2\nu\vartheta''}{s+1/\vartheta''} \alpha \theta_i, \quad \vartheta'' = \frac{3\vartheta}{2(1+\nu)}. \quad (6.367)$$

Обратное преобразование Лапласа приводит к релаксации температурных напряжений в поперечном сечении трубы из материала Максвелла

$$\sigma_{rr}^{(c)} = e^{-t/\vartheta'} \sigma_{rr}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(c)} = e^{-t/\vartheta'} \sigma_{\varphi\varphi}, \quad (6.368)$$

осевые напряжения (перераспределенные по r) принимают вид

$$\sigma_{zz}^{(c)} = -G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta_i \left\{ \left[\frac{2 \ln(R_e/r) - 1}{\ln \beta} - \frac{2}{1-\beta^2} \right] e^{-t/\vartheta'} + \right.$$

$$\left. + (1-\nu) \left[\frac{1}{\ln \beta} + \frac{2}{1-\beta^2} \right] e^{-t/\vartheta''} \right\}. \quad (6.369)$$

Линейно упругое радиальное перемещение задается выражением

$$u(r) = \frac{r}{4} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha \theta_i}{\ln \beta} \left[1 + 2 \ln(R_e/r) + \frac{1+(R_i/r)^2}{1-\beta^2} - \right.$$

$$\left. - (1+2 \ln \beta) \frac{1+(R_e/r)^2}{\beta^2-1} + 2\nu \frac{1+2 \ln \beta - \beta^2}{\beta^2-1} \right]. \quad (6.370)$$

Применение принципа соответствия к аналитическому выражению и обратное преобразование Лапласа дают вязкий рост поперечного сечения (заметьте две шкалы времени):

$$u^{(c)}(r, t) = \frac{r}{4} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha \theta_i}{\ln \beta} \left\{ \left[1 + 2 \ln(R_e/r) + \frac{1+(R_i/r)^2}{1-\beta^2} - \right. \right.$$

$$-(1+2\ln\beta)\frac{1+(R_e/r)^2}{\beta^2-1}\left]\frac{3(1-\nu)-2(1-2\nu)e^{-t/\delta'}}{1+\nu}+\right. \quad (6.371)$$

$$\left.+\frac{1+2\ln\beta-\beta^2}{\beta^2-1}\left[1-(1-2\nu)e^{-t/\delta'}\right]\right\}.$$

6.11. Упражнения А 6.1 – А 6.23 и решения

А 6.1: Консольная балка с симметричным поперечным сечением в виде равнобокого уголка нагружена на конце моментом $\mathbf{M} = M_\eta \mathbf{e}_\eta + M_\zeta \mathbf{e}_\zeta$, как показано на рис. А 6.1. При таком двухосном изгибе определить линейно упругое распределение напряжений и проверить, что вектор прогиба не ортогонален вектору изгибающего момента. Кроме того, определить ядро уголкового поперечного сечения.

Решение: Так как ось симметрии y является также главной осью поперечного сечения, его площадь равна $A = 2bt - t^2$. Определив положение центра тяжести S , находим вторую, ортогональную ей, главную ось z (см. рис. А 6.1):

$$e = \frac{1}{2}\left(t + b\frac{b-t}{2b-t}\right).$$

Моменты инерции относительно осей η и ζ легко вычисляются:

$$J_\eta = J_\zeta = \frac{t}{12}\left[b^3 + bt^2 - t^3 + 3b\frac{(b-t)^3}{2b-t}\right], \quad J_{\eta\zeta} = \frac{tb^2}{4}\frac{(b-t)^2}{2b-t}$$

и преобразуются путем поворота системы координат к главным осям y, z :

$$J_1 = J_y = \frac{t}{12}\left[4b^3 + 4bt^2 - t^3 - 6tb^2\right], \quad i_y^2 = J_y/A,$$

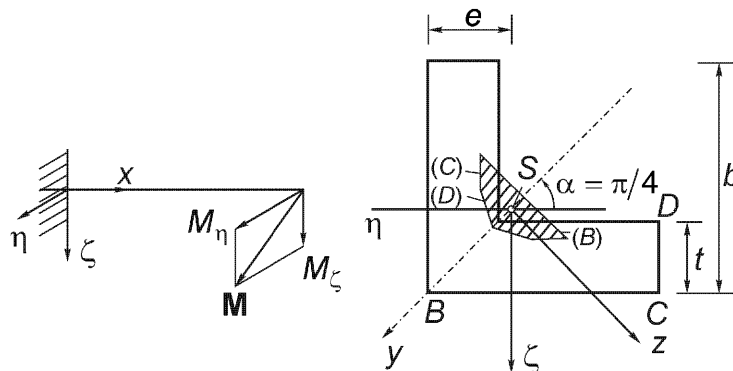


Рис. А 6.1.

$$J_2 = J_z = \frac{t}{12} \left[4b^3 + 4bt^2 - t^3 - 6 \frac{b^4}{2b-t} \right], \quad i_z^2 = J_z/A.$$

Проектируя нагрузку, получаем осевые моменты относительно главных осей

$$M_y = M_\eta \cos \alpha + M_\zeta \sin \alpha, \quad M_z = -M_\eta \sin \alpha + M_\zeta \cos \alpha,$$

и, так как эпюры этих моментов постоянны, в результате суперпозиции двух напряженных состояний при главном изгибе получаем

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y.$$

Экстремальные главные напряжения должны наблюдаться в точках В, С и D. Прогибы в главных плоскостях изгиба получаются интегрированием линейризованного дифференциального уравнения второго порядка для w (5.22а) и соответствующего уравнения для v :

$$w(x) = -\frac{M_y}{2EJ_y} x^2, \quad v(x) = \frac{M_z}{2EJ_z} x^2.$$

Так как главные жесткости при изгибе не равны, то вектор $\mathbf{u} = v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z$ не ортогонален вектору $\mathbf{M} = \text{const}$. Подставляя координаты точек В, С и D в уравнение нейтральной оси (6.51), получаем прямолинейные границы полигональной области ядра сечения, которое показано на рисунке. Координаты y, z приведены в следующей таблице:

Точка	В	С	D
y	$e\sqrt{2}$	$e\sqrt{2} - b/\sqrt{2}$	$e\sqrt{2} - (b+t)/\sqrt{2}$
z	0	$b/\sqrt{2}$	$(b-t)/\sqrt{2}$

А 6.2: Жесткая головка цилиндра с промежуточной упругой герметизирующей прокладкой прижата к жесткому блоку с помощью n болтов, работающих на растяжение, см. рис. А 6.2. Считая начальное предварительное натяжение болтов равным S , определить, как будет изменяться эта нормальная сила, если величина давления p будет изменяться, например, при ходе поршня. Чему равно максимально допустимое давление, при котором сосуд давления остается герметичным? Параметры геометрии и жесткости заданы.

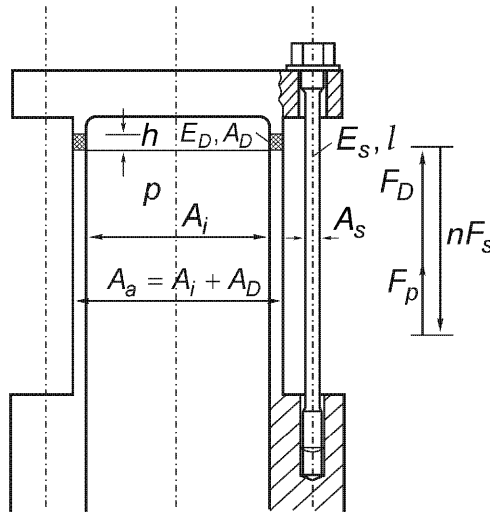


Рис. А 6.2.

Решение: Равновесие сил, действующих на крышку, требует выполнения условия $F_P + F_D - nF_S = 0$, где $F_P = \rho A_i$. Герметизирующая прокладка первоначальной толщины h_0 предполагается при сжатии линейно упругой, $F_D = k_D (h_0 - h)$. Ее жесткость приближенно задана выражением $k_D = E_D A_D / h_0$; таким образом, мы предполагаем смазочный контакт без сдвига. Линейно упругий болт имеет в ненапряженном состоянии длину l_0 , его жесткость равна $k_S = E_S A_S / l_0$, и из закона Гука следует $F_S = k_S (l - l_0)$. Геометрическое условие контакта с прокладкой имеет вид $l - l_1 = h - h_1$, где l_1 и h_1 – размеры в предварительно напряженном состоянии при $p = 0$. Из условия равновесия при отсутствии давления, $p = 0$, получаем силу сжатия прокладки $D = nS$. Вычитая первоначальные размеры $(l - l_0) - (l_1 - l_0) = (h_0 - h_1) - (h_0 - h)$ и исключая удлинения за счет упругих сил, получаем следующее соотношение

$$k_S^{-1} (F_S - S) = k_D^{-1} (D - F_D).$$

Далее, исключая F_D , получаем текущую силу в болтах

$$F_S = S + \frac{F_P}{n(1 + k_D/nk_S)}.$$

Так как усталостная прочность болтов сильно зависит от колебаний нормальной силы, отсюда следует правило проектирования $k_D \gg k_S$, которое сохраняет амплитуду малой по отношению к изменениям давления. На практике предпочтительно сочетание жесткой прокладки и длинных податливых болтов. Максимально допустимое давление следует из неравенства $s_D = F_D / A_D \geq p$,

которое обеспечивает отсутствие протечек, путем замены неравенства на знак равенства,

$$p_{\max} = nS \frac{1 + k_D/nk_S}{A_D + A_a k_D/nk_S}, \quad p_{\max} \approx nS/A_a.$$

Это приближенное решение справедливо, если конструкция удовлетворяет условию $k_D/nk_S \gg 1$. Обычно площадь сечения цилиндра задается (обозначим ее как A_i) и, так как $A_a = A_i + A_D$, для максимизации давления площадь поперечного сечения прокладки должна быть малой. Таким образом, для высокой жесткости прокладки требуется большой модуль Юнга; толщина h_0 также очень ограничена.

А 6.3: Сила F с помощью жесткой поперечины распределена между n линейно упругими стержнями различной жесткости $(EA)_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (см. рис. А 6.3). Требуется вычислить нормальные силы N_i и перемещение s жесткой поперечины при дополнительном термическом нагружении заданной температурой θ_i (постоянной для каждого стержня).

Решение: Из равновесия сил, действующих на жесткую переключину, следует

$$F = \sum_{i=1}^n N_i.$$

Теорема Кастильяно вместе с условием одинакового удлинения всех стержней, входящих в систему, дает

$$s = \frac{\partial U^*}{\partial N_i} = l \left[\frac{N_i}{(EA)_i} + (\alpha\theta)_i \right],$$

и после исключения s получим $(n-1)$ линейных уравнений для n неизвестных

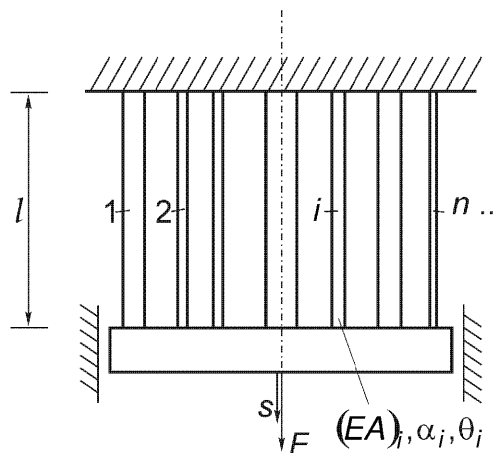


Рис. А 6.3.

$$\frac{N_{i+1}}{(EA)_{i+1}} - \frac{N_i}{(EA)_i} = (\alpha\theta)_i - (\alpha\theta)_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Температурные напряжения существенно зависят от поперечного к направлению свободного расширения градиента температуры. Если все n стержней одинаковы, $(EA\alpha)_i = EA\alpha = \text{const}$, то решение ясно указывает на этот факт, так как температурные напряжения пропорциональны отклонению локальной температуры от средней величины:

$$N_i = F/n + EA\alpha \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \theta_j - \theta_i \right).$$

Общая деформация в этом частном случае имеет вид:

$$\varepsilon = s/l = F/(nEA) + \alpha \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \theta_j.$$

А 6.4: Каждая из двух параллельных консольных балок несет на конце силу F . Из конструктивных соображений стержень АВ соединяет эти консольные балки в форме рамной конструкции, как показано на рис. А 6.4. Показать, что даже равномерный нагрев всей конструкции вызывает перераспределение напряжений от нагрузки. Соединительный стержень вставлен при исходной температуре без натяжения.

Решение: Поперечные силы в точке А, $Q_Z(x=l) = Q_A$, и в точке В, $Q_Z(x=l) = Q_B = 2F - Q_A$, определяют линейные эпюры изгибающих моментов. Тогда, пренебрегая деформацией сдвига и тепловым расширением консольных балок, получаем дополнительную энергию в виде

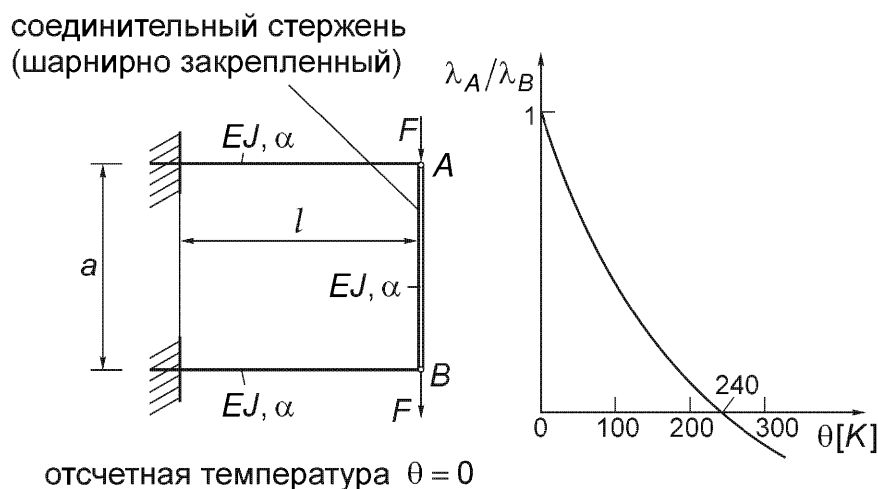


Рис. А 6.4.

$$U^* = \frac{1}{2} \left[\frac{Q_A^2 l^3}{3B} + \frac{(2F - Q_A)^2 l^3}{3B} + \frac{(Q_A - F)^2 a}{EA} \right] + (Q_A - F) a \alpha \theta, \quad \text{где } B = EJ.$$

Из теоремы Менабреа $\partial U^* / \partial Q_A = 0$ следует, что статически неопределимая сила в нагретой раме Q_A и, следовательно, также и Q_B должны быть пропорциональны заданной нагрузке F , но с различными коэффициентами термической нагрузки:

$$Q_A = F \lambda_A, \quad Q_B = F \lambda_B,$$

где

$$\lambda_A = 1 - \beta E \alpha \theta l^2 / F, \quad \lambda_B = 1 + \beta E \alpha \theta l^2 / F, \quad \beta = \frac{3aJ}{2l^5 (1 + 3aJ/2Al^3)}.$$

Рисунок А 6.4(б) показывает отношение этих коэффициентов нагрузки как функцию возрастающей температуры и, таким образом, указывает на перераспределение нагрузки F и связанных с нагрузкой напряжений в консольных балках.

А 6.5: Шарнирно опертая рама, изображенная на рис. А 6.5, нагружена температурной кривизной $\alpha m_\theta = \kappa_{th}$, которая полагается одинаковой во всех трех стержнях рамы. Средняя температура принята равной нулю. Вычислить внутренние силовые факторы в поперечной балке, если главные изгибные жесткости стоек и балки одинаковы, $B = EJ$.

Решение: Из условий равновесия внешних сил следует, что вертикальные компоненты реакций $A = B = 0$, а силы $H_1 = H_2 = X$ остаются статически неопределимыми. Если в грубом приближении пренебречь осевой и сдвиговой деформациями, теорема Менабреа учитывает производную от дополнительной энергии в виде

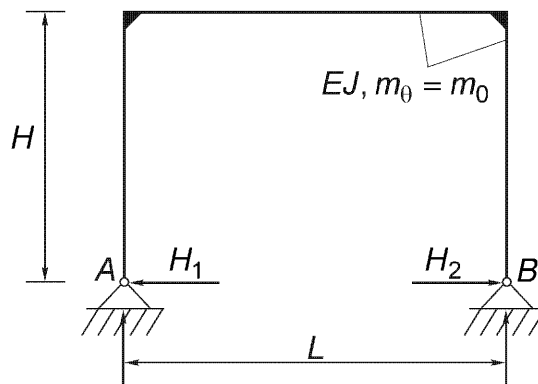


Рис. А 6.5.

$$U^* = 2 \int_0^H \left(\frac{M_1^2}{2B} + M_1 \kappa_{th} \right) dx + \int_0^L \left(\frac{M_2^2}{2B} + M_2 \kappa_{th} \right) dx,$$

$$M_1 = x X, \quad M_2 = H X, \quad \frac{\partial U^*}{\partial X} = 0.$$

Решая относительно X , получаем

$$X = -3B \kappa_{th} \frac{1+L/H}{3L+2H}.$$

В поперечной балке нормальная сила $N = X$ и изгибающий момент $M_2 = H X$ постоянны, а поперечная сила равна нулю.

А 6.6: Определить долю сдвиговой деформации в общем прогибе однопролетной балки, нагруженной поперечной распределенной нагрузкой $q_z(x)$ и сосредоточенной силой F в произвольной точке ξ . Жесткость балки, изображенной на рис. А 6.6 и опирающейся на концах на неподвижную и подвижную шарнирные опоры, постоянна по длине.

Решение: Изгибающий момент является статически определимым. Следовательно, кривизна балки за счет сдвига равна $w''_S = -\kappa[q_z + F\delta(x-\xi)]/GA$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Шарнирные граничные условия позволяют обратиться к теории балок Бернулли-Эйлера, и для определения кривизны за счет сдвига становится применимой аналогия Мора. Сопряженная балка Мора имеет те же опоры и пролет и нагружена сдвиговой кривизной, чтобы получить прогиб от сдвига, равный «изгибающему моменту»:

$$\bar{q}_z = \kappa[q_z + F\delta(x-\xi)]/GA, \quad w_S = \bar{M}_y(x).$$

Тогда линия влияния прогиба от сдвига принимает вид ($q_z = 0$):

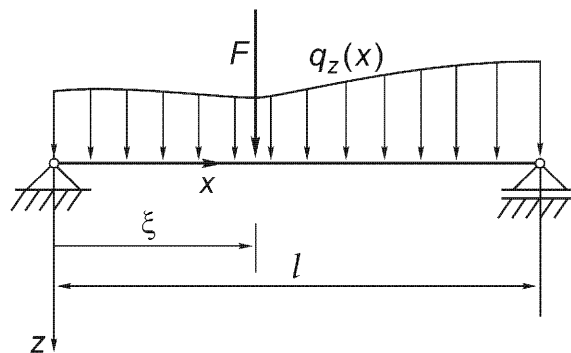


Рис. А 6.6.

$$w_S = \overline{M}_y(x) = \begin{cases} \kappa F x(1 - \xi/l)/GA, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \kappa F \xi(1 - x/l)/GA, & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad F = 1.$$

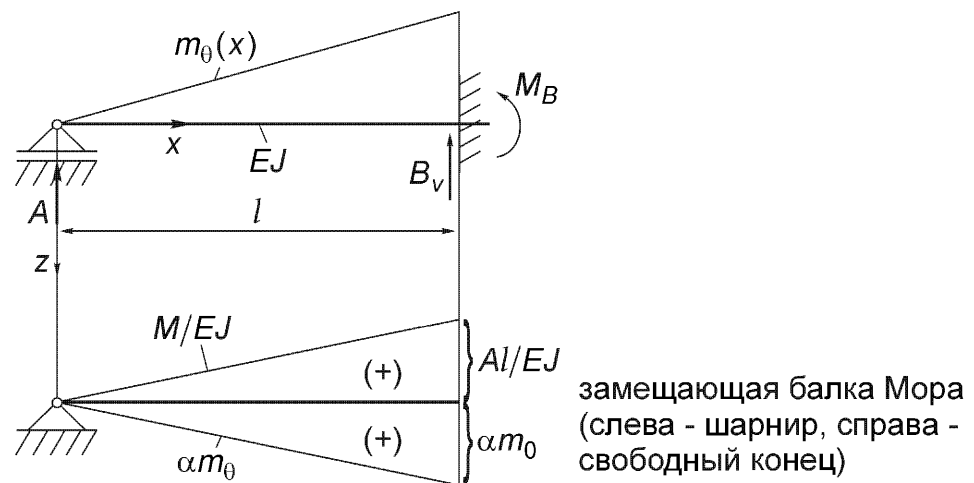
А 6.7: Статически неопределимая балка, изображенная на рис. А 6.7, нагружена температурной кривизной, линейно возрастающей по линейному закону $\alpha m_\theta = (x/l)\kappa_0$. Определить прогиб путем надлежащего применения аналогии Мора [см. формулу (6.74)] с включением в нее термического нагружения [см. уравнение (6.36)]

Решение: Сопряженная балка Мора нагружена эпюрой момента M/EJ и температурной кривизной αm_θ , и жесткий поворот запрещен уравнением равновесия их моментов относительно шарнирной опоры. Это уравнение дает статически неопределимую силу A , а из условий равновесия реальной конструкции следует

$$A = -B = -EJ \kappa_0 / l, \quad M = lA.$$

Следовательно, общий прогиб тождественно равен нулю; см. уравнение (6.96) и данную там ссылку, а также обратитесь к разделу 6.9. Отметим, что уравнение (6.86) можно рассматривать как условие ортогональности.

А 6.8: Работающая на сдвиг балка, изображенная на рис. А 2.5, считается линейно упругой, жесткость краевых балок при растяжении задана как $D = E_G A_G$, а модуль сдвига внутренней полосы равен G_{Bl} . С помощью теоремы Кастильяно вычислить перемещение точки D в направлении силы F .



Решение: Нормальные силы в краевых балках вносят следующий вклад в дополнительную энергию ($T = F/H$):

$$U_N^* = \frac{1}{2D} \left[2 \int_0^L (xT)^2 dx + 2 \int_0^H (xT)^2 dx \right] \Rightarrow \frac{\partial U_N^*}{\partial F} = \frac{2HF}{3D} [1 + (L/H)^3].$$

Если рассматривать среднее напряжение, вклад поперечной силы во внутренней полосе приблизительно равен

$$U_Q^* = \frac{1}{2G_{Bl}(tH)_{Bl}} \int_0^L (HT)^2 dx \Rightarrow \frac{\partial U_Q^*}{\partial F} = \frac{LF}{G_{Bl}(tH)_{Bl}}.$$

Суперпозиция деформаций в случае стабильной конструкции дает следующий результат

$$w_D = \frac{\partial U_N^*}{\partial F} + \frac{\partial U_Q^*}{\partial F}.$$

А 6.9: Трехслойная балка постоянной высоты H , изображенная на рис. А 6.9, находится под действием поперечной нагрузки. Ее параллельные пластины считаются линейно упругими, и сдвиг сердцевины также считается упругим.

Требуется адаптировать уравнение (6.70) как дифференциальное уравнение прогиба композитной балки при допущении, что поперечное сечение после деформации остается плоским. Эффективная изгибная жесткость должна быть выведена из условия эквивалентности изгибной части упругой энергии. Для более глубокого изучения см.:

- Dundrová V., Kovařík V., Šlapák P. Biegungstheorie der Sandwich-Platten. Wien – New York, Springer-Verlag und Prag, Akademia-Verlag, 1970.
- Stamm K., Witte H. Sandwichkonstruktionen. Wien – New York, Springer-Verlag, 1974. Имеется русский перевод. Штамм К., Витте Х. Многослойные конструкции. М., Стройиздат, 1983.

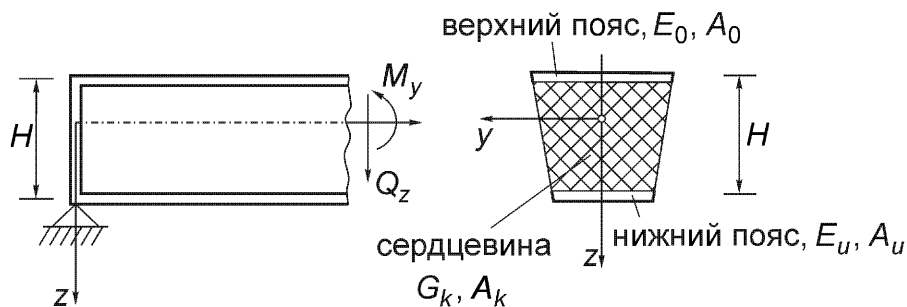


Рис. А 6.9.

Решение: Касательные напряжения в сердцевине постоянны, так как предполагается, что $\sigma_{xx} \equiv 0$ и локально выполняется уравнение $\partial\sigma_{xx}/\partial x + \partial\sigma_{xz}/\partial z = 0$. Следовательно, в уравнении (6.70) $\kappa_z = 1$, и жесткость при сдвиге такая же, как у одной только сердцевинки, $GA = G_K A_K$. Вместо изгибной жесткости EJ_y нужно подставить эффективную жесткость. Из эквивалентности потенциальной энергии при изгибе, где учитывается только вклад верхней и нижней пластин, следует:

$$\int_0^l \frac{M_y^2}{2(EJ_y)_{eff}} dx = \int_0^l \left[\frac{\sigma_{xx}^{(0)2}}{2E_0} A_0 + \frac{\sigma_{xx}^{(u)2}}{2E_u} A_u \right] dx.$$

Тогда, подставляя нормальные напряжения,

$$\sigma_{xx}^{(0)} = -\frac{M_y}{H A_0}, \quad \sigma_{xx}^{(u)} = \frac{M_y}{H A_u},$$

и сравнивая коэффициенты, получаем:

$$(EJ_y)_{eff} = \frac{(EA)_0 (EA)_u}{(EA)_0 + (EA)_u} H^2.$$

А 6.10: Растягивающая сила F передается через сварное или клеевое соединение длины l , как показано на рис. А 6.10. Толщина поверхности раздела материалов h (ширина равна b) мала по сравнению с l . Определить среднее касательное напряжение $\tau(x)$ или, что эквивалентно, поток касательных напряжений $T = \tau b$, считая нормальную силу $N_2(x)$ статически неопределимой и применяя теорему Менабреа. Жесткость обоих соединяемых элементов при растяжении EA является заданной величиной.

Решение: Делая разрез в сечении x и рассматривая соединение как свободное

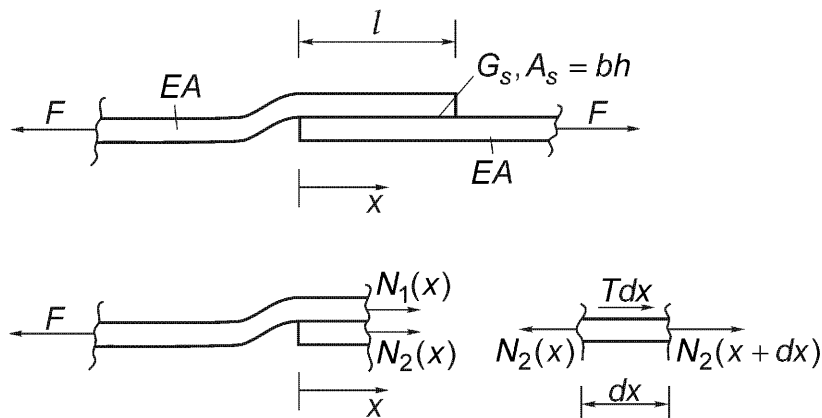


Рис. А 6.10.

тело, освобожденное от связей и показанное на рис. А 6.10, получаем $F - (N_1 + N_2) = 0$. Равновесие сил, действующих на бесконечно малый элемент, в пределе при $dx \rightarrow 0$ приводит к уравнению $T + dN_2/dx = 0$. Дополнительная энергия, запасенная в соединении, определяется вкладами от нормальных сил и от сдвига на поверхности раздела материалов (модуль сдвига G_S); плотность последней равна $(\tau^2/2G_S)hb$:

$$U^* = \int_0^l \left(\frac{N_1^2}{2EA} + \frac{N_2^2}{2EA} + \frac{T^2 h}{2G_S b} \right) dx.$$

Применяя теорему Менабреа $\partial U^* / \partial N_2 = 0$, где $\partial N_1 / \partial N_2 = -1$ и $\partial T / \partial N_2 = (\partial T / \partial x)(\partial x / \partial N_2) = -(1/T) d^2 N_2 / dx^2$, получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 N_2}{dx^2} - \alpha^2 N_2 = -\frac{\alpha^2}{2} F, \quad \text{где} \quad \alpha^2 = \frac{2G_S b}{EAh}.$$

Его решение с учетом граничных условий $N_2(0) = 0$, $N_2(l) = F$ имеет вид

$$N_2 = \frac{F}{2}(1 - \cosh \alpha x) + \frac{F(1 + \cosh \alpha l)}{2 \sinh \alpha l} \sinh \alpha x.$$

Производная по координате x дает поток касательных напряжений с противоположным знаком, который принимает экстремальные значения на самых концах соединения.

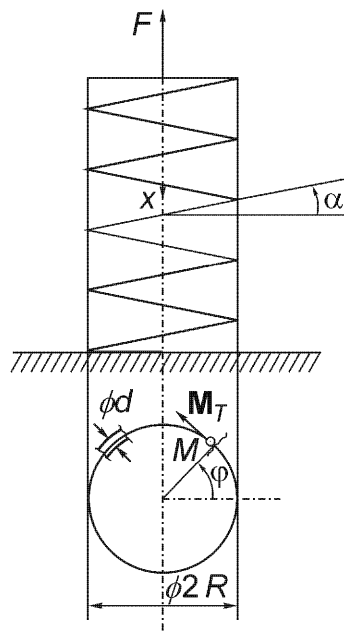


Рис. А 6.11.

А 6.11: Спиральная пружина среднего диаметра $2R$ имеет n витков при длине l . У проволоки круглое поперечное сечение диаметра $d \ll 2R$ (рис. А 6.11). Пружина нагружена в осевом направлении силой F . Определить жесткость k и максимальное касательное напряжение в проволоке.

Решение: Осевое перемещение под действием силы F легко определяется с помощью теоремы Кастильяно. Основной вклад в дополнительную энергию спиральной пружины с малым углом наклона витков $\alpha \ll 1$ вносит кручение. В поперечном сечении (x, φ) изгибающий момент в слегка искривленной проволоке равен $M = FR \sin \alpha$, а крутящий момент $M_T = FR \cos \alpha$. Следовательно, $|M| \ll |M_T| \approx FR$, и тогда

$$U^* \approx \int_0^{2\pi} \frac{M_T^2}{2GJ_T} R d\varphi = \frac{\pi n R^3}{GJ_T} F^2, \quad \text{где} \quad J_T = J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Влиянием нормальной и поперечной сил на дополнительную энергию пренебрегаем. Осевое перемещение определяется выражением $u_0 = \partial U^* / \partial F$, и в соответствии с определением получаем жесткость k :

$$k = \frac{F}{u_0} = \frac{GJ_T}{2\pi n R^3} = \frac{(EA)_{eff}}{l}.$$

В дальнейшем мы будем ссылаться на введенную таким образом эффективную жесткость $(EA)_{eff}$ фиктивного жесткого стержня при растяжении. Поперечная сила приближенно равна $Q \approx F$, и максимальное касательное напряжение получается суперпозицией

$$\tau_{max} = \frac{4F}{3A} + \frac{dM_T}{2J_T} = \frac{16F}{3\pi d^2} \left(1 + \frac{3R}{d} \right).$$

А 6.12: Скручиваемый стержень имеет поперечное сечение с двумя осями симметрии, состоящее из трех ячеек, как показано на рис. А 6.12. Определить потоки касательных напряжений и угол закручивания с помощью формул Бредта.

Решение: Благодаря жесткому повороту поперечного сечения имеем соотношение

$$2G\vartheta = \frac{4T_1}{bh_1} - \frac{8T_3}{\pi bh_3} = \frac{2T_2}{bh_2} + \frac{2T_3}{ah_3}.$$

Из статической эквивалентности и условия для потоков следуют еще два уравнения

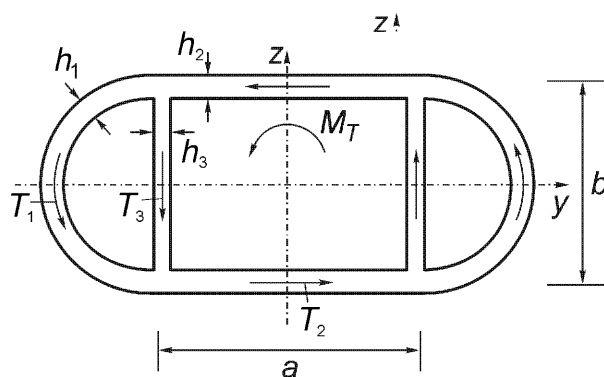
$$M_T = \frac{\pi b^2}{2} T_1 + 2abT_2, \quad T_1 + T_3 = T_2.$$

Численное решение в соответствии с заданными размерами приводит к результату $(T_1, T_2, T_3) = (46, 59, 13) \times 10^{-3} \times M_T$, где $[M_T] = \text{Нм}$ и $[G] = \text{Нм}^{-2}$, а в формуле (6.104) $J_T = 5,66 \text{ м}^4$.

А 6.13: На рис. А 6.13 изображено незамкнутое поперечное сечение скручиваемого вала. Определить центр сдвига, жесткость при кручении, функцию депланации и жесткость депланации. Толщина стенки $h \ll R$ постоянна.

Решение: Центр сдвига расположен на оси симметрии. Главный момент инерции ($J_y = \pi h R^3$, $z = R \sin \alpha$) и площадь ($a(s) = \alpha R^2/2$, $ds = R d\alpha$) подставляются в формулу, справедливую для незамкнутых сечений:

$$y_D = \frac{2}{J_y} \int_0^{2\pi R} z a(s) h ds = -2R, \quad z_D = 0.$$



$$a = 3 \text{ м}, \quad b = 2 \text{ м}, \quad h_1 = h_2 = 0,2 \text{ м}, \quad h_3 = 0,15 \text{ м}$$

Рис. А 6.12.

Функция деформации $\varphi(s) = \varphi_0 - 2a(s)$ определяется наложением условия симметрии $\varphi(s = \pi R) = 0$, и, следовательно, $\varphi_0 = \pi R^2$. По отношению к центру сдвига $\varphi^* = \varphi + zy_D = (\pi - \alpha - 2\sin\alpha)R^2$. Теперь следует проверить уравнение (6.146). Жесткость при кручении пропорциональна $J_T = Lh^3/3 = (2\pi/3)Rh^3$, и жесткость деформации принимает вид [см. формулу (6.153)]:

$$C_w = \int_0^{2\pi R} \varphi^{*2} h ds = \pi h \left(\frac{2\pi^2}{3} - 4 \right) R^5.$$

А 6.14: Определить центр сдвига и жесткость при кручении двутаврового поперечного сечения с одной осью симметрии, показанного на рис. А 6.14.

Решение: Точка отсчета 0 выбрана на оси симметрии, и радиус-вектор $r(s)$ должен беспрепятственно пробегать вдоль контура для определения площади $a(s)$. Например, на нижней полке $-b_1/2 \leq s_1 \leq b_1/2$, $s_1 = 0$ перед переходом на перемычку.

Нижняя полка: $a = Hs_1/4$, $\varphi = \varphi_0 - 2a(s_1) = \varphi_0 - Hs_1/2$,

перемычка: $a = 0$, $\varphi = \varphi_0 - 2a(s_2) = \varphi_0 = 0$, $\varphi(s)$ антисимметрична,

верхняя полка: $a = Hs_3/4$, $\varphi = \varphi_0 - 2a(s_3) = \varphi_0 - Hs_3/2$.

Уравнение (6.146) справедливо при $\varphi_0 = 0$. Подставляя $J_z = h(b_1^3 + b_2^3)/12$, получаем



Рис. А 6.14.

$$z_D = \frac{1}{J_z} \int_0^L y \varphi(s) h ds = \frac{H b_2^3 - b_1^3}{2 b_2^3 + b_1^3} > z_S = \frac{H b_2 - b_1}{2 b_2 + b_1}, \quad b_2 > b_1.$$

«Центр сдвига находится на некотором расстоянии от центра тяжести сечения, которое зависит от распределения материала.» Жесткость при кручении определяется с помощью формулы (6.136):

$$J_T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 L_i h_i^3 = \frac{h^3}{3} (b_1 + b_2 + H).$$

А 6.15: Тонкий круглый диск толщины h нагружен осесимметричным температурным полем $\theta(r)$. Записать неоднородное дифференциальное уравнение Навье для радиального температурного перемещения $u(r)$ и найти его общее решение.

Решение: Исключение из локального уравнения равновесия (без массовых сил) $r dn_r/dr + n_r - n_\varphi = 0$ мембранных напряжений, а именно, радиального напряжения n_r и окружного напряжения n_φ , с помощью закона Гука для плоского напряженного состояния

$$n_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha n_\theta \right), \quad n_\theta = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \theta dz,$$

$$n_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} - (1+\nu)\alpha n_\theta \right)$$

дает неоднородное дифференциальное уравнение типа уравнения Эйлера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu)\alpha \frac{\partial n_\theta}{\partial r}.$$

Общее решение объединяет частный интеграл с решением однородного уравнения

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{1+\nu}{r} \alpha \int r n_\theta dr.$$

Постоянные интегрирования должны быть определены из граничных условий. Для сплошного диска требуется $C_2 = 0$, и если граница $r = R$ свободна от каких-либо усилий, самоуравновешенные температурные напряжения принимают вид

$$n_r = \alpha Eh[f(R) - f(r)], \quad n_\varphi = \alpha Eh[f(R) + f(r) - n_\theta],$$

$$\text{где } f(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho n_\theta(\rho) d\rho.$$

А 6.16: В разделе 6.5.3 определены мембранные напряжения для пластины с круглым отверстием. Распределение напряжений изменяется, если отверстие имеет эллиптическую форму, как на рис. А 6.16. Решение этой задачи получил Н.И. Мухелишвили, см., например:

- Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, Наукова думка, 1968.

Наибольшее окружное напряжение наблюдается при $x = a > b$, $y = 0$ и равно $\max n_\varphi = n_0 (1 + 2a/b) = n_0 [1 + 2\sqrt{(a/R_1)}]$, где главная кривизна отверстия равна $1/R_1 = a/b^2$. Независимо от геометрии сжимающее окружное напряжение при $x = 0$, $y = b$ задается как $n_\varphi = -n_0$. Приложенная нагрузка параллельна оси y . При $a = b$ (для круглого отверстия) коэффициент концентрации напряжений становится равным 3. Если $b \ll a$, то максимум приблизительно равен $\max n_\varphi \approx 2n_0 \sqrt{(a/R_1)}$. В пределе при $b \rightarrow 0$ получается трещина Гриффита длиной $2a$, расположенная ортогонально к оси нагрузки. Трещина, параллельная внешнему растяжению, не влияет на напряжения, и они остаются постоянными, $n_y = n_0$. Сингулярные распределения напряжений около трещины Гриффита вдоль $y = 0$ для $|x| \geq a$ получены Эшелби путем надлежащего предельного перехода в распределении напряжений около эллиптического отверстия:

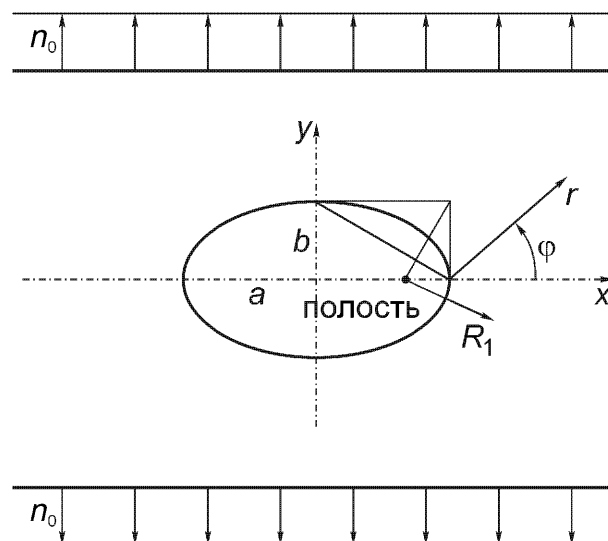


Рис. А 6.16.

$$n_x = n_0 \left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - 1 \right), \quad n_y = n_0 \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad n_{xy} = 0, \quad \text{где } \xi = x/a.$$

Определить поле напряжений в малой окрестности вершины трещины путем перехода к локальной полярной системе координат (r, φ) для $\varphi = 0$ и $r \ll a$. Найти сингулярность $1/\sqrt{r}$ плоской задачи линейной механики разрушения и определить коэффициент интенсивности напряжений K_1 (мода разрушения 1) путем сравнения коэффициентов в $n_i = K_1/\sqrt{(2\pi r)}$. Найти также главное (не лежащее в плоскости) касательное напряжение. Для обзора см.:

- Liebowitz H. (ed.) Fracture. An Advanced Treatise. Vol. I to VII. New York, Academic Press, 1968-1972. Имеется русский перевод: Либовиц Г. (редактор). Разрушение. Тома 1 – 7. М., Мир. 1973-1976.

Краткое введение дано в книге:

- Rossmannith H. (Ed.) Grundlagen der Bruchmechanik. Wien – New York, Springer-Verlag, 1982.

Решение: Подставляя $\xi = 1 + r/a$ и переходя к пределу, получаем ведущие члены поля напряжений в ближайшей окрестности

$$\begin{aligned} n_r(r, \varphi = 0) &= n_0 \sqrt{a/2r} = K_1/\sqrt{2\pi r}, & K_1 &= n_0 \sqrt{\pi a}, \\ n_\varphi(r, \varphi = 0) &= n_0 \sqrt{a/2r} = K_1/\sqrt{2\pi r}, & n_{r\varphi}(r, \varphi = 0) &= 0. \end{aligned}$$

При постоянной толщине пластины h главное не лежащее в плоскости касательное напряжение принимает вид

$$\max |\tau| = K_1 / (2h \sqrt{2\pi r}).$$

А 6.17: Пластина в форме бесконечной полосы шириной a , поддерживаемая неподвижной и подвижной шарнирными опорами, нагружена давлением $p(x)$ (рис. А 6.17). Определить цилиндрическую поверхность ее прогиба с помощью ряда Фурье.

Решение: Шарнирно опертые края пластины требуют нечетного периодического разложения, и ряд Фурье

$$w(x) = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\alpha_n^4} \sin \alpha_n x$$

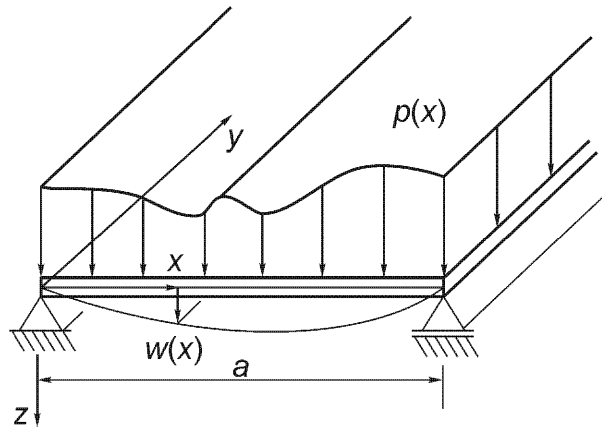


Рис. А 6.17.

дает быстро сходящееся решение уравнения пластины (6.275), если коэффициенты p_n являются коэффициентами Фурье заданной нагрузки

$$p_n = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \sin \alpha_n x dx, \quad \text{где} \quad \alpha_n = n\pi/a.$$

Изгибающие моменты также демонстрируют достаточно быструю сходимость

$$m_x(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x, \quad m_y(x) = \nu m_x(x), \quad m_{xy} = 0.$$

Этот результат имеет особую важность как частное решение для конечной прямоугольной пластины с парой параллельных шарнирно опертых сторон; см. упражнение А 6.18.

А 6.18: Стороны прямоугольной пластины $x=0$ и $x=a$ шарнирно оперты, а две другие стороны $y=-b/2$ и $y=b/2$ жестко защемлены. Определить прогиб, если нагрузка $p(x)$ не зависит от y . При анализе следует использовать результат, полученный в упражнении 6.17 для бесконечной полосы.

Решение: Решение однородного уравнения прогиба пластины использует разделяемые функции при выполнении следующих условий: должны быть найдены четные функции от y , а граничные условия на шарнирных опорах должны удовлетворяться по отдельности. Результат имеет вид бесконечного ряда (его члены достаточно очевидны):

$$w_h(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (A_n \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \sin \alpha_n x, \quad \text{где} \quad \alpha_n = n\pi/a.$$

Добавляя частное решение, заданное прогибом полосы в упражнении 6.17, и учитывая условия защемления $w(x, y = b/2) = 0$, $\partial w(x, y = b/2)/\partial x = 0$ в общем решении, при сравнении коэффициентов получаем

$$A_n = -\frac{p_n}{N_n} \left(2 \sinh \frac{\alpha_n b}{2} + \alpha_n b \cosh \frac{\alpha_n b}{2} \right), \quad B_n = \frac{2p_n}{N_n} \sinh \frac{\alpha_n b}{2},$$

$$\text{где } N_n = K \alpha_n^2 (\alpha_n b + \sinh \alpha_n b).$$

Общий прогиб определяется вышеупомянутыми коэффициентами путем суперпозиции

$$w(x, y) = w_h(x, y) + \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\alpha_n^4} \sin \alpha_n x.$$

А 6.19: Из формулы (6.273а) можно вывести формулу для осесимметричного прогиба сплошной круглой пластины при нагружении центральной сосредоточенной силой. При использовании процедуры перехода к пределу получить функцию Грина для области бесконечной пластины; положить $F = 1$. С помощью теоремы Максвелла определить функцию влияния пары сил с моментом $M = 1$, приложенной в точке (ξ, η) бесконечной пластины как расширение упомянутого выше решения. См. рис. А 6.19.

Решение: Неоднородная часть решения уравнения прогиба пластины имеет вид: $w(r) = A + Br^2 + C \ln(r/R_e) + Dr^2 \ln(r/R_e)$. Прогиб при $r = 0$ должен быть конечным, следовательно, $C = 0$. Поперечная распределенная сила связана с заданной сосредоточенной силой F уравнением равновесия конечного элемента пластины $2\pi r q_r + F = 0$. Так как $q_r = -K \partial(\Delta w)/\partial r$, то константа $D = F/8\pi K$. Оставшиеся коэффициенты A и B должны быть определены из граничных усло-

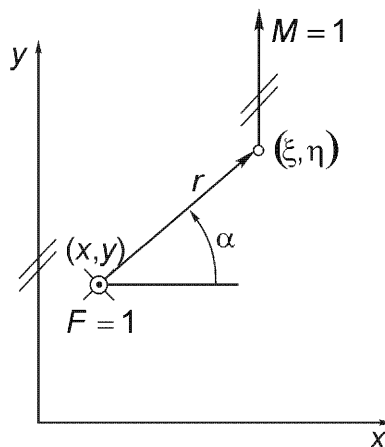


Рис. А 6.19.

вий, заданных на границе $r = R_e$. При предельном переходе $R_e \rightarrow \infty$ получаем бесконечную пластину, а преобразование координат дает функцию Грина силы $F = 1$:

$$w^F(x, y; \xi, \eta) = \frac{r^2}{8\pi K} \ln r, \quad \text{где} \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Так как момент производит работу при повороте на малый угол, то в соответствии с рис. А 6.19 из формулы (6.3) следует:

$$F w^M(x, y; \xi, \eta) = M \frac{\partial w^F(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi}.$$

Единичная нагрузка дает функцию влияния момента, действующего на бесконечную пластину, в виде:

$$w^M(x, y; \xi, \eta) = \frac{r \cos \alpha}{4\pi K} \ln r, \quad \text{где} \quad \alpha = \arctg \frac{\eta - y}{\xi - x}.$$

А 6.20: Оболочка вращения в форме усеченного конуса шарнирно соединена с потолком своей верхней неподвижной кромкой и несет равномерную кольцевую нагрузку q_0 на нижней границе (см. рис. А 6.20). Такие сварные стальные конструкции крыши встречаются в промышленных зданиях и общественных центрах. Учитывая только мембранные напряжения и деформации, определить осевой коэффициент жесткости.

Решение: Так как распределенные нагрузки $p_z = p_\varphi = 0$, формулы (6.296) и (6.297) дают сразу мембранные напряжения ($\varphi = \pi/2 - \alpha$, $r = a + s \sin \alpha$):

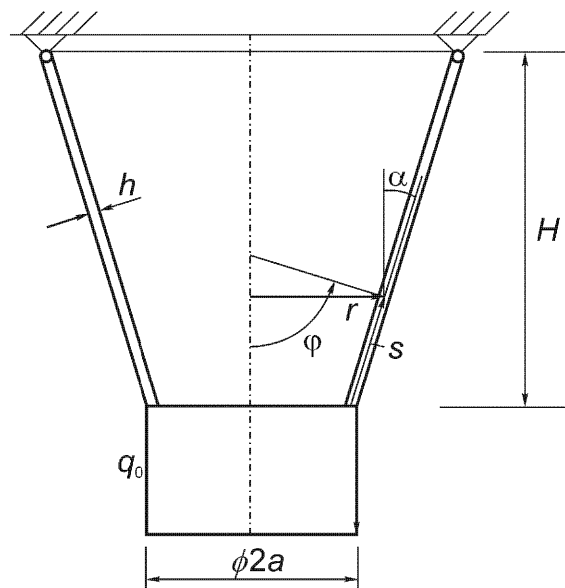


Рис. А 6.20.

$$n_\varphi \equiv n_s = \frac{q_0}{[1 + (s/a)\sin\alpha]\cos\alpha}, \quad n_\vartheta \equiv 0, \quad \text{так как } r_1 \rightarrow \infty.$$

Дополнительная энергия мембранного напряженного состояния имеет вид

$$U^* = \int_0^{H/\cos\alpha} \frac{n_\varphi^2}{2Eh} dA, \quad \text{где } dA = 2\pi(a + s\sin\alpha)ds.$$

Из теоремы Кастильяно получаем перемещение узкого конца

$$w_0 = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial U^*}{\partial q_0} = 4 \frac{aq_0}{Eh} \frac{\sin\alpha}{\sin^2 2\alpha} \ln\left(1 + \frac{H}{a} \operatorname{tg}\alpha\right).$$

Тогда коэффициент жесткости легко определяется: $c = 2\pi a q_0 / w_0$. Жесткость цилиндрической оболочки той же длины получается путем предельного перехода $\alpha \rightarrow 0$ с помощью правила Лопиталя, $w_0^* = (q_0/Eh)H$.

А 6.21: Подвесная коническая оболочка до краев заполнена жидкостью (рис. А 6.21). Определить мембранные напряжения, возникающие при нагружении гидростатическим давлением.

Решение: Вертикальная кольцевая сила реакции на единицу длины за счет веса заполняющей жидкости равна $A_v = (gp a^2/6) \operatorname{tg}\alpha$. Так как $\varphi = \pi - \alpha = \text{const}$ и $r = a - s\sin\alpha$, с учетом того, что нагрузка от гидростатического давления равна $p_z = gps\sin\alpha$, из формул (6.296) и (6.297) следуют мембранные напряжения ($r_1 \rightarrow \infty$):

$$n_\varphi = \frac{gp}{6}(a - s\cos\alpha)(2s + a/\cos\alpha), \quad n_\vartheta = gp(a - s\cos\alpha)s.$$

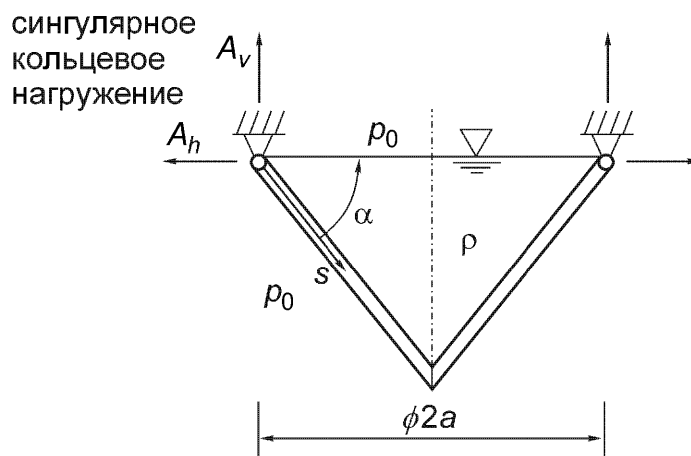


Рис. А 6.21.

Вертикальную компоненту мембранного напряжения $n_\varphi(s)$ можно определить путем рассмотрения равновесия конечного усеченного конуса.

А 6.22: В случае тонких балок, подверженных температурному воздействию, возникает вопрос: Каковы наиболее общие распределения температурных кривизн, при которых прогибы остаются нулевыми? Объяснить формулу Майзеля для некоторых простых статически неопределимых балок, которые должны остаться недеформированными.

Решение: Температурная кривизна $\alpha m_\theta(\xi)$ входит в интеграл по области. Последний определяет скалярное произведение относительно изотермической функции влияния линейно упругой балки. Он равен нулю, если функции ортогональны. Первый пример жестко защемленной на двух концах балки приведен в уравнении (6.96), если температурная кривизна является постоянной. Балка, защемленная на одном конце и шарнирно опертая на другом, изображенная на рис. 6.12, остается недеформированной, если температурная кривизна представляет собой линейную функцию, возрастающую к защемленному концу. Следовательно, температурный прогиб равен нулю, то есть термический изгибающий момент становится пропорциональным моменту температуры по поперечному сечению в случае двухпролетной балки, рис. 5.9, или для симметричной трехпролетной балки на шарнирных опорах, если наложенная температурная кривизна имеет треугольное или трапециевидальное распределение, соответственно. Статически определимые системы должны выбираться в соответствии с рис. 5.10 или для многопролетных балок соответственно рис. 6.13, чтобы сразу получить ответ. Подробности метода сил см. в: Thermal Stresses. Vol. II, (ed. R.B. Hetnarski), Amsterdam, Elsevier Science Publisher, 1987, chap. 3, p. 152.

А 6.23: Линейно упругое полупространство $z > 0$ нагружено на своей поверхности единственной силой F (трехмерная задача Буссинеска). В этом осесимметричном случае потенциал Нейбера-Папковича сводится к виду $\phi_3 = \frac{B}{R}$,

$\phi_0 = A \ln(R+z)$, где $R^2 = r^2 + z^2$, $r^2 = x^2 + y^2$.

Перемещения определяются следующим образом:

$$u_r = -\frac{1}{2G} \frac{\partial N}{\partial r}, \quad u_z = \frac{1}{2G} \left[4(1-\nu)\phi_3 - \frac{\partial N}{\partial z} \right], \quad \text{где} \quad N = \phi_0 + z\phi_3.$$

(а) Определить компоненты напряжений в цилиндрических координатах.

(b) Определить константы A и B с помощью граничных условий на свободной от усилий поверхности $z=0$ и с помощью условия равновесия в направлении оси z .

Решение: Закон Гука дает компоненты напряжений, полученные путем дифференцирования определенных выше потенциалов,

$$\sigma_{rr} = 2\nu \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - \frac{\partial^2 N}{\partial r^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2\nu \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r},$$

$$\sigma_{zz} = 2(2-\nu) \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - \frac{\partial^2 N}{\partial z^2}, \quad \sigma_{zr} = 2(2-\nu) \frac{\partial \phi_3}{\partial r} - \frac{\partial^2 N}{\partial r \partial z},$$

а из граничных условий $\sigma_{zz}(z=0)=0$, $\sigma_{zr}(z=0)=0$ и одного условия равнове-

сия $F + 2\pi \int_0^{\infty} \sigma_{zz} r dr = 0$ следуют значения констант: $A = F(1-2\nu)/2\pi$, $B = F/2\pi$.

7 Динамика твердых тел и жидкостей, уравнения количества движения материального и контрольного объемов

Динамика понимается как кинетика в узком смысле, что означает, что при рассмотрении напряжений и деформаций в движущихся телах решающее значение имеет инерция масс, движущихся с ускорением. Закон движения Ньютона применим, если скорости остаются малыми по сравнению со скоростью света. В вакууме скорость света постоянна и равна 299 792 458 м/с. Начиная с 1983 года определение единицы длины, 1 метра, основано на делении расстояния, проходимого светом в вакууме за 1 секунду, на приведенное выше число. В рамках ньютоновской механики основной закон динамики в формулировке Эйлера-Коши устанавливает, что в каждой материальной точке сплошной среды существует пропорциональность между плотностью силы \mathbf{f} [см. уравнение (2.18)] и абсолютным ускорением \mathbf{a} , которое должно измеряться по отношению к инерциальной системе отсчета, точка O на рис. 7.1:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{a}. \quad (7.1)$$

Здесь скалярным коэффициентом пропорциональности является массовая плотность $\rho(x, y, z, t)$, которая имеет размерность массы на единицу объема, кг/м³, и в явном виде не зависит от ускорения, скорости или силы. Одним из следствий высоких скоростей является определение массы покоя ρ_0 ; в таком

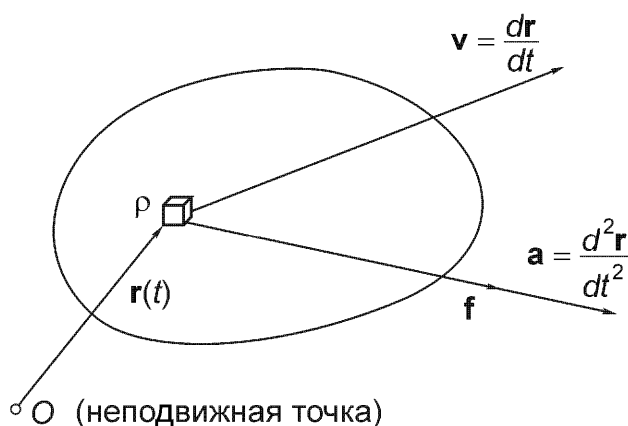


Рис. 7.1. Уравнение движения Эйлера-Коши в ньютоновской механике.

случае в уравнении (7.1) ρ следует заменить выражением $\rho_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Подробности можно найти в учебниках по специальной теории относительности.

Закон инерции Ньютона (1687) выведен путем интегрирования уравнения (7.1) по объему твердого тела, которое совершает поступательное движение по отношению неподвижной в пространстве системе отсчета. Ускорения \mathbf{a} всех элементарных масс $dm = \rho dV$ представляют собой однородное поле параллельных векторов, следовательно

$$\int_V \mathbf{f} dV = \mathbf{R} = \int_m \mathbf{a} dm = m\mathbf{a}, \quad \text{где} \quad m = \int_V \rho dV. \quad (7.2)$$

Однородное ускорение \mathbf{a} вызывается действием коллинеарного главного вектора внешних сил \mathbf{R} , а m – общая масса твердого тела. Уравнение (7.2) можно использовать для определения инерциальной системы отсчета: «Если абсолютно твердое тело совершает прямолинейное поступательное движение в любом направлении, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, и внешние силы являются неизменно самоуравновешенными или нулевыми, $R = 0$, то все материальные точки движутся относительно любой должным образом выбранной системы отсчета вдоль параллельных прямых с постоянной скоростью.» Это утверждение, или закон инерции Галилея, определяет инерциальные системы отсчета такими абсолютно твердыми телами при равномерном и прямолинейном поступательном движении. Отсюда следует, что одна инерциальная система координат не может иметь ускорения относительно другой, и радиусы-векторы частицы, например, в инерциальных системах координат 1 и 2 связаны линейным преобразованием Галилея $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{v}_{21} t$. Эмпирическую инерциальную систему определяют так называемые неподвижные звезды на нашем небосводе. Наша Земля совершает довольно сложное движение, но наибольшее влияние на то, что она действительно является неинерциальной системой, оказывает ее ежедневный оборот вокруг оси, проходящей через полюсы [средняя угловая скорость равна $(2\pi/24 \text{ часа})$]. В общепринятых единицах угловая скорость Земли равна $\omega = 7,27 \times 10^{-5}$ рад/с. Это вращение вызывает различие между ускорением свободного падения и гравитационным ускорением и, что наиболее важно, позволяет определять направления на север и юг с помощью гирокомпы. Собственным вращением Земли вызваны многие геофизические явления. Если в уравнение (7.2) подставить ускорение свободного падения, получаем вес тела в параллельном поле сил тяжести

$$G = mg. \quad (7.3)$$

Из-за собственного вращения Земли вес не является постоянной величиной; он изменяется с широтой места на поверхности (см. разделы 2.1 и 3.3.2). Однако во многих приложениях достаточно рассматривать постоянное среднее значение ускорения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Динамику простых движений иногда можно рассматривать как обобщение статики путем включения сил инерции в условия равновесия наравне с заданными силами. Рассмотрим, например, поступательное движение кабины лифта (рис. 7.2). Натяжение троса S уравнивает вес кабины $G = mg$ в течение любой стационарной фазы движения, то есть когда скорость движения вверх или вниз постоянна. Приблизительно в качестве системы отсчета можно рассматривать Землю, тогда: $S_0 - mg = 0$, или $S_0 = mg$. Если натяжение троса изменяется в сторону увеличения, то кабина движется с ускорением вверх. Закон Ньютона (7.2) дает текущее значение натяжения троса: $S - mg = ma$, или $S = m(g + a)$.

Обычной практикой является выражение ускорения в долях от $g = 9,81 \text{ м/с}^2$; следовательно, $a = \lambda g$ и $S = mg(1 + \lambda)$. Максимальное ускорение лифта должно быть ограничено, и величина $(1 + \lambda_{\max})$ в приведенном выше квазистатическом соотношении между натяжением троса и весом кабины называется коэффициентом динамичности нагрузки. Аналогичным образом вводятся распределенные силы инерции, если приходится вычислять поля напряжений в движущихся телах; см., например, раздел 6.5.2 и упражнение А 11.4.

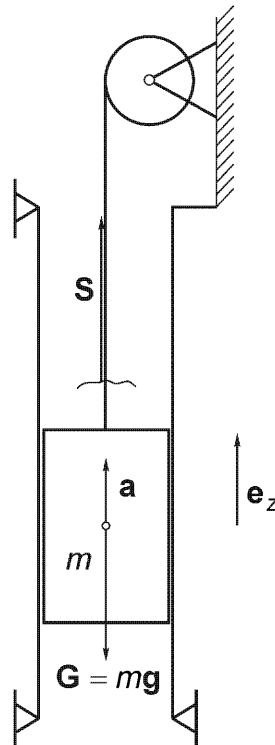


Рис. 7.2. Кабина лифта как свободное тело.

Из векторного уравнения (7.1) следуют три соотношения между декартовыми компонентами абсолютного ускорения и градиентами напряжений (массовые силы на единицу объема \mathbf{k} полагаются заданными):

$$f_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + k_i = \rho a_i, \quad i, j = x, y, z, \quad \text{где} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}. \quad (7.4)$$

Так как напряжения и деформации (градиенты смещений) связаны между собой, становится очевидным, что для деформируемого тела определяющие соотношения должны быть известны до интегрирования по времени приведенных выше дифференциальных уравнений. См. уравнение (7.161) однородного изотропного линейно упругого твердого тела и главу 11. Далее для движущихся тел выводятся основные законы изменения, не зависящие от частного вида определяющих соотношений.

7.1. Изменение количества движения

Для любого момента времени уравнение (7.1) можно проинтегрировать по материальному объему $V(t)$, где масса m в пределах этого материального объема считается постоянной, а $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор из рис. 7.1:

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \mathbf{f} dV &= \int_{V(t)} \mathbf{k} dV + \int_{V(t)} \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_j}{\partial x_j} dV = \int_m \mathbf{a} dm = \frac{d^2}{dt^2} \int_m \mathbf{r} dm = \\ &= m \frac{d^2 \mathbf{r}_M}{dt^2} = m \mathbf{a}_M, \quad \int_m \mathbf{r} dm = m \mathbf{r}_M. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Интегрирование по постоянной массе m и дифференцирование по времени можно поменять местами, и статический момент распределения массы относительно начала координат O можно выразить как произведение массы на радиус-вектор центра масс M ; см. формулу (2.72). Следовательно, главный вектор сил инерции пропорционален абсолютному ускорению центра масс \mathbf{a}_M . Объемный интеграл от заданных массовых сил дает главный вектор массовых сил \mathbf{K} , например, вес тела. Применяя к оставшемуся объемному интегралу интегральную теорему Гаусса, получаем поверхностный интеграл

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_j}{\partial x_j} dV = \oint_{\partial V(t)} \boldsymbol{\sigma}_j n_j dS. \quad (7.6)$$

В соответствии с соотношением (2.20) суммирование подынтегрального выражения по j дает поверхностное усилие, а из поверхностного интеграла от сил $\boldsymbol{\sigma}_n dS$ следует главный вектор внешних поверхностных сил $\boldsymbol{\Sigma}$. Так как $\mathbf{K} + \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{R}$

является главным вектором всех внешних сил, то интегральный закон движения принимает вид

$$m\mathbf{a}_M = \mathbf{R}. \quad (7.7)$$

«Ускорение центра масс любого деформируемого тела постоянной массы пропорционально главному вектору внешних сил.» Внутренние силы не оказывают влияния на движение центра масс (или центра тяжести). Примером такой системы являются ружье и пуля, до того как она покинула ствол. Высокое внутреннее давление газов придает пуле ускорение, но центр масс всей деформируемой системы остается в покое. Таким образом, ствол должен двигаться назад. Это приводит к хорошо известной отдаче ружья при выстреле. Уравнение (7.7) представляет собой также векторное уравнение движения точечной массы m под действием силы \mathbf{R} .

Количество движения элементарной массы dm определяется бесконечно малым вектором $d\mathbf{l} = \mathbf{v} dm$, совпадающим по направлению с ее скоростью \mathbf{v} . Таким образом, вектор количества движения распределенной массы является результирующим вектором:

$$\mathbf{l} = \int_m \mathbf{v} dm = \frac{d}{dt} \int_m \mathbf{r} dm = m\mathbf{v}_M, \quad (7.8)$$

где масса m в материальном объеме $V(t)$ постоянна.

Международно рекомендуемое обозначение количества движения $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_M$ здесь не используется, чтобы избежать возможной путаницы с гидростатическим давлением p . Если считать, что $m = \text{const}$ и \mathbf{v}_M – абсолютная скорость центра масс, то уравнение (7.7) принимает вид уравнения скорости изменения вектора количества движения

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_M}{dt} = \mathbf{R}. \quad (7.9)$$

«Скорость изменения абсолютного количества движения тела постоянной массы равна главному вектору внешних сил.» Интегрирование по времени дает закон изменения количества движения

$$\mathbf{l}(t_2) - \mathbf{l}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R} dt. \quad (7.10)$$

«Количество движения остается постоянным, если импульс внешних сил (их интеграл по времени) равен нулю.» Количество движения тела и импульс силы имеют одинаковую размерность, [кг м/с = Нс]. Для импульса при ударе см. формулу (12.3). Таким образом, обозначение \mathbf{l} является оправданным.

Имеются некоторые важные приложения, в которых вместо того, чтобы рассматривать материальный объем $V(t)$, где масса, заключенная внутри материальной поверхности, постоянна, удобнее рассмотреть контрольный объем V (очень часто зафиксированный в пространстве) с массой, текущей через замкнутую контрольную поверхность ∂V (см. раздел 1.6). Увеличение количества движения $I(t)$ массы $m(t)$, которая занимает контрольный объем в момент времени t , и в таком случае, вообще говоря, является нестационарным, то есть зависящим от времени, вызывается вкладом двух факторов, так называемых производящих членов:

- 1) Ускорение элементов массы внутри контрольного объема за счет внешних сил.
- 2) Поток массы через контрольную поверхность, который приводит к переносу количества движения. Так как нормаль к поверхности направлена наружу, то вытекающий поток в уравнении (1.71) считается положительным. Следовательно, эти вклады имеют вид

$$1) \dots \int_V \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho dV = \int_V \mathbf{a} dm, \quad 2) \dots - \oint_{\partial V} \mu \mathbf{v} dS.$$

Нестационарная скорость изменения количества движения равна сумме производящих членов

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV = \int_V \mathbf{a} dm - \oint_{\partial V} \mu \mathbf{v} dS, \quad \text{где } I(t) = \int_V \rho \mathbf{v} dV, \quad \mu = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n). \quad (7.11)$$

Так как уравнение (7.1) применимо ко всем материальным точкам в контрольном объеме в момент времени t , интегрирование при фиксированном времени дает, что первый производящий член скорости изменения количества движения

$$\int_V \mathbf{a} dm = \int_V \mathbf{f} dV = \mathbf{R}(t). \quad (7.12)$$

должен быть равен главному вектору \mathbf{R} внешних сил, действующих на массу в контрольном объеме, который равен сумме главного вектора массовых сил и главного вектора усилий на контрольной поверхности. Таким образом, если рассматривается поток массы, эквивалент уравнения (7.9) принимает вид

$$\frac{dI(t)}{dt} + \oint_{\partial V} \mu \mathbf{v} dS = \mathbf{R}. \quad (7.13)$$

Подынтегральное выражение $(\mu \mathbf{v})$ в поверхностном интеграле называется плотностью потока количества движения.

Если неподвижный в пространстве контрольный объем V выбран таким образом, что он в некоторый момент времени совпадает с материальным объ-

емом $V(t)$, то левая часть уравнения (7.13) принимает вид теоремы Рейнольдса о переносе вектора количества движения (трехмерное обобщение правила дифференцирования Лейбница); сравните его с уравнением (7.9) (см. раздел 1.6):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \mu \mathbf{v} dS = \mathbf{R}.$$

Во многих задачах стационарного течения вектор количества движения остается постоянным, несмотря на непрерывную замену частиц в контрольном объеме: скорость его изменения равна нулю, и главный вектор внешних сил равен потоку количества движения, вытекающему через контрольную поверхность. Иллюстрирующие приложения обсуждаются в разделе 7.3.

Формально уравнение (7.13) остается справедливым для контрольных поверхностей ∂V^* , движущихся с заданными скоростями \mathbf{w} [см. уравнения (1.80), (1.82) и рис. 7.3], при условии, что подставлена плотность потока массы из соотношения (1.81). Если контрольный объем изменяется при своем движении, то нестационарная скорость изменения вектора количества движения принимает форму, которая справедлива в общем случае:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V^*(t)} (\rho \mathbf{v}) dV, \quad \text{где } \mu = \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_n^*. \tag{7.14}$$

Уравнение (7.9) получается отсюда, если на контрольной поверхности выбрать $\mathbf{v} \equiv \mathbf{w}$, и $\mu = 0$; тогда движущийся контрольный объем становится идентичным материальному объему, и заключенная в нем масса остается постоянной.

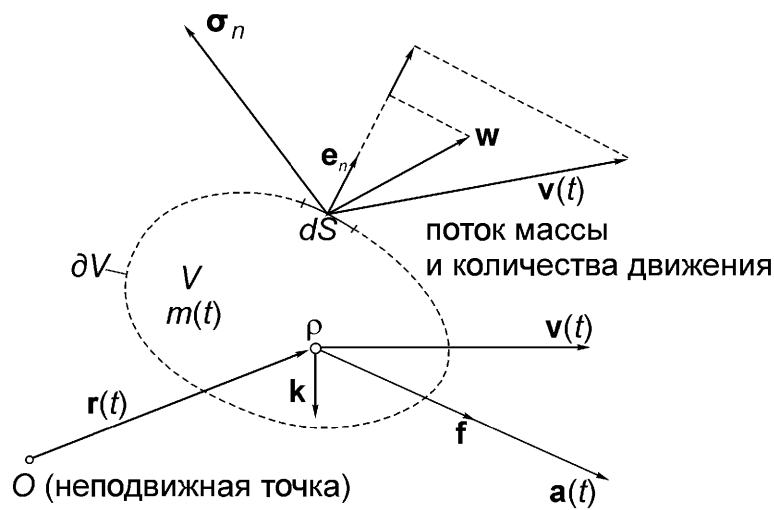


Рис. 7.3. Контрольная поверхность ∂V , зафиксированная в пространстве, $\mathbf{w} = 0$, или движущаяся по заданному закону со скоростью \mathbf{w} . Изменение количества движения контрольного объема с потоком массы через контрольную поверхность.

В практически важном случае заданного движения контрольного объема как жесткого целого уравнение (1.83) применяется к скалярному подинтегральному выражению. Однако плотность потока количества движения $\rho \mathbf{v}(x', y', z', t)$ является векторной функцией, и скорость ее изменения включает член, зависящий от любого жесткого вращения контрольного объема. Для правильного дифференцирования по времени см. уравнение (7.59).

7.2. Изменение момента количества движения

Сложение сил $\mathbf{f} dV$ в разделе 7.1 было проведено аналогично тому, как это делалось в статическом случае в формуле (2.45). Следовательно, если, как и в соотношении (2.56), рассмотреть моменты, получается второе векторное уравнение. Для сохранения достаточной степени общности рассматривается вспомогательная точка отсчета A' , которая движется относительно инерциальной системы координат со скоростью \mathbf{v}_A и ускорением \mathbf{a}_A . Далее вычисляются моменты относительно точки A' от левой и правой частей уравнения (7.1) с использованием радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ из рис. 7.4 [интегрирование проводится по материальному объему $V(t)$ с постоянной массой m]:

$$\int_{V(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dV = \int_m (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) dm. \quad (7.15)$$

По аналогии с уравнением (7.5) объемный интеграл в левой части с помощью интегральной теоремы Гаусса преобразуется в поверхностный интеграл. Про-

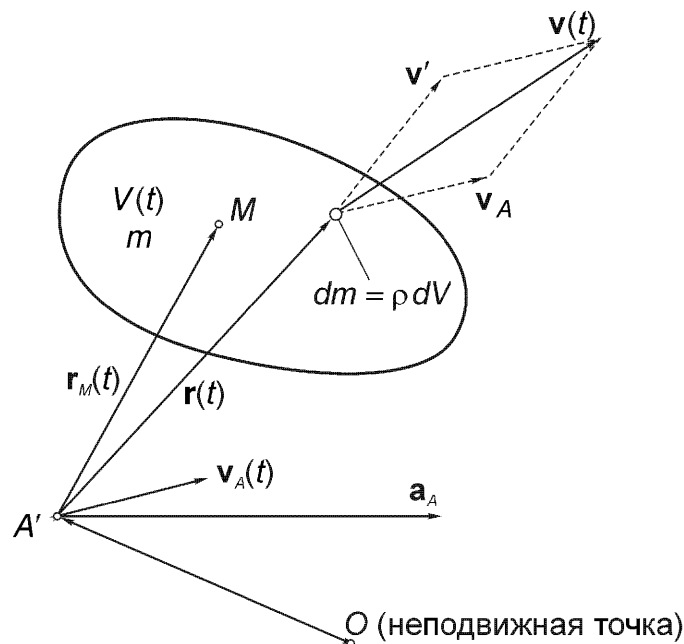


Рис. 7.4. Относительный момент количества движения по отношению к вспомогательной точке отсчета A' . Точка M – центр масс. O – начало координат инерциальной системы.

водя это преобразование по координатам и принимая во внимание, что $j = 1, 2, 3$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_j}{\partial x_j} \right) dV &= \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_j) dV - \int_{V(t)} (\mathbf{e}_j \times \boldsymbol{\sigma}_j) dV = \\ &= \oint_{\partial V(t)} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_j) n_j dS - \int_{V(t)} (\mathbf{e}_j \times \boldsymbol{\sigma}_j) dV, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} = \mathbf{e}_j. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Суммирование плотности силы \mathbf{f} в соответствии с уравнением (2.18) дает момент поверхностных усилий $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n$ в интеграле по замкнутой поверхности, и, таким образом, получаем момент внешних сил \mathbf{M}_A относительно точки A' :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \int_{V(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{k}) dV + \oint_{\partial V(t)} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n) dS = \int_{V(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) dm + \\ &+ \int_{V(t)} [(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) \mathbf{e}_z + (\sigma_{yz} - \sigma_{zy}) \mathbf{e}_x + (\sigma_{zx} - \sigma_{xz}) \mathbf{e}_y] dV. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Аксиома Больцмана о том, что тензор напряжений в точке сплошной среды остается симметричным также и в динамике, выражена в уравнении (7.17) объемным интегралом: внутренние силы не вносят вклада в главный момент сил инерции. Следовательно, уравнение (7.17) приводится к “уравнению моментов”

$$\mathbf{M}_A = \int_{V(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) dm, \quad m = \int_{V(t)} \rho dV. \quad (7.18)$$

Чтобы представить уравнение (7.18) как дополнительное уравнение к уравнению скорости изменения количества движения (7.9), преобразуем оставшийся объемный интеграл. С учетом вспомогательной точки отсчета A' полное ускорение элементарной массы равно $\mathbf{a} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}'$, где относительное ускорение измеряется в подвижной поступательно движущейся системе отсчета, $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$, а относительная скорость равна $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v} - \mathbf{v}_A$. См. рис. 7.4. Подставляя это и учитывая, что в материальном объеме $V(t)$ масса постоянна, $m = \text{const}$, получаем:

$$\mathbf{M}_A = \int_{V(t)} \mathbf{r} dm \times \mathbf{a}_A + \int_{V(t)} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right) dm = m \mathbf{r}_M \times \mathbf{a}_A + \frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}') dm. \quad (7.19)$$

По определению относительное количество движения элементарной массы по отношению к движущейся точке отсчета A' равно $d\mathbf{l}_A = \mathbf{v}' dm$, тогда момент относительного количества движения принимает вид $d\mathbf{H}_A = \mathbf{r} \times d\mathbf{l}_A$, и, производя

интегрирование по объему, получаем уравнение для скорости изменения относительного момента количества движения \mathbf{H}_A :

$$\frac{d\mathbf{H}_A}{dt} + m\mathbf{r}_M \times \mathbf{a}_A = \mathbf{M}_A, \quad \text{где } \mathbf{H}_A = \int_{V(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}') dm, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_A. \quad (7.20)$$

Важнее всего то, что это уравнение далее преобразуется и значительно упрощается, если в качестве вспомогательной точки отсчета выбран центр масс M ($A' = M$). Статический момент массы $m\mathbf{r}_M = \mathbf{0}$, и, кроме того, так как

$$\mathbf{H}_M = \int_{V(t)} [\mathbf{r} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M)] dm = \int_{V(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_M,$$

относительный момент количества движения распределенной массы относительно своего центра масс равен абсолютному моменту количества движения относительно M . Тогда уравнение, описывающее скорость изменения относительного момента количества движения, принимает стандартную форму (здесь нет ограничений по отношению к деформациям тела):

$$\frac{d\mathbf{H}_M}{dt} = \mathbf{M}_M. \quad (7.21)$$

Если точка отсчета совпадает с неподвижным началом координат инерциальной системы $A' = O$, дополнительный член в уравнении (7.20) также равен нулю, так как $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$, и тогда скорость изменения абсолютного момента количества движения равна моменту внешних сил относительно той же точки

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \mathbf{M}_O, \quad \mathbf{H}_O = \int_{V(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm. \quad (7.22)$$

Точка отсчета A' , движущаяся прямолинейно с постоянной скоростью, дает тот же результат. Если выбрать такую вспомогательную точку отсчета, чтобы ее ускорение постоянно было параллельным радиусу-вектору центра масс, то дополнительный член в общем уравнении (7.20) также становится равным нулю, но для дальнейших приложений применение такого выбора не рекомендуется.

Международно принятыми обозначениями для момента количества движения движущейся частицы с количеством движения \mathbf{p} являются $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ или $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Для механики сплошных сред более удобно рекомендовать вместо этого использование для момента количества движения символа \mathbf{H} .

Закон изменения (абсолютного) момента количества движения вокруг центра масс M получается путем интегрирования уравнения (7.21) по времени

$$\mathbf{H}_M(t_2) - \mathbf{H}_M(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_M(t) dt. \quad (7.23)$$

«Изменение момента количества движения тела с постоянной массой m равно импульсному моменту, который равен интегралу по времени от момента внешних сил.» Обозначение \mathbf{H} также обосновано.

Законы изменения количества движения и момента количества движения, уравнения (7.10) и (7.23), или их дифференциальные формы (7.9) и (7.22), соответственно, являются выражением условий равновесия, $\mathbf{R} = \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$, которые необходимы, но недостаточны для того, чтобы тело оставалось в покое.

Аналогично тому, как это было сделано в разделе 7.1 с количеством движения, далее рассматривается момент количества движения массы $m(t)$, которая в данный момент времени содержится в контрольном объеме V^* с контрольной поверхностью ∂V^* , причем этот контрольный объем может двигаться в пространстве с заданной скоростью \mathbf{w} . По аналогии с уравнением (7.11) нестационарная скорость изменения момента количества движения относительно вспомогательной (движущейся) точки отсчета A' , очевидно, выражается следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{H}_A}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V^*(t)} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}') dV = \int_{V^*(t)} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}') dm - \oint_{\partial V^*(t)} (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}') dS, \quad (7.24)$$

$$\mu = \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_n^*.$$

Так как абсолютное ускорение можно записать как $\mathbf{a} = \mathbf{a}_A + d\mathbf{v}'/dt$, производящий член в виде объемного интеграла исключается с помощью уравнения (7.18); см. также уравнение (7.20). В результате получается следующее выражение

$$\frac{d\mathbf{H}_A}{dt} + \oint_{\partial V^*(t)} (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}') dS + m \mathbf{r}_M \times \mathbf{a}_A = \mathbf{M}_A, \quad \mu = \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_n^*. \quad (7.25)$$

В поверхностный интеграл входит скорость потока момента относительного количества движения. Для случая движения контрольного объема как жесткого целого см. раздел 7.1. Полагая точку $A' = O$ неподвижной в пространстве и выбирая покоящуюся контрольную поверхность, получаем уравнение, дополняющее уравнение (7.13), в сокращенной записи:

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} + \oint_{\partial V^*(t)} (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}) dS = \mathbf{M}_O, \quad \mu = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n. \quad (7.26)$$

«Сумма нестационарной скорости изменения момента количества движения тела и переноса момента количества движения через контрольную поверхность из контрольного объема наружу равна главному моменту внешних сил, действующих на массу, содержащуюся внутри контрольного объема.» Так как контрольный объем зафиксирован в пространстве [см. также уравнения (1.68) и (7.14)], получаем соотношение:

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV. \quad (7.27)$$

При стационарном течении вектор момента количества движения постоянен, и скорость его изменения в уравнении (7.26) равна нулю.

Иногда бывает более удобно сначала вычислить момент количества движения относительно центра масс, а затем применить преобразование для замены этой точки отсчета на произвольно выбранную вспомогательную (движущуюся) точку отсчета A' . По определению это приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{MA} + \mathbf{r}', & \mathbf{v}' &= \mathbf{v}_{MA} + \mathbf{v}'', & \mathbf{v}_{MA} &= \mathbf{v}_M - \mathbf{v}_A, & \Rightarrow & \mathbf{I}_A = m\mathbf{v}_{MA}, \\ \mathbf{H}_A &= \int_{V(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}') dm = \int_{V(t)} (\mathbf{r}_{MA} + \mathbf{r}') \times (\mathbf{v}_{MA} + \mathbf{v}'') dm = \mathbf{H}_M + \mathbf{r}_{MA} \times \mathbf{I}_A. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Достаточным условием справедливости такого преобразования является ограничение, согласно которому материальный объем $V(t)$ сохраняется, см. рис. 7.4.

7.3. Примеры применения контрольных объемов

Чтобы проиллюстрировать перенос количества движения и его момента, далее рассматривается стационарное течение массы через контрольную поверхность.

7.3.1. Стационарное течение через колено

Как отмечено на рис. 7.5 пунктирной линией, контрольный объем состоит, естественно, из границы жидкости с твердыми стенками и замыкается фиктивными поперечными сечениями A_1 и A_2 в примыкающих прямолинейных участках трубопровода. Если рассматривать осредненные скорости, требование постоянства массового расхода приводит к соотношению

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2. \quad (7.29a)$$

Так как вектор количества движения \mathbf{I} массы в контрольном объеме при стационарном течении не зависит от времени, уравнение (7.13) становится не зависящим от времени. Путем подстановки ненулевых плотностей потока массы

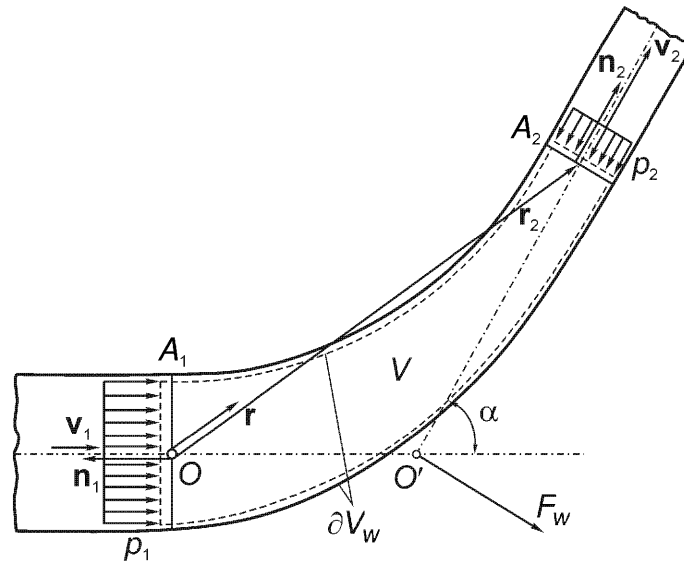


Рис. 7.5. Силы, действующие на плоское колено с движущимся внутри него стационарным потоком массы.

$$\mu_1 = \rho_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) = -\rho_1 v_1, \quad \mu_2 = \rho_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) = \rho_2 v_2, \quad (7.29b)$$

поверхностный интеграл приводится к двум простым интегралам по площади поперечных сечений, и если считать давление равномерно распределенным во входном и выходном сечениях контрольного объема, то в сумму внешних сил в качестве неизвестных входят только главные векторы поверхностных усилий на стенке (считается, что массовые силы отсутствуют):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \mu \mathbf{v} dS &= \int_{A_1} \mu_1 \mathbf{v}_1 dA + \int_{A_2} \mu_2 \mathbf{v}_2 dA = \mathbf{R} = -\rho_1 A_1 \mathbf{n}_1 - \rho_2 A_2 \mathbf{n}_2 - \mathbf{F}_W, \\ -\mathbf{F}_W &= \int_{\partial V_w} \boldsymbol{\sigma}_n dS. \end{aligned} \quad (7.29c)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}_n$ – усилия, действующие на поверхности жидкости, а \mathbf{F}_W – главный вектор сил реакций стенки ∂V_w , то есть давление и касательное напряжение. Касательные напряжения в приграничном слое у стенки малы по сравнению с давлением $p = -\sigma_{nn}$, то есть нормальными напряжениями. Так как колено является достаточно коротким, потерей давления обычно пренебрегают. Однако давление p_2 задается с учетом эффекта вязкости. Таким образом, главный вектор сил, действующих на колено, то есть динамическая реакция, равна сумме двух векторов

$$\mathbf{F}_W = -(\rho_1 + \rho_1 v_1^2) A_1 \mathbf{n}_1 - (\rho_2 + \rho_2 v_2^2) A_2 \mathbf{n}_2. \quad (7.30)$$

Это суперпозиция перепада давлений и потока количества движения во входном и выходном сечениях контрольной поверхности. Из этого квазистатического выражения видно, что стационарный поток количества движения вызывает

увеличение давления на $\rho_k v_k^2$, $k = 1, 2$. В несжимаемом потоке $\rho_k = \rho = \text{const}$. Сила \mathbf{F}_W действует на колено как внешняя нагрузка. Чтобы избежать постоянных напряжений и деформаций в прилегающих сегментах трубопровода, колена следует должным образом закреплять. Кроме того, быстрые изменения скорости потока создают дополнительные нестационарные нагрузки из-за гидравлического удара; см. также раздел 12.8.

В качестве центра для вычисления моментов в уравнении (7.26) выбран центр тяжести входного сечения O . Производная по времени от момента количества движения равна нулю, и если обозначить момент усилий на границе жидкости со стенкой как

$$\mathbf{M}_W = - \int_{\partial V_W} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n) dS, \quad (7.31a)$$

то стационарная скорость потока момента количества движения при отсутствии массовых сил равна (см. рис. 7.5):

$$\oint_{\partial V} (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}) dS = \int_{A_2} (\mathbf{r} \times \mu_2 \mathbf{v}_2) dA = \mathbf{M}_O = \oint_{A_2} \mathbf{r} \times (-p_2 \mathbf{n}_2) dA - \mathbf{M}_W. \quad (7.31b)$$

Таким образом, динамическая реакция, или внешний момент, действующий в точке O колена, принимает вид

$$\mathbf{M}_W = (-\mathbf{r}_2 \times \mathbf{n}_2) (p_2 + \rho_2 v_2^2 A_2). \quad (7.32)$$

Полная динамическая реакция колена, вызванная изменением направления потока массы и, возможно, ускорением жидкости из-за изменения площади поперечного сечения от входа к выходу, статически эквивалентна силе \mathbf{F}_W , приложенной в точке O , и паре сил с моментом \mathbf{M}_W . Усилия, действующие на стенку, обозначены индексом W . Этот результат получается без знания подробностей о потоке внутри колена.

(§) Плоское колено

Это колено уже было определено уравнением (7.30), так как линии действия двух обобщенных сил лежат в одной плоскости и имеют общую точку O' , где приложена равнодействующая сила \mathbf{F}_W (см. рис. 7.5). Перенос силы \mathbf{F}_W и момента \mathbf{M}_W из центра O в O' может быть проведен из статических соображений, так как вектор \mathbf{M}_W ортогонален \mathbf{F}_W . Отрезок OO' показан на рис. 7.5. Две специальные конфигурации упоминаются из-за их практической важности.

(§) Сопло с прямолинейной осью

Такое сопло (на рис. 7.5 $\alpha = 0$) нагружено осевой силой

$$\mathbf{F}_W = [(p_1 + \rho_1 v_1^2) A_1 - (p_2 + \rho_2 v_2^2) A_2] \mathbf{e}_x, \quad M_W = 0, \quad (7.33)$$

где единичный вектор \mathbf{e}_x указывает направление потока.

(§) Плоское U-образное колено

Для такого колена $\alpha = 180^\circ$, диаметр полуокружности равен a . Приведение сил к центру O , центру тяжести входного сечения, дает в этой конфигурации следующий результат:

$$\mathbf{F}_W = [(p_1 + \rho_1 v_1^2) A_1 + (p_2 + \rho_2 v_2^2) A_2] \mathbf{n}_1, \quad M_W = (p_2 + \rho_2 v_2^2) a A_2. \quad (7.34)$$

Точка приложения O' равнодействующей осевой силы расположена в этой плоскости между параллельными осями присоединенных участков трубопровода. Если поперечные сечения равны, сила \mathbf{F}_W проходит через центр тяжести полуокружности. Такая же сила вызывается струей, которая при ударе ковша колеса Пельтона (гидравлической турбины импульсного типа, но остающейся в покое), разделяется расщепителем и почти разворачивает поток в обратном направлении. Давление в отраженной свободной струе после того, как она покидает сопло, сравнивается с давлением окружающего воздуха, так же как и давление в двух всплывающих свободных струях. Следовательно, $p_1 = p_2 = p_0$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $A_1 = 2A_2/2$, $v_1 = v_2 = v$.

7.3.2. Тяга реактивного двигателя

В отличие от ракеты, которая может двигаться в вакууме, воздушно-реактивный двигатель получает кислород для непрерывного сжигания топлива из окружающего воздуха, и, таким образом, необходимо также рассматривать поток количества движения поступающей воздушной массы во входном сечении. Контрольная поверхность, как отмечено на рис. 7.6, движется в направлении полета и связана с двигателем.

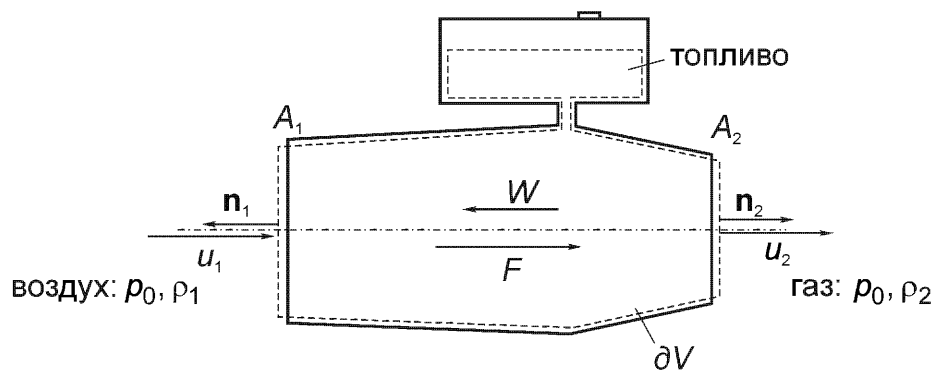


Рис. 7.6. Воздушно-реактивный или ракетный двигатель. Контрольная поверхность ∂V движется со скоростью \mathbf{w} в направлении полета. Скорость сгорания топлива постоянна.

Предположение о полном расширении выбрасываемой струи горячих газов до атмосферного давления определяет осевую компоненту главного вектора внешних сил как $\mathbf{R} = F \mathbf{n}_2$ (сюда входит сопротивление воздуха движению объекта, или лобовое сопротивление, и компонента веса при наклонном полете).

Уравнение (7.13), обобщенное в виде (7.14)

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} + \oint_{\partial V} \mu \mathbf{v} dS = \mathbf{R}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= \rho_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_1 = -\rho_1 u_1, \\ \mu_2 &= \rho_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_2 = \rho_2 u_2, \end{aligned}$$

вместе с выражением для количества движения массы внутри контрольного объема, для которого принято упрощающее предположение, что скорость ее центра масс равна скорости полета

$$\mathbf{I} = \int_V \rho \mathbf{v} dV = m \mathbf{v}_M \approx m w \mathbf{n}_1,$$

дает уравнение в проекции на направление вектора \mathbf{n}_2 (заметим, что контрольный объем движется с ускорением):

$$-\frac{d(mw)}{dt} - \rho_1 u_1 (u_1 - w) A_1 + \rho_2 u_2 (-w + u_2) A_2 = F. \quad (7.35)$$

Здесь u_1 и u_2 – относительные скорости струи поступающего воздуха на входе и горячих газов на выходе, площади этих поперечных сечений равны A_1 и A_2 , соответственно. Следовательно, должны быть подставлены абсолютные скорости этих струй

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w} + \mathbf{u}_1 = (u_1 - w) \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{w} + \mathbf{u}_2 = (-w + u_2) \mathbf{n}_2.$$

Подставляя нестационарный расход массы $dm/dt = \rho_1 u_1 A_1 - \rho_2 u_2 A_2$ в уравнение (7.35) и рассматривая его в проекции на направление вектора \mathbf{n}_1 , получаем «полетное уравнение движения»

$$m(t) \frac{dw}{dt} = \rho_2 u_2^2 A_2 - \rho_1 u_1^2 A_1 - F. \quad (7.36)$$

Обобщенная сила $\rho_2 u_2^2 A_2$ действует как ускоряющая и называется силой тяги двигателя. Считая, что массовые расходы поступающего воздуха в сечении A_1 и горячего газа в сечении A_2 равны, соответственно,

$$\dot{m}_1 = \rho_1 u_1 A_1, \quad \dot{m}_2 = \rho_2 u_2 A_2$$

и что полет является стационарным ($w = \text{const}$), получаем квазистатическое условие

$$F = \dot{m}_2 u_2 - \dot{m}_1 u_1, \quad w = \text{const}. \quad (7.37)$$

Для ракеты в этом условии следует принять $u_1 \equiv 0$. В случае прямоточного воздушно-реактивного двигателя, у которого нет компрессора, $u_1 = w$. Турбореактивный двигатель также является воздушно-реактивным, но в нем воздух перед поступлением в камеру сгорания проходит через компрессор, и $u_1 > w$.

Ракета после включения зажигания перед отрывом закреплена на земле в вертикальном положении

$$\dot{m}_2 u_2 = F > m(t)g. \quad (7.38)$$

Внешняя сила F является суммой веса в данный момент времени и реакции поддерживающих конструкций.

Для вертикального полета вверх после отрыва в однородном поле сил тяжести и при условии пренебрежения сопротивлением воздуха уравнение (7.36) легко интегрируется. Разделение переменных w и m и учет того, что $u_2 = u = \text{const}$ и $u_1 = 0$ дает

$$w(t) = u \ln \frac{m_L}{m(t)} - gt, \quad \dot{m}_2 = \dot{m} = \frac{dm}{dt} = \text{const}, \quad (7.39)$$

где m_L – масса в момент отрыва. Интегрируя по времени второй раз, получаем логарифмический закон, который дает теоретическую зависимость высоты от времени при постоянной тяге

$$h(t) = u \left[t - \frac{m(t)}{\dot{m}} \ln \frac{m_L}{m(t)} \right] - \frac{gt^2}{2}. \quad (7.40)$$

Высота, достигнутая в момент полного сгорания, получается при подстановке в это выражение времени, прошедшего с момента отрыва от земли

$$t = m_B / \dot{m},$$

где $m_B = m_L - m_0$ – массовый расход топлива, полностью сгоревшего с постоянной скоростью.

Идеальная мгновенная вертикальная скорость (после полета без потерь на трение в однородном поле сил тяжести в вакууме) оставшейся массы m_0 в момент прекращения работы двигателя определяется выражением

$$w_B = u \left[\ln \frac{m_L}{m_0} + \frac{m_0}{m_L} - 1 \right]. \quad (7.41)$$

Для достижения высокой скорости к моменту прекращения горения топлива требуется большое отношение масс ракеты m_L/m_0 . При заданной полезной нагрузке оптимум достигается путем проектирования многоступенчатой ракеты.

7.3.3. Турбинное уравнение Эйлера

Колесо радиальной турбины реактивного типа с горизонтальной или, наоборот, вертикальной осью вращается с угловой скоростью $\Omega = \text{const}$. Стационарный поток жидкости, движущийся изнутри, полагается несжимаемым. При помощи специального устройства неподвижных лопаток он должным образом направляется к входу во вращающуюся систему лопаток. Цилиндрическая контрольная поверхность показана на рис. 7.7 штриховыми окружностями. Так как производная по времени от вектора момента количества движения равна нулю, то из уравнения (7.26), где моменты вычисляются относительно неподвижной точки O , следует

$$\oint_{\partial V} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{V}) dS = \mathbf{M}_O = -\mathbf{M}_W^* \quad (7.42)$$

В действительности вращающаяся контрольная поверхность должна повторять очертания каждой вращающейся лопатки, чтобы учесть действие поверхностных усилий в качестве истинных внешних сил потока массы с реактивным моментом $-\mathbf{M}_W$ относительно центра O . Путем замены этих усилий на лопатках системой фиктивных внешних массовых сил, действующих на массу, заключен-

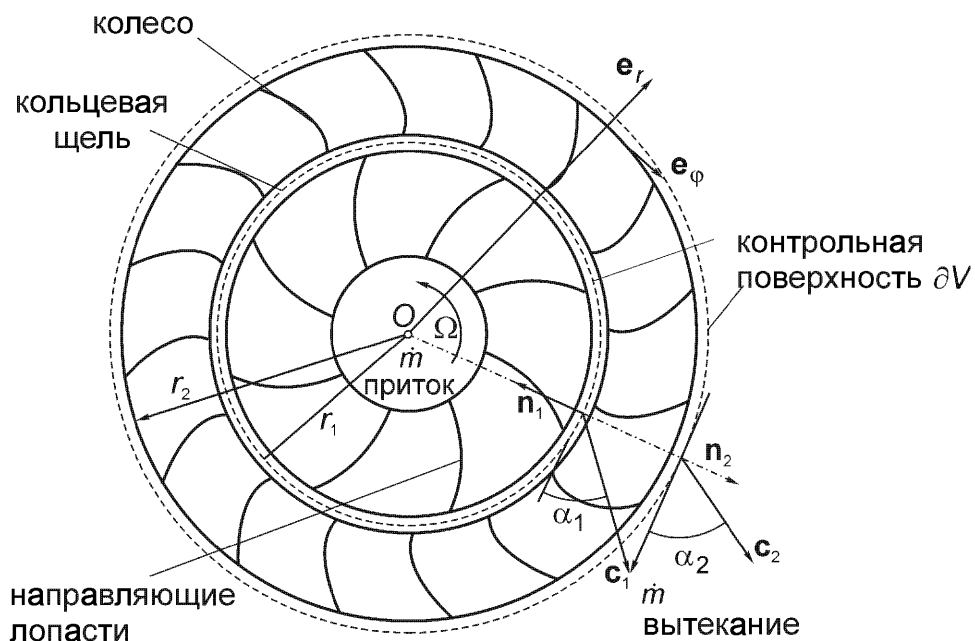


Рис. 7.7. Поперечное сечение радиальной турбины с потоком массы изнутри. Контрольная поверхность неподвижна в пространстве. Усилия, действующие на поверхности лопаток, учтены в виде «размазанных» массовых сил с таким же моментом $-\mathbf{M}_W^*$.

ную мгновенно в объеме вращающегося колеса без лопаток, и имеющей такой же момент относительно центра O , $\mathbf{M}_W = \mathbf{M}_W^*$, контрольную поверхность в уравнении (7.42) можно считать неподвижной, см. также уравнение (8.43). Так как векторы $\mathbf{\Omega}$ и \mathbf{H} параллельны, то это допущение не оказывает влияния даже на поток с нестационарным расходом. Скорость потока массы μ также остается неизменной. Насчет подъемной силы отдельной лопатки при их параллельном расположении см. раздел 13.2.

При осесимметричном течении рассматривается полярная система координат, и на нее проектируются абсолютные скорости притока и вытекания жидкости \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 . Скорости потока массы равны

$$\mu_1 = -\dot{m}/A_1, \quad \mu_2 = \dot{m}/A_2, \quad A_k = 2\pi r_k a, \quad k = 1, 2,$$

где a – осевая протяженность канала.

Поверхностный интеграл в уравнении (7.42) легко вычисляется и приводит к выражению

$$\begin{aligned} r_1 \mathbf{e}_r \times \mu_1 (c_1 \sin \alpha_1 \mathbf{e}_r + c_1 \cos \alpha_1 \mathbf{e}_\varphi) A_1 + \\ + r_2 \mathbf{e}_r \times \mu_2 (c_2 \sin \alpha_2 \mathbf{e}_r + c_2 \cos \alpha_2 \mathbf{e}_\varphi) A_2 = -\mathbf{M}_W^*. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Положив $\mathbf{M}_W^* = M_W \mathbf{e}_z$, получаем осевой момент, вызванный стационарным течением на вращающемся колесе, в виде

$$M_W = \dot{m}(r_1 c_{1t} - r_2 c_{2t}), \quad (7.44)$$

где $c_{kt} = c_k \cos \alpha_k$, $k = 1, 2$ – сокращенные обозначения тангенциальных компонент абсолютных скоростей жидкости.

Эта формула называется турбинным уравнением Эйлера. С учетом формулы (3.6) теоретическая мощность определяется скалярным произведением

$$P = \mathbf{M}_W \cdot \mathbf{\Omega}. \quad (7.45)$$

Если рассмотреть окружные скорости внутренней и наружной кромок вращающихся лопаток $u_k = \Omega r_k$, $k = 1, 2$, то теоретическая мощность радиальной турбины в стационарном состоянии без учета потерь определяется простой формулой

$$P = \dot{m}(u_1 c_{1t} - u_2 c_{2t}). \quad (7.46)$$

Ее нужно максимизировать надлежащим проектированием конфигурации лопаток. См. также реактивное колесо Сегнера, рис. 8.12.

7.3.4. Гидравлический удар в прямолинейном трубопроводе

Рассматривается стационарное и несжимаемое течение жидкости со скоростью $v_0 = \text{const}$ в прямолинейном горизонтальном трубопроводе с постоянным поперечным сечением A . В момент времени $t = 0$ управляющая задвижка, находящаяся на расстоянии L от большого резервуара, начинает перекрывать поток. Таким образом, поток массы становится нестационарным, $\rho Av(t)$, $t \geq 0$. Для прямолинейного цилиндрического контрольного объема с отмеченной пунктиром на рис. 7.8 контрольной поверхностью можно применить уравнение количества движения (7.13) в дифференциальной форме:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} + \oint_{\partial V} \mu \mathbf{v} dS = \mathbf{R}, \quad \mu_1 = -\rho v(t), \quad \mu_2 = \rho v(t), \quad A_1 = A_2 = A.$$

Поток количества движения равен нулю, и скорость изменения зависящего от времени количества движения $\mathbf{l} = \rho ALv(t)\mathbf{e}_x$ в осевом направлении дает:

$$\rho AL \frac{dv}{dt} = [p_1 - p_2(t)]A. \quad (7.47)$$

Здесь $p_2(t)$ – давление около закрывающейся заслонки, а $p_1 = \text{const}$ – давление в резервуаре, заданное во входном сечении; вязкие эффекты (касательные напряжения) на стенке не учитываются.

Заданный временной закон управления заслонкой определяет нестационарность производной dv/dt , довольно часто она принимается постоянной, и тогда скорость потока уменьшается с течением времени по линейному закону. Следовательно, в общем случае зависимость давления около заслонки от времени принимает вид

$$p_2(t) = p_1 - \rho L \frac{dv(t)}{dt}. \quad (7.48)$$

На протяжении времени закрывания заслонки $dv/dt < 0$, и, следовательно, давление p_2 растет и становится больше своего стационарного значения p_1 : $p_2 > p_1$. При открывании заслонки течение начинается из состояния покоя,

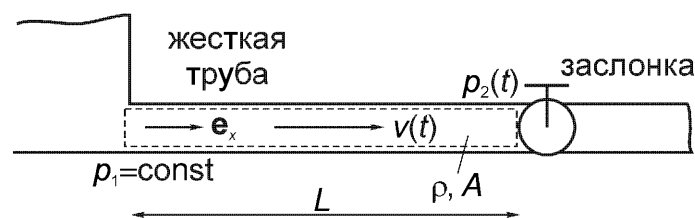


Рис. 7.8. Закрывание заслонки в прямолинейном трубопроводе. Конструкция считается жесткой, а течение несжимаемым. Контрольная поверхность отмечена пунктирной линией.

$dv/dt > 0$, давление p_2 падает и становится меньше давления p_1 в неподвижной жидкости, $p_2 < p_1$. Большая скорость закрывания заслонки приводит к сильному повышению нестационарного давления в потоке и, таким образом, вызывает высокие переменные напряжения в конструкции, переносящей этот поток. Опасным является также и быстрое открывание заслонки, так как низкое давление может повлечь за собой испарение жидкости, что служит началом явления кавитации (то есть вызывает ударные нагрузки и коррозию). Однако предположение о несжимаемости ограничивает применимость формулы (7.48) низкими и средними скоростями управления заслонкой. Для высоких скоростей и сжимаемой жидкости следует рассматривать волновое распространение возмущений; см. раздел 12.8. Более подробную информацию можно найти в книге:

- Parmakian J. Waterhammer Analysis. New York, Dover, 1963.

В случае изогнутых труб и колен следует применять уравнение (8.35).

7.3.5. Потеря гидростатического напора Карно

Рассматривается стационарное и несжимаемое течение в прямолинейной трубе с резко увеличивающимся поперечным сечением, и для контрольного объема, отмеченного на рис. 7.9, применяется уравнение (7.13). Скорость изменения вектора количества движения равна нулю.

Ниже по течению от места резкого изменения поперечного течения почти однородное распределение скорости потока v_2 может быть достигнуто только за счет действия вязких касательных напряжений. Невязкая струя не будет изменять свою первоначальную площадь поперечного сечения A_1 и свою скорость v_1 . Таким образом, по аналогии со свободной струей, когда площадь поперечного сечения A_1 скачком изменяется на $A_2 > A_1$, среднее давление p_1 должно вызвать также спутный вихрь, то есть угловой тупик, заполненный жидкостью. Если принять это предположение и пренебречь вязкими касательными напряжениями на стенке, стационарный поток количества движения принимает вид:

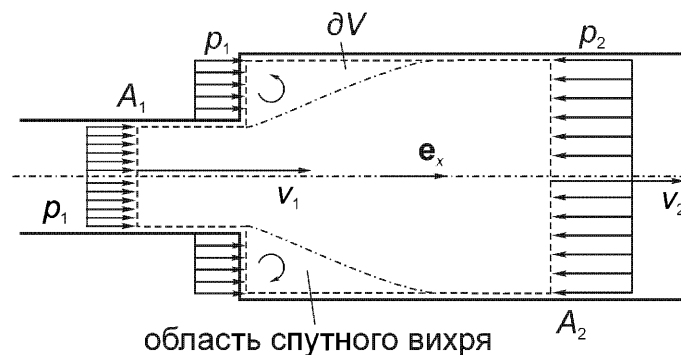


Рис. 7.9. Разделение вязкого потока при внезапном увеличении поперечного сечения. Потеря давления Карно. Контрольная поверхность отмечена пунктирной линией.

$$\oint_{\partial V} \mu \mathbf{v} dS = (p_2 - p_1) A_2 \mathbf{e}_x, \quad \mu_1 = -\rho v_1, \quad \mu_2 = \rho v_2, \quad \dot{m} = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2.$$

Этот поверхностный интеграл легко вычисляется, и получается, что разность давлений в вязком потоке не зависит от параметра вязкости и определяется выражением

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho v_1^2}{2} (1 - A_1/A_2) \frac{2A_1}{A_2}, \quad A_1/A_2 < 1. \quad (7.49)$$

Потеря гидростатического напора для идеального течения определяется в разделе 8.5.9, и безразмерный коэффициент потери давления задан уравнением (8.60). Разность давлений в этом рассмотренном позже случае идеального течения значительно больше. Вследствие этого диффузоры при дозвуковых потоках для большей эффективности проектируются с плавно и только слегка увеличивающейся площадью поперечного сечения. С другой стороны, для того, чтобы потеря гидростатического напора за счет вязкого трения на стенке оставалась достаточно малой, длина такого диффузора ограничена.

Работа сил трения в спутном вихре превращается во внутреннюю энергию жидкости. Ту часть, которая превращается в тепло, нельзя полностью восстановить в форме механической энергии потока: в результате получается потеря потенциальной энергии внутренних сил (гидростатического напора). Первый закон термодинамики выводится в разделе 8.6.

7.4. Приложения к динамике абсолютно твердого тела

Уравнение скорости изменения момента количества движения (7.20) значительно упрощается, если допустить, что тело (с постоянной массой) является недеформируемым. Точка A' , относительно которой определяется момент количества движения, выбирается жестко связанной с этим абсолютно твердым телом, и, следовательно, относительные скорости элементарных масс тела в соответствии с уравнением (1.4) распределены по линейному закону:

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (7.50)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, а \mathbf{r} – материальный радиус-вектор постоянной длины. Подставляя в уравнение (7.20) и преобразуя двойное векторное произведение под знаком объемного интеграла, получаем:

$$\mathbf{H}_A = \int_m (\mathbf{r} \times \mathbf{v}') dm = \int_m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \int_m [r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] dm. \quad (7.51)$$

В декартовой системе с началом координат A' входящие сюда выражения принимают вид $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$. При подстановке они представляют подынтегральное выражение в виде трех компонент вектора $[(r^2 - x^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z]\mathbf{e}_x$, $[(r^2 - y^2)\omega_y - yz\omega_z - yx\omega_x]\mathbf{e}_y$, $[(r^2 - z^2)\omega_z - zx\omega_x - zy\omega_y]\mathbf{e}_z$. Интегрируя по массе всего тела в фиксированный момент времени и выделяя в качестве множителей постоянные для всех частиц тела компоненты вектора угловой скорости, можно представить это выражение через осевые моменты инерции (см. раздел 2.4):

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_m (z^2 + x^2) dm, \quad I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm \quad (7.52)$$

и центробежные моменты инерции твердого тела [см. формулу (2.117)]:

$$I_{xy} = \int_m xy dm, \quad I_{yz} = \int_m yz dm, \quad I_{zx} = \int_m zx dm. \quad (7.53)$$

Эти величины являются элементами симметричного тензора моментов инерции твердого тела размером 3×3 , вычисленного в материальной точке отсчета A' :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}. \quad (7.54)$$

Если оси координат жестко скреплены с твердым телом, этот тензор становится инвариантным относительно времени. Момент количества движения равен матричному произведению, то есть линейному векторному преобразованию, где $\boldsymbol{\omega}$ – матрица-столбец:

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (7.55)$$

Выбирая в точке A' главные оси инерции и представляя тензор инерции [формула (7.54)] в диагональной форме, получаем:

$$\mathbf{H}_A = I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3, \quad (7.56)$$

где $\mathbf{e}_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ – взаимно ортогональные единичные материальные векторы, скрепленные с твердым телом при его движении. Зависимость от времени их направлений нужно принимать во внимание, когда вычисляется скорость изменения момента количества движения. Во многих приложениях имеется ось симметрии, и тензор моментов инерции не изменяется, если твердое тело может вращаться вокруг этой оси. Поэтому скорость изменения момента количества движения вычисляется при более общем предположении, что система координат вращается с заданной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, тогда как твердое тело

все так же вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. При подстановке $\boldsymbol{\Omega}$ и с учетом формулы (1.6) формальное дифференцирование дает:

$$\frac{d\mathbf{H}_A}{dt} = \dot{H}_x \mathbf{e}_x + \dot{H}_y \mathbf{e}_y + \dot{H}_z \mathbf{e}_z + H_x \dot{\mathbf{e}}_x + H_y \dot{\mathbf{e}}_y + H_z \dot{\mathbf{e}}_z, \quad \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i, \quad (7.57)$$

$$i = x, y, z.$$

Обозначая скорость изменения момента количества движения относительно вращающейся системы координат как

$$\frac{d'\mathbf{H}_A}{dt} = \sum_i \dot{H}_i \mathbf{e}_i \quad (7.58)$$

и складывая, получаем полную скорость изменения момента количества движения в виде суммы двух векторов

$$\frac{d\mathbf{H}_A}{dt} = \frac{d'\mathbf{H}_A}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_A. \quad (7.59)$$

Уравнение (7.59) справедливо для скорости изменения любого вектора, если для наблюдения используется вспомогательная вращающаяся система координат. Вычисление скорости изменения количества движения и момента количества движения в формулах (7.14) и (7.25) очень упрощается, если контрольный объем $V = \text{const}$ выбран так, что он движется как твердое тело, то есть если для поля скоростей \mathbf{w} справедлива формула (1.4).

Если в качестве точки отсчета для вычисления моментов использовать центр масс M , сохраняющий постоянное положение в твердом теле, то уравнение (7.21) в векторной форме принимает вид

$$\frac{d'\mathbf{H}_M}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_M = \mathbf{M}_M. \quad (7.60)$$

Если твердое тело совершает вращательное движение относительно точки $A' = O$, неподвижной в пространстве, и эта точка неподвижна также и в теле; то она является идеальной точкой отсчета. При рассмотрении системы координат с началом координат M или O , неподвижными в теле, $\boldsymbol{\Omega} \equiv \boldsymbol{\omega}$. Тогда, выбирая главные оси инерции, получаем три нелинейных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами, известные как гироскопические уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= M_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= M_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= M_3. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Если одна из главных осей, например, первая ось, является также и осью симметрии, то главный момент инерции $I_1 = \text{const}$, а $I_2 = I_3 = I$, даже если твердое тело может вращаться вокруг этой оси с угловой скоростью σ . Последняя называется спином и измеряется по отношению к вспомогательной системе отсчета. Следовательно, $\omega_1 = \Omega_1 + \sigma$, $\omega_k = \Omega_k$, $k = 2, 3$. Тогда уравнение (7.60) в компонентной форме принимает вид

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= M_1, & I \dot{\omega}_2 + [(I_1 - I) \omega_1 + I \sigma] \omega_3 &= M_2, \\ I \dot{\omega}_3 - [(I_1 - I) \omega_1 + I \sigma] \omega_2 &= M_3. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Простые иллюстративные примеры показывают, каким образом эти уравнения должны применяться для решения реальных задач.

7.4.1. Катящееся абсолютно твердое колесо

Колесо, вращающееся с угловой скоростью ω_0 , в момент времени $t = 0$ вступает в контакт с жесткой плоскостью при наличии проскальзывания. Контактные силы с компонентами N , T и вес mg , показанные на рис. 7.10, используются ниже. Нестационарное движение подчиняется закону сухого трения Кулона:

$$T_R = -\mu N \text{sgn}(v'), \quad (7.63)$$

где μ – коэффициент сухого трения, N – нормальная компонента контактной силы и v' – относительная скорость проскальзывания, являющаяся аргументом функции знака sgn . В момент времени t количество движения и момент количества движения относительно центра масс определяются выражениями

$$\mathbf{l} = m \dot{x}_S \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{H}_S = I_S \omega \mathbf{e}_y, \quad \text{где } I_S = m i^2.$$

Для этого плоского движения применяются уравнения (7.9) и (7.21) в векторной

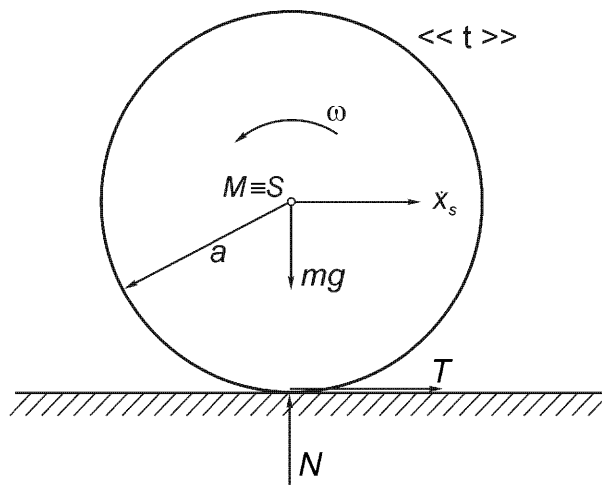


Рис. 7.10. Нестационарное качение колеса с проскальзыванием.

и компонентной форме:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = m \ddot{x}_S \mathbf{e}_x = \mathbf{R}, \quad \frac{d\mathbf{H}_S}{dt} = I_S \dot{\omega} \mathbf{e}_y = -aT \mathbf{e}_y, \quad m \ddot{x}_S = T, \quad 0 = (-mg + N).$$

В течение этой фазы движения не учитывается наличие направленной противоположно вращению пары «трения качения», которая вызвана конечной протяженностью зоны контакта. При $N = mg$ оставшиеся дифференциальные уравнения легко интегрируются. В течение фазы проскальзывания колеса справедливо соотношение (7.63). В интервале времени $0 \leq t \leq t_0$ сила $T = T_R = \mu mg = \text{const}$ является внешней силой, вызывающей ускорение, и тогда

$$\ddot{x}_S = \mu g t + C_1, \quad x_S = \mu g \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad \omega = -\mu g \frac{at}{i^2} + C_3.$$

Из начальных условий при $t = 0$: $x_S = dx_S/dt = 0$, $\omega = \omega_0$ определяются следующие значения постоянных интегрирования: $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = \omega_0$. Впервые условие чистого качения без проскальзывания выполняется в момент времени t_0 , когда точка контакта становится центром скоростей (ее скорость v' равна нулю):

$$\dot{x}_S = a\omega: \quad \mu g t_0 = -\mu g \left(\frac{a}{i}\right)^2 t_0 + a\omega_0, \quad t_0 = \frac{a\omega_0}{\mu g (1 + a^2/i^2)}. \quad (7.64)$$

Сила T уже больше не равна T_R , и при $t \geq t_0$ проскальзывание отсутствует. При чистом качении должно выполняться условие $dx_S/dt = a\omega$, и если мы все еще пренебрегаем парой сил сопротивления качению, отсюда следует

$$m \ddot{x}_S = T \quad \text{и} \quad I_S \dot{\omega} = -aT \quad \Rightarrow \quad m \ddot{x}_S = -\left(\frac{a}{i}\right)^2 T.$$

У этих несовместимых уравнений возможно только тривиальное решение $T \equiv 0$, и, следовательно, при стационарном движении при условии отсутствия проскальзывания, $T < \mu N$, получаем:

$$\ddot{x}_S \equiv 0 \quad \text{и} \quad \dot{x}_S \equiv \dot{x}_S(t = t_0).$$

7.4.2. Канатная передача

Канатный шкив приводится в движение с угловой скоростью $\omega(t)$ за счет внешней пары сил с моментом M_A . Тела с массами m_1 и m_2 совершают вертикаль-

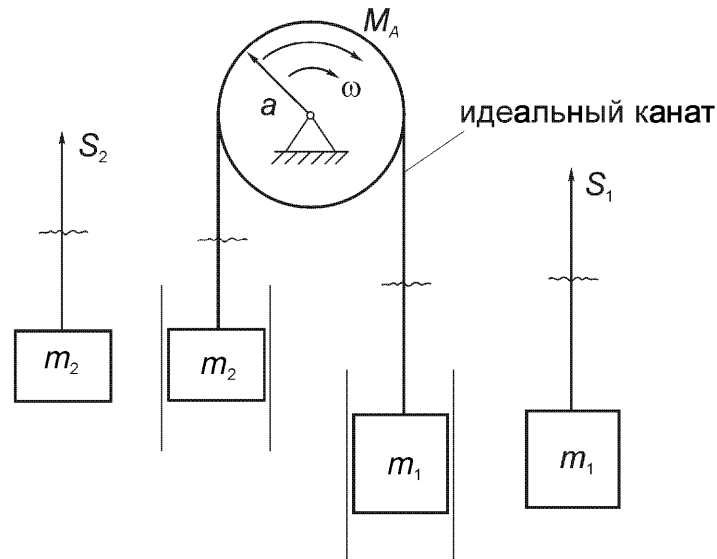


Рис. 7.11. Канатная передача. Три твердых тела совершают движение с одной степенью свободы. Канат считается нерастяжимым и невесомым. M_A – заданный момент внешней пары сил.

ное поступательное движение и присоединены к канату, который считается идеальным, то есть нерастяжимым и невесомым (рис. 7.11).

Все потери, вызванные трением и проскальзыванием в зоне контакта каната со шкивом, считаются пренебрежимо малыми. Натяжения каната обозначены S_k , $k = 1, 2$. (Заметим, что имеется неизбежное проскальзывание натянутого каната, когда он движется через шкив из состояния, когда его натяжение равно S_1 , в состояние с натяжением S_2 , которые являются различными). Так как считается, что канат находится в идеальном адгезионном контакте для избежания чрезмерного износа, система, состоящая из трех твердых тел, имеет только одну степень свободы. Каждое тело рассматривается освобожденным от связей:

$$m_1 (a \dot{\omega}) = m_1 g - S_1, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = a \omega, \quad m_2 (a \dot{\omega}) = -m_2 g + S_2, \\ I \dot{\omega} = a(S_1 - S_2) + M_A, \quad I = m i^2.$$

Исключение натяжений каната дает уравнение движения в виде следующего выражения для углового ускорения:

$$\dot{\omega} = \frac{a(m_1 - m_2)g + M_A}{(m_1 + m_2)a^2 + m i^2}. \quad (7.65)$$

Необходимо определить предельное значение момента внешней пары сил в пределе адгезионного контакта, который характеризуется началом проскальзывания; для определения этого предела используется закон сухого трения Кулона. Если рассмотреть рис. 7.12, равновесие сил натяжения каната и контактных сил на ободе шкива приводит к следующим квазистатическим соотношениям:

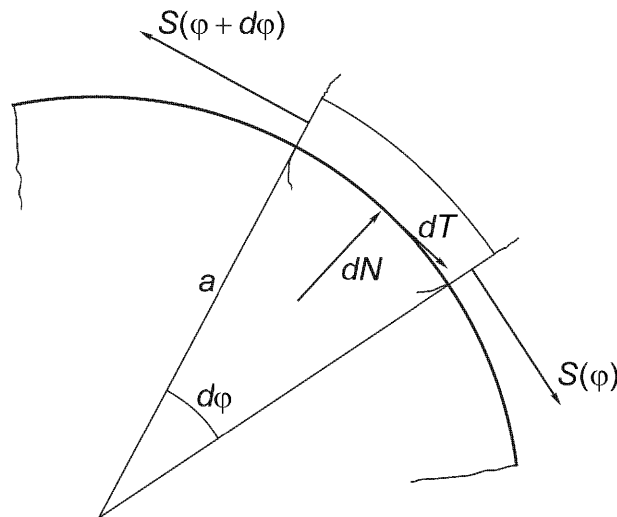


Рис. 7.12. Невесомый элемент каната в условиях адгезионного контакта (без проскальзывания). Равновесие сил (инерция не учитывается).

$$\frac{dS}{d\varphi} d\varphi - dT = 0, \quad dT \leq dT_R, \quad dN - S d\varphi = 0, \quad (7.66)$$

где φ – центральный угол, а инерция элементарного участка каната не учитывается.

В предельном состоянии адгезионного контакта $dT = dT_R = \mu dN$, и система является статически определимой. Исключение dN приводит в пределе при $\varphi \rightarrow 0$ к уравнению Эйлера, определяющему трение каната,

$$\frac{dS}{d\varphi} - \mu S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{S} = \mu d\varphi. \quad (7.67)$$

Разделение переменных и интегрирование с учетом граничного условия $S(\varphi = 0) = S_1$ приводит к практически важному экспоненциальному закону возрастания силы натяжения каната в зависимости от центрального угла φ участка окружности шкива, охваченного канатом:

$$S(\varphi) = S_1 e^{\mu\varphi}. \quad (7.68)$$

Так как на рис. 7.11 $\varphi = \pi$, применяется неравенство

$$S_2 \leq S_1 e^{\mu\pi}. \quad (7.69)$$

Здесь равенство соответствует предельному случаю адгезионного контакта. С учетом уравнения (7.65) определяется верхний предел момента внешней пары сил. Так как проскальзывание может происходить и в обратную сторону, то при замене μ а $-\mu$ получается нижний предел. Таким образом, внешний момент ограничен сверху и снизу (знак равенства определяет экстремальное значение):

$$g \frac{(m_1 e^{-\mu\pi} - m_2) m i^2 + 2(e^{-\mu\pi} - 1) m_1 m_2 a^2}{(m_1 e^{-\mu\pi} + m_2) a} \leq \leq M_A \leq g \frac{(m_1 e^{\mu\pi} - m_2) m i^2 + 2(e^{\mu\pi} - 1) m_1 m_2 a^2}{(m_1 e^{\mu\pi} + m_2) a}. \quad (7.70)$$

7.4.3. Динамика дробильного ролика (рис. 1.3)

Тяжелое абсолютно твердое колесо с радиусом r и моментом инерции $I_1 = m i^2$ катится по круговой траектории радиуса R , как симметричный гироскоп в управляемом стационарном движении. Система отсчета с началом в точке O , неподвижной как в пространстве, так и относительно твердого тела, вращается вокруг вертикальной главной оси 2 таким образом, что угловая скорость колеса относительно оси 1 равна σ . Из условия качения без проскальзывания следует геометрическое соотношение между угловыми скоростями $\sigma = (R/r)\Omega$. Для этой ситуации удобно использовать уравнения (7.62) с учетом того, что $\omega_1 = \sigma$, $\bar{\Omega}_1 = 0$, $\omega_2 = \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$, $\omega_3 = \bar{\Omega}_3 = 0$:

$$M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 = -m i^2 \sigma \Omega = -m i^2 \frac{R}{r} \Omega^2. \quad (7.71)$$

С другой стороны, за счет разности между весом и контактной силой N возникает момент $M_3 = (m g - N) R$, и динамическую контактную силу можно записать в виде

$$N = m g \left(1 + \frac{i^2}{r g} \Omega^2 \right). \quad (7.72)$$

Из условия $M_1 = 0$ следует, что момент сопротивления качению должен уравновешиваться вращающим моментом от привода. Аналогичным образом динамически изменяются контактные силы колес автомобиля, совершающего поворот по круговой траектории (для пояснения см. рис. 1.4), но в этом случае следует принять во внимание инерцию корпуса автомобиля.

7.4.4. Поворотный кран со стрелой

В соответствии с рис. 7.13 рассматривается динамика следующего стационарного движения: стрела, опускаясь, совершает управляемое движение с постоянной угловой скоростью ω_0 , а башня вместе с прикрепленной к ней стрелой, независимо от этого, поворачивается с помощью другого мотора также с постоянной угловой скоростью $\bar{\Omega}_0$. Система отсчета с неподвижным в пространстве

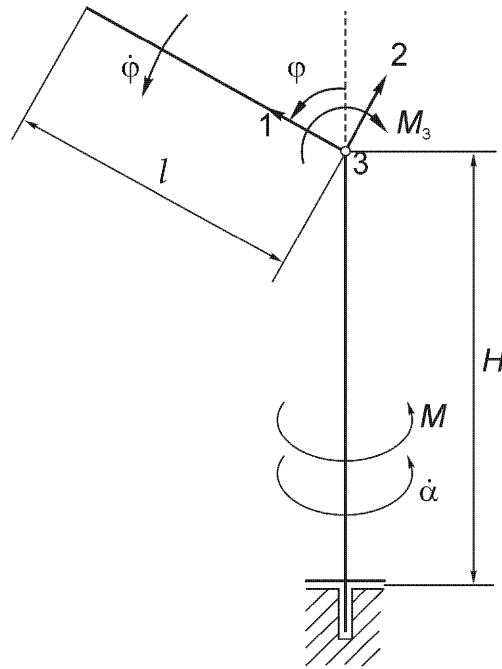


Рис. 7.13. Поворотный кран со стрелой при стационарном вращательном движении. Опрокидывающий момент $M_2 \cos \varphi$.

началом координат, находящимся в шарнире между башней и стрелой, скреплена со стрелой и ее положение определяется главными осями инерции 1, 2, 3.

На рис. 7.13 угловые скорости стрелы заданы следующим образом:

$$\omega_1 = \Omega_0 \cos \varphi, \quad \omega_2 = \Omega_0 \sin \varphi, \quad \omega_3 = -\omega_0, \quad \omega_0 = \dot{\varphi}, \quad \Omega_0 = \dot{\alpha}. \quad (7.73)$$

Стрела представляет собой тонкую консоль с моментами инерции $I_1 = 0$, $I_2 = I_3 = I_0 = m i_0^2$, и уравнения Эйлера (7.61) представляют компоненты внешнего момента:

$$M_1 = 0, \quad M_2 = (\dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3) m i_0^2, \quad M_3 = (\dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2) m i_0^2. \quad (7.74)$$

Сила тяжести стрелы и ее мотор создают момент:

$$M_3 = (\dot{\alpha}^2 \sin 2\varphi) \frac{m i_0^2}{2}, \quad (7.75)$$

а совершение вращательного движения всей системы требует существования пары сил с моментом вокруг вертикальной оси:

$$M = M_2 \sin \varphi = (\dot{\alpha} \dot{\varphi} \sin 2\varphi) m i_0^2. \quad (7.76)$$

Лежащая вне плоскости компонента $M_2 \cos \alpha$ дает пару сил с моментом, который нагружает шарнир стрелы и одновременно для башни крана является изгибающим моментом, так же как и, возможно, неожиданным, опрокидывающим моментом.

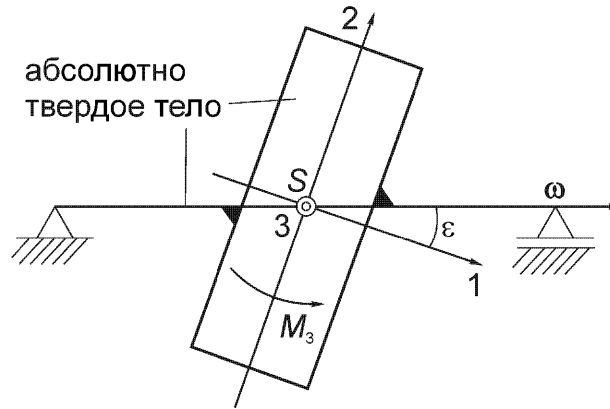


Рис. 7.14. Динамически неуравновешенное вращающееся твердое тело.

7.4.5. Балансировка вращающихся тел

Предполагается, что любое отклонение центра масс S от оси вращения может быть устранено с помощью процедуры статической балансировки, то есть надлежащего удаления или прибавления частиц массы. Но при этом, как показано на рис. 7.14, главная ось инерции 1 не совпадает с осью вращения твердого тела. Для того, чтобы в опорах не возникали динамические реакции, требуется динамическая балансировка, результатом которой должно стать $\varepsilon = 0$.

В противном случае момент M_3 на рис 7.14 является ненулевым и вызывает пару сил реакций подшипников, что в общем случае является недопустимым. Когда компоненты вектора угловой скорости равны $\omega_1 = \omega \cos \varepsilon$, $\omega_2 = \omega \sin \varepsilon$ и $\omega_3 = 0$, из уравнений Эйлера (7.61) следует

$$M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 = \frac{m}{2} (i_2^2 - i_1^2) \omega^2 \sin 2\varepsilon, \quad I_k = m i_k^2. \quad (7.77)$$

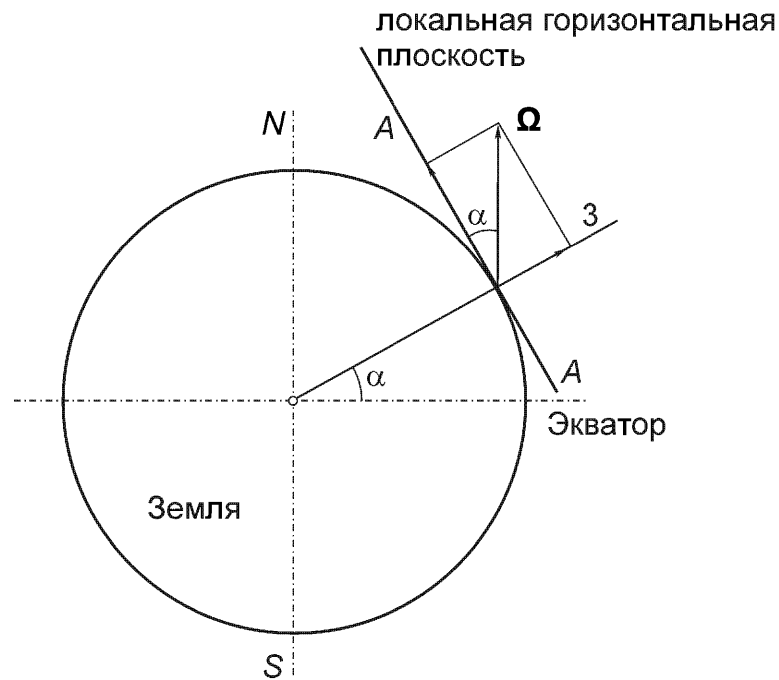
Плоскость действия пары сил с моментом M_3 вращается с заданной частотой n об/мин (оборотов в минуту), где $\omega = \pi n / 30$. Для получения исчерпывающей информации обо всех аспектах балансировки вращающихся тел см.:

- Federn K. Auswuchttechnik. Berlin-New York, Springer-Verlag, 1977.

7.4.6. Гирокомпас

Основная идея гирокомпаса восходит к Фуко (1852). Ось 1 собственного вращения цилиндрического высокоскоростного гироскопа (угловая скорость собственного вращения равна σ) зафиксирована на Земле в горизонтальной плоскости так, что она совершает вращательное движение вокруг вертикальной оси 3, проходящей через центр масс гироскопа.

Рис. 7.15(а) изображает географическую ситуацию на широте α , где Земля является неинерциальной системой отсчета, вращающейся вокруг своей

Рис. 7.15(a). Гирокомпас на широте α .

оси $N-S$ с угловой скоростью Ω . На рис. 7.15(b) показано отклонение $\varphi(t)$ оси собственного вращения 1 от оси $N-S$, представляющей собой касательную к меридиану. Угловая скорость вспомогательной системы отсчета выбрана так, что ее проекции на направления главных осей равны: $\Omega_1 = \Omega \cos \alpha \cos \varphi$, $\Omega_2 = -\Omega \cos \alpha \sin \varphi$, $\Omega_3 = d\varphi/dt + \Omega \sin \alpha$. При использовании уравнений (7.62), где в качестве точки отсчета выбран центр масс, и $M_1 = M_3 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 = 0, \quad \omega_1 = \text{const}, \quad I_2 = I_3 = I, \quad I \dot{\omega}_2 + [I_1 \omega_1 - I(\omega_1 - \sigma)] \omega_3 = M_2, \\ I \dot{\omega}_3 - [I_1 \omega_1 - I(\omega_1 - \sigma)] \omega_2 = 0. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Из-за момента M_2 в подшипниках возникают силы реакций. Третье уравнение содержит эффект компаса. При допущениях, что $\Omega \ll \sigma$ и $\alpha = \text{const}$, плоское движение оси симметрии приближенно описывается решением уравнения «маятника» с нелинейным восстанавливающим моментом [см. уравнение 7.115]):

$$\ddot{\varphi} + p^2 \sin \varphi = 0, \quad p^2 = \left(\frac{i_1}{i} \right)^2 \sigma \Omega \cos \alpha, \quad I_1 = m i_1^2, \quad I = m i^2. \quad (7.79)$$

На полюсах эффект компаса исчезает, так как $\cos \alpha = 0$. Это решение при любых начальных возмущениях определяет свободные незатухающие колебания около направления $\varphi = 0$, которое и представляет собой желаемое направле-



Рис. 7.15(b). Ось симметрии и собственного вращения 1 движется в локальной горизонтальной плоскости.

ние $N-S$ (север-юг). При наличии демпфирования ось собственного вращения через некоторое время возвращается к направлению $N-S$. Это явление называется «стремлением векторов угловых скоростей σ и Ω к параллельности и одинаковой ориентации.»

7.4.7. Линейный осциллятор

Простые линейно упругие динамические системы с одной степенью свободы символически моделируются линейным осциллятором с поступательным движением, показанным на рис. 7.16. За счет гуксовой пружины жесткости c к массе m приложена линейная восстанавливающая сила. Небольшое материальное демпфирование математически аппроксимируется параллельно соединенным линейно вязким амортизатором [см. формулу (4.70)]. Такая комбинация упругого и вязкого элементов называется (невесомым) телом Кельвина-Фойгта; см. раздел 4.2.2(§). Более близкое к действительности материальное демпфирование гистерезисного типа может быть рассмотрено при допущении, что жесткость пружины является комплексной, $c^* = c(1 + i\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$, $i = \sqrt{-1}$. Предполагается, что внешняя сила возбуждения задана, например как $F(t)$. Если считать, что координата $x(t)$ при вертикальном движении свободного тела, об-

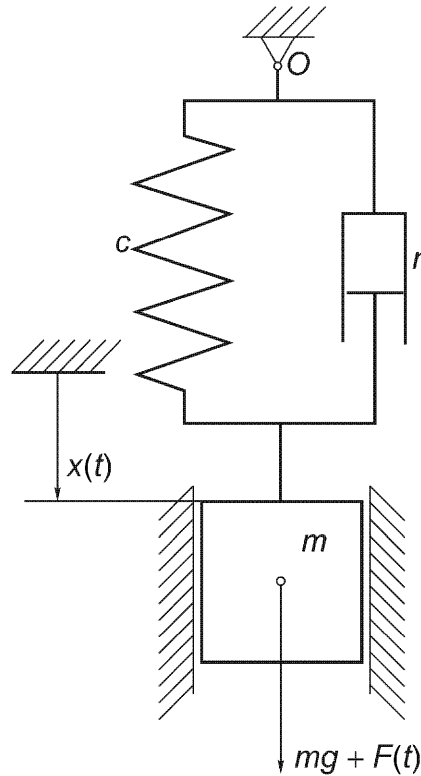


Рис. 7.16. Символическая модель линейного осциллятора – вынужденное движение системы, состоящей из пружины, массы и амортизатора. $x(t)$ – вертикальная координата, измеряемая от ненапряженной конфигурации, $\xi(t)$ – полученная переносом координата, измеряемая от положения равновесия при любом направлении движения в пространстве [см. уравнение (7.81)].

ладающего массой, откладывается от недеформированного состояния, то закон Ньютона представляет внешние силы, действующие на массу, следующим образом:

$$m \ddot{x} = mg + F(t) - cx - r \dot{x}. \quad (7.80a)$$

Здесь все параметры полагаются постоянными; таким образом, система инвариантна относительно времени. Деление на m дает стандартную форму дифференциального уравнения второго порядка для линейного осциллятора. Благодаря вынуждающей силе $F(t)$ оно является неоднородным, и так как предполагалось, что вес тела мгновенно нагружает нерастянутую пружину, получаем:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = g + \frac{F(t)}{m}, \quad \zeta = \frac{r}{2\sqrt{mc}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{a_s}}, \quad a_s = \frac{mg}{c}. \quad (7.80b)$$

При горизонтальном движении постоянное принуждение g отсутствует. Ввиду действия принципа суперпозиции любую постоянную силу всегда можно исклю-

чить путем простого переноса начала координат. Следовательно, полагая $\xi = x - x_0$, преобразуем уравнение (7.80b) к следующему виду:

$$\ddot{\xi} + 2\zeta\omega_0 \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{F(t)}{m} = \omega_0^2 \xi_e(t), \quad \xi_e = \frac{F(t)}{c}, \quad x_0 = a_s = \frac{mg}{c}. \quad (7.81)$$

Координата $\xi(t)$ должна откладываться от состояния равновесия тела массы m под действием собственного веса. Однородное параллельное поле сил тяжести не влияет на колебания этого тела. Система определяется двумя параметрами: коэффициентом демпфирования $\zeta \ll 1$, представляющим слабое материальное демпфирование, и круговой частотой свободных колебаний ω_0 . Ее численные значения приведены в таблице 7.1 в зависимости от статического удлинения пружины при нагружении ее силой, равной весу тела. Эта статическая деформация является характеристикой системы и не зависит от действительной ориентации осциллятора в пространстве. Общее решение линейного уравнения (7.81) получается путем добавления частного решения неоднородного уравнения к общему решению однородного дифференциального уравнения (при отсутствии принуждения)

$$\xi(t) = \xi_h(t) + \xi_p(t). \quad (7.82)$$

Таблица 7.1. Зависимость собственной частоты от статической деформации a_s пружины, нагруженной силой $F_s = mg$ в направлении движения. Круговая частота ω_0 , линейная частота f и период T собственных колебаний.

$a_s = mg/c$	см	0,01	0,05	0,1	0,5	1,0	10	20
$\omega_0 = \sqrt{g/a_s}$	рад/с	313,2	140,1	99,05	44,29	31,32	9,90	7,00
$f = \omega_0/2\pi$	Гц	49,85	22,29	15,76	7,05	4,98	1,58	1,11
$T = f^{-1}$	с	0,020	0,045	0,063	0,142	0,201	0,63	0,90

Однородное уравнение описывает свободные колебания, то есть движение системы после ее выведения из положения равновесия

$$\ddot{\xi}_h + 2\zeta\omega_0 \dot{\xi}_h + \omega_0^2 \xi_h = 0, \quad (7.83a)$$

и имеет общее комплексное решение (приведено также характеристическое уравнение и его комплексно сопряженные корни):

$$\alpha^2 + 2\zeta\omega_0 \alpha + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \alpha_{1,2} = \omega_0 \left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2} \right), \quad (7.83b)$$

$$\xi_h = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad \zeta < 1, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Двукратный корень $\alpha = -\zeta\omega_0$ относится к специальному предельному случаю апериодического движения, где масса медленно ползет обратно в положение равновесия и при этом, возможно, один раз проходит через него. Оставшаяся экспоненциальная функция в этом случае должна быть умножена на линейную функцию времени (полином степени «кратность минус единица»)

$$\xi_h^{(a)} = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t}, \quad \zeta = 1. \quad (7.84)$$

Для случая $\zeta > 1$ существуют апериодические движения, которые далее не рассматриваются. Критическое значение коэффициента демпфирования $\zeta = 1$ отделяет движение в форме свободных колебаний от ползущего движения. В случае моделирования материального демпфирования, когда $\zeta \leq 20\%$, приближенное равенство $\sqrt{1 - \zeta^2} \approx 1$ выполняется с достаточной степенью точности. Учитывая экспоненциальное демпфирование в уравнении (7.83b) и применяя декартово представление комплексных чисел с единичным модулем

$$e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi,$$

получаем решение для случая строгого неравенства $\zeta < 1$

$$\xi_h(t) = (C_1 \cos \omega_D t + C_2 \sin \omega_D t) e^{-\zeta\omega_0 t}, \quad \omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \approx \omega_0, \quad \zeta \leq 0,2. \quad (7.85)$$

Меняя постоянные интегрирования на амплитуду $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и фазовый угол ε , определяемый соотношениями $\cos \varepsilon = C_1/a$ и $\sin \varepsilon = C_2/a$, и применяя теорему сложения тригонометрических функций, получаем решение для свободного затухающего колебания в форме, которая содержит амплитуду, экспоненциально убывающую с течением времени:

$$\xi_h(t) = a e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_D t - \varepsilon). \quad (7.86)$$

Логарифмический декремент δ определяется как натуральный логарифм отношения двух последовательных максимумов перемещения и, таким образом, равен $\delta = 2\pi\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}$. Если амплитуда уменьшается до 1/2 своей начальной величины за n циклов, то коэффициент слабого демпфирования определяется приближенным соотношением $\zeta \approx 0,110/n$. Равноотстоящие пересечения нуля имеют период $T = 2\pi/\omega_D$, причем для слабого демпфирования он приблизительно равен периоду свободных колебаний системы без демпфирования. При $\zeta = 0$ уравнение (7.86) описывает гармоническое движение осциллятора без

демпфирования с постоянной амплитудой a и частотой свободных колебаний $f = \omega_0/2\pi$, измеряемой в Герцах.

(§) Периодическая вынуждающая функция $F(t) = F(t + T_e)$

Периодические функции могут быть разложены в ряд Фурье. Тогда возбуждение рассматривается почленно, а потом применяется суперпозиция. Пусть один член ряда вынуждающей функции является, например, гармонической функцией времени с заданной круговой частотой возбуждения ν , $F(t) = F_0 \cos \nu t$. Специальное частное решение неоднородного уравнения (7.81) для такого вида возбуждения должно быть гармонической функцией времени:

$$\xi_p(t) = A \cos \nu t + B \sin \nu t, \quad (7.87)$$

где константы A и B определяются путем сравнения коэффициентов в уравнении (7.81). В результате получается система двух линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \nu^2 & 2\zeta\omega_0\nu \\ -2\zeta\omega_0\nu & \omega_0^2 - \nu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0/m \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.88)$$

Так как определитель матрицы коэффициентов отличен от нуля

$$\Delta = (\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\nu^2 \neq 0, \quad \text{то } \zeta \neq 0, \quad (7.89)$$

и частное решение для системы с демпфированием определяется для всего спектра частот возбуждения в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \nu^2 \\ 2\zeta\omega_0\nu \end{pmatrix} \frac{F_0}{m\Delta}. \quad (7.90)$$

Амплитуду частного решения можно определить аналогично тому, как это делалось для неоднородного уравнения:

$$a_p = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{m\sqrt{\Delta}}, \quad (7.91a)$$

а фазовый угол φ связан с константами A и B следующими соотношениями:

$$\cos \varphi = A/a_p = (\omega_0^2 - \nu^2)/\sqrt{\Delta}, \quad \sin \varphi = B/a_p = 2\zeta\omega_0\nu/\sqrt{\Delta}. \quad (7.91b)$$

Подставляя в уравнение (7.87), получаем слагаемое, соответствующее вынужденным гармоническим колебаниям, в виде:

$$\xi_p(t) = a_p \cos(\nu t - \varphi). \quad (7.92)$$

Сравните со свободными колебаниями без демпфирования, уравнение (7.86) при $\zeta = 0$. Общее решение, в которое нужно будет подставлять начальные условия, получается в виде суммы соотношений (7.86) и (7.92)

$$\xi(t) = a e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_D t - \varepsilon) + a_p \cos(vt - \varphi), \quad (7.93)$$

где a и ε – постоянные интегрирования.

В связи с тем, что амплитуда слагаемого, соответствующего свободным колебаниям, экспоненциально затухает, непрерывно возбуждаемый осциллятор с демпфированием имеет затухающую память по отношению к начальным условиям, заданным при $t = 0$. Спустя достаточно продолжительное время колебания становятся стационарными, и, следовательно, аппроксимируются только слагаемым, соответствующим вынужденным колебаниям. Если отнести амплитуду a_p установившегося движения к статической деформации $a_0 = F_0/c$, то коэффициент динамичности вынужденных колебаний определяется как безразмерная функция безразмерных частоты возбуждения и параметра демпфирования

$$\chi_d(v, \zeta) = a_p/a_0 = 1/\sqrt{[1 - (v/\omega_0)^2]^2 + 4\zeta^2(v/\omega_0)^2}. \quad (7.94)$$

При медленном изменении частоты возбуждения колебательный отклик становится квазистационарным. Коэффициент динамичности перемещения принимает максимальное значение при критической частоте вынуждающей сил v_c , которая зависит только от коэффициента демпфирования,

$$\max \chi_d(\zeta) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \approx \frac{1}{2\zeta} \quad \Rightarrow \quad \zeta \leq 0,2, \quad v_c = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \approx \omega_0. \quad (7.95a)$$

Резонанс системы со слабым демпфированием возникает вблизи частоты собственных колебаний осциллятора без демпфирования. В этом случае переходное движение из состояния покоя является ограниченным, см. рисунки 7.21 с, d:

$$\xi(t) \approx \frac{a_0}{2\zeta} (1 - e^{-\zeta\omega_0 t}) \sin \omega_0 t, \quad \text{при } \zeta \rightarrow 0: \quad \xi(t) = \frac{a_0}{2} \omega_0 t \sin \omega_0 t. \quad (7.95b)$$

Такую же важность имеют резонансные кривые для скорости $\chi_v(v, \zeta) = v \chi_d(v, \zeta)$ и для ускорения $\chi_a(v, \zeta) = v \chi_v(v, \zeta) = v^2 \chi_d(v, \zeta)$. Эти резонансные кривые относительно коэффициента демпфирования представлены параметрически в четырехсторонней логарифмической диаграмме, получившей название в честь Блейка [см. рис. 7.17(a)]. Отметим безразмерную частоту возбуждения в логарифмической шкале на оси абсцисс. Другие авторы используют вместо нее период принуждающей силы.

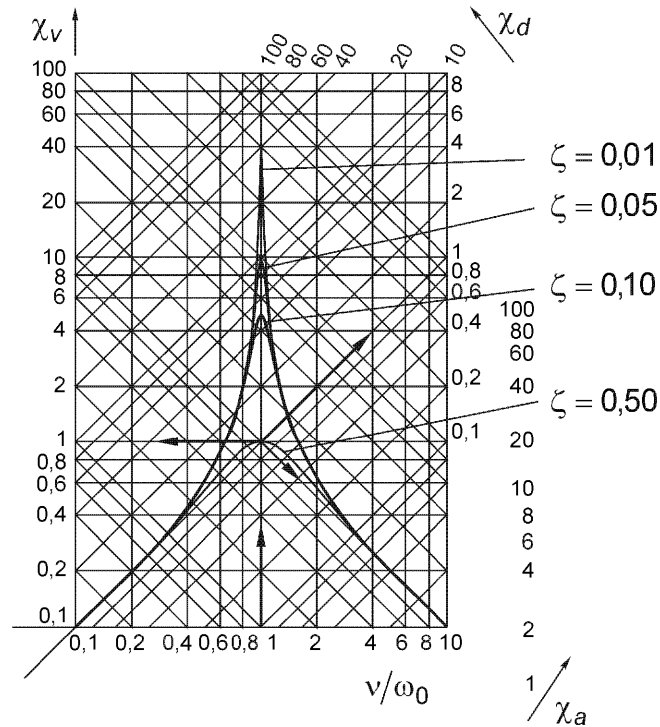


Рис. 7.17(a). Диаграмма Блейка. Функции амплитудно-частотных откликов для перемещения, скорости и ускорения.

Полагая в формуле (7.94) $\zeta = 0$, получаем сингулярную при собственной частоте кривую отклика для осциллятора без демпфирования [см. рис. 7.17(b)]. В этом случае в субкритическом диапазоне частот вынуждающей силы $\nu < \omega_0$ установившееся движение, как при статическом деформировании пружины, совпадает по фазе с гармонической силой, а в сверхкритическом диапазоне $\nu > \omega_0$ находится в противофазе. Последнее является чисто динамическим феноменом.

Для осциллятора с демпфированием сдвиг по фазе относительно возмущающей силы является непрерывной функцией частоты возмущения, формулы (7.91b). Функция отклика фазового угла $\varphi(\nu, \zeta)$ (в долях π) на изменение частоты показана на рис. 7.18. При всех допустимых значениях коэффициента демпфирования она монотонно возрастает от статического значения, равного нулю (при нулевой частоте), до $\pi/2$ при резонансе, когда частота возмущения равна собственной частоте системы без демпфирования, и асимптотически к значению π в противофазе. Показан также скачок фазы при установившихся колебаниях без демпфирования. Сила, направленная на поддержание установившегося движения, имеет амплитуду $F_T(\nu, \zeta) = \chi_d F_0 \sqrt{[1 + 4\zeta^2(\nu/\omega_0)^2]}$. Таким образом, изоляция колебаний достигается для $\nu/\omega_0 > \sqrt{2}$, так как отношение $F_T/F_0 < 1$. Для высокой степени изоляции требуются очень низкие значения вязкого демпфирования.

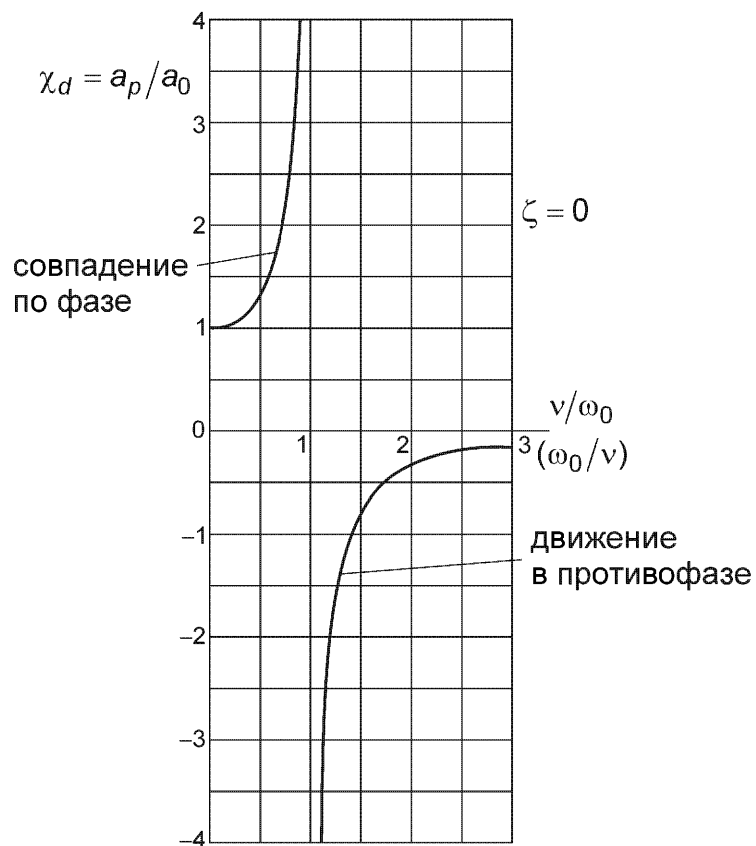


Рис. 7.17(б). Резонансная кривая линейного осциллятора без демпфирования.

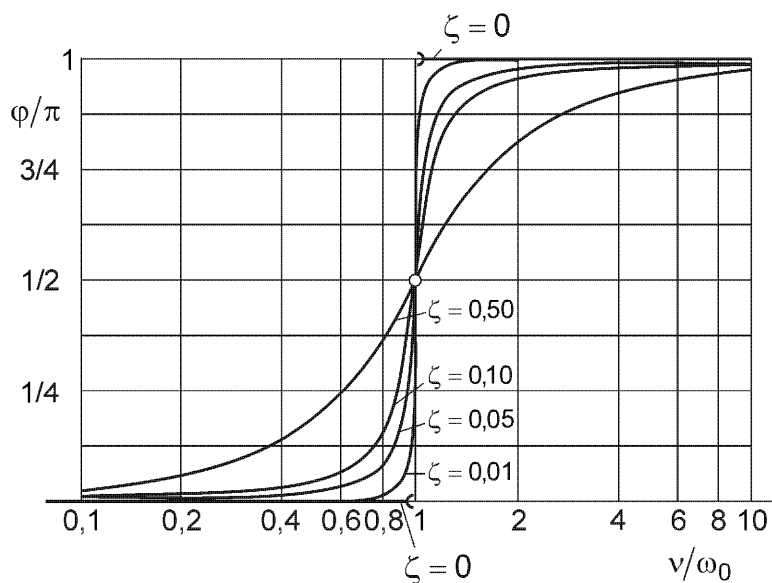


Рис. 7.18. Функция отклика фазового угла на изменение частоты для установившихся колебаний линейного осциллятора с вязким демпфированием. Заметим наличие скачка фазы для случая отсутствия демпфирования.

Зависимости амплитуды и фазы от частоты могут быть объединены функцией комплексного частотного отклика линейного осциллятора. Передаточная функция определяется отношением комплексной амплитуды на выходе A_0 к ее значению на входе. Возбуждение принимает комплексную форму

$$F(t)/m = A_e e^{i\nu t}. \quad (7.96)$$

Если взять стационарный отклик в виде

$$\xi_p = A_0 e^{i\nu t}, \quad (7.97)$$

получается следующая функция комплексного отклика

$$H(\nu, \zeta) = \frac{A_0}{A_e} = \frac{1}{\omega_0^2 - \nu^2 + 2i\zeta\omega_0\nu} = \frac{1}{\Delta} (\omega_0^2 - \nu^2 - 2i\zeta\omega_0\nu) \equiv \frac{1}{\omega_0^2} \chi_d e^{-i\varphi}. \quad (7.98)$$

Произведение массы на величину, обратную передаточной функции, представляет собой механический импеданс $Z(\nu)$. На комплексной плоскости H изображается как функция частоты возбуждения и, таким образом, объединяет резонансные кривые амплитуды и фазы в одну кривую.

Если задать периодическое возбуждение в виде комплексного ряда Фурье

$$F(t)/m = F(t + T_e)/m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad \omega = 2\pi/T_e, \quad (7.99)$$

то стационарный отклик все так же задается в виде суммы и, следовательно, с помощью бесконечного комплексного ряда

$$\xi_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_n(\zeta) e^{in\omega t}, \quad H_n(\zeta) \equiv H(\nu = n\omega, \zeta). \quad (7.100)$$

На практике возбуждение рассматривается в ограниченном диапазоне частот, и в приведенных выше рядах используется только ограниченное число членов.

(§) Возбуждение с помощью непериодической вынуждающей функции

Этот вид возбуждения, в отличие от дискретного спектра периодической силы (7.99), имеет непрерывный спектр, соответствующий интегралу Фурье,

$$c(\omega) = \frac{1}{m} \int_{t=-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (7.101)$$

Из этого выражения отклик получается путем взвешенного интегрирования по всей области частот, что является непрерывной формой принципа суперпозиции

$$\xi_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} H(\omega, \zeta) c(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (7.102)$$

Вычисление значений этих интегралов эффективно выполняется с помощью компьютерных программ быстрого преобразования Фурье (*FFT – Fast Fourier Transformation*), которые формально возвращаются к конечному числу членов ряда в уравнении (7.100) в соединении с бинарным представлением. Смотрите, например,

- Clough R.W. and Penzien J. Dynamics of structures. New York, McGraw-Hill, 1975, p.114. Имеется русский перевод: Клаф Р.В., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М., Стройиздат, 1979.

Если предположить однородные начальные условия (осциллятор находится в покое при $t=0$) и включить переходную фазу колебаний, то общее решение в области времени $t > 0$ задается в виде интеграла свертки Дюгамеля

$$\xi(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau. \quad (7.103)$$

Применяя к тригонометрической функции теорему сложения, преобразуем это выражение к следующему виду

$$\xi(t) = A(t)\sin\omega_D t - B(t)\cos\omega_D t. \quad (7.104)$$

Зависящие от времени амплитуды задаются численно устойчивыми интегралами

$$A(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t F(\tau) \frac{e^{\zeta\omega_0\tau}}{e^{\zeta\omega_0 t}} \cos\omega_D\tau d\tau, \quad B(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t F(\tau) \frac{e^{\zeta\omega_0\tau}}{e^{\zeta\omega_0 t}} \sin\omega_D\tau d\tau. \quad (7.105)$$

Для взвешенной функции осциллятора в подынтегральном выражении шаг по времени в схеме численного интегрирования должен выбираться таким образом, чтобы он был меньше, чем $T/10$.

(§) Представление движения на фазовой плоскости $(\xi, d\xi/dt)$

Такое представление для линейного осциллятора является наглядным, а поле изоклин является основой для выбора схемы эффективного численного интегрирования, которая подвергается обобщению при рассмотрении нелинейных колебаний. При пересечении изоклин фазовые кривые имеют одинаковый угол наклона. С помощью простой подстановки уравнение (7.81) преобразуется в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\xi = \xi_1, \quad \dot{\xi} = \xi_2 = \xi_2. \quad (7.106)$$

Перемещение и скорость рассматриваются как независимые переменные

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= -\omega_0^2 \xi_1 - 2\zeta\omega_0 \xi_2 + F(t)/m.\end{aligned}\quad (7.107)$$

Вектор состояния (вектор-столбец) колебательной системы с одной степенью свободы является радиусом-вектором изображающей точки, которая движется в фазовой плоскости вдоль фазовой кривой в соответствии с изменением параметров движения (перемещения и скорости) с течением времени. Вектор-строка имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2). \quad (7.108)$$

С помощью определения (7.108) и в соответствии с правилами векторного умножения уравнения (7.107) становятся линейным векторным преобразованием, где \mathbf{b} – заданный вектор возбуждения:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}, \quad \text{где } \mathbf{b}^T = (0, F(t)/m). \quad (7.109)$$

Матрица системы уравнений имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix}. \quad (7.110)$$

На такой системе уравнений основаны многие компьютерные программы анализа систем.

Использование матричного функционального анализа обобщает простые решения одного дифференциального уравнения первого порядка на решение системы уравнений. Однородная часть, или свободное движение в фазовой плоскости, формально задается матричной экспоненциальной функцией

$$\boldsymbol{\xi}_h = \boldsymbol{\xi}_0 e^{\mathbf{A}t}. \quad (7.111a)$$

В общем случае для всех типов матричных систем существует сходящийся бесконечный ряд, представляющий решение в виде

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}. \quad (7.111b)$$

Однако время можно исключить с помощью отношения однородных компонент уравнений (7.107)

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix}_h = \begin{pmatrix} d\xi_2 \\ d\xi_1 \end{pmatrix}_h = -\omega_0 \left[2\zeta + \omega_0 \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}_h \right]. \quad (7.112a)$$

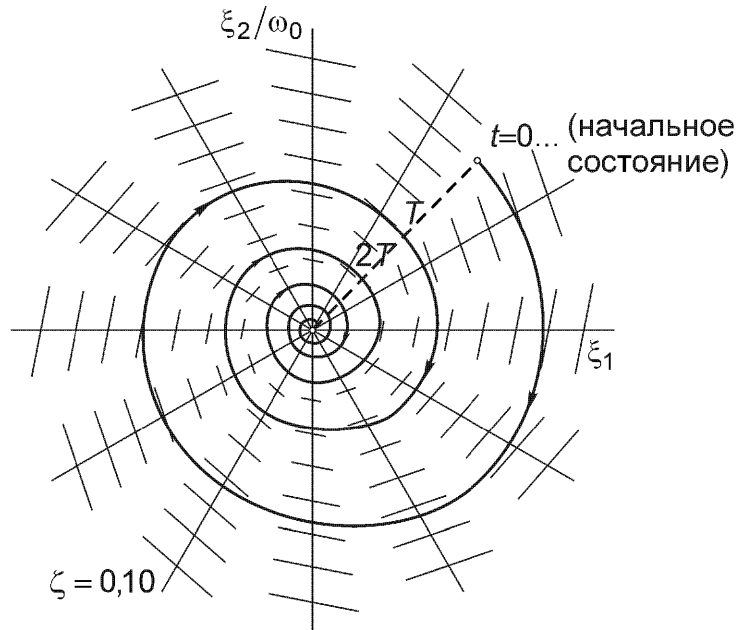


Рис. 7.19. Фазовая кривая для свободных колебаний с демпфированием и поле изоклин в фазовой плоскости.

На рис. 7.19 для свободного движения с демпфированием показано поле изоклин, которые являются полубесконечными радиальными линиями с постоянным углом наклона

$$\left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1} \right)_h = -\omega_0 \left[2\zeta + \omega_0 \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right)_h \right] = \text{const.} \quad (7.112b)$$

При заданных начальных условиях траектория движения изображающей точки представляет собой логарифмическую спираль (см. рис. 7.19), это указывает на затухание колебаний в системе с демпфированием. Заметьте пересечение оси абсцисс под прямым углом.

Установившееся движение гармонически возбуждаемого осциллятора задано соотношением (7.92). Дифференцируя по времени, получаем скорость и, следовательно, предельный цикл, который определяется в фазовой плоскости уравнением эллипса

$$\xi_p = -a_p v \sin(vt - \varphi) \quad \Rightarrow \quad \xi_{p1}^2 + (\xi_{p2}/v)^2 = a_p^2. \quad (7.113)$$

Время, очевидно, исключается, и на рис. 7.20 показано, как асимптотически достигается предельный цикл при начале движения осциллятора из состояния покоя. На оси ординат отложена скорость, деленная на частоту вынуждающей силы. Изображающая точка проходит один цикл фазовой кривой за время $T_e = 2\pi/v$.

Для свободных колебаний без демпфирования образом движения также является окружность, но время прохождения одного цикла заменяется на пери

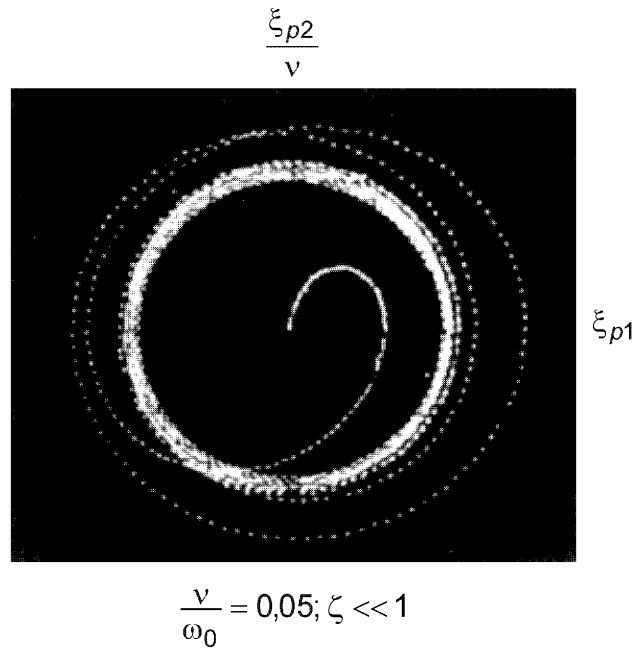
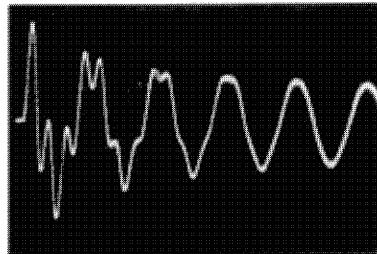
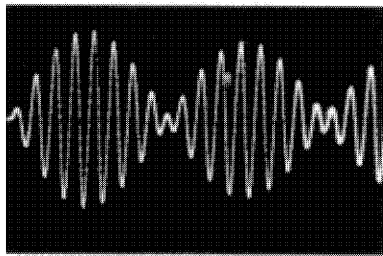


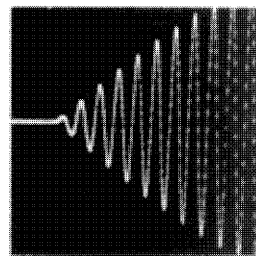
Рис. 7.20. Предельный цикл установившегося движения. Переходный процесс колебаний начинается из состояния покоя.



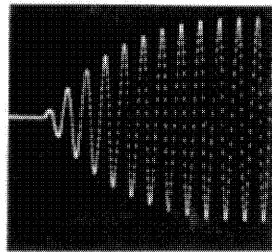
a) $\xi(t): \frac{v}{\omega_0} = 0,0625 \ll 1; \zeta \ll 1$



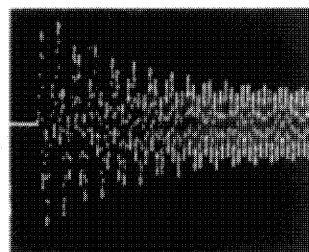
b) $\xi(t): \frac{v}{\omega_0} = 0,8125 \approx 1$ (биения)



c) $\xi(t): \frac{v}{\omega_0} = 1; \zeta \approx 0$



d) $\xi(t): \frac{v}{\omega_0} = 1; \zeta \ll 1$



e) $\xi(t): \frac{v}{\omega_0} = 12,5 \gg 1; \zeta \ll 1$

Рис. 7.21. Переходный колебательный процесс при гармоническом возбуждении с частотой вынуждающей силы v . Моделирование с помощью аналогового компьютера.

од собственных колебаний $T = 2\pi/\omega_0$. Радиус этой окружности определяется из начальных условий. При более общем случае периодического возбуждения предельный цикл уже не является эллипсом, но остается замкнутой кривой в фазовой плоскости.

На рис. 7.21 приведены примеры развития во времени некоторых движений гармонически возбуждаемого осциллятора из состояния покоя на стадии переходного процесса согласно соотношению (7.93). Отметим явление биений в случае (b), когда частота вынуждающей силы близка к резонансной частоте, и случаи (c) и (d), где изображено возбуждение резонансной частотой. Эти фотографии были сделаны с экрана при моделировании на аналоговом компьютере в Венском техническом университете. При использовании графических подпрограмм такие эксперименты можно повторить на персональном компьютере.

(§) Некоторые конструктивные модели линейного осциллятора

Они показаны на рис. 7.22, где сосредоточенные массы предполагаются “известными” априори: эти системы принадлежат к типу систем с “тяжелой сосредоточенной массой и слабой пружиной”. Жесткость модели, изображенной на рис. 7.16, относится к статической структурной и распределенной жесткости.

Модели такого типа более широко обсуждаются в разделе 11.2.

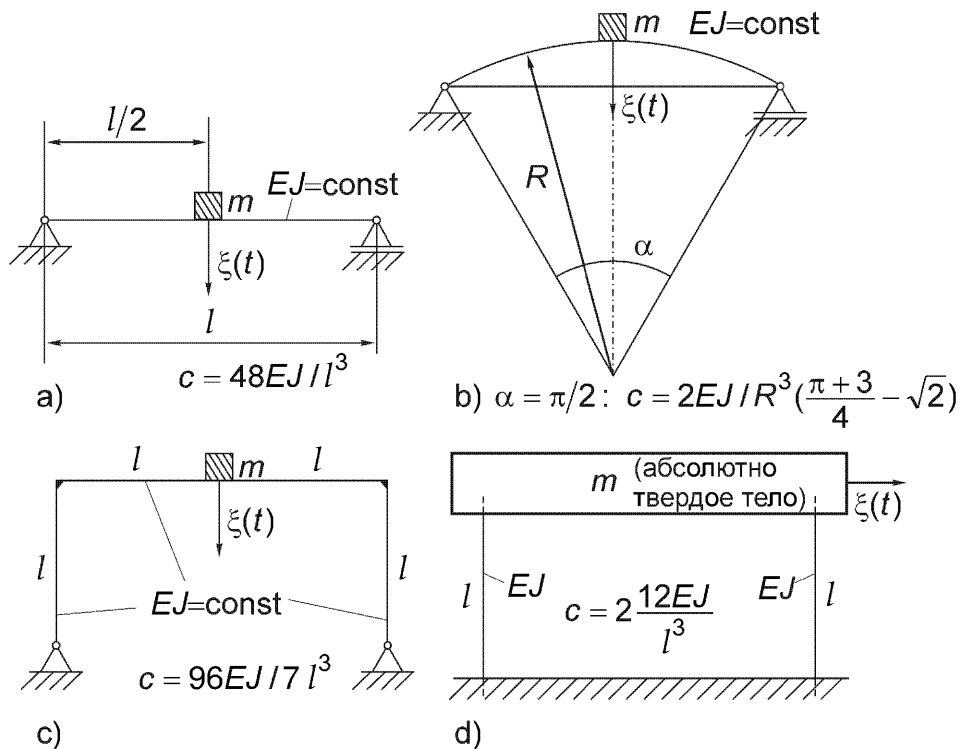


Рис. 7.22. Конструктивные модели линейного осциллятора, имеющего сосредоточенную массу. c – жесткость эквивалентной восстанавливающей пружины.

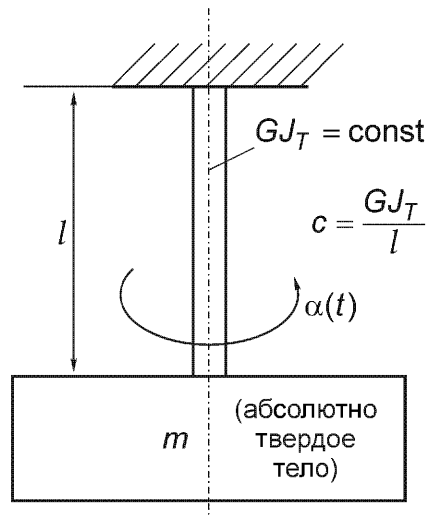


Рис. 7.23. Крутильные колебания. Угловая координата $\alpha(t)$. Жесткость восстанавливающей пружины кручения c .

(§) Линейные крутильные колебания

Пример системы, совершающей такие колебания, показан на рис. 7.23. Свободные незатухающие крутильные колебания абсолютно твердого диска массы m с заданным радиусом инерции i_S являются решением одной компоненты векторного уравнения (7.21) (считается, что инерцией линейно упругого вала можно пренебречь):

$$mi_S^2 \ddot{\alpha} = -c\alpha, \text{ или } \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \text{ где } i_S = \sqrt{I_S/m}, \omega_0 = \sqrt{c/mi_S^2} \quad (7.114)$$

В связанных колебаниях угловые координаты заменяются на $i_S\alpha$.

7.4.8. Нелинейные колебания

Здесь нет возможности изложить общую теорию механических систем с нелинейными восстанавливающими силами и нелинейным (например, гистерезисным) демпфированием, но можно дать ссылки на обширную специальную литературу по этому важному вопросу. Ниже приведены иллюстративные примеры нелинейных эффектов при рассмотрении свободного движения плоского маятника в однородном параллельном поле сил тяжести и при учете фрикционного демпфирования осциллятора. В первом примере рассмотрена зависимость периода собственных колебаний от амплитуды свободного движения. Приближенные решения, в том числе осциллятор Дуффинга, обсуждаются далее в главе 11.

(§) Движение плоского маятника

Абсолютно твердое тело, опирающееся на ось, которая позволяет ему совершать вращательное движение в плоскости, представляет собой плоский физи-

ческий маятник. В состоянии покоя центр тяжести S расположен на одной вертикали с шарниром O , ниже его на заданном расстоянии s , см. рис. 7.24. Любое отклонение от положения равновесия вызывает восстанавливающий момент силы тяжести относительно неподвижной точки O . Применяя уравнение (7.22) и пренебрегая демпфированием, получаем нелинейное уравнение свободного движения для угла отклонения $\varphi(t)$:

$$mi_O^2 \ddot{\varphi} = -mgs \sin \varphi, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad \text{где} \quad i_O^2 = i_S^2 + s^2, \quad \omega_0 = \sqrt{gs/mi_O^2}. \quad (7.115)$$

Тот же период получается при рассмотрении математического маятника, где сосредоточенная масса m считается прикрепленной к концу невесомого абсолютно твердого стержня постоянной длины l . Чтобы сделать одинаковой собственную частоту линейных колебаний, достаточно положить $l = i_O^2/s$.

Предположение о малости амплитуды колебаний $\alpha \ll 1$ позволяет линеаризовать восстанавливающую силу. Линейное приближение Тейлора для тригонометрической функции синуса вблизи положения равновесия $\varphi_0 = 0$ дает линеаризованное уравнение движения [сравните с уравнением (7.114)]:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (7.116)$$

Решение этого приближенного уравнения является гармонической функцией времени $\varphi(t) = a \cos(\omega_0 t - \varepsilon)$, а период малых линейных колебаний имеет постоянную величину $T = 2\pi/\omega_0$. Если рассмотреть начальные условия при $t = 0$ в виде $\varphi = \alpha \ll 1$, $d\varphi/dt = 0$, то свободное движение задается простым соотношением $\varphi(t) = \alpha \cos \omega_0 t$.

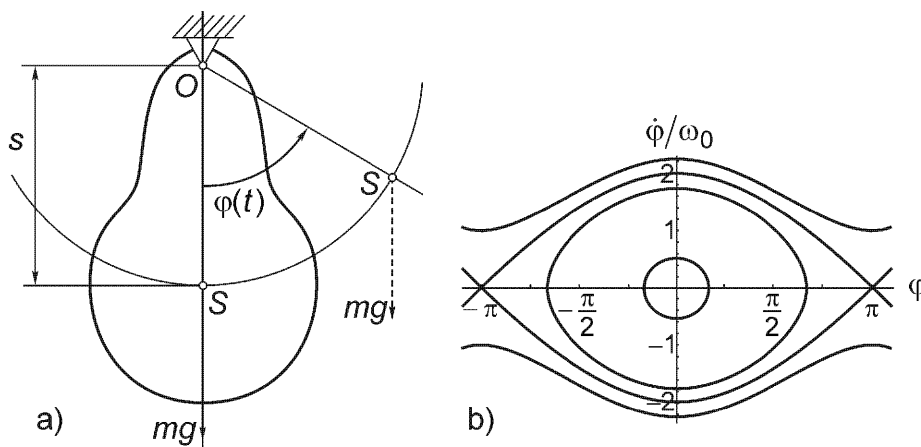


Рис. 7.24. Плоские колебания или вращение физического маятника:

- (a) в однородном и параллельном поле сил тяжести,
- (b) фазовые кривые и сепаратриса (получено непосредственно с помощью вычислительной программы "Математика"). Колебания, решение (7.118) для $\alpha \leq \pi$. Сепаратриса при $\alpha = \pi$. Вращение, $\alpha = \pi$ с дополнительной заданной угловой скоростью.

Умножая уравнение (7.115) на угловую скорость и интегрируя с учетом тождества

$$\dot{\varphi}\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right),$$

получаем первый интеграл этого нелинейного уравнения:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \omega_0^2 \int \sin \varphi d\varphi = C. \quad (7.117)$$

Учитывая приведенные выше начальные условия, получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega_0^2 (\cos \varphi - \cos \alpha). \quad (7.118)$$

Перед повторным интегрированием можно перейти к функциям половинного угла, принимая во внимание соотношение $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \varphi/2$. При введении новой переменной $\xi = (1/k) \sin \varphi/2$, где $k = \sin \alpha/2$, дифференциальное уравнение первого порядка принимает интегрируемую форму

$$\dot{\xi}^2 = \omega_0^2 (1 - \xi^2)[1 - (k\xi)^2], \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (7.119)$$

В результате разделения переменных получаем

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)[1 - (k\xi)^2]}} = \omega_0 dt. \quad (7.120)$$

Интегрирование обеих частей этого уравнения приводит к соотношению

$$\int_0^{\xi} \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)[1 - (k\eta)^2]}} = \omega_0 t + D. \quad (7.121)$$

Для входящего сюда эллиптического интеграла первого рода и его обратной функции имеются таблицы, и они даже содержатся в компьютерных библиотеках. Эта обратная функция является одной из эллиптических функций Якоби и называется синусом амплитуды

$$\xi = \text{sn}(\omega_0 t + D). \quad (7.122)$$

Характеристикой этой функции является ее периодичность с периодом $4K$; $\text{sn } 4K = 0$, и $\xi = 1$ соответствует четверти периода:

$$K(k = \sin \alpha/2) = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)[1 - (k\eta)^2]}}, \quad T = 4K/\omega_0. \quad (7.123)$$

Предельному случаю колебаний с малой амплитудой α , когда $k \rightarrow 0$, соответствует $K \rightarrow \pi/2$ и $T \rightarrow 2\pi/\omega_0$, то есть постоянные параметры линеаризованного решения. Нелинейное свободное движение характеризуется зависимостью периода от амплитуды $T(\alpha)$. При $\alpha < \pi$ в фазовой плоскости существует предельный цикл, означающий колебательное движение. Решение при $\alpha = \pi$ и при наличии начальной угловой скорости соответствует вращению; при этом фазовая кривая уже не является замкнутой, а распространяется до бесконечности. Сепаратриса (фазовая кривая при $\alpha = \pi$) также определяется уравнением (7.118) и является в фазовой плоскости границей, разделяющей два вида движения.

Реакции опоры находятся из уравнения количества движения (7.7). Ускорение центра масс получается путем вычисления второй производной по времени от его координат $x_S = s \sin \varphi$ и $z_S = -s \cos \varphi$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_S &= s\ddot{\varphi} \cos \varphi - s\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = -s\omega_0^2 (3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha) \sin \varphi, \\ \ddot{z}_S &= s\ddot{\varphi} \sin \varphi + s\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -s\omega_0^2 + s\omega_0^2 (3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha) \cos \varphi.\end{aligned}\quad (7.124)$$

Горизонтальная и вертикальная реакции, действующие на тело в точке O , получаются в виде функций угла поворота $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned}H(\varphi) &= m\ddot{x}_S = m(s\ddot{\varphi} \cos \varphi - s\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = -ms\omega_0^2 (3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha) \sin \varphi, \\ V(\varphi) &= m(g + \ddot{z}_S) = m(g - s\omega_0^2) + ms\omega_0^2 (3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha) \cos \varphi.\end{aligned}\quad (7.125)$$

Эти силы являются периодическими, но не гармоническими, и члены высокого порядка во временном ряде Фурье не являются малыми. Их развитие в динамике показано графически на рис. 7.25. Вертикальная компонента является четной функцией угла, а горизонтальная компонента является нечетной функцией. Эти реакции являются источником вибраций высоких колокольных башен.

(§) Система с одной степенью свободы при наличии сухого трения

Эта модель колебательной системы с демпфирующей кулоновской силой состоит из тела, обладающего массой, присоединенного к параллельному соединению гуконской пружины с телом Сен-Венана; для случая последовательного соединения см. рис. 4.11. Модель, изображенная на рис. 7.26, качественно иллюстрирует оба эффекта: и сухое трение в механических устройствах, и свободное движение массы, присоединенной к жестко-пластической структуре с линейным упрочнением.

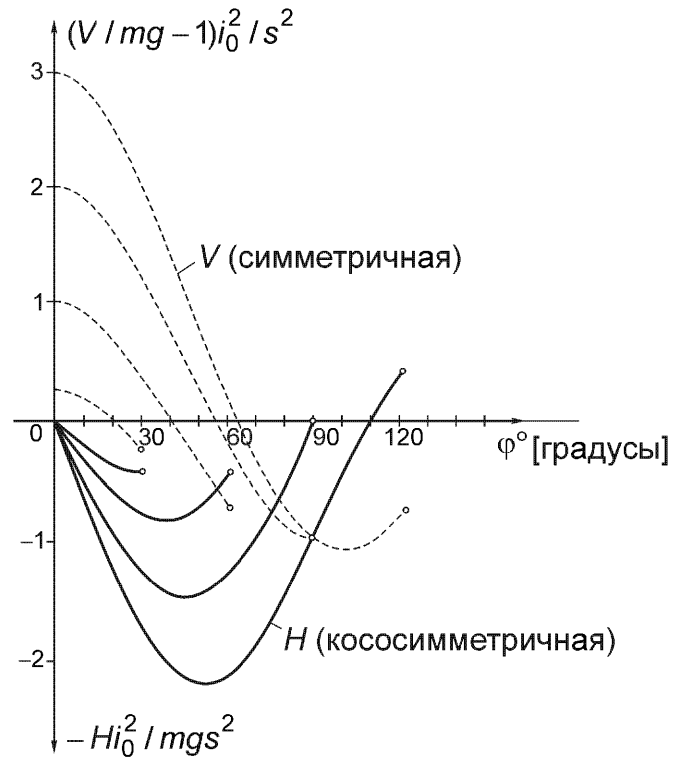


Рис. 7.25. Вертикальная реакция V и горизонтальная реакция H опоры при свободных колебаниях маятника, $-\alpha \leq \varphi(t) \leq \alpha$.

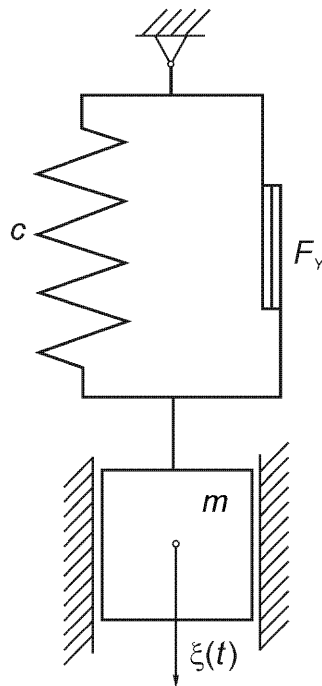


Рис. 7.26. Модель осциллятора с сухим трением. Свободные колебания.

При движении опоры в осевом направлении по заданному закону получается движение массы типа «прилипание-скольжение» и появляется возможность возникновения самовозбуждаемых колебаний. Такие задачи возникают, например, в регулирующих механизмах. Следовательно, изучается только свободное движение при отсутствии любой постоянной вынуждающей силы. Уравнение такого поступательного движения просто определяется законом Ньютона:

$$m\ddot{\xi} = -c\xi + T_R, \quad \text{где } T_R = -F_y \operatorname{sgn} \dot{\xi}. \quad (7.126a)$$

Из-за функции знака sgn , которая изменяет знак при реверсировании движения, это дифференциальное уравнение нелинейно, но оно является кусочно-линейным

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 (\xi + s \operatorname{sgn} \dot{\xi}) = 0, \quad \text{где } \omega_0^2 = c/m, \quad F_y/m = s\omega_0^2. \quad (7.126b)$$

Длина s характеризует силу трения как предел упругой силы пружины $cs = F_y$, которая может быть уравновешена адгезией (предполагается, что коэффициенты сухого трения и предельной адгезии равны между собой). Преобразование

$$x = \xi + s \operatorname{sgn} \dot{\xi} \quad (7.127a)$$

превращает уравнение в линейное

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.127b)$$

Поэтому здесь используется решение (7.86) для линейного осциллятора без демпфирования ($\zeta = 0$):

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t - \varepsilon). \quad (7.128)$$

Свободное движение приводит к последовательной суперпозиции гармонических полуциклов, которые смещаются на $\pm s$, но при этом частота остается равной частоте линейных колебаний (см. рис. 7.27):

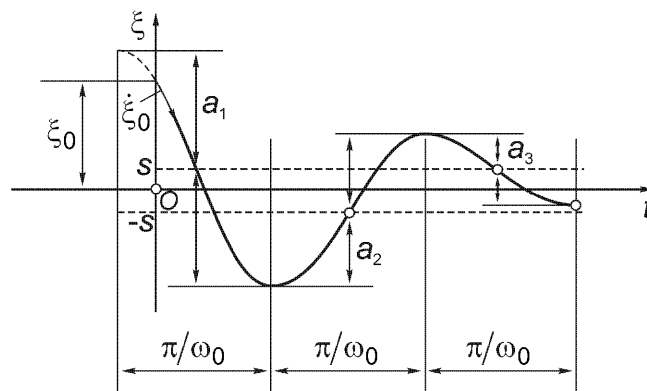


Рис. 7.27. Свободное движение при демпфировании сухим трением.

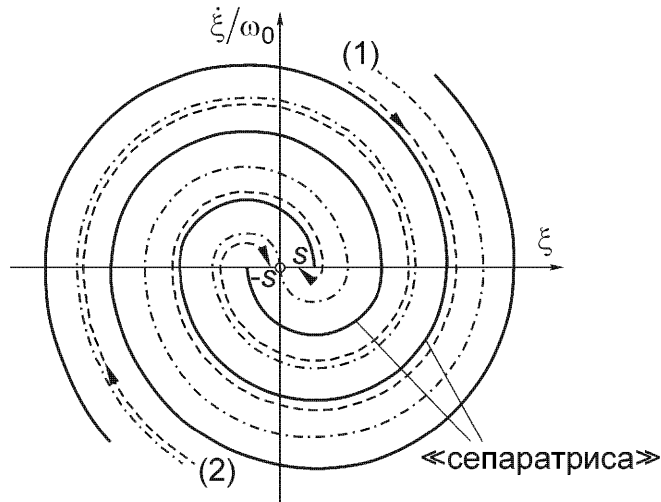


Рис. 7.28. Фазовые кривые и сепаратриса при свободном движении с сухим трением.

$$\xi(t) = -s \operatorname{sgn} \dot{\xi} + a \cos(\omega_0 t - \varepsilon). \quad (7.129)$$

На рис. 7.28 в фазовой плоскости показаны пунктирными линиями свободные движения при различных начальных условиях и сплошной линией – сепаратриса. Отметим пересечение оси абсцисс под прямым углом и положения массы в состоянии покоя.

7.4.9. Линейно упругая цепь осцилляторов

Простые системы с конечным числом степеней свободы можно представить в виде неразветвленной цепи последовательно соединенных линейных осцилляторов. На рис. 7.29 показано устройство с двумя степенями свободы при условии возбуждения опорой, то есть при задании закона движения $x_0 = x_e(t)$. Если рассмотреть абсолютные координаты, показанные на этом рисунке, и каждую систему, состоящую из массы и пружины, в виде, освобожденном от связей, то, замечая, что на рис. 7.29 движутся оба конца пружин, из закона Ньютона для поступательного движения первой массы следует:

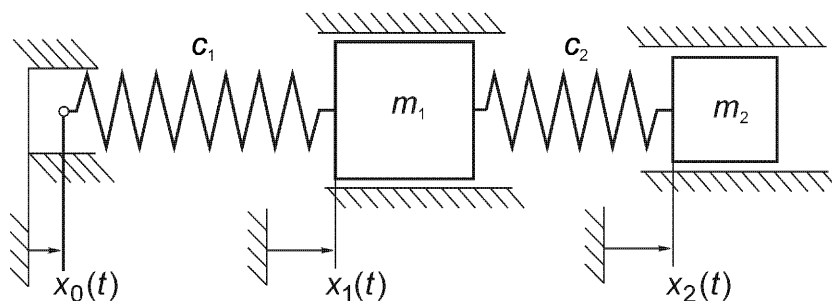


Рис. 7.29. Кинематически возбуждаемый линейный осциллятор с двумя степенями свободы.

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 (x_1 - x_0) + c_2 (x_2 - x_1). \quad (7.130)$$

Аналогичным образом получается уравнение для k -ой промежуточной массы:

$$m_k \ddot{x}_k = -c_k (x_k - x_{k-1}) + c_{k+1} (x_{k+1} - x_k). \quad (7.131)$$

Если цепь с массами m_k , $k = 1, 2, \dots, n$, изображенная на рис. 7.29 для случая $n = 2$, имеет один свободный конец, то восстанавливающая сила обеспечивается только одной соединительной пружиной:

$$m_n \ddot{x}_n = -c_n (x_n - x_{n-1}). \quad (7.132)$$

Линейная система дифференциальных уравнений второго порядка, неоднородная ввиду опорного возбуждения и с постоянными коэффициентами, связывается с помощью подчеркнутых упругих сил. Сцепление массы m_k является очень локальным, а именно, только с прилегающими массами m_{k-1} и m_{k+1} . Цепи, соответствующие более сложным системам, могут иметь дополнительные ветви с далеко идущими соединениями. Замена координат на относительные, заданные деформациями пружин, дает сцепление инерционного типа.

Возбуждение полагается гармонической функцией времени с заданной частотой ω

$$x_e(t) = A_0 e^{i\omega t}. \quad (7.133)$$

Установившиеся отклики масс также являются гармоническими функциями времени, и, следовательно, соответствующие частные решения имеют вид

$$x_k(t) = A_k e^{i\omega t}. \quad (7.134)$$

Подстановка понижает порядок производных по времени каждого из уравнений (7.131), и получается линейная система неоднородных уравнений; $k = 1, 2, \dots, n$. Так как рассматривается отсутствие демпфирования, справедливо соотношение

$$-m_k \omega^2 A_k = c_k A_{k-1} - (c_k + c_{k+1}) A_k + c_{k+1} A_{k+1}. \quad (7.135)$$

(§) Метод остатков Хольцера и Толле

Собственные частоты и связанные с ними формы свободных колебаний можно найти путем пошагового изменения частоты вынужденных колебаний ω и выбора амплитуды $A_n = A$ тела массы m_n на свободном конце цепи. Точки пересечения функцией $A_0(\omega)$ оси абсцисс представляют собой собственные частоты. Промежуточные амплитуды также регистрируются и окончательно опреде-

ляют формы свободных колебаний. В таком контексте эти уравнения решаются последовательно, начиная со свободного конца,

$$A_{n-1} = \left(1 - m_n \omega^2 / c_n\right) A, \quad (7.136)$$

и сила натяжения n -ой пружины равна $c_n (A - A_{n-1}) = m_n \omega^2 A$. При известном A_{n-1} из $(n-1)$ -го уравнения следует

$$A_{n-2} = A_{n-1} - m_{n-1} \omega^2 A_{n-1} / c_{n-1} + c_n A_{n-1} / c_{n-1} - A c_n / c_{n-1}. \quad (7.137)$$

Таким образом, сила в $(n-1)$ -й пружине равна $c_{n-1} (A_{n-1} - A_{n-2}) = (A m_n + m_{n-1} A_{n-1}) \omega^2$ и т.д. Следовательно, натяжение первой пружины, к которой приложено возбуждение, принимает вид

$$c_1 (A_1 - A_0) = \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k A_k \Rightarrow A_0(\omega) = A_1 - \frac{\omega^2}{c_1} \sum_{k=1}^n m_k A_k. \quad (7.138)$$

Связь между соотношениями (7.138) и (7.136) можно установить с помощью матрицы переноса, которая является произведением матрицы поля (без сил инерции) и матрицы точек (соединяющей состояние, перемещение и силу, до и после сосредоточенной массы). В сочетании с техникой нахождения корней уравнения это дает легко программируемый алгоритм. Для того чтобы оценить порядок формы колебаний и не пропустить собственную частоту, нужно регистрировать знаки амплитуд. Для двух масс, $n=2$, отсюда явно следует:

$$A_1 = \left(1 - \frac{m_2 \omega^2}{c_2}\right) A, \quad (7.139)$$

$$A_0(\omega) = A_1 - \frac{\omega^2}{c_1} (m_2 A + m_1 A_1) = \left[1 - \omega^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{c_1} + \frac{m_2}{c_2}\right) + \frac{m_1 m_2}{c_1 c_2} \omega^4\right] A.$$

$A_0(\omega) = 0$ – это уравнение частот второго порядка относительно переменной ω^2 . В такой явной форме оно совпадает с характеристическим уравнением задачи о собственных значениях, которое получается, если положить равным нулю определитель матрицы коэффициентов однородной системы уравнений относительно A_1 и A_2 (при $A_0 = 0$). Эти корни представляют собой положительные квадраты собственных круговых частот

$$\omega_{2,1}^2 = \frac{1}{2} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + (2k_1 k_2)^2}, \quad (7.140)$$

$$\Omega_1^2 = (c_1 + c_2) / m_1, \quad \Omega_2^2 = c_2 / m_2, \quad k_1^2 = c_2 / m_1, \quad k_2^2 = c_2 / m_2.$$

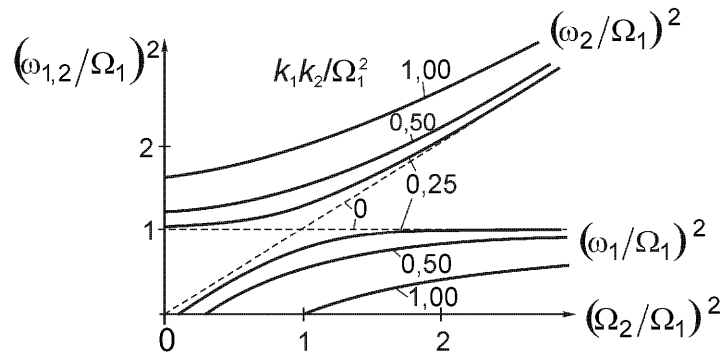


Рис. 7.30. Собственные частоты осциллятора с двумя степенями свободы без демпфирования.

Основная частота ω_1 и первая супергармоническая частота ω_2 удовлетворяют очевидным неравенствам (см. рис. 7.30):

$$\omega_1 \leq \min(\Omega_1, \Omega_2), \quad \omega_2 \geq \max(\Omega_1, \Omega_2).$$

(§) Формула Данкерлея

Эта формула дает для собственных частот приближение снизу. Для колебаний с двумя степенями свободы две связанные частоты определяются как собственные частоты, если положить $m_1 = 0$:

$$\omega_{m_2}^2 = [(1/c_1 + 1/c_2)m_2]^{-1}, \quad m_1 = 0,$$

а затем полагая $m_2 = 0$:

$$\omega_{m_1}^2 = c_1/m_1, \quad m_2 = 0.$$

Эквивалентная частота определяется формулой:

$$\frac{1}{\bar{\omega}^2} = \frac{1}{\omega_{m_1}^2} + \frac{1}{\omega_{m_2}^2}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)m_2 + c_2 m_1}.$$

Суммирование обратных величин квадратов собственных частот также дает

$$\frac{1}{\bar{\omega}^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}.$$

Следовательно, к этим обратным величинам применимо неравенство

$$\frac{1}{\omega_1^2} < \frac{1}{\bar{\omega}^2},$$

откуда следует оценка для основной частоты

$$\bar{\omega}^2 < \omega_1^2.$$

Этот результат является иллюстрацией формулы Данкерлея: если при рассмотрении колебательной системы с n массами убрать все массы, кроме одной, то эквивалентная частота принимает вид

$$\bar{\omega} = \left(\sum_{j=1}^n \omega_{m_j}^{-2} \right)^{-1/2}.$$

Оказывается, что это выражение является нижней границей основной частоты ω_1 для действительной системы. Точность этой нижней границы зависит от того, насколько быстро уменьшаются члены суммы при увеличении их порядкового номера. Для оценки верхней границы см. процедуру Ритца (раздел 11.1).

(§) Формы собственных колебаний

При установившихся колебаниях в диапазоне частот $\omega < \omega_1$ все амплитуды положительны, например, $A_0, A_1, A_2 = 1$. В диапазоне $\omega_1 < \omega < \omega_2$ изменяется один знак и так далее. Свободные колебания для $n = 2$ задаются действительной частью комплексного решения, $\omega_1 \neq \omega_2$:

$$(x_1)_h = A_{11} e^{i\omega_1 t} + A_{12} e^{i\omega_2 t}, \quad (x_2)_h = A_{21} e^{i\omega_1 t} + A_{22} e^{i\omega_2 t}. \quad (7.141)$$

Более подробно этот вопрос рассмотрен в разделе 10.1, а в упражнении А 11.1 обсуждается альтернативный метод Стодолы и Мизеса, см. также:

- Clough R.W. and Penzien J. Dynamics of Structures. New York, McGraw-Hill, 1975. Имеется русский перевод: Клаф Р.В., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М., Стройиздат, 1979.

(§) Функции амплитудно-частотного отклика двухмассовой системы

Эти функции, показанные на рис. 7.31, имеют вид

$$(A_1)_p = A_0 (c_2 - m_2 v^2) \frac{c_1}{\Delta(v)}, \quad (A_2)_p = A_0 \frac{c_1 c_2}{\Delta(v)}, \quad (7.142)$$

$$\Delta(v) = m_1 m_2 v^4 - [(c_1 + c_2) m_2 + c_2 m_1] v^2 + c_1 c_2 \neq 0,$$

где $v = \omega$ – частота вынуждающей силы, причем $\omega \neq \omega_1$, $\omega \neq \omega_2$, а $x_e(t) = A_0 \cos vt$ – действительное возбуждение.

Функция $(A_1)_p$ пересекает ось абсцисс при частоте вынуждающей силы $v = \sqrt{c_2/m_2}$, это соответствует двухмассовой системе, которая функционирует как динамический гаситель колебаний. Основная масса m_1 остается в покое благодаря движению амортизирующей массы m_2 , настроенной на эту единственную частоту. Демпфирование несколько нарушает идеальную картину настроенного гасителя колебаний. Насчет двух фиксированных точек основных

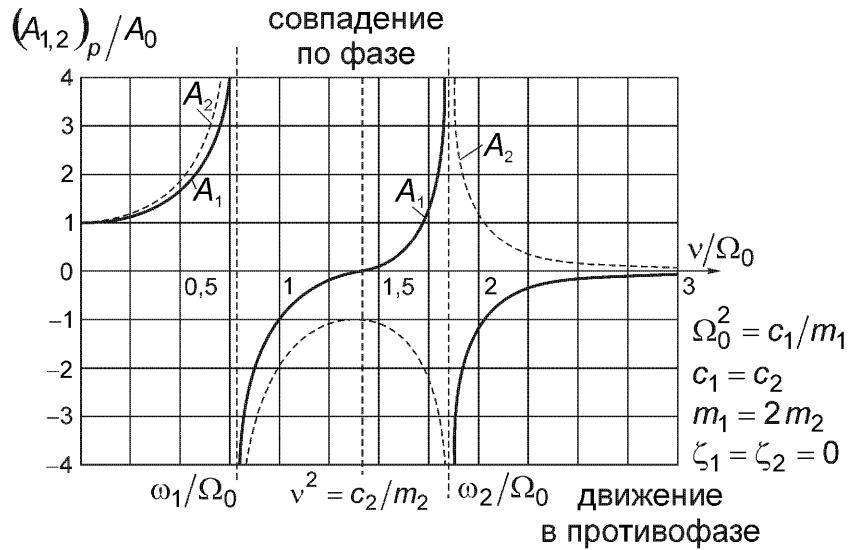


Рис. 7.31. Резонансные кривые недемпфированного осциллятора с двумя степенями свободы. Отрицательная амплитуда соответствует сдвигу по фазе на 180° .

резонансных кривых с изменяемым демпфированием и о критерии оптимальности настройки при наличии демпфирования см.:

- Den Hartog J.P. Mechanical Vibrations. New York, McGraw-Hill, 1956. Имеется русский перевод: Ден-Гартог Дж. Механические колебания. М., Физматгиз, 1960.

Динамический гаситель колебаний «без потерь» широко используется в машиностроении и строительстве (например, он используется для снижения вызывающих неудобства основных колебаний высотных зданий, вызванных ветром или землетрясением).

7.5. Изгибные колебания линейно упругих балок

Балку можно рассматривать как непрерывную колебательную цепь, состоящую из элементов массы $\rho A dx$. На рис. 7.32 такой бесконечно малый элемент показан освобожденным от связей, где y – главная ось, а $q(x, t)$ – внешняя нагрузка. Предполагается отсутствие продольной силы и кручения, тогда из уравнения для количества движения в направлении оси z следует:

$$\rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_z}{\partial x} dx + q dx + \dots \quad (7.143)$$

Уравнение для момента количества движения относительно оси y дает:

$$\rho J_y dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial M_y}{\partial x} dx - Q_z dx + \dots \quad (7.144)$$

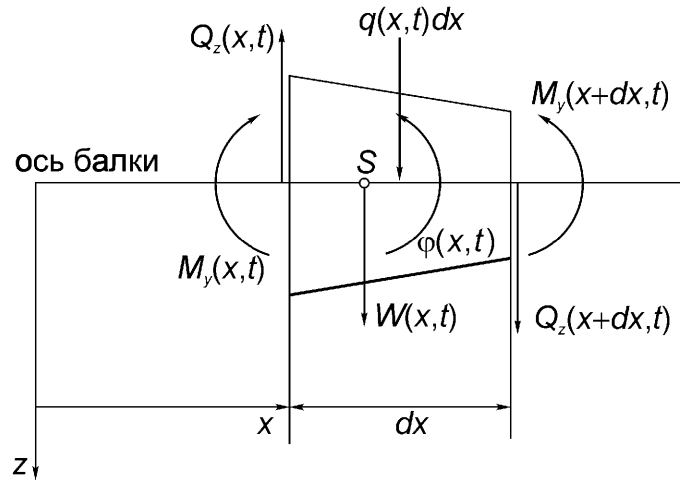


Рис. 7.32. Элементарный участок балки при главных изгибных колебаниях. Сдвиговая деформация и вращательная инерция поперечного сечения включены в соответствии с теорией Тимошенко.

Сокращая на общий множитель dx и переходя к пределу $dx \rightarrow 0$, получаем динамический эквивалент уравнения (2.147):

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} = -q + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_y}{\partial x} = Q_z + \rho J_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (7.145)$$

Предполагается, что поперечные сечения, поворачивающиеся на угол φ , остаются плоскими. Уравнения (6.65) и (6.66) включают деформацию сдвига

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{M_y}{EJ_y}, \quad -\varphi = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\kappa Q_z}{GA}. \quad (7.146)$$

Следовательно, получается четыре уравнения для четырех неизвестных: $M_y(x,t)$, $Q_z(x,t)$, $\varphi(x,t)$ и для прогиба $w(x,t)$. Исключение прежних переменных дает дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных относительно прогиба w , которое названо в честь С.П.Тимошенко. Для дополнительной информации смотрите:

- Abramson H.N. et al. Stress Wave Propagation in Rods and Beams, in Advances in Applied Mechanics, Vol. 5. New York, 1958.

В случае тонких балок с достаточно гладко изменяющимся поперечным сечением, медленно изменяющейся по длине пролета поперечной нагрузкой и при малых прогибах применяется упрощенная теория Эйлера-Бернулли. В этом случае деформацией сдвига пренебрегают, и $\varphi = -\partial w / \partial x$. В результате получается сильно упрощенное дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,t). \quad (7.147)$$

Решением этого уравнения при заданных начальных и граничных условиях являются зависящие от времени малые прогибы. Результирующие изгибающий момент и поперечная сила равны:

$$M_y = -EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad Q_z = \frac{\partial M_y}{\partial x}. \quad (7.148)$$

На практике эти результирующие внутренних силовых факторов определяются за счет заданной нагрузки из статических соображений, с добавлением сил инерции для фиксированного времени t :

$$q^* = q(x, t) - \rho A \ddot{w}(x, t).$$

В установившемся состоянии при возбуждении по гармоническому закону решение становится не зависимым от времени, а обобщенная нагрузка в этом случае является зависящей от частоты.

(§) Собственные и вынужденные колебания тонкой шарнирно опертой однопролетной балки

Далее такие колебания рассматриваются в рамках приближения Бернулли-Эйлера. При постоянном поперечном сечении общая масса равна $m = \rho A l$, а изгибная жесткость $B = EJ_y = \text{const}$. Однородное дифференциальное уравнение в частных производных (7.147) при $q = 0$ решается с помощью функции с разделяемыми переменными (пробной функции Бернулли)

$$w(x, t) = Y(t)f(x). \quad (7.149)$$

Подстановка и деление на w дает два обыкновенных дифференциальных уравнения, которые должны быть равны общей константе ω^2 :

$$k^2 \frac{f^{IV}}{f} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} = \omega^2, \quad \text{где } k^2 = B/\rho A, \quad f^{IV} = \frac{d^4 f}{dx^4}. \quad (7.150)$$

Таким образом, получается уравнение линейного осциллятора относительно времени

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y = 0, \quad (7.151a)$$

решение которого имеет вид:

$$Y(t) = a \cos(\omega t - \varepsilon). \quad (7.151b)$$

Уравнение четвертого порядка относительно координат $f^{IV} - \kappa^4 f = 0$ с постоянным коэффициентом $\kappa^2 = \omega/k$ имеет действительное общее решение в виде комбинации тригонометрических и гиперболических функций

$$f(x) = C_1(\sin \kappa x + \sinh \kappa x) + C_2(\cos \kappa x + \cosh \kappa x) + C_3(\sin \kappa x - \sinh \kappa x) + C_4(\cos \kappa x - \cosh \kappa x). \quad (7.152)$$

Спектр собственных частот зависит от граничных условий. Шарнирно опертая балка с длиной пролета l требует выполнения следующих условий при $x = 0$ и $x = l$: $w = w'' = 0 \Rightarrow f = f'' = 0$. Следовательно, в этом случае коэффициенты четных функций должны быть равны нулю, и задача сводится к решению двух линейных уравнений

$$C_1 \sin \kappa l + C_3 \sinh \kappa l = 0, \quad -C_1 \sin \kappa l + C_3 \sinh \kappa l = 0.$$

Нетривиальное решение существует при $C_3 = 0$, и тогда, принимая во внимание трансцендентное уравнение частот

$$\sin \kappa l = 0, \quad \text{где} \quad \kappa^2 = \omega/k, \quad (7.153a)$$

получаем

$$\kappa = \pi/l, 2\pi/l, \dots, n\pi/l, \dots \quad (7.153b)$$

Таким образом, квадраты собственных частот получаются при подстановке собственных значений: $\omega_n^2 = (n\pi)^4 B/ml^3$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Соответствующими собственными формами колебаний являются собственные функции $f_n(x) = \sin(n\pi x/l)$. Общее решение для динамического прогиба можно выразить в виде бесконечной модальной суммы, так как можно применить принцип суперпозиции, а собственные функции являются линейно независимыми и образуют систему ортогональных функций:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/l) \cos(\omega_n t - \varepsilon_n), \quad (7.154)$$

$$\int_0^l f_n(x) f_m(x) dx = N_n \delta_{mn}.$$

По аналогии с разложением Фурье любая заданная нагрузка, представленная разделенными функциями $q(x, t) = h(t)g(x)$, может быть сначала спроецирована на форму свободных колебаний, а затем представлена в виде бесконечного ряда,

$$A_n = \frac{1}{N_n} \int_0^l g(x) f_n(x) dx \Rightarrow g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(x). \quad (7.155)$$

В частности, установившиеся колебания, которые получаются при гармоническом возбуждении $h(t) = \cos vt$, могут быть представлены в виде модального ряда

$$w_p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n f_n(x) \cos vt. \quad (7.156)$$

Коэффициенты B_n определяются подстановкой в уравнение (7.147). Для шарнирно опертой однопролетной балки из сравнения коэффициентов (пренебрегая демпфированием) следует:

$$\rho AB_n = \frac{A_n}{\omega_n^2 - v^2}, \quad v \neq \omega_n = k(n\pi/l)^2. \quad (7.157)$$

Например, динамическую реакцию на шарнирной опоре B можно определить с помощью уравнения для момента количества движения относительно опоры A

$$lB - \int_0^l xq dx = - \int_0^l x\dot{w}_p \rho A dx.$$

В установившемся состоянии эта сила с помощью формулы (7.156) принимает вид:

$$B(t) = \frac{1}{l} \int_0^l x(q - \rho A \ddot{w}_p) dx. \quad (7.158)$$

Полагая

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos vt, \quad (7.159)$$

получаем путем сравнения коэффициентов (для случая постоянной массы на единицу длины $\rho A = \text{const}$):

$$b_n = \frac{1}{l} (A_n + \rho AB_n v^2) \int_0^l x f_n(x) dx = \frac{l A_n}{n\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{1 - (v/\omega_n)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.160)$$

Внутренние динамические реакции определяются аналогично с помощью подобных бесконечных рядов.

Разделение переменных, показанное в соотношении (7.149), в сочетании с правильным выбором допустимых функций $f(x)$ является основной частью аппроксимации Ритца; см. раздел 11.1.

7.6. Волны в линейно упругом твердом теле

Добавляя к статическим уравнениям Навье (6.6) силу инерции на единицу объема в соответствии с уравнением (7.1), получаем локальные уравнения движения однородного и изотропного гукковского тела в векторной форме:

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + G\nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{k} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (7.161)$$

где \mathbf{k} – массовая сила на единицу массы, G – модуль сдвига, $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$ – вторая константа Ламе; см. также формулы (4.15). Их динамические (адиабатические) значения могут отличаться от статических (изотермических) величин. Декомпозиция Гельмгольца вектора перемещения

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \equiv \text{grad}\Phi + \text{rot}\boldsymbol{\Psi} \quad (7.162)$$

позволяет различать в теле две системы волн с различными скоростями распространения. Если массовая сила отсутствует или имеет аналогичное представление с помощью силовых потенциалов $\mathbf{k} = \text{grad}b + \text{rot}\mathbf{B}$, то различаются быстрые продольные P-волны (*unda prima*) и более медленные поперечные S-волны (*unda secunda*). Их скорости определяются, например, собственными значениями плоских волн. Подстановка декомпозиции Гельмгольца в уравнение (7.161) дает скалярное волновое уравнение для безвихревого потенциала Φ и векторное волновое уравнение для векторного потенциала $\boldsymbol{\Psi}$:

$$c_P^2 \nabla^2 \Phi + b = \ddot{\Phi}, \quad c_S^2 \nabla^2 \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{B} = \ddot{\boldsymbol{\Psi}}, \quad (\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi}) \equiv \text{div}\boldsymbol{\Psi} = 0. \quad (7.163)$$

Постоянные коэффициенты

$$c_P = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho} \quad \text{и} \quad c_S = \sqrt{G/\rho} \quad (7.164)$$

имеют размерность скорости, причем скорость распространения продольной волны c_P определяется как скорость звука. Потенциалы Φ и $\boldsymbol{\Psi}$ относятся к системам волн, распространяющихся независимо друг от друга в твердом теле, которое полагается бесконечным. Никакие потери не рассматриваются, и поэтому смещения, в соответствии с термодинамической точкой зрения, рассматриваются как изоэнтропические изменения состояния. Следовательно, как уже упоминалось выше, упругие константы λ или E и G должны определяться в адиабатических условиях (в отличие от статических значений, которые определяются при изотермических условиях). Так как $\text{rot}\text{grad}\Phi \equiv \mathbf{0}$, то ассоциированное смещение является безвихревым и относится просто к волне сжатия наподобие звуковой волны в жидкости (распространяющей малое возмущение), где $G = 0$, а $\lambda = K$ – модуль линейной сжимаемости [см. уравнение (2.87)], и поэтому скорость звука равна $c = \sqrt{K/\rho}$. Распространяющаяся дилатация равна $e = \text{div}\mathbf{u} = \nabla^2 \Phi$, а вторая волновая система соответствует изохорической деформации: $\text{div}\text{rot}\boldsymbol{\Psi} \equiv 0$. Соединение этих систем волн случается при любом отражении на поверхности раздела между двумя упругими телами или путем отражения на свободной поверхности.

Плоские волны описываются решением Д'Аламбера f уравнений движения при отсутствии массовых сил ($\mathbf{k} = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} f \left(t - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n)}{c} \right). \quad (7.165)$$

Здесь $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n) = \text{const}$ – уравнение фронта плоской волны с вектором нормали \mathbf{e}_n . Подстановка в уравнение (7.161) дает однородные уравнения для компонент вектора амплитуды

$$(\lambda + G)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n + (G - \rho c^2)\mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (7.166)$$

Нетривиальные решения $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ существуют только для выбранных собственных значений c^2 .

(§) Продольная волна

Эта волна с перемещением в направлении распространения ($\mathbf{A} = A\mathbf{e}_n$, $A \neq 0$) имеет следующее характеристическое уравнение

$$(\lambda + 2G - \rho c^2)A = 0, \quad \text{где } c^2 = c_P^2 = (\lambda + 2G)/\rho, \quad A \neq 0. \quad (7.167)$$

Скалярный потенциал и его градиент, вектор перемещения плоской Р-волны имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 g \left(t - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n)}{c_P} \right), & \mathbf{u} &= \nabla \Phi = -\Phi_0 \frac{\mathbf{e}_n}{c_P} \dot{g} \left(t - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n)}{c_P} \right), \\ \Psi &= 0, & f &= -\dot{g}. \end{aligned} \quad (7.168)$$

(§) Поперечная волна

Перемещение в этой волне ортогонально направлению распространения: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n) = 0$. Уравнение (7.166) приводится к виду

$$(G - \rho c^2)\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \text{где } c^2 = c_S^2 = G/\rho < c_P^2, \quad |\mathbf{A}| \neq 0. \quad (7.169)$$

Векторный потенциал принимается в форме

$$\Psi = \Psi_0 g \left(t - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n)}{c_S} \right), \quad (\Psi_0 \cdot \mathbf{e}_n) = 0. \quad (7.170)$$

С помощью единичного вектора поляризации \mathbf{e}_p вектор амплитуды представляется в виде векторного произведения $\Psi_0 = \Psi_0 (\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_n)$, и вектор перемещения, то есть ротор этого потенциала, принимает вид

$$\mathbf{u} = \nabla \times \Psi = -\Psi_0 \frac{\mathbf{e}_p}{c_S} \dot{g} \left(t - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n)}{c_S} \right), \quad (\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_n) = 0. \quad (7.171)$$

По отношению к характеристическому направлению \mathbf{e}_3 поперечная волна называется горизонтально поляризованной, если $\mathbf{e}_p = \mathbf{e}_3$. Вектор направления движения \mathbf{e}_n такой горизонтально поляризованной SH-волны (Horizontal Secondary wave) лежит в плоскости, ортогональной к \mathbf{e}_3 . Если же $(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_3) = 0$, то есть вектор \mathbf{e}_p и ортогональный ему вектор \mathbf{e}_n лежат в одной плоскости, то в теле со скоростью c_S распространяется вертикально поляризованная поперечная SV-волна (Vertical Secondary wave).

В упражнении А 7.12 обсуждается неоднородная плоская волна, поверхностная волна Рэлея. Отметим ее декомпозицию на пространственные волны с общим волновым числом. Такое представление ясно демонстрирует взаимодействие плоских Р- и SV-волн с течением времени. Подробности смотрите в:

- Scheidl W. and Ziegler F. In Proceedings IUTAM-Symposium on Modern Problems in Elastic Wave Propagation (eds. J. Achenbach and J. Miklowitz), New York, Wiley, 1978, pp. 145-149.

7.7. Упражнения А 7.1 – А 7.12 и решения

А 7.1: Поезд массы m движется по прямолинейному пути на север вдоль меридиана Земли с постоянной скоростью v . Вычислить боковую направляющую силу при несвободном движении с учетом угловой скорости ω собственного вращения Земли.

Решение: В горизонтальной плоскости действует только ускорение Кориолиса; в соответствии с соотношением (8.62) $\mathbf{a}_C = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}) = a_\varphi \mathbf{e}_\varphi = -2\omega v \sin \alpha \mathbf{e}_\varphi$, где α – широта в северном полушарии, и вектор \mathbf{e}_φ направлен на восток (см. рис. 7.15). Следовательно, уравнение (7.7), записанное в боковом направлении, дает $ma_\varphi \mathbf{e}_\varphi = R_h \mathbf{e}_\varphi$, и направляющая сила равна $R_h = -(2\omega v/g)mg \sin \alpha$, она представляет собой реакцию восточного рельса при $\alpha > 0$, $v > 0$. Эта сила перпендикулярна \mathbf{v}_{rel} и не изменяет своей величины при изменении направления движения на противоположное.

А 7.2: Колесо роликового контакта радиуса r вступает на закругленный направляющий путь радиуса $R+r$ с начальной скоростью v_0 . Определить минимальное значение v_0 , необходимое для надежного контакта (см. рис. А 7.2).

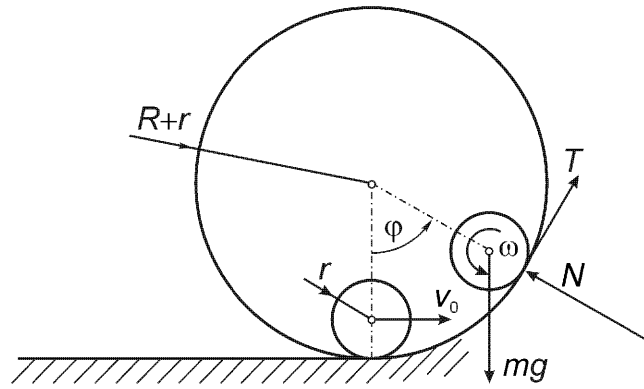


Рис. А 7.2.

Решение: Здесь удобно применять полярные координаты, и условие качения без проскальзывания имеет вид $v = R \, d\varphi/dt = r \, \omega$. Следовательно, из уравнений для количества движения и момента количества движения следует

$$m\dot{v} = mR\ddot{\varphi} = T - mg \sin \varphi, \quad mv^2/R = mR\dot{\varphi}^2 = N - mg \cos \varphi, \\ mi^2\dot{\omega} = mi^2R\ddot{\varphi}/r = -rT.$$

Исключение тангенциальной силы T дает нелинейное уравнение движения, аналогичное уравнению колебаний маятника

$$\ddot{\varphi} + [g/R(1 + i^2/r^2)] \sin \varphi = 0,$$

откуда можно найти зависимость $\dot{\varphi}(\varphi)$.

Условие контакта имеет вид:

$$N = mg \cos \varphi + mR\dot{\varphi}^2 = \\ = mg[v_0^2(1 + i^2/r^2)/gR - 2 + (3 + i^2/r^2)\cos \varphi]/(1 + i^2/r^2) > 0.$$

Из этого неравенства следует

$$\frac{v_0^2}{gR} > [2 - (3 + i^2/r^2)\cos \varphi]/(1 + i^2/r^2).$$

Это справедливо для всех углов φ , если начальная скорость удовлетворяет неравенству

$$v_0^2 > v_{crit} = [(5 + i^2/r^2)gR/(1 + i^2/r^2)]^{1/2}.$$

Если положить радиус инерции равным нулю, $i = 0$, получается идеализированное условие постоянного контакта при бесфрикционном движении материальной точки по круговой траектории в вертикальной плоскости ($T = 0$).

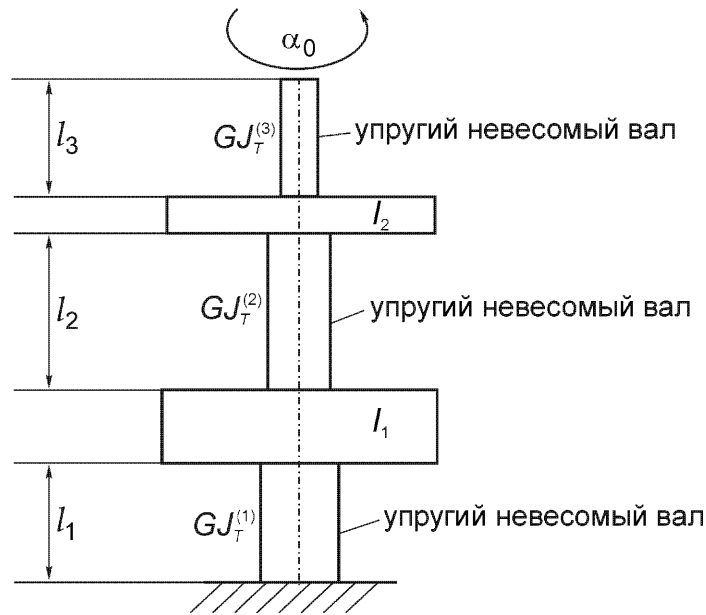


Рис. А 7.3. Крутильные колебания. Невесомые упругие валы имеют жесткости при кручении $k_i = GJ_T^{(i)} / l_i$, $i = 1, 2, 3$.

А 7.3: Два абсолютно твердых диска с моментами инерции I_1 и I_2 соединены друг с другом и с массивным основанием с помощью цепочки линейно упругих невесомых валов, как показано на рис. А 7.3. Верхний конец поворачивается на угол α_0 и внезапно освобождается (путем освобождения от сцепления или после его разрушения при закручивании). Определить свободные крутильные колебания этой системы с 2 степенями свободы.

Решение: Рассмотрим диски освобожденными от связей в мгновенной деформированной конфигурации, заданной углами $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$. Из уравнения для момента количества движения с учетом надлежащих восстанавливающих моментов следует

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = -k_1 \varphi_1 + k_2 (\varphi_2 - \varphi_1), \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 = -k_2 (\varphi_2 - \varphi_1) - k_2 [\varphi_2 - \alpha(t)],$$

где $\alpha(t)$ – общее для всей системы угловое возбуждение. Полагая $\alpha(t) = \alpha_0$ и приравнявая все угловые ускорения нулю, получаем условия равновесия

$$\varphi_1^{(0)} = \mu \Omega_2^2 \Omega_3^2 \alpha_0 / \Delta_0, \quad \varphi_2^{(0)} = \Omega_1^2 \Omega_3^2 \alpha_0 / \Delta_0,$$

где

$$\mu = I_2 / I_1, \quad \Delta_0 = \Omega_1^2 \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \Omega_3^2 - \mu \Omega_2^4, \quad \Omega_1^2 = (k_1 + k_2) / I_1, \\ \Omega_i^2 = k_i / I_2, \quad i = 2, 3.$$

Условие на свободном конце имеет вид $k_3 = 0$. Решая линейную проблему собственных значений, получаем квадраты собственных частот:

$$\omega_{2,1}^2 = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2} \left\{ 1 \pm \left[1 + 4\mu \Omega_2^4 / (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

С использованием обозначений

$$\kappa_1 = \Omega_2^2 / (\Omega_2^2 - \omega_1^2), \quad \kappa_2 = \Omega_2^2 / (\Omega_2^2 - \omega_2^2)$$

общее решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений принимает вид

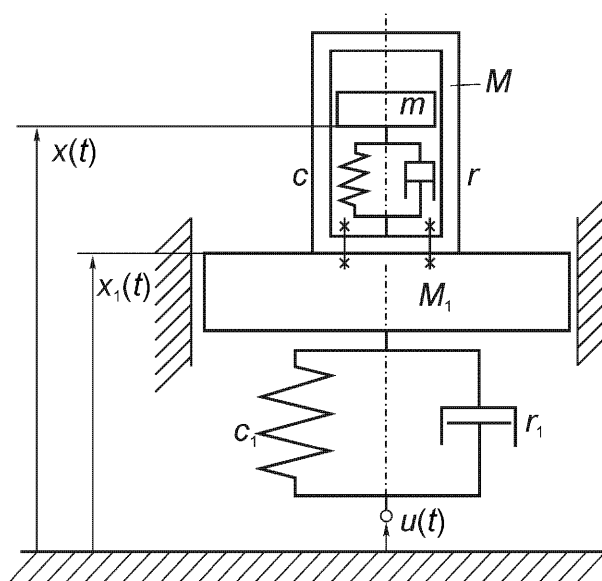
$$\varphi_1 = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t, \quad \varphi_2 = \kappa_1 A_1 \cos \omega_1 t + \kappa_2 A_2 \cos \omega_2 t.$$

Из начальных условий определяются константы:

$$A_1 = [(\Omega_1^2 - \omega_2^2) \varphi_1^{(0)} - \mu \Omega_2^2 \varphi_2^{(0)}] / (\omega_2^2 - \omega_1^2),$$

$$A_2 = [-(\Omega_1^2 - \omega_1^2) \varphi_1^{(0)} - \mu \Omega_2^2 \varphi_2^{(0)}] / (\omega_2^2 - \omega_1^2).$$

А 7.4: Механическое устройство для измерения динамических состояний имеет индикатор массы m , присоединенный с помощью пружинно-демпферной модели Кельвина-Фойгта к кожуху массы M (см. рис. А 7.4). Этот прибор прикреплен к вибрационной системе массы M_1 . Возбуждение производится путем перемещения основания $u(t)$. Составить уравнения движения в абсолютных и относительных координатах, соответственно. С помощью преобразования к показаниям прибора $s(t)$ рассмотреть возможность настройки прибора таким образом, чтобы он был более чувствительным к ускорениям или к перемещениям.



Решение: Рассматриваются поступательные движения масс m и $m_1 = M + M_1$, и с учетом того, что отсчетное состояние свободно от напряжений, из закона Ньютона, записанного в абсолютных координатах, следует:

$$m\ddot{x} = -c(x - x_1) - r(\dot{x} - \dot{x}_1) - mg,$$

$$m_1\ddot{x}_1 = c(x - x_1) + r(\dot{x} - \dot{x}_1) - c_1(x_1 - u) - r_1(\dot{x}_1 - \dot{u}) - m_1g.$$

Преобразование к относительным координатам (отсчетное состояние рассматривается как состояние статического равновесия) дает систему связанных неоднородных линейных дифференциальных уравнений. Ниже эта система приведена в виде матричного дифференциального уравнения

$$\mathbf{m} \frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{dt^2} + \mathbf{r} \frac{d \boldsymbol{\xi}}{dt} + \mathbf{k} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}(t),$$

в которое входят векторы-столбцы

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \xi_1 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} -m\ddot{u} \\ -m_1\ddot{u} \end{Bmatrix},$$

где

$$\xi = x - u + \left(\frac{m_1 + m}{c_1} + \frac{m}{c} \right) g, \quad \xi_1 = x_1 - u + (m_1 + m)g/c_1,$$

и матрицы

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r & -r \\ -r & r + r_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c + c_1 \end{pmatrix}.$$

Полагая $\xi_1 = u_1$ и подставляя показание прибора $s(t) = \xi - \xi_1$, получаем, что в матричном уравнении

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{F}(t)$$

вектор вынуждающей силы остается неизменным, но матрица массы является недиагональной, а матрицы жесткости и демпфирования – несимметричными:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & m \\ 0 & m_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ -r & r_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ -c & c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} s(t) \\ u_1(t) \end{Bmatrix}.$$

Стандартная форма уравнений движения принимает вид:

$$\ddot{s} + \ddot{u}_1 + 2\zeta_s \Omega_s \dot{s} + \Omega_s^2 s = -\ddot{u},$$

$$\ddot{u}_1 + 2\zeta_1 \Omega_1 \dot{u}_1 - 2\zeta_2 \Omega_2 \dot{s} + \Omega_1^2 u_1 - \Omega_2^2 s = -\ddot{u},$$

где

$$\Omega_s^2 = c/m, \quad \Omega_1^2 = c_1/m_1, \quad \Omega_2^2 = c/m_1,$$

$$\zeta = r/2\sqrt{mc}, \quad \zeta_1 = r_1/2\sqrt{m_1c_1}, \quad \zeta_2 = r/2\sqrt{m_1c}.$$

Для измерения ускорения основания требуется следующая настройка

$$\Omega_s^2 \gg (\Omega_1^2, \Omega_2^2),$$

и тогда

$$\Omega_s^2 s \cong -(u + u_1) = -\ddot{x}_1, \quad s \cong -\ddot{x}_1/\Omega_s^2.$$

Если к тому же $\Omega_1^2 \gg \Omega_2^2$, то

$$\dot{u}_1 = -\frac{\Omega_1}{2\zeta_1} u_1 + \frac{\Omega_s^2}{2\zeta_1\Omega_1} s,$$

$$u_1 = u_1^{(0)} e^{-\lambda t} + \frac{\Omega_s^2}{2\zeta_1\Omega_1} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} s(\tau) d\tau, \quad \text{где } \lambda = \Omega_1/2\zeta_1.$$

Настройка для обеспечения чувствительности к перемещениям требует выполнения условия $\Omega_s^2 \ll \Omega_1^2$ (Ω_s меньше максимальной частоты возбуждения перемещения u) вместе с дополнительным допущением

$$\Omega_s^2 \gg \Omega_2^2,$$

откуда следует

$$\ddot{s} \cong -(\ddot{u} + \ddot{u}_1) = -\ddot{x}_1, \quad s = -x_1 + x_{1stat}.$$

Второе уравнение дает для этого случая:

$$\dot{u}_1 = -\frac{\Omega_1}{2\zeta_1} u_1 + \frac{1}{2\zeta_1\Omega_1} \ddot{s}, \quad u_1 = u_1^{(0)} e^{-\lambda t} + \frac{1}{2\zeta_1\Omega_1} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \ddot{s}(\tau) d\tau$$

где $\lambda = \Omega_1/2\zeta_1$.

А 7.5: Рассматривается вязкое течение вокруг погруженного в поток тела (например, жесткого цилиндра на рис. А 7.5 или сваи моста) в достаточно большом контрольном объеме вокруг этого тела. Скорости на входе параллельны, а в выходной части контрольной поверхности скорости тоже приблизительно параллельны, но, как показано на рис. А 7.5, течение становится неоднородным. Измеряя профиль скорости двумерного потока $v_2(y)$, из уравнения для количества движения можно вычислить силу сопротивления $F_D = F_w$, если считать давление в сечении A_2 постоянным и неизменным. Отметим дефицит расхода массы в направлении e_x .

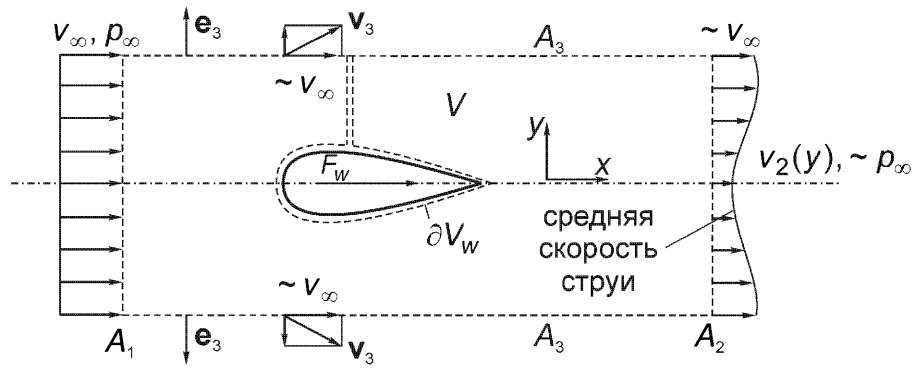


Рис. А 7.5. Сопротивление погруженного цилиндрического тела.

Решение: Поток массы через A_3 определяется стационарной частью уравнения (1.82) и дефицитом в выходном сечении

$$-\rho_{\infty} v_{\infty} A_1 + \int_{A_2} \mu_2 dA + \int_{A_3} \mu_3 dA = 0, \quad \mu_2 = \rho v_2(y), \quad \mu_3 = \rho (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_3).$$

Из уравнения для проекции количества движения на ось x следует

$$-\rho_{\infty} v_{\infty}^2 A_1 + \int_{A_2} \mu_2 v_2 dA + v_{\infty} \int_{A_3} \mu_3 dA = -F_w,$$

и тогда сила сопротивления определяется следующим интегралом:

$$F_w = \int_{A_2} \mu_2 [v_{\infty} - v_2(y)] dA = \frac{\rho_{\infty} v_{\infty}^2}{2} \int_{A_2} \frac{v_2}{v_{\infty}} \left(1 - \frac{v_2}{v_{\infty}}\right) dA, \quad \text{где } dA = b dy.$$

См. также раздел 13.4.7.

А 7.6: Определить движущую силу воздушного винта с неподвижной осью при его стационарном вращении, или, что эквивалентно, эффективную силу сопротивления воздушной турбины в набегающем параллельном потоке с помощью измеренного профиля скорости потока (угловая скорость сохраняется постоянной путем управления мощностью). См. рис. А 7.6 и сравните с А 7.5.

Решение: Контрольная поверхность в виде кругового цилиндра вращается с угловой скоростью пропеллера. Из сохранения массы следует расход через поверхность A_3 , которая является цилиндрической частью контрольной поверхности:

$$-\rho_{\infty} v_{\infty} A_1 + \int_{A_2} \mu_2 dA + \int_{A_3} \mu_3 dA = 0, \quad \mu_2 = \rho v_2(r),$$

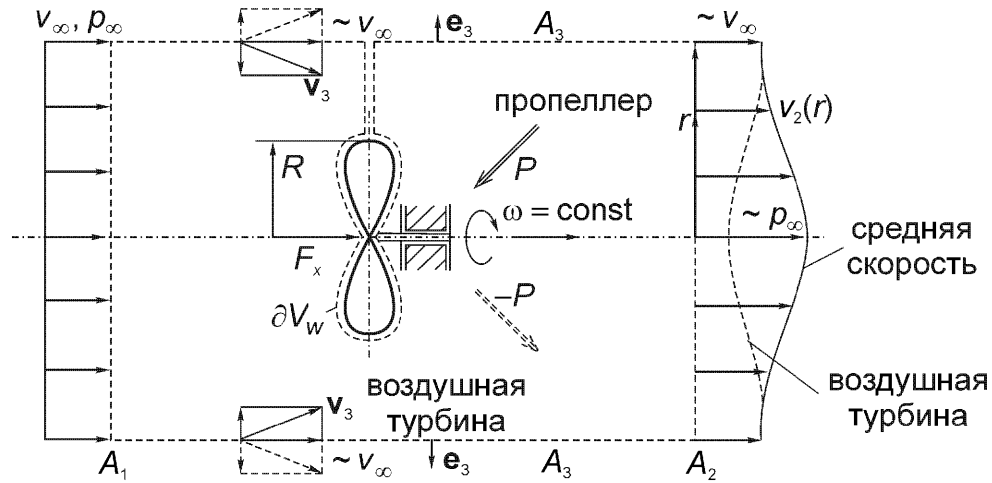


Рис. А 7.6. Осовая сила пропеллера и эффективное сопротивление воздушной турбины.

$$\mu_3 = \rho(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_3) \begin{cases} < 0 & \text{пропеллер,} \\ > 0 & \text{воздушная турбина.} \end{cases}$$

Уравнение для количества движения дает силу $\mathbf{F}_w = F_x \mathbf{e}_x$ (давление в сечениях A_1 и A_2 полагаются примерно равными):

$$-\rho_\infty v_\infty^2 A_1 + \int_{A_2} \mu_2 v_2 dA + v_\infty \int_{A_3} \mu_3 dA = -F_x.$$

Аналогично выражению, выведенному в упражнении А 7.5, это интегральное выражение принимает вид

$$F_x = \int_{A_2} \mu_2 [v_\infty - v_2(r)] dA = \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2} 4\pi \int_0^R \frac{v_2}{v_\infty} \left(1 - \frac{v_2}{v_\infty}\right) r dr.$$

В упрощенной теории пропеллера выведена инженерная формула, задающая скорость потока массы с помощью средней скорости в мертвой зоне за колесом

$$\dot{m} = \int_{A_3} \mu_3 dA = \rho_\infty \pi R^2 \bar{v}_2,$$

где $2R$ – внешний диаметр колеса. Следовательно, поток через кольцевую область $(A_2 - \pi R^2)$ можно заменить невозмущенным параллельным потоком со скоростью v_∞ , и тогда

$$F_x = \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{\bar{v}_2}{v_\infty}\right) \frac{\bar{v}_2}{v_\infty} 4\pi \int_0^R r dr = \dot{m}(v_\infty - \bar{v}_2) \begin{cases} F_x < 0 & \text{пропеллер,} \\ F_x > 0 & \text{воздушная турбина.} \end{cases}$$

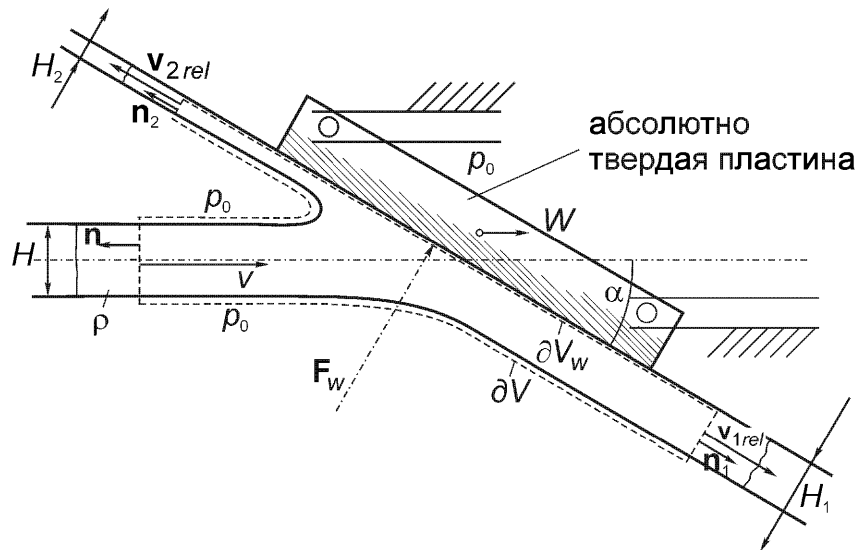


Рис. А 7.7.

А 7.7: Плоская струя прямоугольного поперечного сечения $B \times H$ и с постоянным массовым расходом движется между двумя параллельными стенками и налетает на наклонную жесткую пластину. Последняя движется с заданной постоянной скоростью w в направлении потока (см. рис. А 7.7). Пренебрегая вязкими эффектами, определить главный вектор F_w сил распределенного давления, действующего на движущуюся пластину, а также производимую ею мощность при стационарном и управляемом поступательном движении. Кроме того, требуется связать эффективные коэффициенты подъемной силы и сопротивления с соответствующими компонентами силы.

Решение: На свободной поверхности задано атмосферное давление p_0 . Такое же давление действует в поперечном сечении свободной струи на достаточно большом расстоянии от пластины. Контрольный объем V движется как жесткое тело с постоянной скоростью w и постоянно присоединен к пластине. В этом случае разветвление струи становится стационарным. Так как $p_1 = p_2 = p_0$, относительные скорости потока массы становятся равными: $v - w = v_{1rel} = v_{2rel}$. Так как $w = \text{const}$ и движущая система отсчета неотличима от инерциальной, к относительным потокам применяется уравнение Бернулли (8.36). Относительные плотности расхода массы равны: $\mu = \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = -\rho(v - w)$, $\mu_1 = \rho(\mathbf{v}_{1rel} + \mathbf{w} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_1 = \rho(v - w)$, $\mu_2 = \rho(\mathbf{v}_{2rel} + \mathbf{w} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_2 = \rho(v - w)$, и из уравнения для количества движения следует

$$\oint_{\partial V} \mu \mathbf{v} dS = -\rho(v - w)BH\mathbf{v} + \rho(v - w)BH_1(\mathbf{v}_{1rel} + \mathbf{w}) + \rho(v - w)BH_2(\mathbf{v}_{2rel} + \mathbf{w}) = -\mathbf{F}_w.$$

Главный вектор сил давления ортогонален поверхности движущейся пластины

$$F_w = \rho(v-w)B(vH-wH_1-wH_2)\sin\alpha,$$

и, так как компонента внешней силы в тангенциальном направлении равна нулю и сдвиговыми напряжениями мы пренебрегаем, то отсюда следует

$$\rho(v-w)B[vH\cos\alpha-(v_{1rel}+w\cos\alpha)H_1-(-v_{2rel}+w\cos\alpha)H_2]=0.$$

Второе условие для толщин отдельных струй выводится из баланса потока массы при $B = \text{const}$:

$$\oint_{\partial V} \mu dS = -\rho(v-w)BH + \rho(v-w)BH_1 + \rho(v-w)BH_2 = 0,$$

откуда следует

$$H_1 + H_2 = H.$$

Тогда, решая относительно H_1 и H_2 , получаем

$$H_{1,2} = \frac{H}{2} (1 \pm \cos\alpha).$$

Окончательно выражение для силы, действующей на пластину, принимает вид

$$F_w = \rho(v-w)^2 BH \sin\alpha, \quad v > w.$$

Ее теоретическая мощность определяется выражением

$$P = \rho w(v-w)^2 BH \sin^2\alpha, \quad v > w.$$

Рассмотрение компоненты силы F_w в направлении набегающей струи F_D и поперечной компоненты F_L позволяет интерпретировать их в терминах эффективной силы сопротивления (drag) и эффективной подъемной силы (lift):

$$F_D = C_D \frac{\rho(v-w)^2}{2} BH \Rightarrow C_D = (1 - \cos 2\alpha),$$

$$F_L = C_L \frac{\rho(v-w)^2}{2} BH \Rightarrow C_L = \sin 2\alpha.$$

Дальнейшие подробности см. в разделе 13.2. Угол α называется «углом атаки» основного потока.

А 7.8: Труба, переносящая стационарный поток массы, присоединена к жесткой стенке емкости и поддерживается линейно упругой пружиной (см. рис. А 7.8). Шарнирная опора и восстанавливающая сила допускают колебания наподобие

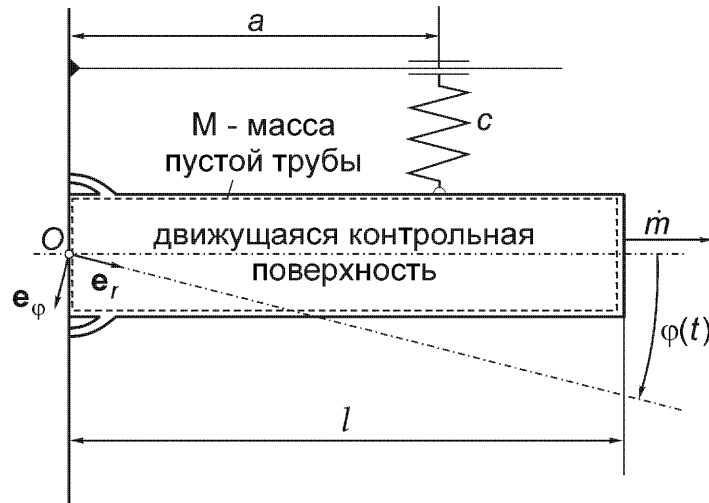


Рис. А 7.8. Колебательное движение в горизонтальной плоскости.

колебаний плоского маятника. Определить уравнение движения, если поток невязкой жидкости движется при заданном атмосферном давлении p_0 .

Решение: Направление вектора момента количества движения жидкости становится переменным во времени:

$$\mathbf{H}_0 = \int_0^l (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho A dr = \frac{\rho Al}{3} l^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r} = r \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{v} = \frac{\dot{m}}{\rho A} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\dot{\mathbf{H}}_0 = \frac{\rho Al}{3} l^2 \ddot{\varphi} \mathbf{e}_z.$$

Уравнение (7.26) дает для жидкости следующее соотношение:

$$\frac{\rho Al}{3} l^2 \ddot{\varphi} + \dot{m} l^2 \dot{\varphi} = -M_w.$$

Второе уравнение получается при рассмотрении маятника без находящейся в нем жидкости, но нагруженного главным моментом M_w и восстанавливающим моментом пружины

$$\frac{Ml^2}{3} \ddot{\varphi} = M_w - \frac{ca^2}{2} \sin 2\varphi.$$

Тогда при сложении этих уравнений M_w можно исключить, и в результате получаем уравнение колебаний с демпфированием

$$\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + \frac{\omega_0^2}{2} \sin 2\varphi = 0, \quad R = \frac{3\dot{m}}{M + \rho Al}, \quad \omega_0^2 = \frac{3c}{M + \rho Al} \left(\frac{a}{l} \right)^2.$$

А 7.9: Определить собственные крутильные колебания однородной линейно упругой консоли круглого поперечного сечения диаметра d и заданной длины l . Плотность материала балки ρ , модуль сдвига G .

Решение: Из уравнения для момента количества движения бесконечно малого элемента следует волновое уравнение, где переменным является угол закручивания:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \vartheta = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad c^2 = \frac{GJ_T}{I} = \frac{G}{\rho}, \quad I = \rho J_T, \quad J_T = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Разыскивая решение в форме разделяемых функций $\chi(x, t) = Y(t)\varphi(x)$, получаем

$$\frac{\ddot{Y}}{Y} = c^2 \frac{\varphi''}{\varphi} = -\omega^2 \Rightarrow \begin{cases} Y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\ \varphi(x) = C \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right). \end{cases}$$

И геометрическое граничное условие в жесткой заделке $\chi(x=0, t) = 0$, и динамическое условие на свободном конце $M_T(x=l, t) = GJ_T \partial \chi / \partial x = 0$ дают $C = 0$ и определяют дискретный спектр собственных частот:

$$\omega_n = \frac{c}{l} \frac{2n-1}{2} \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

А 7.10: Имеются ли критические угловые скорости у статически и динамически сбалансированного вала? Если да, то должен ли вал, имеющий прогиб (изгибная жесткость $B = EJ$), также вращаться с той же стационарной угловой скоростью ω , что и недеформированный вал с прямолинейной осью?

Решение: Вращающийся вал, имеющий прогиб, нагружен силами инерции на единицу длины $q = \rho A \omega^2 w$. Таким образом, стационарное дифференциальное уравнения главного изгиба $B d^4 w / dx^4 = q$ принимает вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \omega^2 \frac{\rho A}{B} w = 0.$$

Это уравнение идентично уравнению $f^{IV} - k^4 f = 0$ с решением (7.152). Если граничные условия также идентичны, то отсюда следует то же уравнение частот и, следовательно, тот же дискретный спектр круговых частот изгибных колебаний. По определению они являются критическими угловыми скоростями вала. Последнее позволяет вращение как прямолинейного вала, так и вала изо-

гнутой (замороженной) формы. Как следствие, угловая скорость вала выбирается, как $\omega \neq \omega_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, то есть не равной критическим угловым скоростям.

А 7.11: Рассмотреть свободные колебания изотропно напряженных мембран, имеющих в плане прямоугольную и круглую форму. Задана действующая в плоскости мембраны равномерная нагрузка на единицу длины S (см. рис. А 7.11).

Решение: В качестве поперечной нагрузки p , входящей в уравнение (6.191), подставляется удельная сила инерции $-\rho h d^2w/dt^2$. В случае гармонических колебаний, когда $w = W \exp(i\omega t)$, результирующее уравнение движения сокращается на общий множитель, зависящий от времени, и приводит к дифференциальному уравнению Гельмгольца относительно распределения амплитуды W :

$$\Delta W + \lambda^2 W = 0, \quad \lambda^2 = \rho h \omega^2 / S, \quad \omega = \lambda \sqrt{S/\rho h}.$$

При граничных условиях Дирихле $W = 0$ существует дискретный спектр действительных собственных частот, соответствующих собственным значениям λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, вместе с соответствующими формами колебаний W_n . В случае прямоугольной в плане формы решение разделяется: $W(x, y) = F(x)G(y)$, и получаются два обыкновенных дифференциальных уравнения, каждое из которых соответствует колебаниям струны. Эти решения становятся совместимыми с выбором собственных значений и соответствующих форм колебаний

$$\lambda_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad W_{mn} = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

В случае круглой мембраны для того, чтобы сделать решение разделяемым,

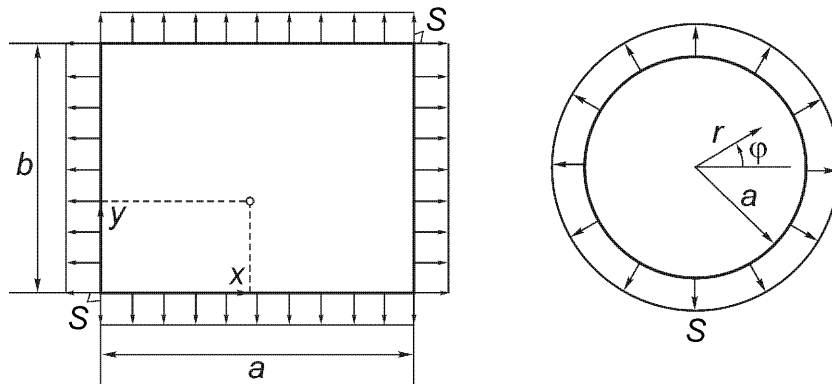


Рис. А 7.11. Поперечные колебания предварительно напряженных мембран.

нужно использовать полярные координаты: $W(r, \varphi) = F(r)G(\varphi)$, и получаются два обыкновенных дифференциальных уравнения с собственным числом n^2 :

$$\frac{d^2 G}{d\varphi^2} + n^2 G = 0, \quad F'' + \frac{1}{r} F' + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) F = 0.$$

Первое из этих уравнений является уравнением колебательного типа, а второе является одним из дифференциальных уравнений Бесселя. Если обозначить функцию Бесселя первого рода n -го порядка как $J_n(z)$, формы колебаний принимают вид

$$W_{nm}(r, \varphi) = A_{nm} J_n(\lambda_{nm} r) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Эти собственные числа являются хорошо известными корнями уравнения $J_n(\lambda_{nm} a) = 0$, ($W = 0, r = a$). Для удобства здесь перечислены первые семь корней, которые меньше 6: $\lambda_{01} a = 0,8936$; $\lambda_{11} a = 2,1971$; $\lambda_{21} a = 3,3842$; $\lambda_{02} a = 3,9577$; $\lambda_{31} a = 4,5270$; $\lambda_{12} a = 5,4297$; $\lambda_{41} a = 5,6452$.

А 7.12: Показать с помощью декомпозиции Гельмгольца вектора перемещения $\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$, где $\Psi = \Psi \mathbf{e}_y$, $\partial\Psi/\partial y = 0$, существование неоднородной плоской поверхностной волны, которая распространяется без дисперсии с постоянной скоростью $c_R < c_S < c_P$ вдоль свободной от усилий поверхности $z = 0$ линейно упругого полупространства в направлении оси x (см. рис. А 7.12). Для простоты предполагается монохроматическая волна с заданной частотой ω (то есть гармонически изменяющаяся во времени).

Решение: Ненулевые компоненты вектора перемещения определяются выражениями:

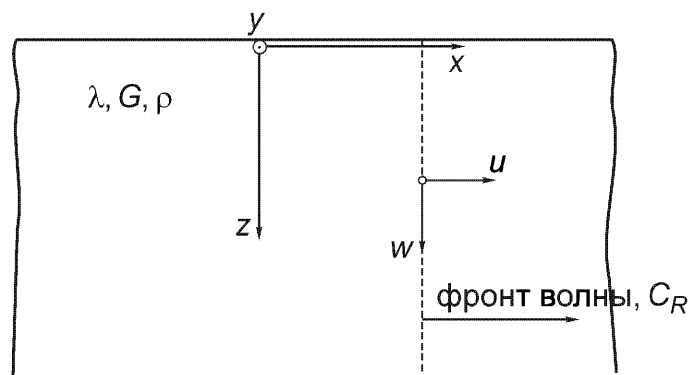


Рис. А 7.12. Поверхностная волна Рэлея. Направленное назад движение точек на свободной поверхности.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Неоднородные плоские волны имеют амплитуды, зависящие от координаты z :

$$\Phi = \varphi(z) e^{i\omega(t-x/c)}, \quad \Psi = \psi(z) e^{i\omega(t-x/c)},$$

и волны в теле должны иметь общую фазовую скорость c , которая равна скорости плоскости с постоянной фазой $x = \text{const}$. Подстановка в неоднородные волновые уравнения (7.163) дает два обыкновенных дифференциальных уравнения с решениями $\varphi(z) = C e^{-b_1 z}$ и $\psi(z) = D e^{-b_2 z}$. В соответствии с этими решениями при движении z к бесконечности волны затухают, если выбраны положительные корни уравнения $b_{1,2}^2 = k^2 (1 - c^2/c_{P,S}^2)$. Общее волновое число равно $k = \omega/c$. На поверхности $z=0$ усилия должны равняться нулю: $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = 0$. Следовательно, фазовая скорость является собственным значением получающихся в результате двух линейных однородных уравнений. Подставляя в закон Гука с учетом линеаризованных геометрических соотношений, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \left[\lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right]_{z=0} = \\ &= [(c_P^2 - 2c_S^2)(-k^2) + c_P^2 b_1^2] C + 2ik c_S^2 b_2 D = 0, \\ \sigma_{zx} &= G \left[2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right]_{z=0} = 2ik b_1 C + (b_2^2 + k^2) D = 0. \end{aligned}$$

Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель матрицы коэффициентов (определитель Рэлея) был равен нулю. Получающееся при этом характеристическое уравнение

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_S^2} \right)^2 - 4 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_P^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_S^2}} = 0$$

имеет приближенное решение

$$c_R \cong \frac{0,862 + 1,14\nu}{1 + \nu} c_S < c_S < c_P,$$

которое обычно обеспечивает достаточную точность вычислений.

Вектор амплитуды поверхностной волны Рэлея является действительным и определяется отношением

$$\frac{C}{D} = -\frac{1 - c_R^2/2c_S^2}{\sqrt{1 - c_R^2/c_P^2}}.$$

Такое представление показывает, что поверхностная волна является специальной суперпозицией P - и SV -волн с одинаковым волновым числом

$$\Phi = C e^{-b_1 z} e^{i\omega(t-x/c_R)}, \quad \Psi = D(C) e^{-b_2 z} e^{i\omega(t-x/c_R)}.$$

8 Первые интегралы уравнений движения, кинетическая энергия

Уравнения движения суть дифференциальные уравнения второго порядка по времени. Однократным интегрированием этот порядок можно уменьшить на единицу. В данной главе рассматривается простое интегрирование по времени, которое приводит к общей теореме работ, связанной с изменением кинетической энергии и, возможно, для идеализированных систем с сохранением механической энергии. Интегрирование по линии тока при фиксированном времени приводит к результату, известному как обобщенное уравнение Бернулли. В случае стационарного течения это уравнение становится первым интегралом.

8.1. Теорема мощностей и кинетическая энергия

Векторное уравнение движения Эйлера-Коши (7.1) является отправным пунктом для построения выражения объемной плотности мощности в каждой материальной точке движущегося тела, что достигается скалярным умножением уравнения на абсолютную скорость $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$

$$\frac{dP}{dV} = P' = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (8.1)$$

Интегрирование (суммирование) по материальному объему $V(t)$ тела (при постоянном времени) дает мгновенное значение суммарной мощности внутренних и внешних сил $P(t)$

$$\int_{V(t)} P' dV = \frac{\delta W}{dt} = P(t) = \int_{V(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{V(t)} v^2 dm \right],$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}). \quad (8.2)$$

Неотрицательно определенное выражение, которое зависит только от распределения квадрата скорости элементов массы,

$$E_k \equiv T(t) = \frac{1}{2} \int_{V(t)} v^2 dm \geq 0 \quad (8.3)$$

есть кинетическая энергия тела, при этом размерность работы и, следовательно, энергии есть $[T] = 1 \text{ кг (м/с)}^2 = 1 \text{ Н м} = 1 \text{ Вт с} = 1 \text{ Дж}$. Для твердого тела массы m , совершающего поступательное движение, кинетическая энергия выражается просто:

$$E_k \equiv T(t) = \frac{mv^2}{2}. \quad (8.4)$$

Аналогичное выражение справедливо и для точечной массы, имеющей мгновенную скорость $\mathbf{v}(t)$ при произвольном движении.

Таким образом, (8.2) дает, что скорость изменения кинетической энергии тела постоянной массы m и материального объема $V(t)$ равна суммарной мощности внутренних и внешних сил

$$\frac{dE_k}{dt} \equiv P(t) = \frac{\delta W}{dt}. \quad (8.5)$$

Эта теорема мощностей рассматривается в дополнение к первому началу термодинамики. Интегрирование по времени приводит к закону изменения кинетической энергии

$$E_k(t_2) - E_k(t_1) \equiv T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} P dt = W_{1 \rightarrow 2}. \quad (8.6)$$

«Конечное изменение кинетической энергии тела равно суммарной работе внутренних и внешних сил в рассматриваемом интервале времени.» Если суммарная работа равна нулю, то кинетическая энергия сохраняется. Уравнение (8.6) содержит только скорости и, таким образом, является первым интегралом общих уравнений движения второго порядка. Уравнение (8.6) имеет особое значение для проверки (численных) решений задач динамики.

8.2. Сохранение механической энергии

Если внутренние и внешние силы стационарны и потенциальны, то соответствующие потенциалы U и W_p не содержат времени явно и суммарная работа не зависит от пути интегрирования [определяется разностью суммарных потенциальных энергий, (3.18)]

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_p(t_1) - E_p(t_2) \equiv V_1 - V_2, \quad E_p \equiv V = U + W_p.$$

Подставляя эти выражения в (8.6), получим

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2. \quad (8.7)$$

«Увеличение кинетической энергии равно уменьшению суммарной потенциальной энергии.» Перестановка слагаемых дает сохранение механической энергии

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \text{или} \quad E_k(t) + E_p(t) = E_0 = \text{const}. \quad (8.8)$$

«Механическая энергия (кинетическая плюс суммарная потенциальная) тела, движущегося в консервативных силовых полях (внутренних и внешних) остается постоянной.» Механическая энергия сохраняется, если силы стационарны и потенциальны; такое силовое поле называется консервативным, так же как и соответствующая движущаяся механическая система. Уравнение (8.8) применяется для проверки решений уравнений движения консервативных механических систем; в особенности оно может быть использовано для исследования устойчивости равновесия в энергетической норме (см. раздел 9.1). Для консервативных систем с одной степенью свободы уравнение (8.8) становится (проинтегрированным) уравнением движения первого порядка. Оно всегда нелинейно; см. также уравнение (7.118) для движения маятника в плоскости. Уравнение (8.8), взятое для единицы массы или объема и рассматриваемое вдоль линии тока идеальной (невязкой) жидкости при стационарном течении, становится классическим уравнением Бернулли [см. (8.36)].

Перед рассмотрением дальнейших приложений вычислим кинетическую энергию твердого тела и приведем соответствующие выражения к удобному виду.

8.3. Кинетическая энергия твердого тела

Согласно (1.4) поле скоростей твердого тела линейно по материальному радиус-вектору. Полагая $\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}'$ в (1.4) и подставляя эту формулу в определение

$$E_k(t) = \int_m \frac{v^2}{2} dm, \quad (8.9a)$$

получим результат, состоящий из трех слагаемых. Обозначая через A' жестко связанный с телом полюс, через $\boldsymbol{\omega}$ – угловую скорость тела и преобразуя смешанное произведение в $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2$ по правилам векторной алгебры, найдем:

$$E_k(t) = \frac{mv_A^2}{2} + (\mathbf{v}_A \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \int_m \mathbf{r}' dm + \frac{1}{2} \int_m |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'|^2 dm. \quad (8.9b)$$

Если выбрать центр масс M в качестве A' , то массовый момент обращается в нуль и второе слагаемое в (8.9b) отсутствует. Для вычисления оставшегося

объемного интеграла запишем в системе декартовых координат с началом в центре масс: $\mathbf{r}' = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ и $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{e}_x + \omega_y\mathbf{e}_y + \omega_z\mathbf{e}_z$. Подынтегральное выражение принимает вид

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'|^2 = (z\omega_y - y\omega_z)^2 + (x\omega_z - z\omega_x)^2 + (y\omega_x - x\omega_y)^2,$$

и интеграл выражается через моменты инерции в центральных осях (см. (7.52)–(7.54)). В матричных обозначениях (\mathbf{I} – тензор инерции) получим кинетическую энергию твердого тела в виде

$$E_k(t) = \frac{mv_M^2}{2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (8.10)$$

Таким образом, если центр масс выбран в качестве полюса, то кинетическая энергия представляет собой сумму энергии поступательного движения (как если бы вся масса была сосредоточена в центре масс) и вращательной энергии. В главных осях инерции второе слагаемое имеет вид

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (8.11a)$$

(так как тензор инерции диагонален). Далее рассматриваются два важных частных случая движения.

8.3.1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки O

Полюс $A' = O$ неподвижен, $v_A \equiv 0$ и кинетическая (вращательная) энергия тела выражается формулой (8.11a), где тензор инерции отнесен к точке O ,

$$E_k = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (I_1^{(O)} \omega_1^2 + I_2^{(O)} \omega_2^2 + I_3^{(O)} \omega_3^2). \quad (8.11b)$$

Главные оси инерции проходят через неподвижную точку O .

8.3.2. Вращение вокруг неподвижной оси \mathbf{e}_a

Рассмотрим ось, проходящую через $A' = O$, тогда $v_A \equiv 0$ и, кроме того, прямая, на которой лежит вектор угловой скорости, неподвижна, т.е. $\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\mathbf{e}_a$. Кинетическая энергия содержит только осевой момент инерции I_a ,

$$E_k = \frac{1}{2} I_a \omega^2. \quad (8.12)$$

8.4. Сохранение энергии в системах с одной степенью свободы

Проинтегрированная теорема мощностей для неконсервативных систем и закон сохранения механической энергии представляют собой уравнения движения первого порядка и, что очень важно для приложений, характеристические смещения определяются конечными соотношениями.

8.4.1. Движение линейного осциллятора после удара (рис. 8.1)

Масса m прикреплена к линейной пружине жесткости c и движется (после удара) с начальной скоростью v_0 . Требуется определить первую точку поворота в движении осциллятора; влиянием сопротивления пренебрегаем. Применим закон сохранения механической энергии к начальному положению и точке поворота, находящейся на расстоянии a (в этой точке кинетическая энергия обращается первый раз в нуль)

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}ca^2 \rightarrow a = v_0\sqrt{m/c}. \quad (8.13)$$

Так как циклическая частота свободных колебаний равна величине, обратной к выписанному корню (см. (7.80)), то амплитуда свободных колебаний без сопротивления возле положения равновесия равна $a = v_0/\omega_0$ и $x(t) = a \sin \omega_0 t$.

Запишем закон сохранения энергии для произвольного момента времени; сила тяжести не влияет на свободные колебания (см. рис. 8.1)

$$T + U = E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Отсюда получаем нелинейное уравнение движения первого порядка

$$\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + cx^2 = mv_0^2) \rightarrow \dot{x}^2 = v_0^2 - \omega_0^2 x^2.$$

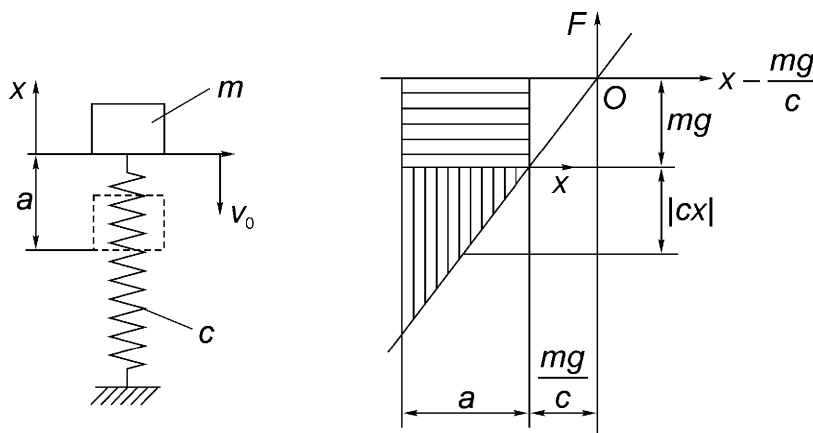


Рис. 8.1. Точка поворота линейного осциллятора после удара и диаграмма сила-перемещение, показывающая относительную упругую энергию, запасенную в пружине (предварительное сжатие пружины возникает из-за силы тяжести, действующей на массу).

Подстановка временных гармоник дает

$$\frac{m}{2} a^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{c}{2} a^2 \sin^2 \omega_0 t = E_0.$$

Если рассмотреть моменты времени, в которых кинетическая энергия обращается в нуль, $T = 0$, а упругий потенциал $U = U_{\max} = ca^2/2 = E_0$ максимален, $t = \pi/2\omega_0, 3\pi/2\omega_0, \dots$, и, наоборот, моменты времени $t = 0, \pi/\omega_0, 2\pi/\omega_0, \dots$, в которых кинетическая энергия максимальна $T = T_{\max} = ma^2\omega_0^2/2 = E_0$, а энергия деформации обращается в нуль, $U = 0$, то можно найти циклическую частоту свободных колебаний ω_0 из условия сохранения энергии. Отношение Рэлея дает

$$T_{\max} = \frac{m}{2} a^2 \omega_0^2 = E_0 = U_{\max} = \frac{c}{2} a^2 \rightarrow \omega_0^2 = \frac{U_{\max}}{(1/\omega_0^2) T_{\max}}. \quad (8.14)$$

Это отношение не зависит от начальных условий и приводит к значению $\omega_0 = \sqrt{c/m}$. Нетривиальным является тот факт, что знаменатель T_{\max}/ω_0^2 остается независимым от частоты свободных колебаний также для случая колебательной системы с несколькими степенями свободы.

8.4.2. Основная мода колебаний линейно упругой балки

Пренебрегая сопротивлением, получаем отношение Рэлея (8.14) из закона сохранения механической энергии, примененного к полупериоду колебаний,

$$T_{\max} = E_0 = U_{\max}. \quad (8.15)$$

Можно получить приближенное значение основной частоты свободных колебаний, если предположить, что форма моды $\varphi(x)$ похожа на статический прогиб, обусловленный весом балки: $q_0 = \rho g a$. Максимальный упругий потенциал равен:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho g a \varphi(x) dx. \quad (8.16)$$

Кинетическая энергия гармонического колебания $w(x, t) = a \varphi(x) \cos \omega_0 t$ (предполагается, что $a = 1$; максимум достигается при $t_1 = \pi/2\omega_0$) имеет вид:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{w}^2(t_1, x) dx = \frac{\omega_0^2}{2} \int_0^L \rho A \varphi^2(x) dx. \quad (8.17)$$

Подставляя (8.16), (8.17) в (8.15), получим в первом приближении из отношения Рэлея (интегралы можно найти численно)

$$\omega_0^2 \equiv g \frac{\int_0^L \rho A \varphi(x) dx}{\int_0^L \rho A \varphi^2(x) dx}. \quad (8.18)$$

Отношение (8.18) становится точным, если в него подставить первую моду $\varphi = \varphi_0(x)$. Любая допустимая функция формы дает, согласно (8.18), приближенное значение частоты свободных колебаний. С помощью итерационной процедуры ошибку можно уменьшить: отклонение, вызываемое инерционной нагрузкой $q_1 = \rho g A \omega_0^2 \varphi(x)$, есть $\omega_0^2 a_1 \varphi_1(x)$ и ближе к основной моде $\varphi_0(x)$. Аналогично (8.16) максимальные энергии выражаются интегралами по длине балки

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L q_1 \omega_0^2 a_1 \varphi_1(x) dx = \frac{a_1}{2} \omega_0^4 \int_0^L \rho g A \varphi(x) \varphi_1(x) dx \quad (8.19)$$

и

$$T_{\max} = \frac{a_1^2}{2} \int_0^L \rho A [\omega_0^3 \varphi_1(x)]^2 dx. \quad (8.20)$$

Следовательно, первый шаг итерационной процедуры дает приближенное значение квадрата частоты свободных колебаний ($U_{\max} = T_{\max}$)

$$\omega_0^2 = g \frac{\int_0^L \rho A \varphi(x) \varphi_1(x) dx}{a_1 \int_0^L \rho A \varphi_1(x)^2 dx}. \quad (8.21)$$

Эту формулу можно считать обобщенным отношением Рэлея; любая допустимая функция формы $a_0 \varphi(x)$ может быть подставлена вместо статического прогиба $g \varphi(x)$. Чтобы функция формы была допустимой, необходимо выполнение кинематических граничных условий; см. также приближенный метод Ритца в разделе 11.1. Уравнение (8.21) применимо не только к изгибным колебаниям балок. Интегралы можно распространить на участок любой структуры, например, рамы, пластины или оболочки. О применении обобщенного отношения Рэлея к матричным итерациям в теории свободных колебаний см. упражнение А 11.11.

8.4.3. Ускорение тележки с двигателем

Теорема мощностей (8.5) позволяет найти ускорение a любого снабженного двигателем транспортного устройства, например, четырехколесной тележки с двигателем, въезжающей по склону (угол наклона α) со скоростью v . Система является неконсервативной. Обозначим массу всей системы через m , (внешний) момент, действующий на колеса, – через M . Качение колес происходит без проскальзывания, следовательно, $\omega = v/R$. Находим кинетическую энергию тележки (при необходимости можно легко учесть и кинетическую энергию трансмиссии)

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + 4 \frac{I}{2} (v/R)^2. \quad (8.22)$$

Здесь I – момент инерции колеса (или эффективный момент инерции, учитывающий движение трансмиссии). Скорость изменения кинетической энергии тогда принимает вид

$$\frac{dE_k}{dt} = P = M \frac{v}{R} - (D + mg \sin \alpha) v. \quad (8.23)$$

Здесь D – суммарная сила сопротивления. Дифференцируя (8.22) по времени, найдем (скорость v сокращается)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{M/R - D - mg \sin \alpha}{m + 4I/R^2}. \quad (8.24)$$

8.4.4. Точки поворота нелинейного осциллятора с сухим трением

Рассмотрим свободное движение системы, изображенной на рис. 7.26; сила трения подчиняется закону Кулона $T_R = -\mu mg v/|v|$. Найдем положения точек поворота с помощью теоремы мощностей. Координата s_k отсчитывается от очередной точки поворота. Интегрирование теоремы мощностей дает

$$0 = W_{1 \rightarrow 2} = \int_0^{s_1} T_R dx + U_1 - U_2, \quad U_1 = cs_0^2/2, \quad U_2 = c(s_0 - s_1)^2/2. \quad (8.25)$$

Расстояние до следующей точки поворота есть ненулевое решение уравнения

$$s_1 = 2(s_0 - s_1) > 0, \quad cs_0 > cs \equiv \mu mg. \quad (8.26)$$

Работа силы трения $|T_R|s_1 = U_1 - U_2$ рассеивается в виде тепла. Следующая точка поворота достигается при условии

$$cs_1 > cs \equiv \mu mg, 0 = W_{2 \rightarrow 3} = \int_0^{s_2} T_R dx + U_2 - U_3, U_3 = c(s_0 - s_1 + s_2)^2 / 2, \quad (8.27)$$

которое сводится к $s_2 \left[s_2 - 2(s_1 - s_0 - s) \right] = 0$. Нетривиальное решение:

$$s_2 = (2s_0 - 6s) \text{ и т. д.} \quad (8.28)$$

Амплитуда убывает с декрементом $2s$, последовательные ее значения таковы:

$$|x_0| = s_0, \quad |x_1| = s_0 - 2s, \quad |x_2| = s_2 - x_1 = s_0 - 4s, \dots \quad (8.29)$$

8.5. Уравнение Бернулли в механике жидкости

Связь давления и (дозвуковой) скорости при течении идеальной жидкости особенно важна для эйлера описания движения. Векторное уравнение движения в отсутствие сдвиговых напряжений

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{k} - \text{grad } p \quad (8.30)$$

можно проинтегрировать вдоль отдельной линии тока при фиксированном времени (см. рис 8.2). Проектирование (8.30) на касательное направление \mathbf{e}_t и интегрирование по длине дуги s дают

$$\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_t ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\rho} k_t ds - \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds, t = \text{const.} \quad (8.31)$$

Локально дифференциал $\mathbf{v} dt = \mathbf{e}_t ds$ для траектории материальной точки, к которой относятся (8.1) и (8.6), заменяется на $\mathbf{e}_t ds$ для линии тока, которая в момент времени t есть материальная линия, составленная из бесконечно-

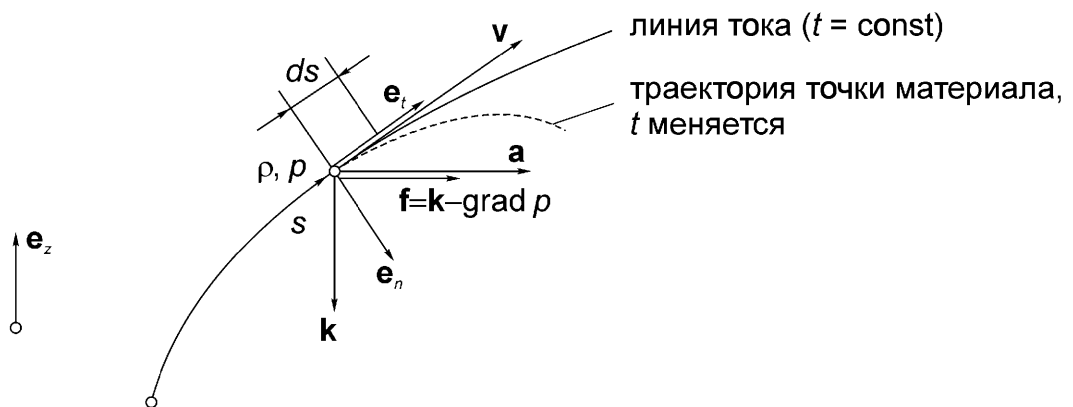


Рис. 8.2. Линия тока при нестационарном течении для $t = \text{const}$. Пунктиром показана траектория отдельной частицы.

го числа частиц. Касательная составляющая массовой силы равна $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_t) = k_t$; проекция градиента давления дает $(\text{grad } p) \cdot \mathbf{e}_t = \partial p / \partial s$. Касательная составляющая ускорения в эйлеровом описании нестационарного течения выражается формулой $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_t = \partial v / \partial t + \partial(v^2/2) / \partial s$ (см. (1.42)). Следовательно, интегрирование левой части дает $[v(s_j, t) = v_j, j = 1, 2]$

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2). \quad (8.32)$$

Локальное ускорение и, следовательно, остающийся в (8.32) интеграл следует учитывать при рассмотрении нестационарных течений. Если массовая сила – это сила тяжести, то имеем систему параллельных сил, $\mathbf{k} = -\rho g \mathbf{e}_z$, и касательная компонента для единицы массы равна $(1/\rho)k_t = -g(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_t)$. Направляющий косинус равен просто $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_t) ds = dz$, и интегрирование дает разность потенциальных энергий единицы массы, соответствующую разности высот двух точек линии тока по отношению к отсчетной горизонтальной плоскости,

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\rho} k_t ds = -g \int_{s_1}^{s_2} dz = -g(z_2 - z_1). \quad (8.33)$$

Определяющее соотношение для баротропной жидкости есть (нелинейное) соотношение между плотностью и давлением $\rho = \rho(p)$; температура здесь отсутствует. В этом случае можно вычислить остающийся в (8.31) интеграл (потенциал давлений). Для однородной несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ и

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds = \frac{p_2 - p_1}{\rho}, \quad p_j = p(s_j, t), \quad j = 1, 2. \quad (8.34)$$

Таким образом, уравнение (8.31), рассматриваемое вдоль линии тока идеальной жидкости в однородном поле сил тяжести, принимает вид

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = -g(z_2 - z_1) - \frac{p_2 - p_1}{\rho}. \quad (8.35)$$

Левая часть определяет увеличение кинетической энергии единицы массы вдоль линии тока нестационарного течения в некоторый момент времени. Правая часть представляет собой взятую с обратным знаком разность потенциальных энергий единицы массы в поле сил тяжести и внутренних сил, соответственно. Эти выражения условны, так как при нестационарном течении частицы, вообще говоря, не движутся по линиям тока.

При стационарном течении все величины не зависят от времени явно, $\partial v/\partial t \equiv 0$, и (8.35) принимает вид закона сохранения механической энергии единицы массы, так как материальные точки, «сидящие» на линиях тока, движутся вдоль них с течением времени, и траектории совпадают с линиями тока

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 . \quad (8.36)$$

Сохранение механической энергии единицы массы выполняется для всех точек отдельной линии тока (и траектории), и уравнение Бернулли принимает одну из классических форм

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} . \quad (8.37)$$

Суммарная энергия единицы массы может изменяться от одной линии тока к другой. В соответствии с (8.8) слагаемые, отнесенные к единице массы, представляют собой кинетическую энергию, потенциал давлений (потенциал внутренних сил) и потенциал сил тяжести (потенциал внешних сил). Если разделить на g , то энергетические слагаемые приобретут размерность длины или высоты и получим техническую форму уравнения Бернулли

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = h_E = \text{const} . \quad (8.38)$$

Слагаемые иллюстрируются рис. 8.3, где z – высота над фиксированной горизонтальной отсчетной плоскостью (ось направлена вверх), $p/\rho g$ – напор (см.

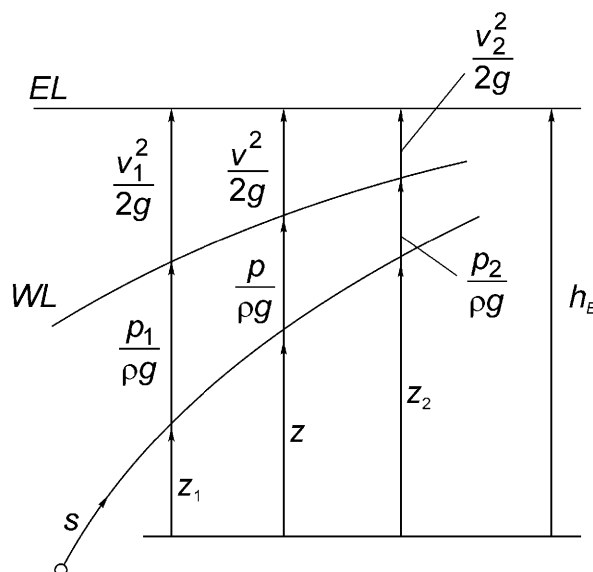


Рис. 8.3. Линия тока при стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости. Показаны частичные энергетические напоры.

также (2.85)) и $v^2/2g$ – остающийся скоростной напор при постоянном энергетическом уровне h_E , соответствующем данной линии тока идеальной жидкости.

Силы тяжести можно исключить, если ввести статическое давление в покоящейся жидкости (см. раздел 2.3.1)

$$p_s + \rho gz = \text{const} . \quad (8.39)$$

Вычитая это равенство из уравнения Бернулли, умноженного на плотность ρ (тогда все слагаемые приобретут размерность напряжений), найдем

$$\frac{\rho v^2}{2} + (p - p_s) = \text{const} . \quad (8.40)$$

Сумма кинетической энергии единицы объема (давление застоя) и динамического давления $p_d = p - p_s$ есть константа для данной линии тока, и высота исключается из уравнения, если нет граничных условий, содержащих абсолютное давление (то есть, например, нет свободной границы).

Если стационарное течение безвихревое, $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, то (конвективное) ускорение, выражаемое формулой (1.44), становится градиентным полем и уравнение Эйлера для идеальной жидкости связывает два градиента

$$\rho \text{grad} \frac{v^2}{2} = -\text{grad}(W' + p) , \quad W' = \rho gz . \quad (8.41)$$

Проектирование этого соотношения на произвольное направление в пространстве и интегрирование дают сохранение механической энергии единицы объема с универсальной постоянной Бернулли (одной и той же для всех линий тока). Предположение о безвихревом характере течения существенно.

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + W' = \text{const} . \quad (8.42a)$$

Исключение сил тяжести приводит к тому, что сумма давления застоя и динамического давления оказывается универсальной константой

$$\frac{\rho v^2}{2} + p_d = \text{const} . \quad (8.42b)$$

Эта константа является универсальной, если, например, все линии тока в идеальной жидкости начинаются в некотором большом резервуаре, где скорости настолько малы, что их квадратами можно пренебречь.

Уравнение (8.40) применяется к стационарному течению в трубах. В практически важных конструкциях следует принять во внимание потерю напора за счет вязкости (см. проведенное далее обобщение).

8.5.1. Стационарное течение при поглощении или выделении мощности

Рассмотрим одномерное течение в трубе при наличии насоса; тогда в потоке массы происходит поглощение мощности (см. рис. 8.4). Течение предполагаем стационарным, а жидкость – несжимаемой. Не вдаваясь в детали распределения сил у лопастей (вращающегося) насоса, будем условно считать, что внутри насоса действуют массовые силы с плотностью k^* , которые производят дополнительную работу. Так как линия тока есть также траектория частицы, то обобщенное уравнение Бернулли может быть получено из уравнения (8.6), взятого для единицы массы,

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -g(z_2 - z_1) - \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\rho} k_t^* ds. \quad (8.43)$$

Расход массы

$$\dot{m} = \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$$

постоянен и за дифференциал времени dt над элементом массы dm в насосе совершается работа $P dt$. Следовательно, работа, совершаемая над единицей массы,

$$\frac{\delta W}{dm} = \frac{P dt}{\dot{m} dt} = \frac{P}{\dot{m}} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\rho} k_t^* ds. \quad (8.44)$$

Подставляя этот результат в (8.43), получим увеличение плотности кинетической энергии, равное суммарной работе внешних и внутренних сил [если $P > 0$, то мощность в потоке поглощается (за счет насоса), если $P < 0$, то мощность выделяется, например, в турбине],

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -g(z_2 - z_1) - \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + \frac{P}{\dot{m}}, \quad \dot{m} = \text{const}. \quad (8.45a)$$

Это уравнение также пригодно для рассмотрения энергетических потерь при стационарном течении вязкой жидкости в трубе. Деля (8.45a) на g , найдем

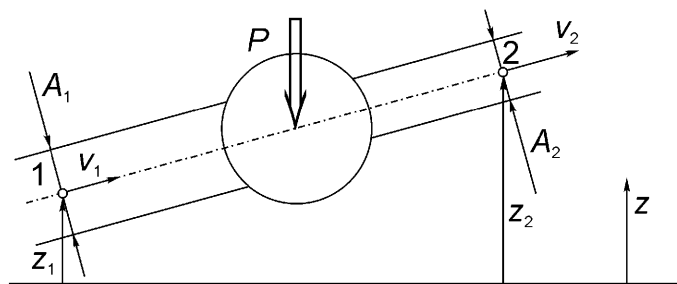


Рис. 8.4. Стационарное течение несжимаемой жидкости при поглощении мощности, $P > 0$, или выделении мощности, $P < 0$.

(потери учитываются как напор h_l из-за непрерывности стационарного потока массы)

$$\frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) = -(z_2 - z_1) - \frac{1}{\rho g}(p_2 - p_1) - h_l, \quad \dot{m} = \text{const}. \quad (8.45b)$$

Обсуждение ньютоновской вязкой жидкости см. в разделе 13.3.1, а также см. (4.67). Уравнение (8.45) выполняется также для узкой трубки тока в общем случае (вязкого) течения, если оно остается стационарным.

При расчете гидравлических систем с поглощением мощности, (8.45a) умножают на ρ и вводят суммарное динамическое давление; тогда кинетическая энергия единицы объема исключается

$$p_t = \frac{\rho v^2}{2} + p_d, \quad p_d = p - p_s, \quad p_s + \rho g z = \text{const}. \quad (8.46)$$

Работа, совершенная насосом над единицей объема жидкости, превышает суммарное давление на

$$p_{t2} - p_{t1} = \frac{\rho P}{\dot{m}}. \quad (8.47)$$

Через поперечное сечение 1 жидкость вводится в устройство и через сечение 2 – выводится.

8.5.2. Скорость истечения жидкости через малое отверстие из открытого сосуда или емкости, находящейся под давлением (рис. 8.5)

Жидкость вытекает в виде свободной струи поперечного сечения $A_2 \ll A_1$. Однако и то же атмосферное давление p_0 действует на свободную поверхность 1 открытого сосуда и на свободную струю. Это же давление имеется и внутри струи. Уравнение Бернулли (8.38) приближенно выполняется для линии тока, показанной на рис. 8.5, где скорость v_1 на свободной поверхности можно счи-

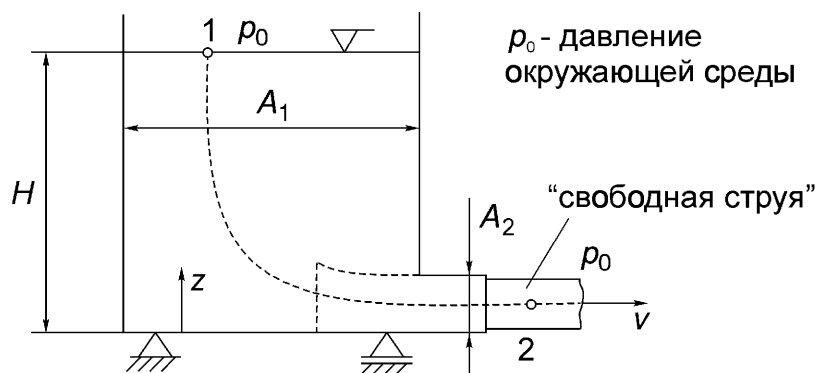


Рис. 8.5. Стационарное истечение жидкости из отверстия. Атмосферное давление предполагается постоянным по высоте H .

тать равной нулю. Если $H = \text{const}$, то течение приближенно стационарно и

$$\frac{p_1}{\rho g} + H = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}. \quad (8.48a)$$

Полагая $p_1 = p_2 = p_0$, получим теорему Торричелли (он был учеником Галилея)

$$v = \sqrt{2gH}. \quad (8.48b)$$

Эту формулу легко обобщить на случай избыточного давления в емкости. Если считать, что давление на поверхности жидкости 1 $p_1 > p_0$ за счет находящегося выше газа, то (8.48a) дает

$$v = \sqrt{2g \left(\frac{p_1 - p_0}{\rho g} + H \right)}. \quad (8.48c)$$

Если высота H в открытом сосуде медленно меняется со временем, то течение становится нестационарным, но время вытекания жидкости до уровня $H_1 < H$ по-прежнему может быть найдено с помощью квазистационарного рассмотрения (см. опять рис. 8.5)

$$A_2 v dt = -A_1 dz_1, \quad dt = -\frac{A_1}{A_2} \frac{dz_1}{v}.$$

Подставляя сюда приближенное выражение

$$v = \sqrt{2gz_1(t)}$$

и интегрируя, получаем время, за которое опустится уровень,

$$t_e = \frac{\sqrt{2}A_1}{gA_2} (\sqrt{gH} - \sqrt{gH_1}). \quad (8.49)$$

8.5.3. Стационарное обтекание погруженного в жидкость неподвижного твердого тела

Вдали от тела течение предполагается однородным; скорость течения равна v_∞ , см. рис. 8.6. Такое течение идеальной жидкости остается потенциальным и вблизи погруженного тела. Нетрудно установить, что постоянная в уравнении Бернулли не зависит от выбранной линии тока

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \frac{v_\infty^2}{2g} + \frac{p_\infty}{\rho g} + z_\infty = \text{const}. \quad (8.50)$$

Так как $v_\infty = \text{const}$ и гидростатическое давление, возникающее из-за сил тяжести, распределено линейно, то $p_\infty + \rho g z_\infty = \text{const}$ и постоянная Бернулли в

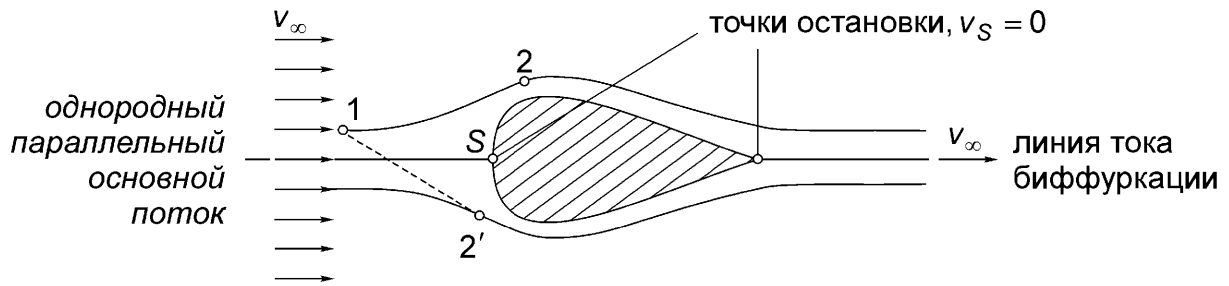


Рис. 8.6. Стационарное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью погруженного неподвижного твердого тела. Отмечены точки остановки и разветвление линии тока, проходящей через эти точки.

(8.50) одна и та же для всех линий тока. Сохранение механической энергии единицы массы выполняется для всего объема жидкости, например, для точек 1 и 2'. Если нет поверхности с заданным давлением, то силы тяжести можно исключить и они не влияют на течение

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_d}{\rho g} = \text{const}' \quad (8.51)$$

Постоянная здесь универсальна.

8.5.4. Течение идеальной жидкости у твердой стенки

Если пренебречь вязкостью, то линии тока в окрестности гладкой неподвижной твердой стенки повторяют ее профиль. Различие напоров в двух точках линии тока измеряется манометром, см. рис. 8.7. Статическое давление с левой стороны у основания столба жидкости равно $p_l = p_1 + \rho g(H + z_1)$. С другой стороны манометра давление равно $p_r = p_2 + \rho g(H + z_2)$, разность равна $p_l - p_r = (p_1 + \rho g z_1) - (p_2 + \rho g z_2)$. Для стационарного течения несжимаемой жидкости от точки 1 до точки 2 уравнение Бернулли дает

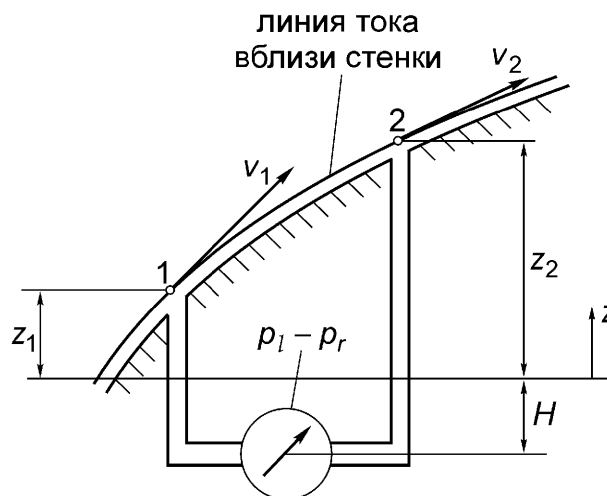


Рис. 8.7. Манометр измеряет разность скоростных напоров в точках 1 и 2.

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + H + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + H + z_2.$$

Таким образом, манометр измеряет разность скоростных напоров, а не давление в потоке (как можно было бы ожидать)

$$p_l - p_r = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

8.5.5. Измерение давления в трубе с помощью манометрической трубки

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости в трубе переменного сечения; измеряются высоты столбов жидкости в манометрических трубках, прикрепленных к трубе в точках 1 и 2, см. рис. 8.8. Условие равновесия столба жидкости дает, соответственно, давления $p_1 = p_0 + \rho g z_1$ и $p_2 = p_0 + \rho g(H + z_2)$, разность равна

$$z_1 - z_2 = H + \frac{(p_1 - p_2)}{\rho g}.$$

Пренебрегая вязкостью, применим уравнение Бернулли к линии тока между точками 1 и 2

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + H = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}.$$

Разность давлений равна

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} - H,$$

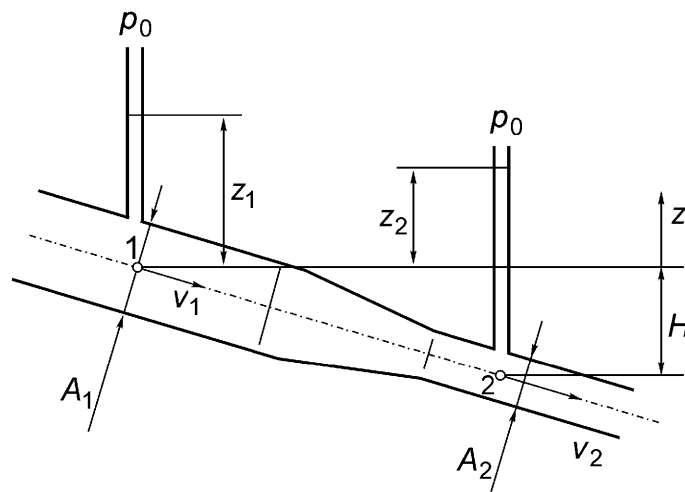


Рис. 8.8. Стационарное течение несжимаемой жидкости в трубе переменного сечения. Разность давлений измеряется двумя манометрическими трубками, открытыми атмосферному давлению p_0 .

и измеряемая величина пропорциональна скоростному напору

$$z_1 - z_2 = \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2g}.$$

Скорость можно исключить из массового баланса и два измеренных напора входят в формулу

$$\dot{m} = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 = \rho \sqrt{2} A_1 A_2 \sqrt{g(z_1 - z_2) / (A_1^2 - A_2^2)}.$$

8.5.6. Трубка Прандтля и трубка Пито

С помощью этих трубок можно измерить профиль скоростей по сечению потока, регистрируя давление манометром «без протекания». Трубка Прандтля имеет два открытых конца, как показано на рис. 8.9(a), и манометр измеряет разность давлений в точке остановки S и в точке A' слегка возмущенного параллельного потока.

Применив уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной жидкости к линии тока, проходящей через точку остановки, получим

$$\frac{\rho}{2} v_S^2 + p_S = \frac{\rho}{2} v_A^2 + p_A.$$

Так как $v_S = 0$, $v_A = v_\infty$ и трубка предполагается очень тонкой, то измеряемая разность давлений равна

$$p_S - p_A \equiv \frac{\rho}{2} v_\infty^2. \quad (8.54)$$

Более проста трубка с одним открытым концом, находящимся в точке остановки, рис. 8.9(b). Манометр измеряет разность давлений по отношению к атмосферному давлению p_0 или к давлению p_∞ в отверстии стенки. В этом случае уравнение Бернулли дает (если пренебречь разностью высот)

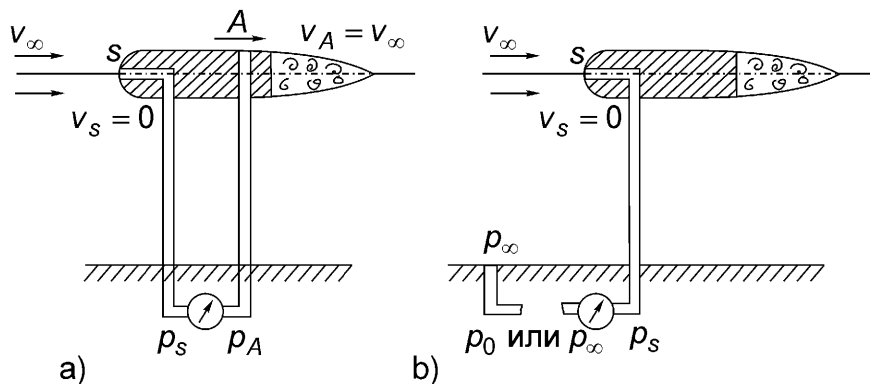


Рис. 8.9. Измерение локальной скорости v_∞ в спокойном потоке с помощью трубки Прандтля (a) и трубки Пито (b).

$$p_S - p_\infty \equiv \frac{\rho}{2} v_\infty^2. \quad (8.55)$$

8.5.7. Переходное течение в дренажной трубке, перекрываемой краном

Рассмотрим снова рис. 7.8, на котором кран перекрыт и жидкость неподвижна. После того, как кран внезапно открывается, возникает свободная струя несжимаемой жидкости сечения A_2 , движущаяся под действием атмосферного давления. Нестационарное течение (идеальной жидкости) вдоль линии тока длины L можно обобщить, рассматривая переменное сечение дренажной трубки, то есть считая скорость зависящей от длины дуги s (зависимость вводим в виде множителя)

$$v(s, t) = \frac{A_2}{A(s)} v_2(t) \equiv a(s) v_2(t).$$

Применив обобщенное уравнение Бернулли (8.35) к некоторому моменту времени после внезапного открытия крана, получим (ось трубки горизонтальна)

$$v_2 \int_0^L a(s) ds + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho}, \quad p_2 = p_0.$$

В большом открытом контейнере течение жидкости квазистационарно, свободная поверхность находится под давлением p_0 на постоянной высоте H , см. рис. 8.5. Тогда, соединяя линией тока свободную поверхность с входом дренажной трубки и применяя уравнение Бернулли, приближенно найдем

$$0 + \frac{p_0}{\rho} + gH = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho}.$$

Объединяя два уравнения и подставляя эффективную длину L_{eff} вместо интеграла по (гладкому) профилю сечения, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{v}_2 = \frac{v_\infty^2 - v_2^2}{2L_{eff}}, \quad gH = \frac{v_\infty^2}{2}.$$

Легко решая это уравнение методом разделения переменных, найдем в явном виде скорость струи, которая асимптотически стремится к скорости Торричелли v_∞ (8.48)

$$v_2(t) = v_\infty \tanh \frac{v_\infty t}{2L_{eff}}. \quad (8.56)$$

8.5.8. Свободные колебания жидкости в открытой U-образной трубке

Свободные поверхности покоящейся жидкости находятся на одной и той же высоте под действием одного и того же атмосферного давления p_0 (см. рис. 8.10). Трубку имеет постоянное сечение A , прямолинейные участки наклонены к горизонту под углами α и β , соответственно. Возмущение давления на уровне 1 приводит к нестационарному течению жидкости, которую считаем идеальной и несжимаемой. Линия тока имеет постоянную длину L , но ее конфигурация меняется и следует применить нестационарное уравнение Бернулли (8.35) [$x(t)$ – координата свободной поверхности 1]

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1,$$

$$v_1 = v_2 = v(t) = \dot{x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \ddot{x}.$$

Учитывая, что $p_1 = p_2 = p_0$ и выражая высоты через координату x : $z_1 = -x \sin \alpha$, $z_2 = x \sin \beta$, приходим к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$L\ddot{x} + g(\sin \alpha + \sin \beta)x = 0.$$

Таким образом, вследствие постоянства сечения жидкость совершает линейные колебания; нормализованное уравнение движения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}(\sin \alpha + \sin \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (8.57)$$

Период свободных колебаний $T = 2\pi/\omega_0$. Если наклонные участки вертикальны, $\alpha = \beta = \pi/2$, то $T = 2\pi\sqrt{L/2g}$; это значение можно сравнить с периодом линейных колебаний математического маятника, см (7.116).

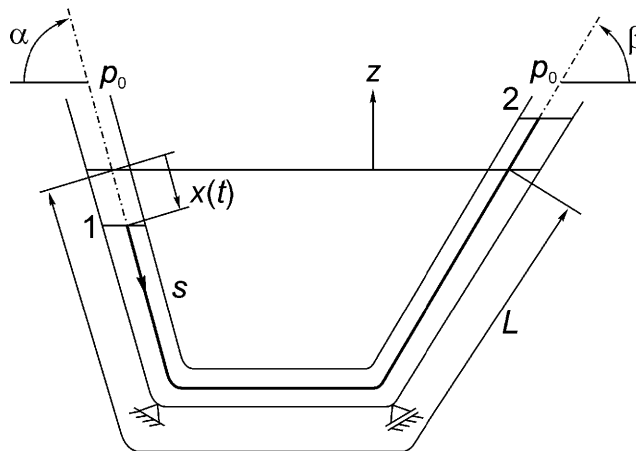


Рис. 8.10. Свободные колебания идеальной жидкости в трубке переменного сечения A .

Для того, чтобы избежать повторяющегося гидравлического удара, снабженная краном дренажная трубка резервуара соединена в верхней части с наполненной водой емкостью. Если кран внизу перекрыт, то жидкость может совершать колебания в системе трубок переменного сечения. Такая система показана на рис. 8.11; линия тока рассматривается в некоторый момент времени. Нестационарное движение жидкости значительно идеализировано, так как потерями в потоке пренебрегаем (несмотря на то, что может происходить, например, потеря давления Карно в точке 4 при указанном направлении течения).

Уравнение движения, записанное в терминах координаты $x(t)$, становится нелинейным. Для участков системы с постоянными сечениями локальные ускорения выражаются формулами (см. рис. 8.11):

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 2: \quad v &= \dot{x}(t), & \frac{\partial v}{\partial t} &= \ddot{x}(t), \text{ участок длины } l_1(x), \\ 2 \rightarrow 3: \quad v &= \frac{A_1}{A_2} \dot{x}(t), & \frac{\partial v}{\partial t} &= \ddot{x} \frac{A_1}{A_2}, \text{ участок длины } l_2, \\ 3 \rightarrow 4: \quad v &= \frac{A_1}{A_3} \dot{x}(t), & \frac{\partial v}{\partial t} &= \ddot{x} \frac{A_1}{A_3}, \text{ участок длины } l_3, \\ 4 \rightarrow 5: \quad v &= \frac{A_1}{A_4} \dot{x}(t), & \frac{\partial v}{\partial t} &= \ddot{x} \frac{A_1}{A_4}, \text{ участок длины } l_4(x). \end{aligned}$$

Интеграл по линии тока в нестационарном уравнении Бернулли легко вычисляется по участкам

$$\int_1^5 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_5^2}{2} + \frac{p_5}{\rho} + gz_5 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1, \quad v_1 = \dot{x}, \quad v_5 = \frac{A_1}{A_4} \dot{x},$$

$$s_5 = \frac{A_1}{A_4} s_1, \quad p_1 = p_5 = p_0.$$

Полагая $z_5 = s_5 \sin \beta$ и $z_1 = -x$, получим нелинейное уравнение колебаний

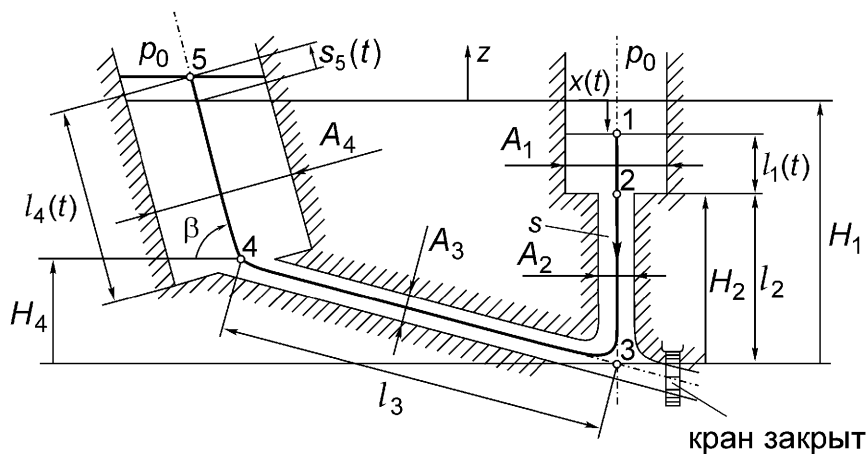


Рис. 8.11. Нелинейные колебания жидкости в системе трубок переменного сечения.

$$f(x)\ddot{x} - \frac{b}{2}\dot{x}^2 + cx = 0, \quad (8.58)$$

где

$$f(x) = l_1 + \frac{A_1}{A_2}l_2 + \frac{A_1}{A_3}l_3 + \frac{A_1}{A_4}l_4, \quad b = \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_4}\right)^2\right],$$

$$l_1(x) = H_1 - H_2 - x, \quad l_2 = H_2, \quad l_3, \quad c = g\left(\frac{A_1}{A_4}\sin\beta + 1\right),$$

$$l_4(x) = \left(H_1 - H_4 + x\frac{A_1}{A_4}\sin\beta\right) / \sin\beta.$$

Нелинейные члены являются квадратичными. Принцип суперпозиции для решений такого уравнения не выполняется. При практическом использовании уравнения (8.58) следует добавить в него слагаемые, учитывающие сопротивление. Решить это уравнение можно, видимо, только численно.

8.5.9. Течение без потерь через диффузор

При дозвуковом стационарном течении жидкости через трубку увеличивающегося сечения кинетическая энергия преобразуется в напор. Рассмотрим идеализированный диффузор и течение несжимаемой жидкости без потерь от сечения A_1 до $A_2 > A_1$; уравнение Бернулли дает

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{\bar{p}_2}{\rho g}, \quad \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2.$$

Следовательно, максимальное увеличение давления при таких идеализированных условиях равно

$$\bar{p}_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{\rho v_1^2}{2} \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right). \quad (8.59)$$

Скачкообразное увеличение площади поперечного сечения и возникающая при этом потеря напора Карно были рассмотрены в разделе 7.3.5, см. (7.49). Таким образом, если давление p_1 считается одинаковым для обеих конфигураций, то потеря напора и коэффициент потери выражаются, соответственно, формулами

$$\bar{p}_2 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2, \quad \frac{p_2 - p_1}{\bar{p}_2 - p_1} = \frac{2A_1/A_2}{1 + A_1/A_2}, \quad A_2 > A_1. \quad (8.60)$$

8.5.10. Уравнение типа Бернулли во вращающейся системе отсчета

Применение уравнения Бернулли к течению жидкости во вращающихся устройствах значительно упрощается, если рассматривать линии тока в относительном движении, то есть в системе отсчета, связанной с вращающимся устройством. Для равномерного вращения относительное течение становится стационарным. Другая форма уравнения (8.31) получается посредством интегрирования уравнения Эйлера движения идеальной жидкости по относительной линии тока. Кинематика относительного движения дает абсолютное ускорение \mathbf{a} в виде суммы трех векторов: ускорения материальной точки, предполагаемой неподвижной в движущейся системе отсчета (связанной с твердым телом, движение которого задано движением полюса A' и мгновенным вращением с угловой скоростью Ω), ускорения Кориолиса и ускорения относительно движущейся системы отсчета. Выражения для этих ускорений получаются непосредственно двукратным дифференцированием по времени радиуса-вектора точки, отложенного от начала инерциальной системы отсчета. Последовательно имеем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}' \quad , \quad \mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} \quad , \quad (8.61)$$

где штрих означает относительную часть вектора и d'/dt есть производная по времени в движущейся системе отсчета, см. формулу (7.58). Переносную скорость \mathbf{v}_g найдем, считая относительный радиус-вектор \mathbf{r}' неподвижным в движущейся системе отсчета, связанной с твердым телом,

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}' \quad , \quad \mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} .$$

Вторая производная по времени вычисляется почленно и дает ускорение в требуемой форме

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}' \quad , \quad \mathbf{a} = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} \quad , \quad \mathbf{a}_c = 2(\Omega \times \mathbf{v}') . \quad (8.62)$$

Переносное ускорение соответствует ускорению точки, связанной с подвижной системой координат (твердым телом) [см. (1.9) и (1.10)]

$$\mathbf{a}_g = \mathbf{a}_A + \frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{r}' + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}') \quad , \quad \mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} .$$

Ускорение Кориолиса \mathbf{a}_c всегда перпендикулярно относительной скорости \mathbf{v}' (см. задачу А 7.1) и, следовательно, не имеет компоненты, касательной к относительной линии тока. Последняя определяется как линия поля относительных скоростей. Относительное ускорение \mathbf{a}' есть относительная скорость относительной скорости по отношению к движущейся системе отсчета. Аналогично

(8.31) проектирование производится на направление $\mathbf{v}' = v'(t, s') \mathbf{e}'_t$, и интегрирование по длине дуги s' относительно линии тока при фиксированном времени дает

$$\int_{s'_1}^{s'_2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_t ds' = \int_{s'_1}^{s'_2} \frac{1}{\rho} k'_t ds' - \int_{s'_1}^{s'_2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s'} ds'. \quad (8.63)$$

Проектируя ускорение, получаем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_t = \mathbf{a}_g \cdot \mathbf{e}'_t + \mathbf{a}' \cdot \mathbf{e}'_t, \quad (8.64)$$

\mathbf{a} касательная компонента относительного ускорения в эйлеровом описании выражается общей формулой

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{e}'_t = \frac{\partial' v'}{\partial t} + \frac{\partial'}{\partial s'} \left(\frac{v'^2}{2} \right).$$

Далее рассмотрим относительное стационарное течение [(8.63) принимает стационарный вид],

$$\frac{1}{2} (v_2'^2 - v_1'^2) = \int_{s'_1}^{s'_2} \frac{1}{\rho} k'_t ds' - \frac{1}{\rho} (\rho_2 - \rho_1) - \int_{s'_1}^{s'_2} (\mathbf{a}_g \cdot \mathbf{e}'_t) ds', \quad (8.65)$$

$$\frac{\partial' v'}{\partial t} \equiv 0.$$

Формально это уравнение совпадает по виду с классическим стационарным уравнением Бернулли, за исключением дополнительного слагаемого в правой части, которое представляет собой интеграл от касательной компоненты переносного ускорения по относительной линии тока. В выражение для кинетической энергии единицы массы следует подставить относительные скорости. Обычно можно считать, что полюс A' неподвижен, $A' = O$ и $a_A = 0$.

Если применить (8.65) к относительной линии тока в горизонтальной плоскости, например, в водяной турбине с вертикальной осью вращения и постоянной угловой скоростью $\Omega = \text{const}$, то это уравнение существенно упрощается, так как $(\mathbf{e}'_r \cdot \mathbf{e}'_t) ds' = dr'$, что есть дифференциал радиальной координаты;

$$\frac{1}{2} (w_2^2 - w_1^2) = -\frac{1}{\rho} (\rho_2 - \rho_1) + \frac{\Omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2), \quad \mathbf{v}' \equiv \mathbf{w}. \quad (8.66)$$

Следовательно, в дополнительное слагаемое вносят вклад только радиальные проекции относительной линии тока. В инженерной практике обычно используют другие обозначения для скоростей. Так, относительная скорость обозначается через $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_g$, абсолютная скорость – через $\mathbf{v} \equiv \mathbf{c}$ и переносная ско-

рость – через $\mathbf{v}_g \equiv \mathbf{u}$, где \mathbf{u} – вектор окружной скорости, см. раздел 7.3.3. Обычно давление p_2 на выходе $r = r_2$ определяется из (8.66). Оно должно быть значительно выше, чем давление испарения жидкости, во избежание кавитации.

(§) Пример: Водяное колесо Сегнера

Простая, хотя и не очень эффективная разновидность реактивной турбины показана на рис 8.12 в виде вращающейся трубки. Предположим, что под действием надлежащего внешнего момента угловая скорость остается постоянной; тогда относительное течение через вращающуюся трубку становится стационарным и применимо уравнение (8.66). Полагая $r_1 = 0$ и, следовательно, $w_1 = v_1$ и считая, что давление в свободной струе равно атмосферному $p_2 = p_0$, найдем относительную скорость на выходе

$$w_2 = \left[v_1^2 - \frac{2}{\rho}(p_0 - p_1) + (r_2 \Omega)^2 \right]^{1/2}. \quad (8.67)$$

Если вода подается из открытого резервуара с постоянным уровнем $H = \text{const}$ над выходом и с атмосферным давлением на свободной поверхности, то уравнение Бернулли для линии тока, проходящей через точку входа 1, дает

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} + H;$$

подставляя этот результат в (8.67), исключаем характеристики состояния точки на входе и получаем

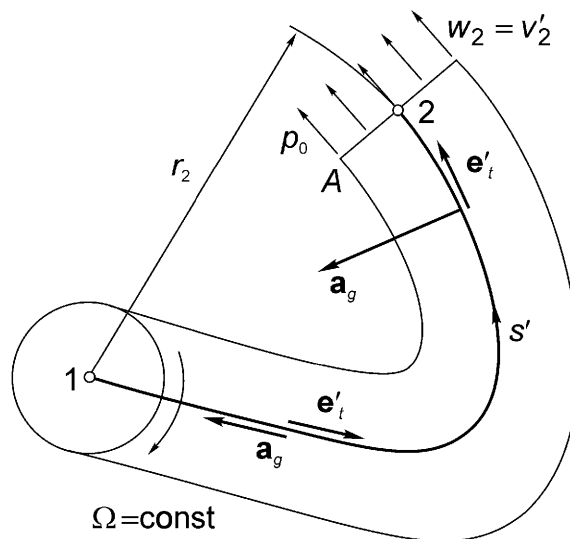


Рис. 8.12. Водяное колесо Сегнера как пример реактивной турбины.

$$w_2 = \sqrt{2gH + (r_2\Omega)^2}. \quad (8.68a)$$

Полезно сравнить это выражение с формулой Торричелли (8.48). Дугообразная часть вращающейся трубки не вносит вклада в поправочный член в (8.67), так как \mathbf{a}_g в этой части перпендикулярно касательной \mathbf{e}'_t . (Постоянный) расход массы равен $\rho A w_2$. Момент M_w легко вычисляется из закона сохранения момента количества движения; контрольный объем может вращаться вместе с частью водяного колеса. Мощность, выделяемая идеальной (без потерь) турбиной, $P < 0$,

$$P = -Mw\Omega = \rho A v_\infty^3 \xi \left(\xi - \sqrt{1 + \xi^2} \right) \sqrt{1 + \xi^2}, \quad \xi = r_2\Omega / v_\infty, \quad v_\infty = \sqrt{2gH}. \quad (8.68b)$$

Теоретический коэффициент полезного действия получается делением этой величины на поданную мощность P_0 , $\eta_{th} = P / P_0 < 1$. Последняя есть потенциальная энергия расходуемой за единицу времени жидкости на максимальной высоте H

$$P_0 = -\dot{m}gH = -\frac{1}{2}\rho A v_\infty^3 \sqrt{1 + \xi^2}. \quad (8.68c)$$

8.6. Замечания о первом начале термодинамики (сохранение энергии)

Если учитывать трение при движении с сопротивлением деформациям (например, у вязко-пластических материалов), то поле (стационарных) сил всегда неконсервативно: закон сохранения механической энергии, выражаемый формулой (8.8), не выполняется. Работа диссипативных сил не может полностью перейти в механическую энергию, так как происходящее выделение тепла относится к необратимым процессам теплопереноса. Так как при деформации происходит диссипация энергии, то неконсервативное поле сил более точно следует называть диссипативным. Уравнение (8.8), записанное в скоростях, легко обобщить так, чтобы учесть выделение тепла и тепловой поток в материальном объеме. Вычисляя производную по времени от $T + V = E = \text{const}$, где $V = U + W$ (U – упругий потенциал), найдем

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -\frac{dW}{dt} = P^{(e)}. \quad (8.69)$$

Скорость изменения кинетической энергии и упругого потенциала равна мощности внешних сил при движении без потерь. Следовательно, уравнение (8.69) следует обобщить, добавляя выделение тепла в единицу времени (за счет

внешних источников) и учитывая поток тепла через поверхность тела (далее рассматривается внешняя нормаль). В левой части следует записать обобщение плотности упругого потенциала – внутреннюю энергию u единицы массы: она соответствует кинетической и потенциальной энергии молекул и является термодинамической функцией состояния (она совершенно отлична от механической энергии единицы массы $v^2/2$, соответствующей движению сплошной среды)

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) dV = P^{(e)} + P^{(q)} - \oint_{\partial V(t)} q_n dS. \quad (8.70)$$

Интегрирование выполняется по материальному объему и по материальной поверхности (без расхода массы). После такого обобщения уравнение (8.70) утверждает следующее: скорость изменения полной энергии тела равна мощности внешних сил, как и в уравнении (8.69), плюс мощность, выделяемая внешними источниками тепла, и мощность потока тепла через неизолированную поверхность тела. Другие формы электромагнитной энергии здесь не рассматриваются. В твердых телах теплообмен излучением может быть малым, и вектор плотности потока тепла пропорционален градиенту температуры в соответствии с законом теплопроводности Фурье, (6.353). Подставляя (8.5) в вышенаписанное уравнение, исключаем скорость изменения кинетической энергии, а также мощность внешних сил, и (8.70) принимает обычно используемый вид первого начала термодинамики

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u dV = -P^{(i)} + P^{(q)} - \oint_{\partial V(t)} q_n dS. \quad (8.71)$$

«Скорость изменения внутренней энергии равна теплу, полученному в единицу времени минус мощность внутренних сил.» Если слагаемые, отвечающие за теплопередачу, сокращаются

$$P^{(q)} - \oint_{\partial V(t)} q_n dS = 0,$$

то удельная внутренняя энергия единицы объема ρu становится плотностью энергии деформации U' из уравнения (3.30). Преобразуя поверхностный интеграл в уравнении (8.71) в интеграл по материальному объему с помощью теоремы Гаусса и учитывая, что это уравнение должно выполняться для любого материального объема, получим закон изменения энергии в локальной (дифференциальной) форме, опуская одинаковое интегрирование. Можно доказать необратимость любых деформационных процессов с помощью второго начала термодинамики, часто используемого в виде неравенства Клаузиуса-Дюгема для производства энтропии. Состоятельность определяющих соотношений

также следует проверять с помощью такого термодинамического рассмотрения, смотрите, например:

- Parkus H. Thermoelasticity. Wien – New York, Springer-Verlag, 1976, 2nd ed., Chap.5.

Уравнение (8.70) можно преобразовать с помощью транспортной теоремы Рейнольдса, (1.72), для того, чтобы считать контрольный объем неподвижным с расходом массы через поверхность ∂V (обратите внимание на слагаемые в правой части, отвечающие за производство энергии)

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) dV + \oint_{\partial V} \mu \left(\frac{v^2}{2} + u \right) dS = P^{(e)} + P^{(q)} - \oint_{\partial V} q_n dS, \quad (8.72)$$

$$\mu = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n).$$

Объемный интеграл есть нестационарная скорость изменения полной энергии, поверхностный интеграл определяет потерю полной энергии за счет расхода массы через поверхность. Сумма равна мощности внешних сил, действующих на массу внутри контрольного объема, плюс тепловыделение в единицу времени. Уравнение (8.72) замыкает набор законов сохранения массы, изменения количества движения и момента количества движения законом изменения энергии (скалярной величины). Если вынести частную производную по времени из под знака объемного интеграла и заменить относительный расход массы скалярным произведением $\mu = \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_n$, то получим закон изменения энергии для движущегося контрольного объема, см. (1.82).

8.7. Задачи А 8.1 – А 8.6 и решения

А 8.1: Масса корпуса тележки – m_1 ; диаметр каждого колеса – $2a$; тележка приводится в движение тросом, намотанным на прикрепленный к переднему колесу барабан диаметра a . Переднее и заднее колеса соединены твердым стерж-

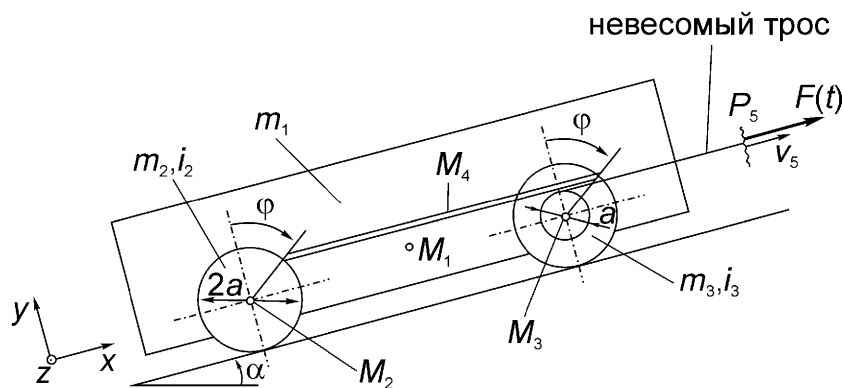


Рис. А 8.1. Динамическая система с одной степенью свободы.

нем массы m_4 , см. рис. А 8.1. Найти уравнение движения относительно $\varphi(t)$, используя (8.5); предполагается, что качение происходит без проскальзывания. Найти также силу натяжения троса $F(t)$ для стационарного движения $d\varphi/dt = \omega = \text{const}$.

Решение: Центры масс корпуса и колес (с массами m_1, m_2, m_3) имеют одинаковую скорость $v = v_1 = v_2 = v_3 = a d\varphi/dt = a\omega$. Угловые скорости: $\omega_1 = 0, \omega_2 = \omega_3 = \omega$; стержень совершает поступательное движение и $\omega_4 = 0$, скорость стержня $\mathbf{v}_4 = (v + a\omega \cos \varphi) \mathbf{e}_x - a\omega \sin \varphi \mathbf{e}_y$; ее модуль $|v_4| = 2a\omega \cos(\varphi/2)$. Кинетическая энергия представляет собой сумму

$$T(t) = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 + m_4 v_4^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2).$$

Мощность внешних сил

$$P^{(e)}(t) = Fv_5 + (m_1 + m_2 + m_3) g v \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + m_4 g v_4 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$v_5 = \frac{3}{2} v = \frac{3}{2} a\omega,$$

сумма мощностей внутренних сил равна нулю. Уравнение $dT/dt = P$ после деления на $\omega \neq 0$ приводит к дифференциальному уравнению движения второго порядка:

$$\left[m_1 + m_2 \left(1 + \frac{i_2^2}{a^2} \right) + m_3 \left(1 + \frac{i_3^2}{a^2} \right) + 2m_4 (1 + \cos \varphi) \right] a \ddot{\varphi} - m_4 a \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + g \left[(m_1 + m_2 + m_3) \sin \alpha + 2m_4 \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2} \right] = \frac{3}{2} F(t).$$

Для достижения постоянной скорости сила натяжения троса должна быть переменной; эта сила $F(t)$ определяется подстановкой $\omega = \text{const}$, $d\omega/dt = 0$ и $\varphi = \omega t$ в написанное выше уравнение.

А 8.2: Найти соотношение, связывающее угол φ наклона концов лопастей радиальной водяной турбины и мощность P , необходимую для достижения высоты H_1 уровня воды; система показана на рис. А 8.2. Размеры ротора задаются внутренним радиусом r_1 , внешним радиусом r_2 и шириной канала B . В состоянии покоя концы ведущих лопастей ориентированы так, что поток воды подхо-

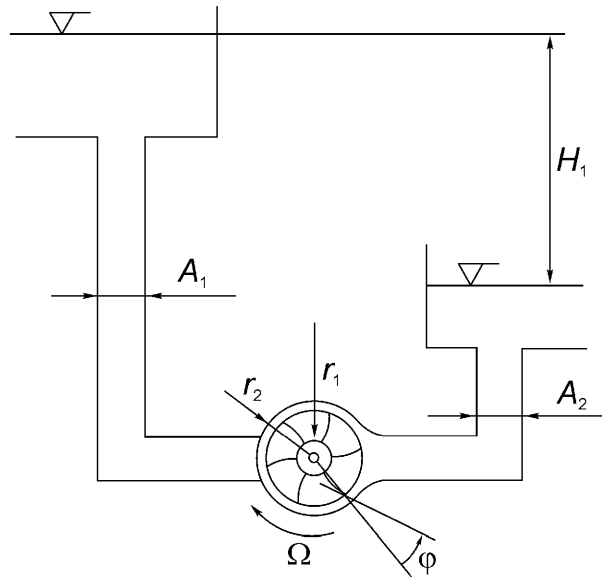


Рис. А 8.2. Силовая установка с радиальной турбиной.

дит к ним под углом α_1 ; предполагается, что ротор вращается равномерно, $\Omega = \text{const}$.

Решение: Предполагаем, что обе свободные поверхности находятся под одинаковым (атмосферным) давлением и имеют постоянные уровни, отличающиеся на H . Из обобщенного уравнения Бернулли (8.45) приближенно найдем

$$0 = gH - P/\dot{m}, \quad P > 0.$$

Турбинное уравнение Эйлера (7.46) можно решить для касательной компоненты абсолютной скорости на выходе ротора

$$c_{2u} = \frac{1}{r_2 \Omega} \left(gH_1 - \frac{\dot{m} \Omega}{2\pi r B} \text{tg} \alpha_1 \right).$$

Предполагая, что относительное течение на выходе ротора направлено по касательной к концу лопасти, находим искомый угол

$$\varphi = \text{arctg} \left(\frac{r_2 \Omega - c_{2u}}{c_{2r}} \right), \quad c_{2r} = \frac{\dot{m}}{2\pi r_2 B \rho}.$$

А 8.3: Сферическая оболочка с углом раствора 2α и веса G поддерживается свободной вертикальной струей, как показано на рис. А 8.3. Найти равновесное положение оболочки, если подводная трубка соединена с емкостью, находящейся под избыточным давлением $p_1 - p_0 = \text{const}$, $H = \text{const}$. Рассматривается стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости.

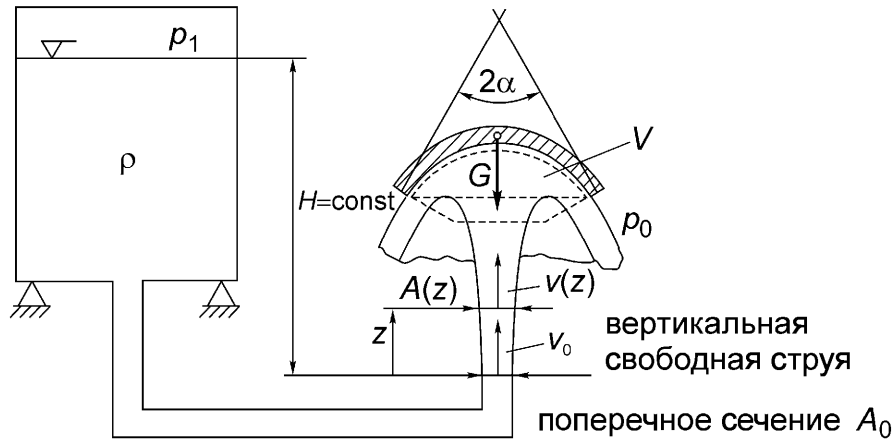


Рис. А 8.3.

Решение: Скорость свободной струи у выходного отверстия и зависимость скорости от высоты определяются уравнением Бернулли

$$v_0 = \left[2gH + 2 \frac{p_1 - p_0}{\rho} \right]^{1/2} \quad \text{и} \quad v(z) = \sqrt{v_0^2 - 2gz}.$$

Так как расход массы $\rho A(z)v(z) = \rho A_0 v_0 = \text{const}$, то площадь сечения струи зависит от высоты нелинейно: $A(z) = A_0 v_0 / \sqrt{v_0^2 - 2gz}$. Если пренебречь изменением высоты на участке контакта струи с оболочкой, то закон изменения количества движения, примененный к показанному на рис. А 8.3 пунктиром контрольному объему, дает (p_0 – атмосферное давление)

$$-\rho v^2(z_S) A(z_S) (1 + \cos \alpha) = -F_z.$$

Учитывая условие равновесия $F_z - G = 0$, найдем координату

$$z_S = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2g} \left[\frac{G}{m(1 + \cos \alpha)} \right]^2.$$

А 8.4: Из цилиндрического резервуара диаметра D через отверстие диаметра d в дне вытекает жидкость (см. рис. А 8.4). Считая, что течение нестационарно и жидкость несжимаема, найти зависимость уровня $H(t)$ свободной поверхности от времени (достаточно составить дифференциальное уравнение).

Решение: Применим уравнение Бернулли (8.35) в нестационарной форме к линии тока, соединяющей точку на свободной поверхности и начало свободной струи (где давление равно p_0). Учитывая расход массы $\rho v_1 d^2 = \rho v_0 D^2$ и диф-

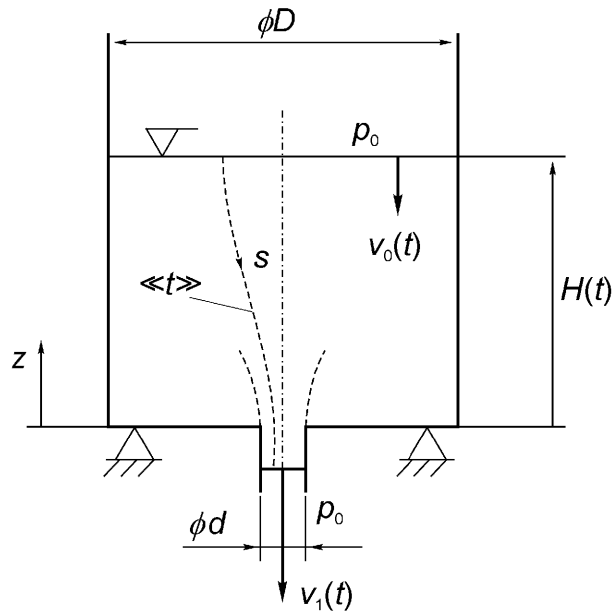


Рис. А 8.4. Нестационарное течение.

дифференциальное соотношение $v_0 dt = (-dH)$, получим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{H}H - \frac{1}{2} \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right) \dot{H}^2 + gH = 0.$$

В квазистационарном приближении

$$\dot{H} \approx \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gH}, \quad \ddot{H} \rightarrow 0,$$

что справедливо при $D \gg d$; это было найдено выше, см. (8.49).

А 8.5: Поршень массы m поддерживается линейной пружиной жесткости c и испытывает давление жидкости, как показано на рис. А 8.5.

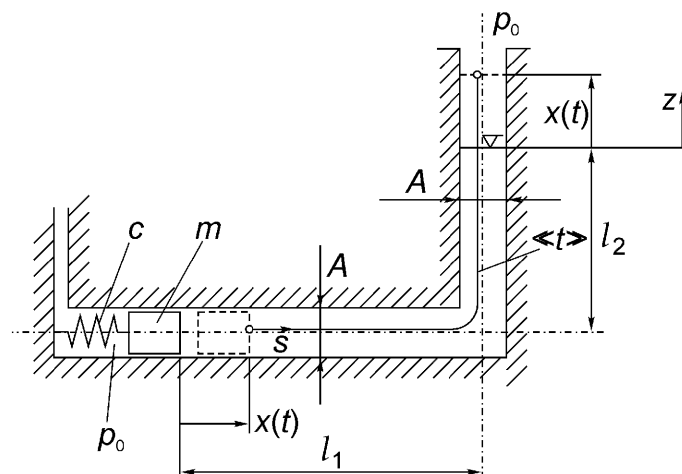


Рис. А 8.5. Свободные колебания связанной системы.

Найти уравнение свободных колебаний поршня вблизи положения равновесия, считая жидкость идеальной и несжимаемой а течение – стационарным.

Решение: L-образная трубка имеет постоянное сечение; применив (8.35) к мгновенной линии тока, найдем (в сочетании с условием неразрывности)

$$\int_0^{(l_1-x)+(l_2+x)} \frac{\partial v}{\partial t} ds = \ddot{x}(l_1 + l_2) = -\frac{1}{\rho}(\rho_0 - \rho_1) - gx.$$

Еще одно уравнение получим, записав второй закон Ньютона для поршня,

$$m\ddot{x} = -cx + (\rho_0 - \rho_1)A.$$

Исключая действующее на поршень давление ρ_1 , найдем уравнение линейных колебаний

$$\ddot{x}[m + \rho A(l_1 + l_2)] + (c + \rho gA)x = 0.$$

Сила упругости пружины колеблется около среднего значения $\rho gl_2/A$ (статическое значение в положении равновесия).

А 8.6: Несжимаемый поток воды ускоряется в конусообразном тоннеле, показанном на рис. А 8.6.

(а) Найти длину цилиндрической трубки диаметра D_2 , эквивалентной данному конусообразному тоннелю при расчете гидравлического удара. Работу контрольного клапана считать очень медленной.

Указание: Исключить квазистатическое давление, вычитая соответствующее уравнение Бернулли.

(б) Каково максимальное увеличение напора на контрольном клапане, если исходный поток воды $7,5 \text{ м}^3/\text{с}$ равномерно перекрывается в течение $t_e = 12$ секунд?

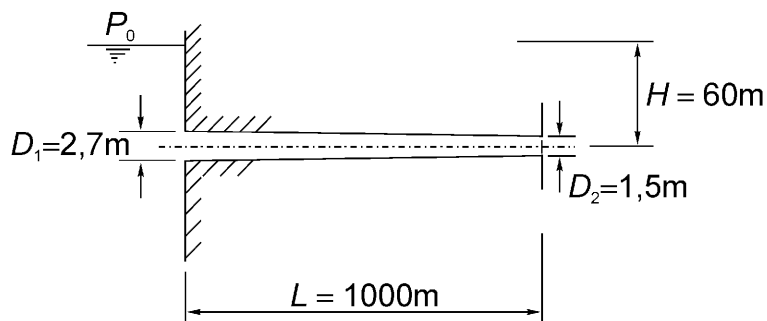


Рис. А 8.6.

Решение: Подставляя $D(x) = D_1 + (D_2 - D_1)x/L$ в (1.86) и относя там индекс 1 к точке с координатой $0 \leq x \leq L$, а индекс 2 – к точке с координатой $x = L$, находим

$$v(x, t) = \frac{A_2}{A(x)} v_2(t) = \frac{D_2^2}{D(x)^2} v_2(t).$$

(а) Вычитая из нестационарного уравнения (8.35) соответствующее квазистационарное

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -\frac{1}{\rho}(p_{s2}^* - p_1), \int_0^L \frac{\partial v}{\partial t} dx + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -\frac{1}{\rho}(p_{s2}^* + p_{d2} - p_1),$$

где давление разделено на две части $p_2(t) = p_{s2}^* + p_{d2}$, найдем

$$\int_0^L \frac{\partial v}{\partial t} dx = -\frac{1}{\rho} p_{d2} = \dot{v}_2 D_2^2 \int_0^L (D_1 + (D_2 - D_1)x/L)^{-2} dx = \frac{LD_2}{D_1} \dot{v}_2 = L_{eff} \dot{v}_2.$$

Следовательно, для размеров рис. А 8.6 $L_{eff} = \frac{LD_2}{D_1} = 555,5 \text{ м}$.

(b) Записывая динамическое давление в виде $p_{d2} = \rho g \Delta H = -\rho L_{eff} \dot{v}_2$ и полагая

$\dot{m} = \dot{m}_0(1 - t/t_e)$, откуда $\dot{v}_2(t) = -\frac{\dot{m}_0}{\rho A_2 t_e}$, найдем динамическое увеличение напора $\Delta H = 20 \text{ м}$.

9 Задачи устойчивости

Устойчивость равновесия плавающих тел уже изучалась выше с помощью простых методов статики; были найдены соответствующие условия устойчивости, записанные в виде неравенств типа (2.115). В данной главе изучается устойчивость равновесия консервативных систем на основе анализа движения, возникающего при возмущении положения равновесия (то есть используется динамический метод малых возмущений). Используется также эквивалентный статический критерий устойчивости Дирихле. Рассматриваются простые приложения: равновесие контактирующих тяжелых твердых тел, задачи о выпучивании тонких стержней и пластин (бифуркационные задачи), прощелкивание пологих арок при достаточно большой поперечной нагрузке. Расширение динамического метода малых возмущений на исследование устойчивости данного (основного) движения иллюстрируется анализом центробежного регулятора и свободного гироскопа. В третьем разделе главы исследуется устойчивость упруго-пластических конструкций как статически с помощью анализа предельной нагрузки, так и квазистатически, для переменного нагружения с помощью теорем Мелана и Койтера о приспособляемости. Далее обсуждаются вопросы гидродинамической устойчивости течения несжимаемой жидкости в открытых каналах и рассматриваются потери энергии при гидравлическом скачке, когда быстрое течение «внезапно» сменяется медленным. Наконец, описывается флаттерная неустойчивость как самовозбуждение колебаний в упрощенной модели крыла, возникающее при достаточно больших скоростях полета.

9.1. Устойчивость положения равновесия

Если в систему, находящуюся в состоянии покоя, вносится возмущение, то она может перейти в качественно различные новые положения равновесия. Эти различия отчетливо иллюстрируются рассмотрением плоского маятника с двумя положениями равновесия. Если центр масс находится ниже оси вращения, то равновесие, очевидно, устойчиво. Если же центр масс находится выше оси вращения, то реакция оси по-прежнему уравнивает силу тяжести, но даже при малейшем отклонении маятник начнет вращаться: верхнее положение равновесия неустойчиво. Определение устойчивости с использованием движения возмущенной системы может быть дано следующим образом. *«Положение равновесия устойчиво, если после достаточно малого возмущения система движется в окрестности этого положения, и размеры этой окрестности*

убывают при уменьшении возмущения.» Если использовать вектор состояния $x(t)$ в соответствии с (7.109), то определение можно сформулировать математически: Для любого $\varepsilon^* > 0$ существует $\eta^* > 0$, такое что если $|x^*(0)| < \eta^*$, то $|x^*(t)| < \varepsilon^*$. Из (9.4) следует, что $|\varepsilon^*(t)| < \varepsilon^* = \eta^*$, если $\alpha < \eta^* \ll 1$.

Нижнее положение равновесия маятника соответствует $\varphi_0 = 0$, в верхнем положении $\varphi_1 = \pi$. Из закона изменения момента количества движения получаем нелинейное уравнение движения данной консервативной системы [см. (7.22)]

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega_0^2 = gs/i^2. \quad (9.1)$$

Линеаризуем уравнение, учитывая малость возмущений. Будем надеяться, что линеаризация не изменит условия устойчивости. Для малых величин ε возмущенного движения линейное приближение дает

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon \cos \varphi_0 = 0, \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon, \quad \sin(\varphi + \varepsilon) = \sin \varphi_0 + \varepsilon \cos \varphi_0, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (9.2)$$

(§) Нижнее положение равновесия

Так как в этом случае $\varphi_0 = 0$, то $\cos \varphi_0 = 1$ и

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \quad (9.3)$$

есть линеаризованное уравнение колебаний без сопротивления; его общее решение

$$\varepsilon(t) = \alpha \cos(\omega_0 t - \eta). \quad (9.4)$$

Если $\alpha \ll 1$, то движение происходит в окрестности положения равновесия $\varphi_0 = 0$, $|\varepsilon| \ll 1$, и α уменьшается с уменьшением начального возмущения. Добавление сопротивления делает линеаризованную систему асимптотически устойчивой; возмущенное движение постепенно прекращается.

(§) Верхнее положение равновесия

Для этого положения $\varphi_0 = \pi$ и $\cos \varphi_0 = -1$, следовательно,

$$\ddot{\varepsilon} - \omega_0^2 \varepsilon = 0, \quad (9.5)$$

и решение неограниченно возрастает со временем

$$\varepsilon = a \exp(\omega_0 t) + b \exp(-\omega_0 t). \quad (9.6)$$

Условие линеаризации $|\varepsilon| \ll 1$ не выполнено, но экспоненциальное возрастание решения линеаризованного уравнения качественно свидетельствует о неустойчивости равновесия. Количественно движение описывается нелинейным уравнением (9.1). См. также раздел 10.5.

Итак, устойчивость положения равновесия исследуется, по определению, путем рассмотрения возмущенного движения. Предварительно должны быть установлены уравнения движения; затем их решение, при определенных начальных условиях, находится интегрированием. Поведение решения со временем указывает на устойчивость или неустойчивость. Во многих случаях, представляющих практический интерес, линеаризация уравнений движения не меняет их качественных свойств по отношению к устойчивости; соответствующие ограничения формулируются в теореме А.М. Ляпунова, утверждающей, что асимптотическая устойчивость линеаризованной системы обеспечивает устойчивость соответствующей нелинейной системы, если нелинейные возвращающие силы в определенном смысле ограничены. В таких случаях достаточно решить линейную задачу о собственных значениях и установить, что все собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Смотрите:

- Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966.

Анализ устойчивости существенно упрощается, если существует класс систем, для которых в этом случае достаточно статического рассмотрения. Проверим консервативные системы на принадлежность к такому классу. После возмущения происходит движение, при котором механическая энергия сохраняется. Если при анализе устойчивости достаточно статического критерия, то границы изменения кинетической и потенциальной энергии должны быть определены отдельно. В положении равновесия возмущение задается неоднородными начальными условиями; полная энергия равна $E_0 = T_0 + V_0$ при $t = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю. Поэтому закон сохранения энергии дает (см. 8.8)

$$T(t) + V(t) = E_0 . \quad (9.7)$$

Так как кинетическая энергия неотрицательна, $T \geq 0$, то, вычитая T из (9.7), найдем

$$V(t) = E_0 - T(t) \leq E_0 . \quad (9.8)$$

Условие равновесия состоит в том, что $V = 0$ должно быть стационарным значением, которое не меняется при малых отклонениях от данного положения, $\delta V = 0$, кроме того, из (9.8) следует, что $V(t) \leq E_0$. Если дополнительно потребовать, чтобы $V(t)$ принимала минимальное значение $V = 0$, то потенциальная энергия также становится неотрицательной, $V(t) \geq 0$. Следовательно, энергетиче-

ческая мера возмущения становится положительной, $E_0 > 0$. Тем самым установлены границы изменения потенциальной энергии

$$0 \leq V(t) \leq E_0. \quad (9.9)$$

Подставляя это неравенство в (9.7), получим границы изменения кинетической энергии

$$0 \leq T(t) \leq E_0. \quad (9.10)$$

Если движение ограничено в смысле энергетической нормы, то положение равновесия, согласно динамическому критерию, устойчиво по определению. *«Если потенциальная и кинетическая энергии ограничены, то движение в интегральном смысле ограничено некоторой окрестностью положения равновесия, и эта окрестность уменьшается с уменьшением полной энергии E_0 начального возмущения.»* Критерий устойчивости, сформулированный в энергетической норме, справедлив в большинстве практически важных случаев, за исключением некоторых патологических распределенных систем. Для систем с несколькими степенями свободы конечность числа степеней свободы гарантирует эквивалентность всех норм, по которым анализируется устойчивость. К сожалению, для сплошной среды это не так. В некоторых редких случаях дискретизация может изменить характер равновесия.

Рассмотрение устойчивости консервативных систем в энергетической норме позволяет сформулировать простой статический критерий: критерий устойчивости Дирихле. *«Консервативная система находится в устойчивом положении равновесия, если потенциальная энергия $V = W_p + U$ имеет локальный минимум. Иначе положение равновесия неустойчиво.»* Таким образом, зная потенциальную энергию консервативной системы, можно найти положения равновесия, приравнивая нулю первую вариацию, $\delta V = 0$, см. (5.15). Если вторая вариация в положении равновесия $\delta^2 V > 0$, то это положение устойчиво (это следует из критерия устойчивости Дирихле). Следовательно, динамический критерий устойчивости также выполнен, если

$$\delta V = 0 \quad , \quad \delta^2 V > 0 \quad (9.11)$$

и при этом не нужно исследовать движение. Если окажется, что $\delta^2 V = 0$, то необходимо, чтобы $\delta^3 V = 0$, и условие устойчивости содержит четвертую вариацию, $\delta^4 V > 0$.

Потенциальная энергия консервативной системы с несколькими степенями свободы есть функция независимых обобщенных координат

$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Приравнявая нулю первую вариацию, получим n условий равновесия

$$\delta V = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.12)$$

Положительность второй вариации в равновесии

$$\delta^2 V > 0 \quad (9.13)$$

есть необходимое и достаточное условие устойчивости; эта положительность эквивалентна положительности всех выписанных ниже определителей, если подставить в них координаты точки равновесия.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_k} \\ & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_k} \\ & & \dots & \dots \\ \text{СИММ.} & & & \frac{\partial^2 V}{\partial q_k^2} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9.14)$$

Все стоящие на главной диагонали вторые производные должны быть необходимо положительны.

Важно знать пределы устойчивости положения равновесия по отношению к изменению параметров системы. Здесь рассмотрим только пропорциональное изменение внешней нагрузки при изменении общего коэффициента $\lambda > 0$, см. также гл. 6. В этом случае потенциал внешних сил есть λW_P ; на пределе устойчивости

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_n} \right\} = 0, \quad (9.15)$$

и отсюда находим нелинейное (характеристическое) уравнение для коэффициента критической нагрузки λ_c . Для устойчивости положения равновесия при заданной конфигурации нагрузки требуется, следовательно, чтобы $0 < \lambda < \lambda_c$.

Если при увеличении коэффициента нагружения выше критического значения λ_c возникают другие положения равновесия, то происходит бифуркация, как показано на рис 9.1. Примером является выпучивание тонкого стержня (эйлерово выпучивание). Другой, более опасный путь потери устойчивости есть прощелкивание, что показано на рис. 9.2. При $\lambda > \lambda_c$ не существует плавного перехода в устойчивое положение равновесия.

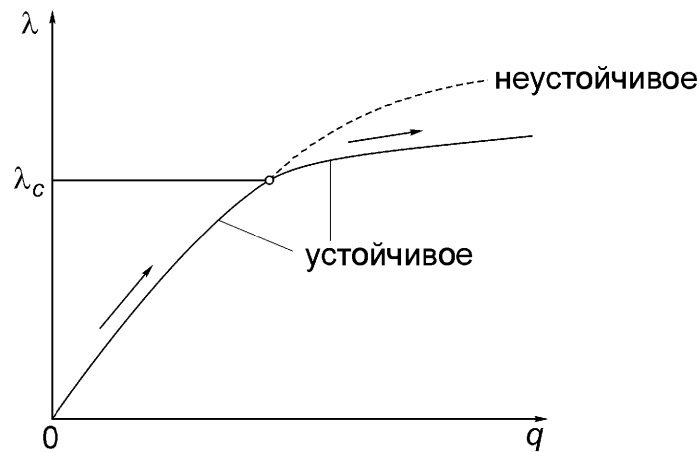


Рис. 9.1. Расхождение положений равновесия, бифуркация.

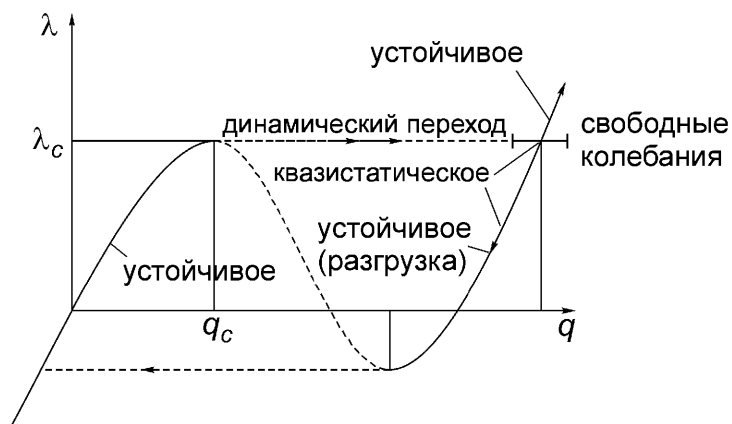


Рис. 9.2. Процелкивание. Показан динамический переход в новое, возможно устойчивое положение равновесия.

При процелкивании система начинает динамически двигаться и, возможно, достигает другого положения равновесия. Потеря устойчивости в критической конфигурации наблюдается при поперечном нагружении пологих оболочек; процелкивание типично для нагруженных преимущественно на сжатие конструкций, которые чувствительны к несовершенствам.

Примером является выпучивание оболочек и сходных конструкций, имеющих нелинейности, см., например, рис. 9.7(b). Предельная нагрузка для упруго-пластических конструкций имеет аналогичную природу и рассматривается в разделе 9.3.

9.1.1. Пример: задача о равновесии тяжелого твердого цилиндра

На рис. 9.3 показан цилиндр, находящийся в равновесии под действием силы тяжести mg и нормальной реакции N , равной силе тяжести по модулю и противоположной по направлению. Исследуем это положение равновесия на устойчивость, предполагая, что при любом возмущенном движении качение происходит без проскальзывания. Тогда выполнено простое условие $r d\varphi = R d\Phi$

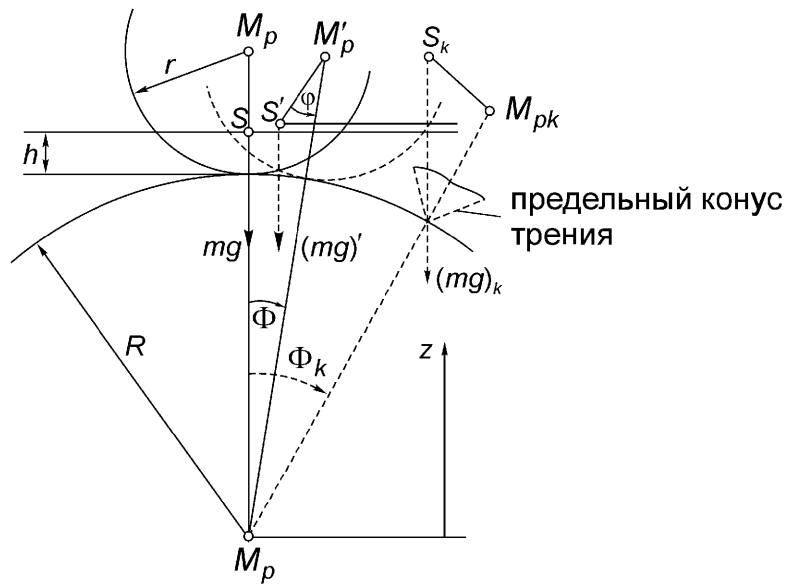


Рис. 9.3. Цилиндр в равновесии. Предполагается, что при возмущенном движении качение происходит без проскальзывания.

(рис. 9.3). Качение без проскальзывания в поле постоянной вертикальной силы тяжести является консервативным, и можно использовать критерий устойчивости Дирихле (9.13). В равновесии углы $\varphi = \Phi = 0$ и высота центра масс $z_S = (R + h)$. Величины r^{-1} и R^{-1} суть кривизны контактирующих цилиндров. В окрестности положения равновесия высота центра масс изменяется по закону $z_S = (R + r)\cos\Phi - (r - h)\cos(\varphi + \Phi)$, и потенциальная энергия в поле силы тяжести равна

$$E_p = W_p = mgz_S. \quad (9.16)$$

Выберем угол φ в качестве обобщенной координаты данной системы с одной степенью свободы. Условие равновесия записывается тогда с помощью производной

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{d\varphi} &= \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \Phi} \frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} + \frac{r}{R} \frac{\partial E_p}{\partial \Phi} = \\ &= mg[(r - h)\sin(\varphi + \Phi) - r\sin\Phi] \left(1 + \frac{r}{R}\right) = 0, \end{aligned}$$

и это уравнение имеет тривиальное решение $\varphi = \Phi = 0$. Вторую производную получаем повторным применением того же оператора

$$\frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} = mg \left\{ (r - h)\cos(\varphi + \Phi) + \frac{r}{R} [(r - h)\cos(\varphi + \Phi) - r\cos\Phi] \right\} \left(1 + \frac{r}{R}\right). \quad (9.17)$$

Таким образом, условие устойчивости положения равновесия $\varphi = \Phi = 0$ выражается неравенством

$$\left(1 + \frac{r}{R}\right) \left[r - h \left(1 + \frac{r}{R}\right) \right] > 0,$$

которое можно разрешить относительно величины h , характеризующей положение центра масс,

$$h < \frac{r}{1 + (r/R)}. \quad (9.18)$$

Аналогично простому подходу, примененному к исследованию плавающего тела, можно рассмотреть возвращающий момент, действующий на цилиндр. Если в положение равновесия $\varphi = \Phi = 0$ внести небольшое возмущение $d\varphi$ и $d\Phi = r d\varphi / R$, то возвращающий момент равен

$$-\frac{dE_p}{d(\varphi + \Phi)} = mg \{ R \sin \Phi - [(R + r) \sin \Phi - (r - h) \sin(\varphi + \Phi)] \} > 0,$$

что приводит к неравенству (9.18) как к условию положительности момента при достаточно малых возмущениях $d\varphi$.

В пределе $R \rightarrow \infty$ получаем условие устойчивости равновесия цилиндра на жесткой плоскости: $h < r$. Если цилиндр находится в цилиндрической выемке, то $R^{-1} < 0$ и $|r/R| < 1$; тогда область устойчивости показана на рис. 9.4.

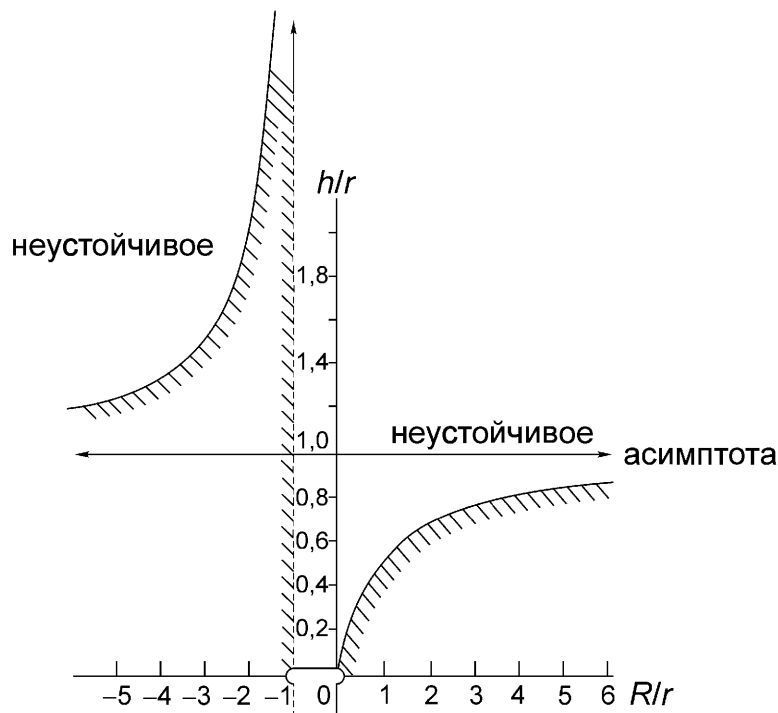


Рис. 9.4. Карта устойчивости положений равновесия цилиндра.

Встречающаяся в природе подвижность камней горных пород может быть объяснена близостью величины h к пределу устойчивости. Опасность потери контакта при скольжении не рассматривалась выше, но предельный конус сухого трения показан на рис. 9.3.

9.1.2. Пример: простая модель выпучивания

Жесткий стержень длины l центрально нагружен постоянной силой F ; повороту стержня из вертикального положения $\varphi = 0$ препятствует (линейная или нелинейная) спиральная пружина (рис. 9.5).

Устойчивость этого положения и ее предел должны быть определены при медленном увеличении нагрузки, и после бифуркации следует изучить поведение стержня после выпучивания. Любое движение, следующее за возмущением, является консервативным, и можно применить критерий Дирихле (9.13). Потенциальная энергия изменяется в соответствии с движением конца стержня; стержень считаем невесомым; W_p есть потенциал постоянной нагрузки F , а U записывается в соответствии с определяющим соотношением $M(\varphi)$ для возвращающей пружины:

$$\begin{aligned} E_p &= W_p + U \quad , \quad W_p = -Fl(1 - \cos \varphi) \quad , \\ M &= k\varphi \quad : \quad U = k\varphi^2 / 2 \quad , \\ M &= k\varphi(1 - a\varphi + b\varphi^2) \quad : \quad U = k\varphi^2 / 2 - ka\varphi^3 / 3 + kb\varphi^4 / 4 . \end{aligned} \quad (9.19)$$

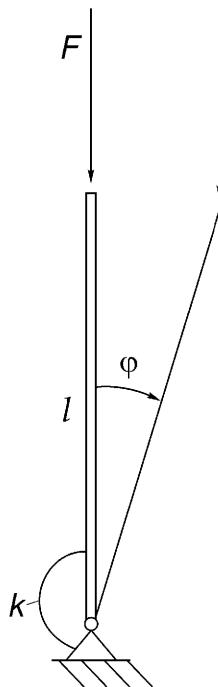


Рис. 9.5. Модель выпучивания с линейной и нелинейной возвращающими пружинами.

Если $a = 0$, то (физически) нелинейная пружина симметрична; если $a \neq 0$, то возвращающий момент зависит от направления поворота. Полиномиальная аппроксимация упругой энергии часто используется в приложениях, поэтому и потенциал внешней силы F достаточно аппроксимировать полиномом четвертой степени. В окрестности $\varphi = 0$ имеем $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/24$, и производные до четвертого порядка включительно выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\varphi} &= -Fl \sin \varphi \approx -Fl(\varphi - \varphi^3/6), & \frac{d^2W}{d\varphi^2} &= -Fl \cos \varphi \approx -Fl(1 - \varphi^2/2), \\ \frac{d^3W}{d\varphi^3} &= Fl \sin \varphi \approx Fl\varphi, & \frac{d^4W}{d\varphi^4} &= Fl \cos \varphi \approx Fl, \\ \frac{dU}{d\varphi} &= k\varphi(1 - a\varphi + b\varphi^2), & \frac{d^2U}{d\varphi^2} &= k(1 - 2a\varphi + 3b\varphi^2), \\ \frac{d^3U}{d\varphi^3} &= k(-2a + 6b\varphi), & \frac{d^4U}{d\varphi^4} &= 6kb. \end{aligned}$$

Условие равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} (W_p + U) = 0 \Rightarrow \\ \varphi \left[-Fl(1 - \varphi^2/6) + k(1 - a\varphi + b\varphi^2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Это уравнение имеет тривиальное решение $\varphi = 0$ при любом значении F , и возможно, существуют еще два положения равновесия, которые соответствуют вещественным значениям угла, обращающим в нуль второй сомножитель.

$$\varphi^2(kb + Fl/6) - ka\varphi - (Fl - k) = 0 \Rightarrow \quad (9.21)$$

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2b + Fl/3k} \left\{ a \pm \sqrt{a^2 + 2[(Fl/k) - 1](2b + Fl/3k)} \right\}. \quad (9.22)$$

Условие устойчивости положения $\varphi = 0$ приводит к неравенству, вид которого не зависит от какой-либо нелинейности возвращающей пружины,

$$\frac{d^2E_p}{d\varphi^2} > 0 \Rightarrow -Fl + k > 0. \quad (9.23)$$

Критическую нагрузку получим, заменив неравенство на равенство; она является важным параметром системы

$$F_c = k/l. \quad (9.24)$$

Таким образом, положение $\varphi = 0$ устойчиво для любой центральной нагрузки F , меньшей критического значения. Если $F = F_c$, то вторая производная потенциальной энергии равна нулю, а

$$\left. \frac{d^3 E_p}{d\varphi^3} \right|_{\varphi=0} = -2ak, \quad (9.25)$$

т. е. третья производная не равна нулю для несимметричной нелинейной пружины; это указывает на неустойчивость в этом случае точки бифуркации. Если в определяющем соотношении $a = 0$, то третья производная равна нулю, и устойчивость бифуркации в случае симметричного возвращающего момента определяется знаком четвертой производной. Из неравенства

$$\left. \frac{d^4 E_p}{d\varphi^4} \right|_{\varphi=0, F=k/l} = k(1+6b) > 0 \quad (9.26)$$

следует устойчивость точки бифуркации при достаточном условии $b \geq 0$ (линейная или упрочняющаяся пружина). Пружина с уменьшающейся жесткостью при $b < -1/6$ имеет неустойчивую точку бифуркации.

Если рассматривается диапазон $F > F_c$ после выпучивания [см. (9.22)], то коэффициент нагрузки $\lambda = F/F_c > 1$ и условие устойчивости

$$\varphi_{1,2}^2 (\lambda + 6b) - 4a\varphi_{1,2} - 2(\lambda - 1) > 0. \quad (9.27)$$

Это неравенство можно, используя (9.21), привести к виду

$$a\varphi_{1,2} + 2(\lambda - 1) > 0. \quad (9.28)$$

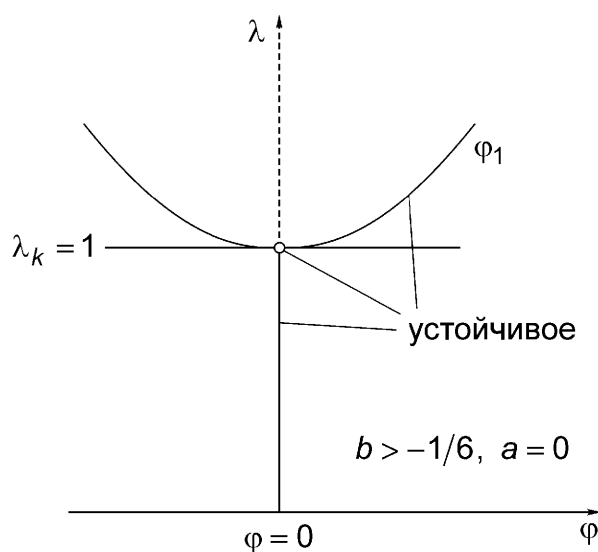


Рис. 9.6(а). Безопасная бифуркация при $\lambda_c = 1$. Конструкция нечувствительна к несовершенствам.

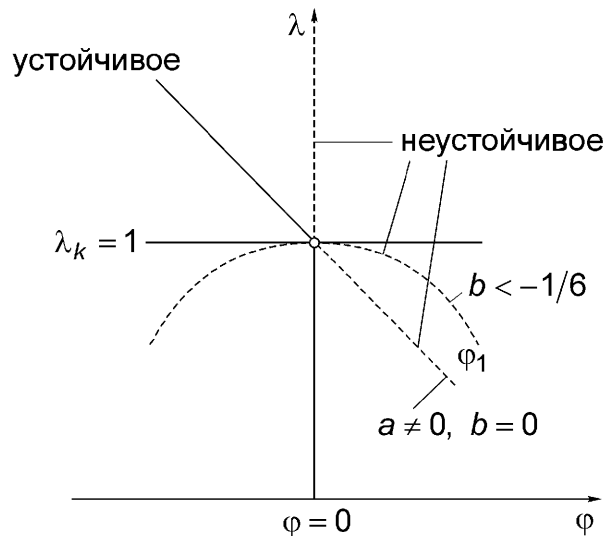


Рис. 9.6(b). Опасная бифуркация при $\lambda_c = 1$. Конструкция чувствительна к несовершенствам.

Различные случаи комбинации параметров отображены на рис. 9.6(a) и 9.6(b) в плоскости нагрузка-отклонение. Ветвь неустойчивых положений равновесия, идущая из (неустойчивой) точки бифуркации в область после выпучивания, указывает на то, что конструкция чувствительна к несовершенствам. Если такая конструкция несовершенна, например, нагружена нецентрально, то она становится неустойчивой (прощелкивает) при нагрузке значительно меньшей (теоретической) критической F_c .

Если подобный качественный анализ не является достаточным, а следует определить фактическое значение критической нагрузки, то подлежащая рассмотрению несовершенная конструкция может быть весьма сложной. Решающим является выбор наихудшего несовершенства. Например, для некоторых конструктивных классов стержней можно рекомендовать в качестве меры несовершенства отношение эксцентриситета e приложения нагрузки F к длине l ; для несовершенной конструкции положение $\varphi = 0$ не является равновесным.

Потенциал меняется, $\varepsilon = e/l \ll 1$, и для малых углов может быть аппроксимирован выражением

$$W_p = -Fl(1 - \cos \varphi) - F e \sin \varphi \approx -Fl \left(\varepsilon \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \varepsilon \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^4}{24} \right). \quad (9.29)$$

Исследование нетривиальных положений равновесия несовершенной конструкции приводит к построению ветвей устойчивости и неустойчивости на плоскости нагрузка-прогиб, как показано на рис. 9.7(a) и 9.7(b). Приведены также соответствующие кривые для совершенной конструкции.

При прощелкивании, показанном на рис. 9.7(b), конструкция начинает динамически двигаться и может достичь, но может и не достичь некоторого отдаленного устойчивого положения равновесия.

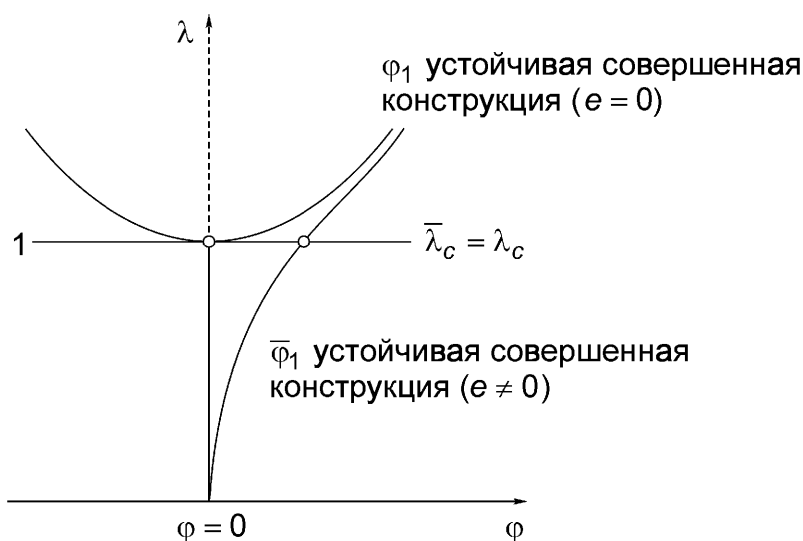


Рис. 9.7(a). Путь эволюции системы, нечувствительной к несовершенствам, на плоскости нагрузка-прогиб: Достигается критическая для совершенной конструкции нагрузка, но фактические деформации увеличиваются.

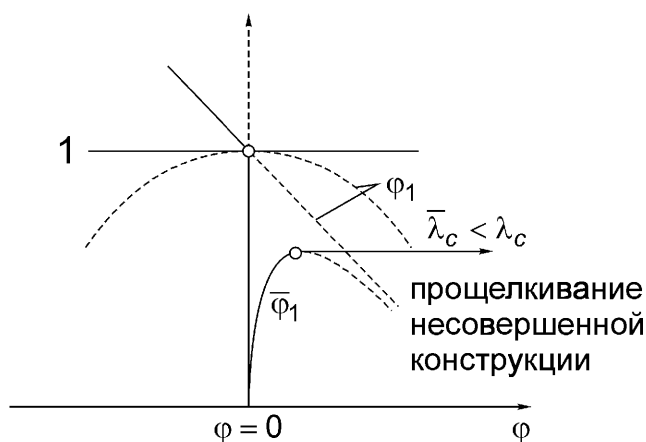


Рис. 9.7(b). Прощелкивание конструкции, чувствительной к несовершенствам, при нагрузке, значительно меньшей критической.

9.1.3. Пример: устойчивость пологой конструкции при поперечном нагружении

Пологая ферма Мизеса с линейно упругими стержнями есть простая конструкция, в которой может наблюдаться прощелкивание при поперечном нагружении; трехшарнирные арки более общего вида см. в разделе 2.5.1.4. Потенциальная энергия консервативной системы, изображенной на рис. 9.8, представляет собой сумму потенциала постоянной нагрузки F и упругих потенциалов двух стержней жесткости c (сжатые стержни предполагаются прямолинейными и, для удобства анализа, невесомыми)

$$E_p = W_p + U = F(z - b_0) + c(l - l_0)^2. \quad (9.30)$$

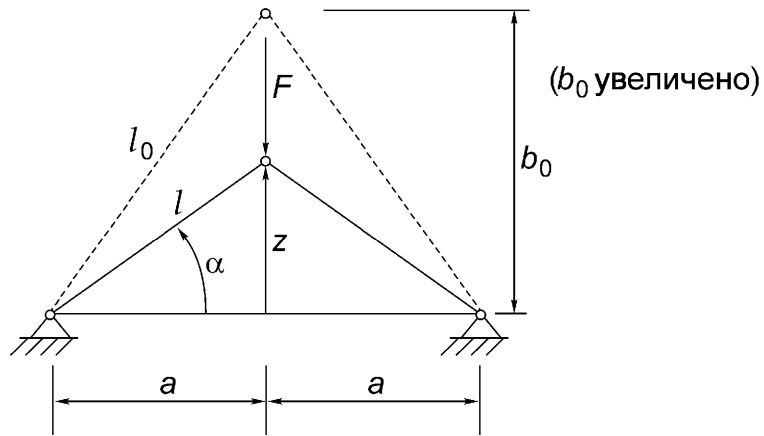


Рис. 9.8. Пологая линейно упругая трехшарнирная арка. Высоты на рисунке преувеличены.

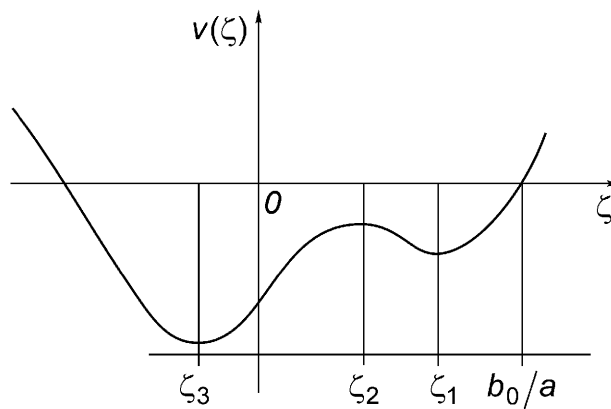


Рис. 9.9. Потенциал с тремя стационарными точками.

Нулевой индекс относится к недеформированной конфигурации, $l_0^2 = a^2 + b_0^2$. Подставляя $l^2 = a^2 + z^2$ и переходя к безразмерной переменной $\zeta = z/a = \operatorname{tg} \alpha$, получим

$$E_p(\zeta) = aF(\zeta - b_0/a) + ca^2 \left(\sqrt{1 + \zeta^2} - l_0/a \right)^2. \quad (9.31)$$

Для очень пологой арки $|\zeta| \ll 1$, и условие равновесия приводит к кубическому уравнению, так как $(1 + \zeta^2)^{-1/2}$ можно приближенно заменить на $(1 - \zeta^2/2)$

$$\frac{dE_p(\zeta)}{d\zeta} = aF + 2ca^2 \zeta \left(1 - l_0/a \sqrt{1 + \zeta^2} \right) = 0. \quad (9.32)$$

Одно вещественное решение у последнего уравнения есть всегда; при изменении нагрузки могут появиться три вещественных решения, как показано на рис 9.9.

Условие устойчивости верхнего положения равновесия $\zeta_1 > 0$ имеет вид

$$\frac{d^2 E_p(\zeta)}{d\zeta^2} = 2ca^2 \left[1 - \frac{l_0}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} - \zeta^2 (1+\zeta^2)^{-3/2} \right) \right] \Big|_{\zeta=\zeta_1} > 0. \quad (9.33)$$

Предел устойчивости достигается при обращении второй производной в нуль. Нагрузка принимает критическое значение $F = F_c$, и конструкция перед самым прощелкиванием характеризуется критическим углом $\zeta_1 = \zeta_c$,

$$(1+\zeta^2)^{3/2} - \frac{l_0}{a} = 0 \Rightarrow \zeta_c = \left[(l_0/a)^{2/3} - 1 \right]^{1/2}. \quad (9.34)$$

Подставляя критический угол в (9.32), найдем критическую поперечную нагрузку; она является важным параметром системы (см. также упражнение А 10.1)

$$F_c = 2cl_0 \left[1 - (a/l_0)^{2/3} \right]^{3/2}. \quad (9.35)$$

Если нагрузка достигает критического значения, то происходит динамическое прощелкивание, и арка в конечном счете переходит в нижнее положение равновесия, показанное на рис. 9.9 как $\zeta_3 < 0$. Прощелкивание сопровождается большими сжимающими напряжениями, которые могут приводить к текучести и даже к разрушению. Структурная безопасность пологих арок требует выполнения условия $F < F_c$. Далее, для тонких балок возникает вторая проблема устойчивости, так как они могут подвергнуться выпучиванию до прощелкивания; см. раздел 9.1.4, где обсуждается нагрузка, приводящая к выпучиванию. Нормальная сила

$$N = -F/(2 \sin \alpha) \quad (9.36)$$

принимает максимальное статическое значение в начале прощелкивания

$$N = -cl_0 \left[1 - (a/l_0)^{2/3} \right], \quad \zeta = \zeta_c. \quad (9.37)$$

В пологих конструкциях может возникать ползучесть при поперечной нагрузке значительно меньшей критической, $F < F_c$; это приводит к уменьшению высоты z со временем. Аналогично (4.119) можно определить время жизни вязкой полой конструкции как время достижения критической конфигурации, определяемой (9.34), по истечении которого в конструкции происходит (упругое) прощелкивание.

9.1.4. Пример: выпучивание тонкого упругого стержня (эйлерово выпучивание)

На рис. 9.10 показан прямой линейно упругий стержень постоянного (сплошного) сечения, центрально нагруженный сжимающей силой и закрепленный в

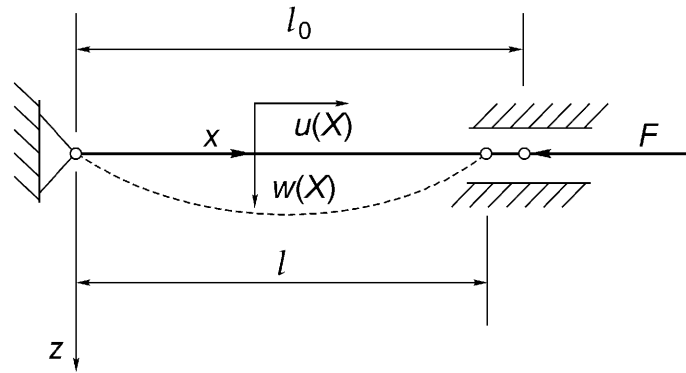


Рис. 9.10. Эйлерово выпучивание тонкого линейно упругого стержня.

шарнирных опорах; устойчивость равновесия такого стержня была исследована Л. Эйлером. Если считать, что нагрузка постоянна, а стержень подчиняется закону Гука, то возмущение в виде малых изгибных колебаний будет консервативным движением. Потенциальная энергия в окрестности прямолинейной конфигурации представляет собой сумму потенциальной энергии внешней силы F и энергии деформаций – сжатия и изгиба в плоскости, перпендикулярной оси y

$$E_p = W_p + U. \quad (9.38)$$

Если стержень недеформирован, то $E_p = 0$;

$$W_p = F \int_0^{l_0} \frac{du}{dX} dX. \quad (9.39)$$

Подставляя закон Гука для одноосного деформирования $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$ в плотность энергии деформации $U' = (1/2) \sigma_{xx} \varepsilon_{xx}$ и выполняя интегрирование по объему, получим

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \int_A \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dA dX = \int_0^{l_0} \frac{E}{2} \int_A \varepsilon_{xx}^2 dA dX. \quad (9.40)$$

Линейно распределенные деформации подчиняются редуцированному нелинейному геометрическому соотношению (1.20) $\varepsilon_{xx} = du/dX + (1/2)(dw/dX)^2 - Z d^2w/dX^2$, так как $(dw/dX)^2 \ll |dw/dX|$. Интегрирование по сечению дает два слагаемых (ось y проходит через центр масс сечения), в которых легко узнать энергии одноосной деформации и изгиба, соответственно [ср. с (5.26) и (5.27)]

$$U = U_S + U_B, U_S = \int_0^{l_0} \frac{EA}{2} \left[\frac{du}{dX} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dX} \right)^2 \right]^2 dX, U_B = \int_0^{l_0} \frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2w}{dX^2} \right)^2 dX. \quad (9.41)$$

Ось стержня считаем при изгибе нерастяжимой, поэтому

$$U_S = 0 \quad , \quad \varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{du}{dX} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dX} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dX} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dX} \right)^2 .$$

Подставляя последнее равенство в (9.39), окончательно найдем потенциальную энергию стержня в виде двух слагаемых

$$E_p = \int_0^{l_0} \frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2w}{dX^2} \right)^2 dX - \frac{F}{2} \int_0^{l_0} \left(\frac{dw}{dX} \right)^2 dX . \quad (9.42)$$

Первая вариация этого выражения должна обращаться в нуль [см. (5.15)]

$$\delta E_p = 0 .$$

Уравнение Эйлера для этой вариационной задачи (система имеет бесконечное число степеней свободы) есть линейное однородное (нет поперечной нагрузки) дифференциальное уравнение для прогиба в соответствии с теорией упругости второго порядка [см. (5.22)]

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(EJ \frac{d^2w}{dX^2} \right) + F \frac{d^2w}{dX^2} = 0 . \quad (9.43)$$

Интегрируя дважды это уравнение и рассматривая краевые условия, соответствующие шарнирному закреплению на обоих концах стержня при $X = 0$ и $X = l_0$ [см. (5.22a)], получим связь между моментом и кривизной

$$EJ \frac{d^2w}{dX^2} = -M = -Fw . \quad (9.44)$$

Это соотношение также вытекает из условия равновесия конечного изогнутого участка стержня длины x . Точное решение этого уравнения осцилляционного типа выражается формулой [$w(0) = w(l_0) = 0$]

$$w(X) = a \sin \alpha_n X , \quad \text{где собственные значения } \alpha_n = n\pi/l_0 = \sqrt{F/EJ} . \quad (9.45)$$

Если нагрузка превышает первое собственное значение, то есть критическую, или эйлерову выпучивающую нагрузку, $F > F_1 = F_c = \pi^2 EJ/l_0^2$, то кроме тривиального решения $w \equiv 0$, соответствующего прямолинейному стержню, существуют изогнутые положения равновесия стержня. При $F = F_c$ возникает первая бифуркация, и стержень выпучивается в соответствии с первой модой $w_1 = a \sin \alpha_1 X$. Моды выпучивания похожи на моды свободных изгибных колебаний; см. раздел 11.3.1 и (7.152). Используя нелинейную теорию, справедли-

вую для стержня, в котором произошло выпучивание, можно показать, что при $F > F_c$ изогнутая конфигурация устойчива, а прямолинейная – неустойчива. В рамках линейной теории рассмотрим вторую вариацию потенциальной энергии для исследования устойчивости прямолинейной конфигурации. Полагая $w = w_1 + \delta w$ и считая, что виртуальное отклонение $\delta w = \varepsilon w_1$ пропорционально первой моде, а $\varepsilon \ll 1$, найдем после интегрирования (9.42)

$$E_p(\varepsilon) = \frac{la^2}{4} \alpha_1^2 (EJ\alpha_1^2 - F)(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2). \quad (9.46)$$

Приравнявая нулю первую вариацию, получим критическую нагрузку и соответствующие равновесные конфигурации $w = a = 0$ и $w = a \sin \alpha_1 X$ в данной точке бифуркации

$$\delta E_p = \left. \frac{\partial E_p}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} d\varepsilon = 0 \Rightarrow F = F_c = EJ\alpha_1^2. \quad (9.47)$$

Записав вторую вариацию, найдем условие устойчивости только прямолинейного стержня (так как использована линейная теория), $w = 0$, в виде $F < F_c$, так как

$$\delta^2 E_p > 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2} \alpha_1^2 (F_c - F) > 0. \quad (9.48)$$

В точке бифуркации, а также для изогнутой конфигурации в окрестности прямолинейной нагрузка постоянна и равна критической, $F = F_c$. Следовательно, вторая вариация обращается в нуль. Можно сделать вывод, что нелинейная теория, справедливая для стержня, в котором произошло выпучивание, нужна для установления устойчивости точки бифуркации (и ветви изогнутых положений равновесия), так как требуется рассмотрение четвертой вариации потенциальной энергии. В таком случае очевидно, что линейно упругий эйлеров стержень нечувствителен к небольшим геометрическим несовершенствам. Например, небольшой эксцентриситет нагрузки или небольшой начальный изгиб оси стержня не влияют на его несущую способность.

Поэтому с практической инженерной точки зрения достаточно в упругой области рассматривать строго прямолинейный, центрально нагруженный тонкий стержень и критическую нагрузку для такого стержня.

Пусть тонкий стержень зашкреплен на одном конце и имеет шарнир на другом, как показано на рис. 9.11; из условия равновесия деформированного стержня найдем изгибающий момент $M(x) = Fw(x) - H(l - x)$ и момент в заделке

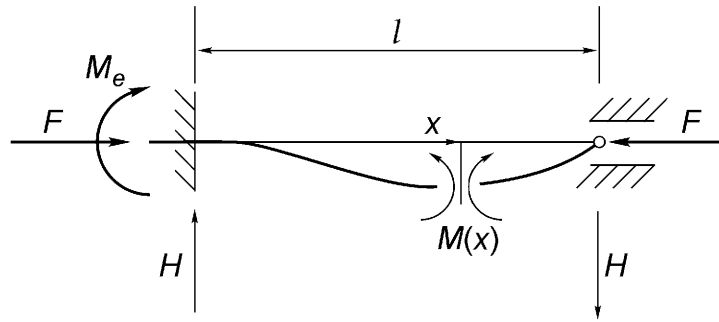


Рис. 9.11. Выпучивание тонкого стержня при статически неопределимом закреплении.

$M_e = -Hl$. Подстановка в линеаризованное дифференциальное уравнение (5.22a) дает (сдвиговыми деформациями пренебрегаем)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} \Rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F}{EJ} w = \frac{H}{EJ} (l-x). \quad (9.49)$$

Общее решение этого уравнения [см. также уравнение движения осциллятора (7.81)] есть

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + \frac{H}{EJ\alpha^2} (l-x). \quad (9.50)$$

Граничные условия, в соответствии с показанными на рис. 9.11 закреплениями, имеют вид

$$\begin{aligned} x=0 : w=0, \frac{dw}{dx} &= 0 \text{ (геометрические условия),} \\ x=l : w=0, \frac{d^2 w}{dx^2} &= 0 \text{ (геометрическое и динамическое условия).} \end{aligned} \quad (9.51)$$

Таким образом, параметры моды выпучивания находятся из трех однородных линейных уравнений

$$C_1 + \frac{l}{EJ\alpha^2} H = 0, \alpha C_2 - \frac{1}{EJ\alpha^2} H = 0, C_1 \cos \alpha l + C_2 \sin \alpha l = 0. \quad (9.52)$$

Наличие нетривиального решения указывает на существование изогнутого положения равновесия. Характеристическое уравнение дает собственные значения α , наименьшее α_1 является критическим. Определитель, составленный из коэффициентов (9.52), должен обратиться в нуль

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & l/EJ\alpha^2 \\ 0 & \alpha & -1/EJ\alpha^2 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \alpha l = \operatorname{tg} \alpha l. \quad (9.53)$$

Корни этого важного трансцендентного уравнения табулированы, например, в издании

- Handbook of Mathematical Functions (eds. M. Abramowitz and I.A. Stegun). New York, Dover, 1965, p. 224.

Наименьшее собственное значение определяется из формулы $\alpha_1 l = 4,49$, и критическая нагрузка равна

$$F_c = EJ\alpha_1^2 = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7 l)^2}. \quad (9.54)$$

Сравнение с выпучивающей нагрузкой (9.47) для эйлера стержня той же длины l показывает, что защемление конца стержня увеличивает жесткость системы, так как критическая нагрузка увеличивается на коэффициент выпучивания 2,04. Длина воображаемого стержня с шарнирным закреплением и той же выпучивающей нагрузкой (9.54) есть так называемая приведенная длина при выпучивании; она равна

$$l_c = 0,7 l. \quad (9.55)$$

Приведенные длины на выпучивание или обратные квадраты содержащихся в этих длинах множителей, то есть коэффициенты выпучивания, табулированы для ряда простых конструкций, например, в книге

- Pflüger A. Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin – Heidelberg – New York, Springer-Verlag, 1975.

Четыре различных варианта закрепления сжатого стержня показаны на рис. А 9.3, который взят из книги

- Ziegler H. Principles of Structural Stability. Mass., Blaisdell, Waltham, 1968.

Например, консольная балка длины l имеет приведенную длину при выпучивании $l_c = 2 l$, а приведенная длина защемленного на обоих концах стержня равна $l_c = l/2$, см. упражнение А 9.3. В последнем случае коэффициент выпучивания равен 1 при условии свободного перемещения вбок одного из защемленных концов.

Напряжение выпучивания, то есть сжимающее напряжение при начале выпучивания, находим делением выпучивающей нагрузки на площадь сечения A . Вводя радиус инерции $i = (J/A)^{1/2}$ (где J – главный момент инерции относительно оси выпучивания, обычно наименьший из двух главных моментов инерции) и так называемую гибкость стержня Λ , запишем (9.54) в общем виде

$$\sigma_c = \pi^2 E / \Lambda^2 < \sigma_p, \quad \Lambda = l_c / i. \quad (9.56)$$

Эта формула справедлива в области линейно упругого поведения материала. Например, для стержня, изготовленного из мягкой стали St 360, предел пропор-

циональности $\sigma_p = 192 \text{ Н/мм}^2$ и модуль Юнга $2,06 \times 10^5 \text{ Н/мм}^2$. Таким образом, минимальное значение гибкости, при котором справедлива формула для Эйлера выпучивания, составляет около 104. Для более компактных стержней формула (9.56) дает завышенные значения выпучивающей нагрузки или заниженные значения гибкости. Приближенные теории были развиты Энгессером, Карманом и Шенли. Прежде всего, для расширения диапазона справедливости (9.56), следует заменить модуль Юнга касательным модулем. Если эти компактные стержни изготовлены из упруго-пластического материала, то более подходящим является анализ предельной нагрузки, см. раздел 9.3. Упругое выпучивание в этом случае невозможно, так как при нагрузках значительно меньших критической происходят пластические деформации.

9.1.5. Нецентрально нагруженный линейно упругий стержень

Рассмотрим снова эйлеров стержень, изображенный на рис. 9.10, но при нецентральной нагрузке двумя силами F с нулевым суммарным моментом, см. рис. 9.12. Постоянный момент eF вызывает начальное искривление стержня. Рассматривая равновесие изогнутого стержня в рамках теории второго порядка, найдем, что изгибающий момент изменяется с координатой, $M(x) = F[e + w(x)]$. Подставляя это выражение в линейризованное дифференциальное уравнение для прогиба (y – главная ось сечения, и кривизны должны быть малыми), получим неоднородное уравнение (9.44)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2 w = -\alpha^2 e, \quad \alpha = \sqrt{F/EJ}. \quad (9.57)$$

Если $e \neq 0$, то (9.57) определяет напряжения, а не является задачей на собственные значения. Общее решение (9.57)

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x - e. \quad (9.58)$$

Постоянные интегрирования определяются из геометрических граничных условий обращения в нуль прогибов при $x=0$ и $x=l$ и равны $C_1 = e$ и

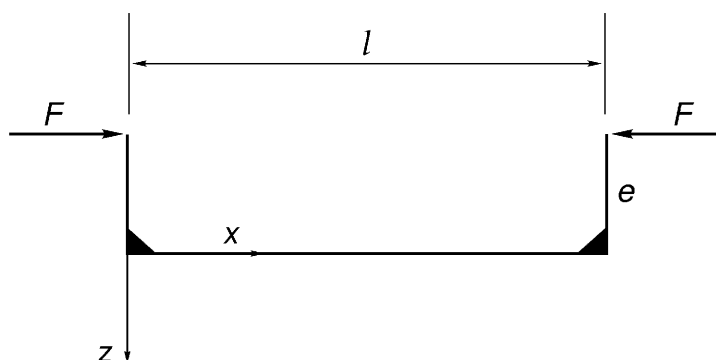


Рис. 9.12. Несовершенный эйлеров стержень.

$C_2 = e(1 - \cos \alpha l) / \sin \alpha l$. Прогибы неограниченно растут, если сила F приближается к эйлеровой выпучивающей нагрузке $\pi^2 EJ / l^2$; это, конечно, дефект линейной теории. Изгибающий момент

$$M(x) = F(e + w) = \frac{eF}{\sin \alpha l} [\sin \alpha x + \sin \alpha(l - x)]; \quad (9.59)$$

напряжения при изгибе $\sigma_{xx} = zM(x) / J$ и прогиб $w(x)$ нелинейно зависят от постоянной нагрузки F (или α). Принцип суперпозиции несправедлив по отношению к сложению осевых нагрузок. Для упруго-пластических (то есть текучих) материалов следует применить анализ предельной нагрузки, см. раздел 9.3. Для режима нагружения λF и соответствующим образом подобранного эксцентриситета e коэффициент нагрузки λ можно задать так, чтобы максимальное напряжение как раз достигало предела текучести, например, в стальной конструкции.

Иногда в задачах на вычисление напряжений могут возникать бифуркации положения равновесия при нагрузках, меньших предельной. Критерий появления подобных задач устойчивости, применимый и к более сложным конструкциям, предложили К. Клеппель и К. Ли и его можно найти вместе с иллюстрирующими примерами в работе:

- Kollbrunner C. F und Meister M. Knicken, Biegedrillknicken, Kippen. Berlin, Springer-Verlag, 1961.

Простой случай, выпучивание при растяжении, рассматривается в упражнении А 9.4.

9.1.6. Выпучивание тонких пластин

Критическая нагрузка в плоскости тонких линейно упругих пластин находится с помощью методов второго порядка для исследования равновесия, аналогично выпучиванию тонких стержней. Поэтому рассмотрим (5.30) с учетом мембранных сил n_{ij} , но без поперечного давления и получим однородное уравнение четвертого порядка в частных производных

$$K \nabla^2 \nabla^2 w - n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad K = Eh^3 / 12(1 - \nu^2). \quad (9.60)$$

В отличие от (5.29) срединная плоскость предполагается нерастяжимой; в (5.26) следует положить U_M равным нулю. Вместо этого в (5.28) следует добавить работу внешних мембранных сил, см. (9.39). Уравнение (9.60) всегда имеет тривиальное решение, соответствующее неизогнутой пластине. Для данного

распределения мембранных напряжений λn_{ij} , бифуркация возникает, если коэффициент нагрузки становится критическим λ_c , то есть если он равен наименьшему по модулю собственному значению. В этом случае возможно близкое изогнутое положение равновесия. Собственные значения дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами можно приближенно определить методом Ритца-Галеркина, см. главу 11.

(§) Прямоугольная шарнирно опертая пластина

Этот частный случай упростим и далее, предполагая, что отношение длин сторон пластины a/b является натуральным числом. Рассмотрим нагружение в направлении оси x . Такую мембранную нагрузку можно разложить в косинус-ряд Фурье

$$n_x(y) = -\frac{\pi^2 K}{b^2} \sum_{m=0}^{\infty} p_m \cos \frac{m\pi y}{b}, \quad n_y = n_{xy} = 0, \quad (9.61)$$

и критическая интенсивность $\lambda_c n_x$ легко находится. Подставляя в (9.60) разложение (9.61) и аналогичное разложение смещения с неизвестными коэффициентами a_k , где уже учтены краевые условия на сторонах $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$,

$$w(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{b} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (9.62)$$

и приравнивая коэффициенты при $\sin l\pi y/b$, $l=1, 2, \dots$, получим (бесконечную) однородную систему линейных уравнений для коэффициентов Фурье a_k . Определитель (симметричной матрицы) должен обратиться в нуль, и наименьший корень дает коэффициент критической нагрузки. Здесь

$$\alpha_k = \left(\frac{n^2 + k^2}{n} \right)^2,$$

$$\begin{vmatrix} 2(p_0 - \alpha_1/\lambda) - p_2 & p_1 - p_3 & p_2 - p_4 & \dots \\ p_1 - p_3 & 2(p_0 - \alpha_2/\lambda) - p_4 & p_1 - p_5 & \dots \\ p_2 - p_4 & p_1 - p_5 & 2(p_0 - \alpha_3/\lambda) - p_6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (9.63)$$

Для бесконечного определителя общего вида возможно только приближенное решение выписанного уравнения. Для однородного растяжения $n_x = -\pi^2 K/b^2 = \text{const}$, $p_0 = 1$, $p_m = 0$, $m > 0$ и нулю равно (бесконечное) произве-

дение элементов главной диагонали, тогда коэффициент критической нагрузки есть минимум выражения

$$\lambda_c = \min_{n=sb/a} \left[\frac{n^2 + 1}{n} \right]^2, \quad (n_x)_c = -\frac{(n^2 + 1)^2 \pi^2 K}{n^2 b^2}. \quad (9.64)$$

Мода выпучивания представляет собой одну полуволну, поперечную к направлению растяжения, но может содержать несколько полуволн в направлении сжимающей нагрузки, в зависимости от соотношения a/b и натурального числа, которое есть результат решения выписанной задачи минимизации.

Коэффициенты критической нагрузки табулированы для многих видов нагружений и форм пластин, представляющих практический интерес. Смотрите также упражнения А 11.7 – А 11.9 и работу

- Pflüger A. Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin – Heidelberg – New York, Springer-Verlag, 1975.

9.2. Устойчивость движения

Устойчивость движения рассматривается в рамках динамического метода малых возмущений. Аналогично рассмотрению устойчивости равновесия (раздел 9.1) на заданное движение накладывается малое возмущение и исследуется поведение отклонения со временем. Во многих случаях достаточно рассмотреть уравнения движения, линеаризованные по возмущениям. «*Заданное движение устойчиво, если возмущения остаются малыми и уменьшаются с уменьшением начальных возмущений.*» Общий метод, дающий условия устойчивости также и для больших возмущений, есть прямой, или второй метод Ляпунова. Этот метод математически сложен, и его изложение выходит за рамки данной книги. Решения задач, представляющих практический интерес, можно найти в монографиях:

- Hahn W. Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunow. Berlin – Göttingen – Heidelberg, Springer-Verlag, 1959.
- Müller P.C. Stabilität und Matrizen. Berlin, Springer-Verlag, 1977.
- Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966.

9.2.1. Пример: центробежный регулятор

Проиллюстрируем метод малых возмущений на примере исследования устойчивости стационарного вращения центробежного регулятора, схематически показанного на рис. 9.13. Массу в конструкции имеют только две точки (масса каждой – m) и скользящий шарнир (с массой M), следовательно, момент количества движения системы относительно вертикальной оси равен

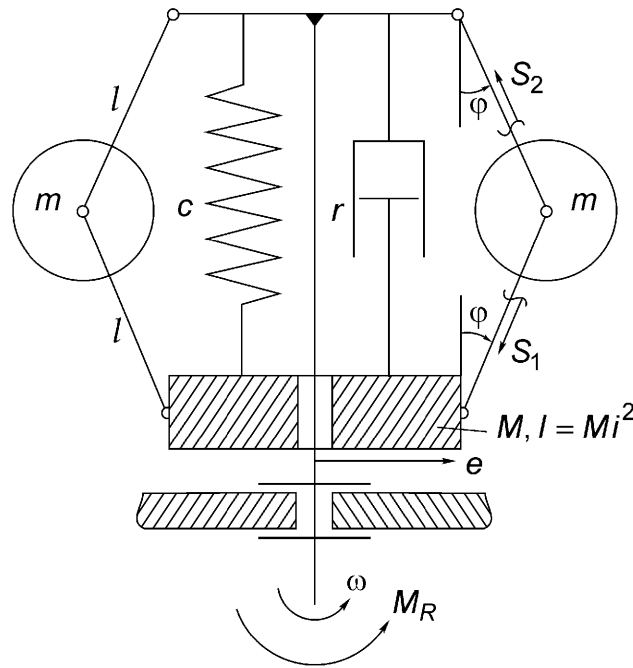


Рис. 9.13. Схема центробежного регулятора. Показана мгновенная конфигурация, при этом $\omega(t)$ зависит от времени.

$D = \left[Mi^2 + 2m(e + l \sin \varphi)^2 \right] \omega$ и из (7.22) находим уравнение нестационарного движения

$$\left[Mi^2 + 2m(e + l \sin \varphi)^2 \right] \dot{\omega} + 4m(e + l \sin \varphi) \omega l \varphi \cos \varphi = M_R, \quad (9.65)$$

где M_R – внешний возмущающий момент. Он создается регулируемым двигателем. Теорема о движении центра масс (7.7) для скользящего шарнира массы M (он без трения движется по вертикали) дает (здесь S_1 – усилие в одном из двух нижних соединяющих стержней)

$$M \frac{d^2}{dt^2} (2l \cos \varphi) = Mg + c[s_0 + 2l(1 - \cos \varphi)] - r \frac{d}{dt} (2l \cos \varphi) - 2S_1 \cos \varphi. \quad (9.66)$$

Соотношения, выражающие закон изменения вертикальных и радиальных компонент количества движения точек массы m , замыкают систему уравнений. Здесь S_2 – усилие в одном из двух верхних соединяющих стержней.

$$m \frac{d^2}{dt^2} (e + l \sin \varphi) - m(e + l \sin \varphi) \omega^2 = -(S_1 + S_2) \sin \varphi,$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \varphi) = mg + (S_1 - S_2) \cos \varphi. \quad (9.67)$$

Исключение S_2 дает

$$ml\ddot{\varphi} - m(e + l \sin \varphi)\omega^2 \cos \varphi = -mg \sin \varphi - 2S_1 \cos \varphi \sin \varphi. \quad (9.68)$$

Подставляя в (9.68) S_1 из (9.66), исключаем и усилие в первом стержне

$$\begin{aligned} (m + 2M \sin^2 \varphi)l\ddot{\varphi} + 2Ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - m(e + l \sin \varphi)\omega^2 \cos \varphi = \\ = -(m + M)g \sin \varphi - c[s_0 + 2l(1 - \cos \varphi)]\sin \varphi - 2rl\dot{\varphi} \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Уравнения (9.65) и (9.69) представляют собой окончательную систему нелинейных уравнений, описывающих нестационарное вращение. Стационарное движение, при котором $M_R = 0$ и $\omega = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, соответствует конфигурации регулятора, даваемой так называемым контрольным уравнением (все производные по времени обращаются в нуль), $\varphi_0 = \varphi(\omega_0)$,

$$m(e + l \sin \varphi_0)\omega_0^2 \cos \varphi_0 - (m + M)g \sin \varphi_0 - c[s_0 + 2l(1 - \cos \varphi_0)]\sin \varphi_0 = 0. \quad (9.70)$$

Устойчивость этого стационарного состояния может быть исследована в рамках метода малых возмущений, если предположить, что отклонения малы, $|\varepsilon| \ll \omega_0$, $|\eta| \ll 1$ и $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon$, $\varphi(t) = \varphi_0 + \eta$ в любой момент времени t . Момент, действующий со стороны управляемого вала, есть функция $M_R(\varphi)$, причем $M_R(\varphi_0) = 0$. Далее проводим линеаризацию (9.65) и (9.69) по отклонениям от стационарного состояния. Некоторые промежуточные этапы линеаризации приведены ниже:

$$\sin(\varphi_0 + \eta) \approx \sin \varphi_0 + \eta \cos \varphi_0, \quad M_R(\varphi_0 + \eta) = 0 + \eta M'(\varphi_0), \quad M' = \frac{dM_R}{d\eta}, \quad \text{и т.д.} \quad (9.71)$$

С учетом контрольного уравнения, находим систему линеаризованных уравнений движения в виде

$$\begin{aligned} p_2 \ddot{\eta} + p_1 \dot{\eta} + p_0 \eta - p\varepsilon = 0, \\ q_1 \dot{\varepsilon} + q\eta - M'\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (9.72)$$

Постоянные коэффициенты выражаются через параметры стационарного состояния

$$\begin{aligned} p_0 = m\omega_0^2 [e \sin \varphi_0 + l(2 \sin^2 \varphi_0 - 1)] + 2cl(\cos \varphi_0 + 2 \sin^2 \varphi_0 - 1) + (m + M)g \cos \varphi_0, \\ p_1 = 2rl \sin^2 \varphi_0, \quad p_2 = ml + 2Ml \sin^2 \varphi_0, \quad p = 2m(e + l \sin \varphi_0)\omega_0 \cos \varphi_0, \\ q_1 = 2m(e + l \sin \varphi_0)^2 + Mi^2, \quad q = 2pl. \end{aligned}$$

Решение линеаризованной однородной системы связанных дифференциальных уравнений имеет экспоненциальный вид $(\varepsilon, \eta) = (A, B)[\exp(\alpha t)]$. Подставляя это выражение в систему, найдем

$$\begin{aligned} -pA + (p_2\alpha^2 + p_1\alpha + p_0)B &= 0, \\ \alpha q_1 A + (\alpha q - M')B &= 0. \end{aligned} \quad (9.73)$$

Для существования нетривиального решения (9.73) эти уравнения должны быть линейно зависимы. Приравняв определитель нулю, получим характеристическое уравнение

$$p_2 q_1 \alpha^3 + p_1 q_1 \alpha^2 + (p_0 q_1 + p q) \alpha - M' p = 0. \quad (9.74)$$

Стационарное движение центробежного регулятора устойчиво, если линеаризованное возмущенное движение асимптотически устойчиво, то есть если оно исчезает со временем и снова достигается исходная конфигурация. Следовательно, собственные значения должны иметь отрицательные вещественные части, $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$. Соответствующие условия можно получить из теоремы Гурвица, не решая уравнение (9.74). «Алгебраическое уравнение степени n с коэффициентом $a_0 > 0$

$$\sum_{k=0}^n a_k \alpha^{n-k} = 0$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями, если все определители D_r , $r = 1, 2, \dots, n$ вида (9.75) положительны.» Условие не выполнено, если хотя бы один из коэффициентов $a_i < 0$.

$$D_r = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & a_{2r-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & a_{2r-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & a_{2r-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdot & \cdot & a_{2r-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & a_r \end{vmatrix} > 0. \quad (9.75)$$

Если применить критерий Гурвица к уравнению (9.74), то получим выписанные ниже условия устойчивости. Они устанавливают пределы конструктивных параметров.

1. $p_2 q_1 > 0$; p_2 и q_1 положительны.
2. $D_1 = p_1 q_1 > 0$; q_1 положительно по определению. Условие $p_1 > 0$ требует $r > 0$, следовательно, необходимо демпфирование регулятора.

3. $D_2 = \begin{vmatrix} p_1 q_1 & -M' \\ p_2 q_1 & p_0 q_1 + p q \end{vmatrix} = q_1 [p_1 (p_0 q_1 + p q) + p_2 M'] > 0$, что равносильно $(p_1/p_2)(p_0 q_1 + p q) > -M'$. Таким образом, минимальное значение коэффициента демпфирования r устанавливается неравенством $(p_0 q_1 + p q) > 0$.

$$4. D_3 = \begin{vmatrix} p_1 q_1 & -p M' & 0 \\ p_2 q_1 & (p_0 q_1 + p q) & 0 \\ 0 & p_1 q_1 & -p M' \end{vmatrix} = -p M' > 0.$$

Так как $p > 0$, то это условие требует, чтобы угловой коэффициент внешнего момента $M' = dM_R/d\varphi$ был отрицателен. Регулятор контролирует двигатель так, что момент M_R уменьшается с увеличением угловой скорости ω .

Теорема Ляпунова утверждает, что движение нелинейной системы устойчиво, если линеаризованное возмущенное движение асимптотически устойчиво и абсолютные значения нелинейных членов в уравнении движения, а также абсолютные величины начальных возмущений заключены в определенных пределах. Эти пределы должны быть определены в каждом случае отдельно, смотрите, например:

- Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966.

9.2.2. Устойчивость стационарного состояния вращающегося несимметричного гироскопа

Рассмотрим твердое недеформируемое тело, находящееся под действием уравновешенной системы внешних сил, или, что то же самое, тело, которое может без трения вращаться вокруг неподвижной точки, расположенной в центре масс. Уравнения Эйлера без моментов сил имеют вид [см. (7.61)]

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= 0, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.76)$$

Эти уравнения имеют частные решения, соответствующие стационарным вращениям вокруг главных осей инерции, например, $\omega_1 = \text{const}$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$. Исследуем устойчивость таких движений методом малых возмущений. Пусть возмущению подвергается вращение вокруг оси 1 с максимальным моментом инерции. Подстановка зависящих от времени угловых скоростей

$$\omega_1 = \omega + \varepsilon, \quad \omega_2 = \lambda, \quad \omega_3 = \mu \quad |\varepsilon| \ll \omega, \quad |\lambda| \ll \omega, \quad |\mu| \ll \omega \quad (9.77)$$

в (9.76) и последующая линеаризация дают для возмущенного движения систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$I_1 \dot{\varepsilon} = 0, I_2 \dot{\lambda} - \omega(I_3 - I_1) \mu = 0, I_3 \dot{\mu} - \omega(I_1 - I_2) \lambda = 0. \quad (9.78)$$

Эти уравнения легко интегрируются. Решение имеет вид: угловая скорость $\varepsilon = \text{const}$, а другие угловые скорости имеют экспоненциальный вид $(\lambda, \mu) = (A, B) \exp(vt)$, где

$$\begin{aligned} Av I_2 - B\omega(I_3 - I_1) &= 0, \\ -A\omega(I_1 - I_2) - Bv I_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9.79)$$

Нетривиальное решение существует, если справедливо характеристическое уравнение

$$I_2 I_3 v^2 - \omega^2 (I_1 - I_2) (I_3 - I_1) = 0. \quad (9.80)$$

Собственные значения

$$v = \pm i\omega \sqrt{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)/I_2 I_3}. \quad (9.81)$$

Вращения вокруг осей 2 и 3 в системе отсчета, связанной с телом, ограничены, если собственные значения чисто мнимые. Следовательно, I_1 должен быть максимальным из главных моментов инерции. Аналогичные условия должны выполняться, если I_1 является наименьшим моментом инерции: ось 3 перенумеровывается в 1. Вращение вокруг оси 2 с промежуточным моментом инерции неустойчиво. Линеаризованное возмущенное движение не является асимптотически устойчивым; нельзя, следовательно, заключить, что соответствующие нелинейные движения устойчивы. Если, однако, ввести небольшое вязкое сопротивление, то линеаризованные задачи становятся асимптотически устойчивыми, и вращения вокруг осей 1 и 3 (с наибольшим и наименьшим моментами инерции, соответственно) оказываются устойчивыми. Смотрите также раздел 7.4.5 о динамическом балансировании роторов. Для более глубокого изучения смотрите:

- La Salle J. und Lefschetz S. Die Stabilitätstheorie von Ljapunow. Mannheim, BI-Hochschultaschenbuch 194, 1967.

Заметим, что демпфирование не всегда имеет стабилизирующий эффект.

9.3. Границы устойчивости равновесия упруго-пластических конструкций: анализ предельной нагрузки

Положение равновесия упруго-пластической системы может стать неустойчивым из-за пластических деформаций, когда нагрузка превысит предел текучести. Критическая интенсивность нагрузки может достигаться там, где исчерпана сопротивляемость конструкции. На этой стадии коэффициент нагрузки принимает критическое значение λ_c , соответствующее предельной нагрузке; конст-

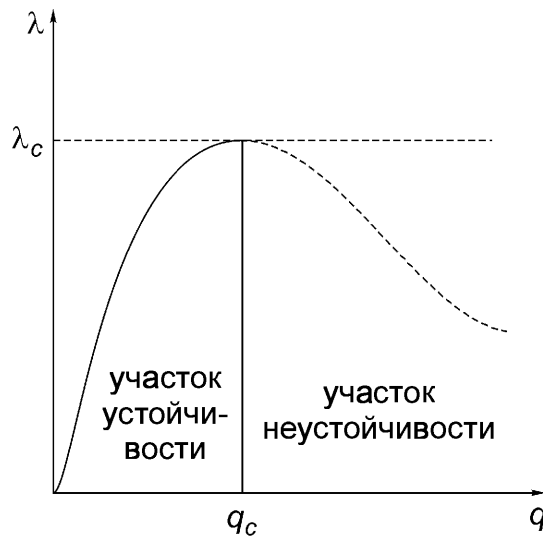


Рис. 9.14. Кривая коэффициент нагрузки – деформация для упруго-пластической конструкции, показывающая неустойчивость, связанную с предельной нагрузкой.

рукция разрушается и, возможно, возникают большие деформации, см. рис. 9.14.

В соответствии с разделом 4.3.2 рассмотрим идеальную пластичность, пренебрегая упрочнением материала; в качестве иллюстративного примера выберем однопролетную, шарнирно опертую балку прямоугольного сечения площади $A = BH$ (см. рис. 9.15), симметрично нагруженную силой F , находящейся за пределом текучести. Гипотеза плоских сечений Бернулли предполагается выполненной также в зоне текучести, простирающейся в стороны от середины балки, (6.48).

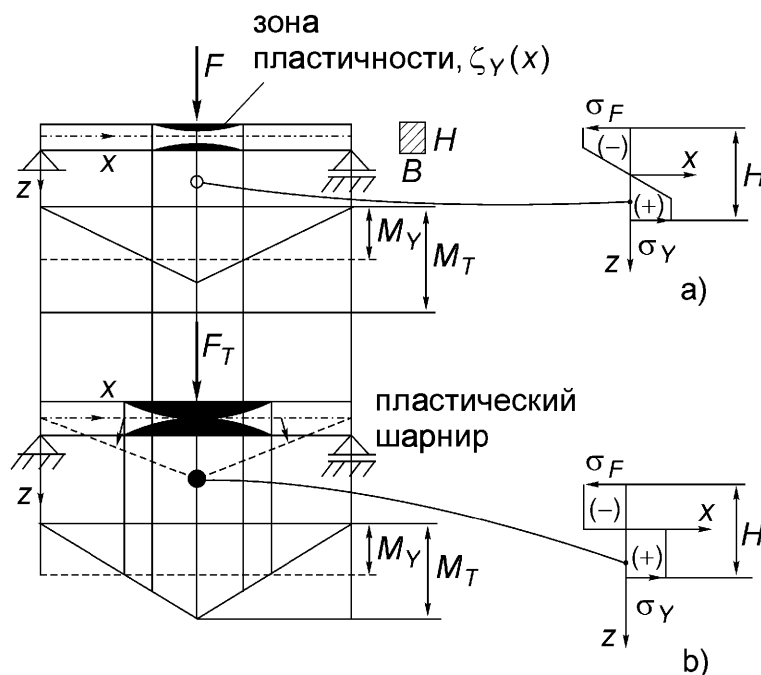


Рис. 9.15. Упруго-пластическая однопролетная балка, нагруженная за пределом текучести. (а) Нелинейное распределение напряжений в зоне текучести. (б) Напряжения в пластическом шарнире. Предельная нагрузка.

Линейное распределение деформаций пропорционально линеаризованной (малой) кривизне

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (9.82)$$

Если пренебречь сдвиговыми напряжениями, то условие текучести существенно упрощается,

$$\sigma_{xx}^2 - \sigma_Y^2 = 0, \quad (9.83)$$

где σ_Y – предел текучести при испытании на одноосное нагружение. Линейное распределение изгибных напряжений в упругом режиме, (4.31), сохраняется до тех пор, пока наружные волокна при $z = \pm H/2$ не переходят в пластическое состояние (предполагается, что для растяжения и сжатия имеется один и тот же предел текучести)

$$(\sigma_{xx})_{el} = \frac{M}{J} z, \quad J = BH^3/12.$$

На этой стадии нагружения при появлении текучести изгибающий момент в середине балки равен моменту текучести $M_Y = \sigma_Y BH^2/6$. Дальнейшее увеличение силы F приводит к расширению зоны текучести (где напряжение $\sigma_{xx} = \sigma_Y = \text{const}$) к центру сечения и от середины балки симметрично к опорам.

Изгибающий момент в левой половине балки зависит линейно от координаты x и равен суммарному моменту напряжений по сечению. Интегрирование дает

$$M(x) = xF/2 = 2 \left[\int_0^{\zeta_Y(x)} z \left(\sigma_Y \frac{z}{\zeta_Y} \right) dA + \int_{\zeta_Y(x)}^{H/2} z \sigma_Y dA \right] = \frac{BH^2}{4} \sigma_Y \left[1 - \frac{1}{3} (2\zeta_Y/H)^2 \right]. \quad (9.84)$$

Отсюда можно найти контур зоны пластичности

$$\zeta_Y(x) = \pm \frac{H}{2} \sqrt{3 \left(1 - \frac{lF}{HA\sigma_Y} \frac{2x}{l} \right)}, \quad \frac{HA\sigma_Y}{3F} \leq x \leq \frac{l}{2}. \quad (9.85)$$

Упругое ядро занимает область $-\zeta_Y < z < \zeta_Y$. Так как закрепление статически определенное, то предельная нагрузка достигается, когда сечение в середине балки становится полностью пластическим, то есть когда формируется так называемый пластический шарнир, $\zeta_Y(x=l/2) = 0$. Максимальный момент при предельной нагрузке равен

$$M_L = \sigma_Y \frac{BH^2}{4} = \frac{lF_c}{4}. \quad (9.86)$$

Предельная нагрузка получается явно, так как пластический резерв конструкции и пластический резерв сечения совпадают и, следовательно, исчерпываются одновременно

$$F_c = F_L = \sigma_Y \frac{BH^2}{l}. \quad (9.87)$$

Если сила F увеличена до критического значения, то есть до предельной нагрузки F_L , то коэффициент нагрузки $\lambda = F/F_L$ достигает критического значения $\lambda_c = 1$, и в середине балки формируется пластический шарнир. Конструкция становится механизмом, и положение равновесия теряет устойчивость, см. пунктирную линию на рис. 9.15(b).

Разность $M_L - M_Y$ есть мера несущей способности пластической зоны, так называемый пластический резерв сечения. Как и для рассмотренного прямоугольного сечения, легко найти значения для кругового сечения радиуса r . $M_Y = \sigma_Y \pi r^3/4$ и $M_L = \sigma_Y 4r^3/3$. Для тонкостенного Т-образного профиля с размерами поперечины $B \times t_1$ и размерами вертикальной стойки $H \times t_2$ отношение площадей обозначается $\alpha = Ht_2/Bt_1$. Тогда значения рассматриваемых важных конструктивных параметров равны $M_Y = \sigma_Y BHt_1 \alpha(4 + \alpha)/6(2 + \alpha)$ и $M_L = \sigma_Y BHt_1 \alpha(2 + \alpha)^2/(1 + \alpha)^2$.

Если часть пластического резерва сечения использована, то необходимо контролировать прогибы. В упругой области $0 \leq x \leq l/3\lambda$, где $\lambda = F/F_L$, линеаризованное уравнение (6.72) для балки прямоугольного сечения имеет вид

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{6F}{EBH^3} x \quad (9.88)$$

и легко интегрируется с учетом граничного условия $w_1(x=0) = 0$

$$w_1(x) = -\lambda \frac{\sigma_Y l^2}{E} \frac{x}{H} \left(\frac{x^2}{l^2} + C_1 \right). \quad (9.89)$$

Деформация на контуре зоны текучести, где $z = \zeta_Y$ и $l/3\lambda \leq x \leq l/2$ пропорциональна линеаризованной кривизне, $\varepsilon_{xx} = -\zeta_Y d^2 w/dx^2 = \sigma_Y/E$. Следовательно,

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} = -\frac{2\sigma_Y}{EH\sqrt{3(1-2\lambda x/l)}}. \quad (9.90)$$

Принимая во внимание условие симметрии в середине балки, имеем $dw_2/dx = 0|_{x=l/2}$, тогда интегрирование дает:

$$w_2(x) = -\frac{2l^2\sigma_Y}{EH\lambda\sqrt{3}} \left[\frac{1}{3\lambda} (1-2\lambda x/l)^{3/2} + (1-\lambda)^{1/2} x/l \right] + C_2. \quad (9.91)$$

Условия непрерывности прогиба и производной от прогиба при $x=l/3\lambda$ дают два уравнения $w_1 = w_2$, $dw_1/dx = dw_2/dx$, из которых находим две оставшихся константы интегрирования

$$C_1 = \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} (1-\lambda)^{1/2} - 1 \right], \quad C_2 = 10\sigma_Y(l/\lambda)^2 / 27EH. \quad (9.92)$$

Максимальное значение прогиба

$$w_2(x=l/2) = \frac{\sigma_Y}{27E} \frac{(l/\lambda)^2}{H} \left[10 - 3(2+\lambda)\sqrt{3(1-\lambda)} \right]. \quad (9.93)$$

Таким образом, при возникновении текучести и в момент формирования пластического шарнира прогиб в середине балки равен, соответственно,

$$\lambda = 2/3 \quad : \quad \max(w) = \frac{\sigma_Y l^2}{6E H}, \quad (9.94)$$

$$\lambda = \lambda_c = 1 \quad : \quad \max(w) = \frac{20}{9} \frac{\sigma_Y l^2}{6E H}. \quad (9.95)$$

В статически неопределимых конструкциях пластический резерв системы в целом может еще не быть исчерпан, несмотря на формирование пластического шарнира (где исчерпан пластический резерв сечения), и нагрузка может далее увеличиваться до предельного значения. В инженерной практике часто достаточно определить границы предельной нагрузки. Е. Мелан, работавший профессором кафедры строительной механики Технического Университета в Вене, сформулировал теоремы о приспособляемости. Независимо В.Т. Койтер и В. Прагер разработали методы определения верхней и нижней границ предельной нагрузки; эти методы являются частными случаями теоремы Мелана. Предел устойчивости можно определить, рассматривая жестко-пластический материал (раздел 4.3.1), так как предельная нагрузка не зависит от упругих свойств. Сформулируем основные положения теорем без доказательства:

1. Если можно найти такие статически допустимые (удовлетворяющие условиям равновесия) напряжения, соответствующие данному нагружению, например упругие, что максимальная их интенсивность не превосходит предела текучести, то предельная нагрузка не превышена. Коэффициент нагрузки тогда $\lambda \leq \lambda_c$.

2. Если можно найти кинематически допустимое состояние пластического деформирования, соответствующее данному нагружению, так, что работа, совершенная внешними силами, больше или равна работе диссипативных сил [в равновесии суммарная работа равна нулю, $W^{(e)} + W^{(i)} = 0$], то предельная нагрузка превышена или, по крайней мере, достигнута. Коэффициент нагрузки тогда $\lambda \geq \lambda_c$.

3. В дополнение к 1 и 2 заметим, что деформационный механизм, соответствующий предельной нагрузке, является кинематически и статически допустимым.

4. Предельная нагрузка не уменьшается при добавлении материала на ненагруженную поверхность конструкции. Следовательно, при виртуальном удалении материала конструкция может стать проще для анализа и ее предельная нагрузка уменьшается.

5. Предельная нагрузка не может увеличиться, если из конструкции удаляется материал.

В качестве примера применим теоремы 1 и 2 к равномерно нагруженной упруго-пластической однопролетной балке постоянного сечения со статически неопределимым закреплением, рис. 9.16. Кинематически допустимые деформации выберем на основе предположения, что балка остается твердой до начала текучести, когда формируются два пластических шарнира. Положения

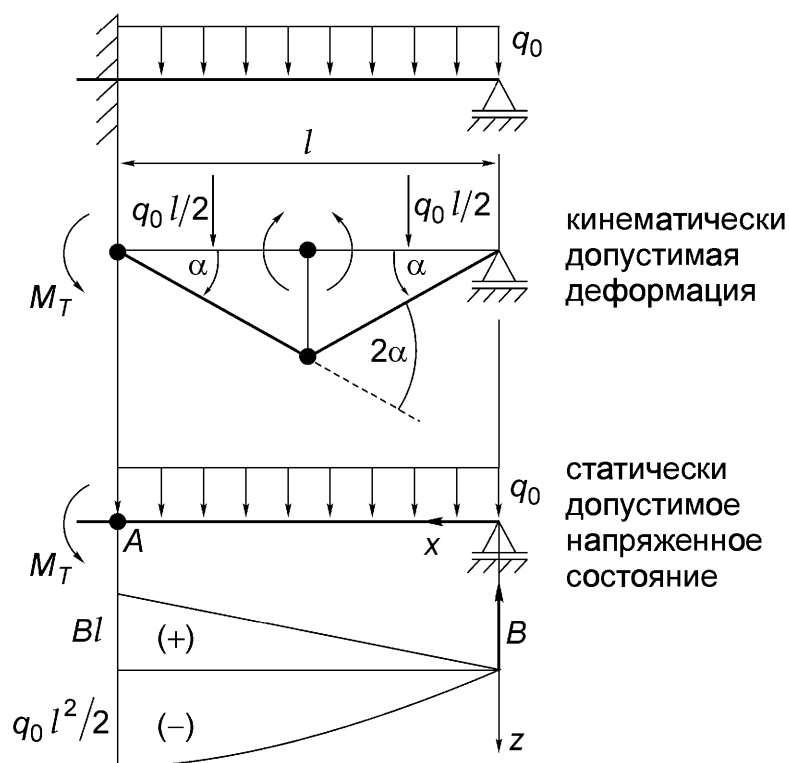


Рис. 9.16. Однопролетная упруго-пластическая балка со статически неопределимыми закреплениями; тем самым пластический резерв всей системы больше, чем пластический резерв сечения.

этих шарниров «произвольно» выберем на защемленном краю и в середине балки. При малом вращении на угол $\alpha \ll 1$ диссипативные силы, в соответствии с (3.7), совершают работу

$$W_{pl} = \alpha M_T + 2\alpha M_T = 3\alpha M_T, \quad (9.96)$$

где M_T – максимальный изгибающий момент полностью пластического сечения (когда пластический резерв сечения исчерпан). Для прямоугольного сечения см. (9.86). Работа внешних сил есть работа равномерно распределенной нагрузки q_0 и, с учетом симметрии, равна

$$W^{(e)} = 2\alpha \frac{q_0 l}{2} \frac{l}{4} = \alpha \frac{q_0 l^2}{4}. \quad (9.97)$$

В соответствии с теоремой 2 условие

$$\alpha \frac{q_0 l^2}{4} \geq 3\alpha M_T \quad (9.98)$$

дает верхнюю границу предельной нагрузки q_L

$$q_L < q_0 = 12 M_T / l^2. \quad (9.99)$$

Статически допустимое напряженное состояние получаем при рассмотрении рис. 9.16, считая, что единственный пластический шарнир расположен на защемленном краю. В этом случае момент в заделке $M = -M_T$ и распределение моментов выражается формулой

$$M(x) = xB - \frac{q_0 x^2}{2}, \quad B = \frac{q_0 l}{2} - \frac{M_T}{l}. \quad (9.100)$$

Наибольший изгибающий момент есть экстремум (9.100)

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 = B - q_0 x, \quad x_m = B/q_0, \quad M_{\max} = M(x_m) = B^2/2q_0. \quad (9.101)$$

Полагая $M_{\max} = M_T$, найдем нижнюю границу предельной нагрузки в соответствии с максимумом (теорема 1)

$$q_L \geq q_0 = 2(3 + 2\sqrt{2})M_T / l^2 = 11,657 M_T / l^2. \quad (9.102)$$

Повторяя проведенный анализ для второго пластического шарнира, имеющего координату x_m , получим в соответствии с теоремой 3 как статически, так и кинематически допустимые деформации и, следовательно, предельная нагрузка совпадает с нижней границей (9.102)

$$q_L = 11,657 M_T / l^2. \quad (9.103)$$

Если плотность равномерно распределенной нагрузки равна этому значению, то достигается предел устойчивости и исчерпывается пластический резерв конструкции.

9.3.1. Предельная нагрузка для одноуровневой упруго-пластической рамы

Квадратная плоская рама со статически неопределимыми закреплениями нагружена так, как показано на рис. 9.17. Максимальный изгибающий момент в поперечине обозначим M_T и предположим, что если сечение (более прочных) вертикальных стоек стало полностью пластическим, то изгибающий момент в них равен $2M_T$. Для прямоугольного поперечного сечения см. (9.86). В соответствии с теоремой 2 рассматриваются следующие допустимые механизмы: балочный механизм (рис. 9.17(a)) и рамочный механизм (рис. 9.17(b)), где пластические шарниры показаны черными кружками. Работа диссипативных сил равна, соответственно, $4\alpha_1 M_T$ и $6\alpha_2 M_T$. Работа внешних сил равна $2\alpha_1 F_1 l/4$ и $\alpha_2 F_2 l$. Следовательно, теорема 2 при условиях

$$2\alpha_1 F_1 l/4 \geq 4\alpha_1 M_T \quad \text{и} \quad \alpha_2 F_2 l \geq 6\alpha_2 M_T \quad (9.104)$$

дает верхние границы предельной нагрузки F_L

$$F_L \leq F_1 = 8M_T/l \quad \text{и} \quad F_L \leq F_2 = 6M_T/l. \quad (9.105)$$

Следует взять меньшее значение верхней границы. Распределение моментов в поперечине, связанное с этим механизмом,

$$M(x) = xA + M_T - \frac{12M_T}{l^2} \frac{x^2}{2}, \quad M(l) = -M_T \Rightarrow A = 4M_T/l \quad (9.106)$$

имеет экстремум при $x = l/3$, и экстремальное значение больше, чем приложенный максимальный момент, $M_{\max} = (5/3)M_T > M_T$.

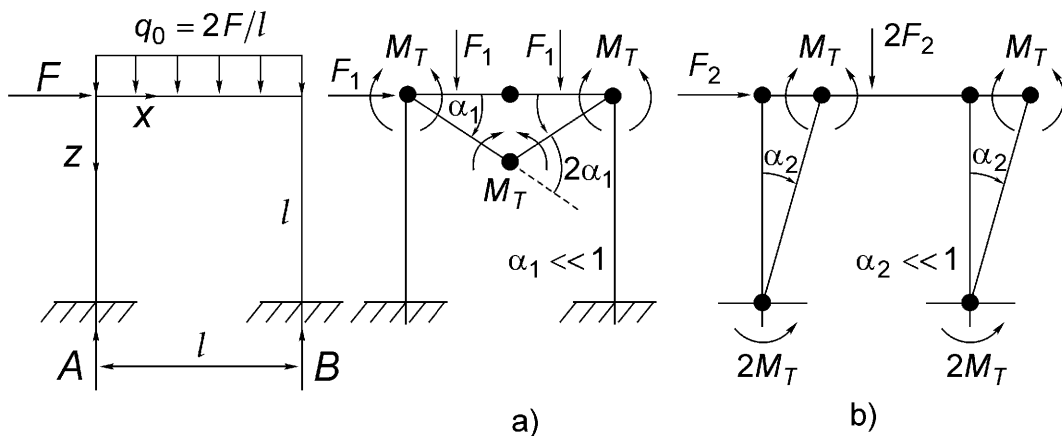


Рис. 9.17. Статически неопределимая упруго-пластическая рама с данным распределением резерва сечения и с большим пластическим резервом конструкции. (a) Балочный механизм и (b) рамочный механизм.

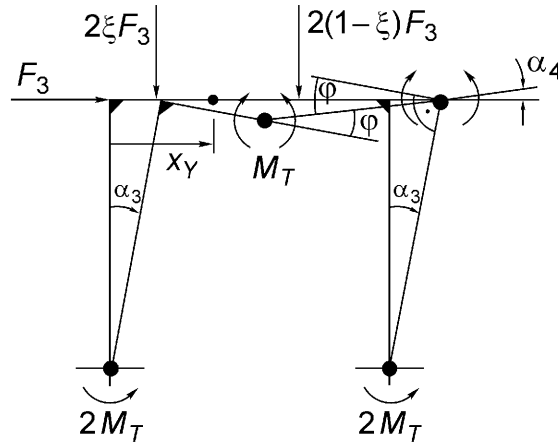


Рис. 9.18. Улучшенный механизм смешанного типа. Параметр X_γ .

Следовательно, напряженное состояние не является статически допустимым. Если положить нагрузку равной $(3/5)F_2$, то напряженное состояние становится статически допустимым, но тогда деформация не является кинематически допустимой. В этом случае нижнюю границу предельной нагрузки дает теорема 1 и

$$F_2 = \frac{18}{5} \frac{M_T}{l} = 3,6 \frac{M_T}{l} < F_L < 6 \frac{M_T}{l}. \quad (9.107)$$

Границы следует сузить, выбирая улучшенный механизм, например, рассматриваемый далее механизм смешанного типа, рис. 9.18, где положение пластического шарнира на поперечине остается свободным параметром $\xi = x_\gamma/l$. Геометрические условия дают $\varphi = \alpha_3 + \alpha_4$ и $\xi\alpha_3 = (1-\xi)\alpha_4$. В этом случае работа диссипативных сил (см. рис. 9.18) равна:

$$W_{pl} = 2\alpha_3 M_T + \varphi M_T + \varphi M_T + 2\alpha_3 M_T = 2\alpha_3 M_T (3 - 2\xi)/(1 - \xi). \quad (9.108)$$

Работа внешних сил равна:

$$W^{(e)} = \alpha_3 F_3 l + 2\alpha_3 F_3 \xi \frac{\xi l}{2} + 2\alpha_4 F_3 (1-\xi) \frac{(1-\xi)l}{2} = (1+\xi)\alpha_3 F_3 l. \quad (9.109)$$

При условии

$$\begin{aligned} (1+\xi)\alpha_3 F_3 l &\geq 2\alpha_3 M_T (3 - 2\xi)/(1 - \xi), \\ lF_3 &= 2M_T (3 - 2\xi)/(1 - \xi^2) \end{aligned} \quad (9.110)$$

и при выборе значения $F_3(\xi)$ так, чтобы достигался минимум,

$$\frac{dF_3}{d\xi} = 0 \Rightarrow \xi = (3 - \sqrt{5})/2, \quad (9.111)$$

теорема 2 дает наименьшую верхнюю границу предельной нагрузки для выбранного механизма смешанного типа

$$F_L \leq \min(F_3) = \frac{4}{3 - \sqrt{5}} \frac{M_T}{l} = 5,236 M_T/l. \quad (9.112)$$

Так как распределение напряжений, в соответствии с нагрузкой $\min(F_3)$, является статически допустимым, то все условия теоремы 3 выполнены и в (9.112) достигается равенство. Критическая нагрузка на пределе устойчивости равна $F_L = 5,236 M_T/l$, и пластический резерв конструкции исчерпывается, когда нагрузка достигает этой интенсивности.

Сведения о современном состоянии анализа предельной нагрузки, даже в пределах теории второго порядка (что особенно важно для рам) можно найти в статье

- Rubin H. und Vogel U. Baustatik ebener Stabwerke, «Stahlbau Handbook», Bd. 1, Abschn. 3, Köln, Stahlbau-Verlag, 1982.

9.4. Устойчивость движения упруго-пластических тел (циклическая пластичность)

В отличие от раздела 9.3, где предполагалось, что нагрузка монотонно возрастает до достижения предельного значения, в данном разделе рассматривается циклическое нагружение. В пределах упругости становится важным явление усталости материала и допустимая амплитуда напряжений уменьшается с ростом числа циклов в соответствии с кривой Велера. Дальнейшие сведения см. в работе

- Chwalla E. Einführung in die Baustatik. Köln, Stahlbau-Verlag, 1954.

В случае более сильного нагружения происходят пластические деформации и, в предположении о локализации областей пластичности, существуют три возможности:

1. Возникает переменная пластичность, разгрузка также становится неупругой. После некоторого числа циклов происходит разрушение (вязкая, малоцикловая усталость). В смысле раздела 9.2 движение неустойчиво.
2. Прогрессирующая текучесть в фазе нагрузки (разгрузка упругая) также окончательно приводит к разрушению. Движение неустойчиво.
3. Приспособляемость характеризует движение, при котором в процессе циклического нагружения размер областей пластичности становится все меньше. Такое благоприятное поведение конструкции требует создания благоприятных самоуравновешенных упругих напряжений (включая соответствующие реакции опор, но в отсутствие внешних сил) в фазе разгрузки так, чтобы при последующей нагрузке суммарное напряжение оставалось меньше предела текучести.

Такое движение считается устойчивым. Приспособляемость, например, невозможна в одиночном стержне при циклической осевой нагрузке.

Проиллюстрируем условия приспособляемости на примере шарового слоя, $R_i \leq R \leq R_e$, находящегося под действием медленно меняющегося внутреннего давления p (инерционными эффектами пренебрегаем). Это есть идеализация практически важной конструкции толстостенного сосуда под внутренним давлением. Квазистатическое упругое решение можно получить из (6.14) и (6.17), подставляя в эти формулы текущее значение давления. Эквивалентные напряжения Мизеса равны [см. (4.110) и (4.120)]

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 \right] \right\}^{1/2} = |\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| = \\ &= \frac{3q}{2} \left(\frac{R_e}{R} \right)^3, \quad q = p / \left[(R_e/R_i)^3 - 1 \right], \quad \sigma_e \leq \sigma_Y. \end{aligned} \quad (9.113)$$

Полагая $\sigma_e(R = R_i) = \sigma_Y$, получим, что давление при начале текучести пропорционально величине

$$q_Y = \frac{2\sigma_Y}{3} (R_i/R_e)^3. \quad (9.114)$$

Если давление увеличивается и дальше, $q > q_Y$, то возникает пластическая область и в слое $R_i \leq R \leq R_p$ выполняется условие текучести $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \sigma_Y$. Использование локального условия равновесия (2.19) в сферических координатах дает $d\sigma_{rr}/dR = 2\sigma_Y/R$. Интегрирование, с учетом граничного условия $\sigma_{rr} = -p$ при $R = R_i$, определяет статическое распределение напряжений в области пластичности

$$\sigma_{rr} = 2\sigma_Y \ln \frac{R}{R_i} - p, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \sigma_Y, \quad R \leq R_p. \quad (9.115)$$

При $R = R_p$ требуется непрерывный переход к упругому решению (справедливому при $R > R_p$) как по отношению к радиальной компоненте напряжений, так и по отношению к смещению u (см. (6.15)). Расчет пластической деформации по уравнению Прандтля-Рейсса (4.136) сложен. К сформулированной выше задаче можно применить метод деформаций Генки, предполагая неограниченную упругую сжимаемость материала с модулем K при гидростатическом сжатии, $3p^* = \sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi}$,

$$\varepsilon_{rr} = \psi \sigma'_{rr} + K^{-1} p^*, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \psi \sigma'_{\varphi\varphi} + K^{-1} p^* \quad (9.116)$$

[см. (4.12) и (4.14), где следует подставить $\psi = \psi(R)$ вместо $1/2G$]. Объединяя (9.116) и условие совместности поля деформаций (1.22) [перепишем его для удобства]

$$\frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dR} + \frac{\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}}{R} = 0, \quad (9.117)$$

получим дифференциальное уравнение первого порядка, которое легко интегрируется

$$\frac{d\psi}{dR} + \frac{3\psi}{R} = 0 \Rightarrow \psi(R) = -2K^{-1} + C/R^3. \quad (9.118)$$

Так как $\psi(R = R_p) = 1/2G$, то постоянная C определяется, и решение в пластической области принимает вид

$$\psi(R) = -2K^{-1} + \left(2K^{-1} + 1/2G\right)(R_p/R)^3, \quad R \leq R_p. \quad (9.119)$$

Радиальное смещение $u = R\varepsilon_{\varphi\varphi}$ (геометрическое соотношение выполнено в силу центральной симметрии); условие его непрерывности при $R = R_p$ дает нелинейное уравнение для размера R_p области пластичности, которое может быть решено численно,

$$(1/3)(R_p/R_e)^3 - \ln(R_p/R_i) = (1/3) - p/2 \sigma_Y. \quad (9.120)$$

Критическое давление, то есть предельную нагрузку p_L , найдем из условия перехода всего шарового слоя в пластическое состояние $R_p = R_e$

$$p_L = 2\sigma_Y \ln(R_e/R_i). \quad (9.121)$$

Если давление монотонно нарастает до критического значения, то пластический резерв конструкции исчерпывается, и равновесие становится неустойчивым. Считая далее, что $p < p_L$ и проводя разгрузку до нулевого значения внутреннего давления, найдем из (6.14) и (6.17) остаточные напряжения при дополнительном условии, что они не приводят снова к появлению текучести

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= 2\sigma_Y \ln(R/R_i) - p - q \left[1 - (R_e/R)^3 \right] \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_Y - (3q/2)(R_e/R)^3 \end{aligned} \right\} R_i \leq R \leq R_p, \quad (9.122)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= -(q + q_p) \left[1 - (R_e/R)^3 \right] \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} &= -(q + q_p) \left[1 + (1/2)(R_e/R)^3 \right] \end{aligned} \right\} R_p \leq R \leq R_e,$$

где

$$q_p = p \left[\frac{2\sigma_Y}{p} \ln \left(\frac{R_p}{R_i} \right) - 1 \right] \frac{R_p^3}{R_e^3 - R_p^3}. \quad (9.123)$$

Эквивалентное напряжение, соответствующее остаточным напряжениям $\sigma_e^{(0)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} - \sigma_{rr}^{(0)}$, имеет абсолютный максимум на ненагруженной внутренней поверхности $R = R_i$, и там оно равно сжимающему окружному напряжению, $q > q_Y$ [см. (9.114)]

$$\sigma_e^{(0)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}(R = R_i) = \frac{3}{2} (q_Y - q) (R_e/R_i)^3 < 0. \quad (9.124)$$

Для того, чтобы имела место приспособляемость, абсолютное значение эквивалентного напряжения должно быть меньше предела текучести при сжатии. Для упруго-пластического материала, симметричного по отношению к растяжению и к сжатию, должно выполняться неравенство $\sigma_e^{(0)} > -\sigma_Y$. Учитывая (9.114), где последнее значение выражено через $-q_Y$ и используя (9.124), получаем условие приспособляемости, которое есть условие устойчивости движения, в простом виде

$$q \leq 2q_Y. \quad (9.125)$$

Следовательно, максимальное значение, которое может принимать эквивалентное напряжение во вспомогательной задаче с неограниченными упругими свойствами шарового слоя, равно удвоенному пределу текучести. На основе этого результата можно получить достаточное условие неустойчивости движения, а именно, пластического разрушения при циклическом нагружении; это условие выполняется и для конструкций более общего вида. Состояние приспособляемости не будет достигнуто, если эквивалентное напряжение в соответствующем неограниченно упругом теле изменяется в более широком интервале, чем удвоенный предел текучести. Приведем без доказательства первую теорему Мелана о приспособляемости: «Приспособляемость будет иметь место, если при заданном зависящем от времени поле напряжений $\sigma_{ij}^{(el)}(t)$ во вспомогательной задаче, где конструкция неограниченно упруга, можно построить не зависящее от времени и самоуравновешенное поле напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ такое, что эквивалентные значения фиктивных результирующих напряжений $|\sigma_{ij}^{(el)}(t) + \sigma_{ij}^{(0)}|$ все время будут находиться ниже предела текучести.» Состояние приспособляемости не будет достигнуто, если по-

стоянное поле самоуравновешенных напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ с вышеописанными свойствами не существует; в этом случае движение неустойчиво.

9.5. Устойчивость течения в наклонных открытых каналах, гидравлический скачок

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости в открытом канале ширины B с наклонным дном, рис 9.19. Применив уравнение Бернулли (8.37) к линии тока стационарного течения, которая предполагается прямой, как показано на рисунке, получим (давление здесь абсолютное)

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = D + \bar{H}_E. \quad (9.126)$$

Так как некоторое трение о стенки канала всегда имеется, то (9.126) выполняется с хорошей точностью только для малых расстояний между точками 1 и 2. Проектируя уравнение Эйлера (8.30) на направление, перпендикулярное линии тока, получим распределение гидростатического давления, в частности, для малых углов α

$$\begin{aligned} p_1(z_1) &= p_0 + \rho g(D + d_1 - z_1), \\ p_2(z_2) &= p_0 + \rho g(D - \alpha x + d_2 - z_2), \quad \alpha \ll 1. \end{aligned} \quad (9.127)$$

Подставляя эти формулы в (9.126), исключим давление p и атмосферное давление p_0 и, вводя показанный на рис 9.19 энергетический напор H_E идеально-го течения, приведем уравнение Бернулли к удобному виду

$$\frac{v_2^2}{2g} + d_2 - \alpha x = \frac{v_1^2}{2g} + d_1 = \bar{H}_E - \frac{p_0}{\rho g} = H_E. \quad (9.128)$$

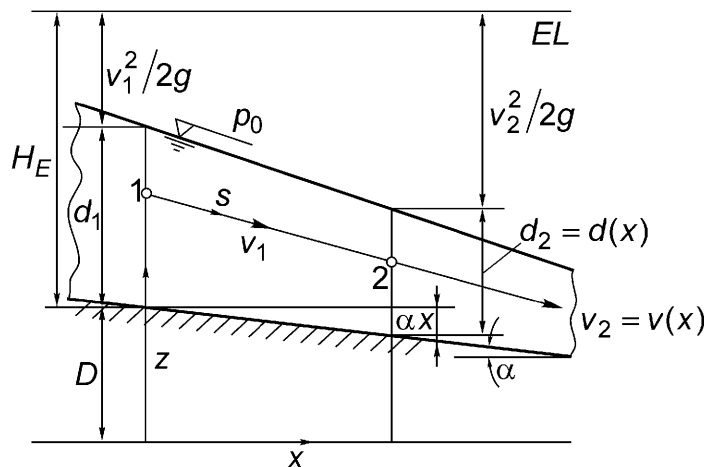


Рис. 9.19. Стационарное течение в наклонном открытом канале постоянной ширины B .

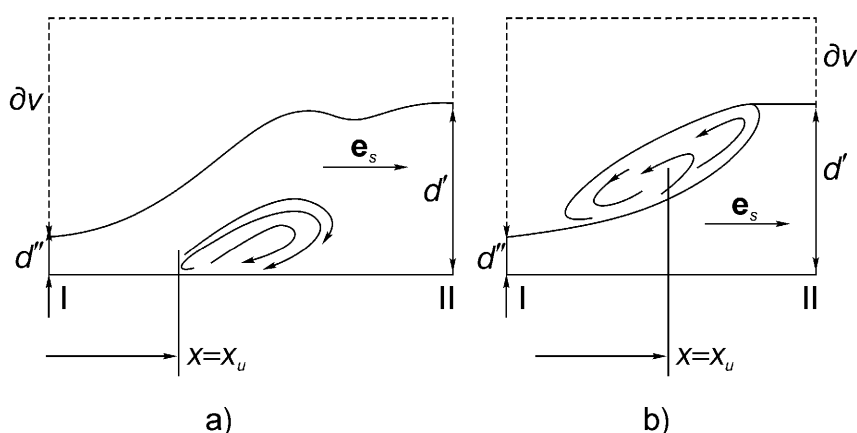


Рис. 9.20. Придонный (а) или поверхностный (б) бурн (последний представляет собой стоячую волну и вряд ли может существовать), возникающий в открытом канале при гидравлическом скачке от быстрого к спокойному течению; см., например, Kozeny J. *Hydraulik*. Wien, Springer-Verlag, 1953 и Rouse H. *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*. New York, Dover, 1961.

Используя уравнение непрерывности

$$\dot{m} = \rho B d_1 v_1 = \rho B d_2 v_2 \quad , \quad v_2 = v(x), \quad (9.129)$$

исключим (средние) скорости. Обозначим $H(x) = H_E + \alpha x$; эта величина обычно называется удельным энергетическим напором и относится к точкам самой нижней линии тока. Тогда окончательно получим кубическое уравнение для глубины $d_2 = d(x)$ [что указывает на возможность неустойчивости типа, изображенной на рис. 9.20(a)]

$$d^3 - Hd^2 + k = 0 \quad , \quad k = \dot{m}^2 / 2g(\rho B)^2. \quad (9.130)$$

Выразим отсюда $H(d)$ (в безразмерной форме эта функция показана на рис. 9.21)

$$H(d) = d + k/d^2 \quad (9.131)$$

и, тем самым, обойдем трудности, которые могли бы возникнуть при решении этого нелинейного уравнения. Так как при данной скорости расхода k удельная энергия имеет минимум при $d_c = (2k)^{1/3}$, то это значение считается критическим: два из трех вещественных корней кубического уравнения (9.130) в этом случае совпадают.

При $H > H_c$, когда критический напор для данной скорости расхода принимает значение

$$H_c = \frac{3}{2}(2k)^{1/3}, \quad (9.132)$$

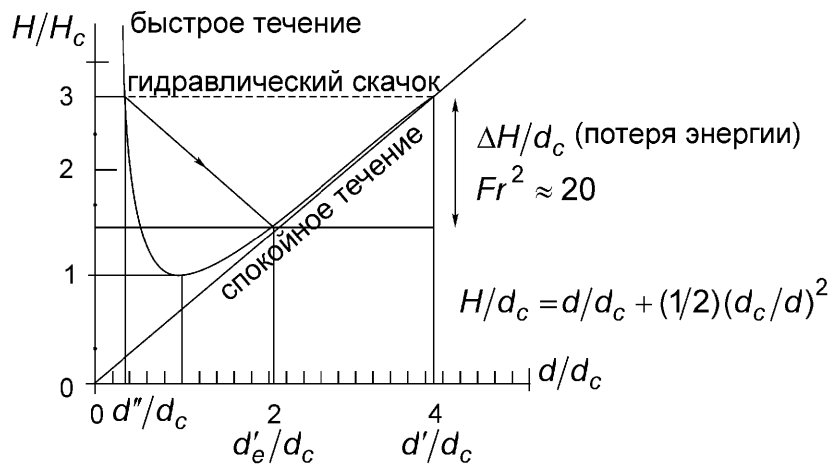


Рис. 9.21. Диаграмма удельной энергии; удельный энергетический напор как функция глубины d без потерь энергии (горизонтальная пунктирная линия) и с учетом вязкости при смене типа течения: глубина быстрого течения d'' , глубина спокойного течения увеличилась до d'_e . $H_c = 3d_c/2$.

два корня положительны, $d' > d''$. Такое решение соответствует двум различным состояниям течения. Первое, более медленное течение, соответствует большей глубине и называется спокойным течением; второе называется быстрым течением. Последнее не является устойчивым к достаточно большим возмущениям и может “внезапно” смениться спокойным течением. В области, где происходит смена типа течения, велики градиенты скорости, поэтому значительную роль играет вязкость и у дна формируется бурун, рис. 9.20(a) [или у поверхности, рис. 9.20(b)]. При фиксированной координате x энергетический напор меняется на $\Delta H > 0$ в соответствии с двумя условиями течения. На рис. 9.21 приведен построенный в безразмерных переменных график, иллюстрирующий гидравлический скачок.

Потерю энергии при гидравлическом скачке можно вычислить аналогично потере Карно (см. раздел 7.3.5), применив закон изменения количества движения (7.13) в стационарных условиях. Трение на границах есть эффект второго порядка малости для таких малых расстояний и им пренебрегаем. В соответствии с рис. 9.20 контрольная поверхность включает в себе бурун; поток импульса равен главному вектору внешних сил. Дно канала либо считается горизонтальным на рассматриваемом небольшом расстоянии, либо образующим малый угол с горизонтом (тогда составляющая силы тяжести, параллельная течению, мала и ей пренебрегаем)

$$\oint_{\partial V} \mu \mathbf{v} dS = \mathbf{R} \Rightarrow \mu_{\perp} = -\rho v_{\perp}, \quad \mu_{\parallel} = \rho v_{\parallel},$$

$$\mathbf{e}_s : \Rightarrow -\rho v_{\perp}^2 B d'' + \rho v_{\parallel}^2 B d'_e = g\rho \frac{d''}{2} B d'' - g\rho \frac{d'_e}{2} B d'_e. \quad (9.133)$$

Распределение статического давления по глубине уже рассматривалось выше. Исключение $v_{II} = v_I d''/d'_e$ дает кубическое уравнение для глубины d'_e на выходе контрольной поверхности, то есть на низовой стороне буруна

$$(d'_e - d'') \left[d'_e (d'_e + d'') - \frac{2v_I^2}{g} d'' \right] = 0. \quad (9.134)$$

Отбрасывая тривиальное решение $d'' = \text{const}$, соответствующее постоянной глубине быстрого течения, решаем получившееся квадратное уравнение и находим корень $d'_e > d''$, который устанавливает направление гидравлического скачка,

$$\frac{d'_e}{d''} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1 \right), \quad F_1 = v_I / \sqrt{gd''} = (d_c/d'')^{3/2}. \quad (9.135)$$

Характеристический коэффициент $F_1 \geq 1$, вычисленный для сечения 1, называется числом Фруда; это число важно для течений, в которых сила тяжести играет существенную роль, см. (13.26). Величина $\sqrt{gd''}$ имеет размерность скорости и представляет собой характерную скорость гравитационных волн на мелкой воде, так называемую быстроту. Предельное значение F_1^* соответствует невозмущенному течению $d'_e = d''_g = v_I^2/g$. Неустойчивым может стать только быстрое течение, и бурун может сформироваться, если $F_1 > 1$; следовательно, $d'' < d''_g$. Потеря энергетического напора есть разность соответствующих напоров и должна быть положительна

$$H_I = d'' + v_I^2/2g, \quad H_{II} = d'_e + v_{II}^2/2g \Rightarrow \Delta H = H_I - H_{II} = \zeta v_{II}^2/2g, \\ \zeta = \frac{1}{32F_1^2} \left(1 - \sqrt{8F_1^2 + 1} \right) \left(3 - \sqrt{8F_1^2 + 1} \right)^3. \quad (9.136)$$

В терминах скоростного напора коэффициент потерь выражается величиной ζ ; смотрите также:

- Press H. und Schröder R. Hydromechanik im Wasserbau. Berlin, Ernst, 1966.
- Если интерпретировать гидравлический скачок в терминах стоячей волны, то область $1 \leq F^2 \leq 3$ есть волновая зона, а $F^2 > 3$ – область ударной волны. Граница между скачками волнового и ударного типов определяется тогда значением $F^2 = 3$, когда $d'_e/d'' = 2$.

Аналогично диаграмме удельной энергии, можно на основе выражения

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}_c} \right)^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{d}{d_c} \right)^2 - \left(\frac{d}{d_c} \right)^3, \quad \dot{m}_c = \rho B \sqrt{gd_c^3/2}$$

построить диаграмму безразмерного расхода. Иллюстративные приложения этого соотношения к началу течения из большого резервуара в канал и к течению через ворота шлюза оставляем читателю, специально интересующемуся инженерной гидравликой. Диаграмма удельной энергии (рис. 9.21) также полезна при исследовании течения идеальной жидкости в канале с поднимающимся дном. Можно считать, что линия энергии остается горизонтальной, а изменение H происходит из-за увеличения высоты в соответствии с контуром нижней границы. Поделив (9.131) на глубину d , получим безразмерное соотношение; соответствующий график называется диаграммой энергия-расход. Эта диаграмма представляет собой комбинацию двух диаграмм и ее удобно применять, например, для расчета водослива.

9.6. Флаттерная неустойчивость

Флаттер представляет собой особый вид самовозбуждающихся колебаний упругой системы, нагруженной следящими силами. Исторически с флаттером тонких крыльев впервые столкнулись в самолетостроении, когда увеличивающаяся скорость самолетов достигла критического значения. Это явление стали рассматривать как динамическую неустойчивость. Следующий иллюстративный пример максимально упрощен, но явление флаттера сохраняется. Крыло в стационарном параллельном потоке постоянной скорости v моделируется как жесткая прямоугольная пластина с двумя степенями свободы на линейно упругом основании.

При возмущении стационарного полетного положения (последнее на рис. 9.22 показано пунктиром) возникает линеаризованная возвращающая сила zc_1 и возвращающий момент φc_2 , действующие со стороны винклеровского основания жесткости c_1 на поступательное движение и жесткости c_2 на вращение. Малый угол возмущения φ считается положительным при увеличении стационарного

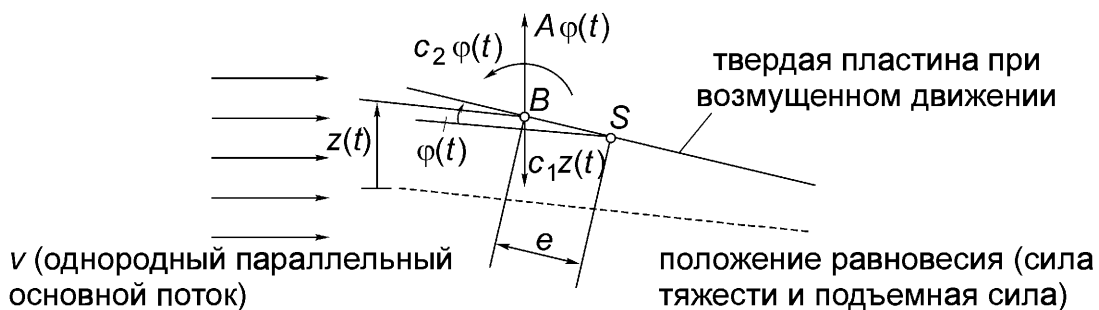


Рис. 9.22. Возмущенное положение твердой пластины с двумя степенями свободы в параллельном потоке жидкости. Возбуждение производится увеличением подъемной силы $A\varphi$. Возвращающая сила zc_1 и момент φc_2 линеаризованы.

нарного угла атаки α . Через S обозначен центр масс пластины единичной длины; линия атаки дополнительной подъемной силы $A\varphi$ проходит через точку B , не совпадающую с S , см. раздел 13.2. Система координат z, φ связана с крылом при его поступательном движении в стационарном полете с постоянной скоростью v ; тем самым, это инерциальная система отсчета. Масса m , центральный радиус инерции i_S и эксцентриситет e заданы. Уравнения возмущенного движения имеют вид (см. также раздел 10.1)

$$\begin{aligned} m(\ddot{z} - e\ddot{\varphi}) &= -c_1 z + A\varphi, \\ mi_S^2 \ddot{\varphi} &= (A\varphi - c_1 z) e - c_2 \varphi. \end{aligned} \quad (9.137)$$

Простые преобразования приводят к связанной системе линеаризованных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{z} - e\ddot{\varphi} + \Omega_z^2 z - \alpha\varphi &= 0, \quad \Omega_z^2 = c_1/m, \quad \alpha = A/m \approx v^2, \\ -e\ddot{z} + i_B^2 \ddot{\varphi} + 0 + i_B^2 \Omega_\varphi^2 \varphi &= 0, \quad \Omega_\varphi^2 = c_2/mi_B^2, \quad i_B^2 = i_S^2 + e^2, \end{aligned} \quad (9.138)$$

где матрица инерции симметрична, но матрица жесткости несимметрична. Такие механические системы называются циркулирующими; другой пример системы такого рода дает выпучивающийся стержень, нагруженный касательной следящей силой. Приравнивая нулю определитель матрицы коэффициентов, находим характеристическое уравнение [см. также (7.139)], которое есть уравнение частот возмущенной системы,

$$i_B^2(-\omega^2 + \Omega_z^2)(-\omega^2 + \Omega_\varphi^2) + e\omega^2(-e\omega^2 + \alpha) = 0. \quad (9.139)$$

Или, раскрывая скобки,

$$\begin{aligned} p_0 \omega^4 - p_2 \omega^2 + p_4 &= 0, \quad p_0 = (i_S/i_B)^2 > 0, \quad p_2(\alpha) = \Omega_z^2 + \Omega_\varphi^2 - e\alpha/i_B^2, \\ p_4 &= \Omega_z^2 \Omega_\varphi^2 > 0. \end{aligned}$$

Вещественные положительные решения $\omega^2 = \frac{1}{2p_0} \left[p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4p_0 p_4} \right]$ существуют, когда

$$\Delta = p_2^2 - 4p_0 p_4 > 0, \quad p_2(\alpha) > 0. \quad (9.140)$$

Критические значения амплитуды возбуждения суть нули дискриминантного выражения Δ (см. рис. 9.23)

$$\alpha = \alpha_{2,1} = i_B^2 \left[\left(\Omega_z^2 + \Omega_\varphi^2 \right) \pm 2 \frac{i_S}{i_B} \Omega_z \Omega_\varphi \right] / e. \quad (9.141)$$

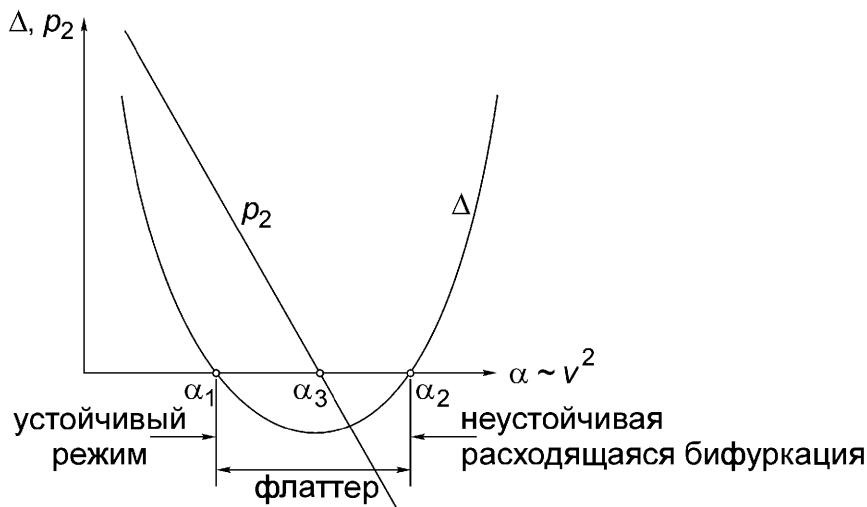


Рис. 9.23. Устойчивые и неустойчивые области скорости полета v . Флаттерная неустойчивость наблюдается при $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $\alpha = A/m$.

В области $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ дискриминант отрицателен, $\Delta < 0$, для $\alpha > \alpha_3 = i_B^2 (\Omega_Z^2 + \Omega_\Phi^2) / e > \alpha_1$ коэффициент $\rho_2 < 0$. Легко доказать, исходя из рис. 9.23, что при малых скоростях полета, то есть при $\alpha < \alpha_1$ стационарное движение устойчиво, причем величина α_1 равна критической скорости полета v_c . При $\alpha > \alpha_1$ стационарное движение неустойчиво: в области $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ собственные значения ω являются комплексно сопряженными и, следовательно, линеаризованное возмущенное движение экспоненциально возрастает. Последний случай называется флаттерной неустойчивостью. Для еще более высоких скоростей полета, $\alpha > \alpha_2$, дискриминантное выражение положительно и стационарная конфигурация становится неустойчивой посредством дивергентной бифуркации.

Аналогичные эффекты можно наблюдать, когда мосты с широкими пролетами сконструированы так, что имеют малую жесткость на закручивание. В 1941 г. произошло разрушение моста через реку Такома под действием самовозбужденных значительных флаттерных колебаний. Скорость бокового ветра была невелика, и мост разрушился после нескольких часов больших колебаний. Процесс был заснят на киноленту; видно, как непосредственно перед разрушением энергия последовательно перетекает от изгиба к закручиванию и наоборот. Этот случай ясно показывает опасность флаттера. Флаттер также можно наблюдать при выпучивании тонких упругих конструкций (например, стержня Бека) под действием различных следящих сил. Соппротивление может оказывать дестабилизирующее воздействие. Колебания труб, вызванные течением жидкости в них, могут привести к флаттерной бифуркации положения равновесия. Смотрите

- Leipholz H. Stabilitätstheorie. Stuttgart, Teubner, 1958.
- Försching H.W. Grundlagen der Aeroelastik. Berlin, Springer-Verlag, 1974. Имеется также русский перевод: Фершинг Г. В. Основы аэроупругости. Москва, Машиностроение, 1984.
- Бисплингофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л. Аэроупругость. Москва, ИЛ, 1958.
- Bisplinghoff R.L. and Ashley H. Principles of Aeroelasticity. New York, Dover, 1975.
- Ziegler H. Principles of Structural Stability. Blaisdell, Mass., Waltham, 1968.

9.7. Упражнения А 9.1 – А 9.8 и решения

А 9.1: Исследовать устойчивость положений равновесия тяжелой точки массы m , которая может скользить по гладкой неподвижной вертикальной окружности радиуса R и прикрепена к верхней точке окружности линейно упругой пружиной жесткости c (рис. А 9.1). Силы тяжести образуют однородное поле.

Решение: Система является консервативной и можно применить критерий Дирихле. Потенциал $V = W_p + U$, где $W_p = -2mgR \cos^2 \varphi$ и $U = cs^2/2$, $s = -l_0 + 2R \cos \varphi$. Условие равновесия

$$\frac{dV}{d\varphi} = 0 = 2R \sin \varphi [cl_0 + 2(mg - cR) \cos \varphi];$$

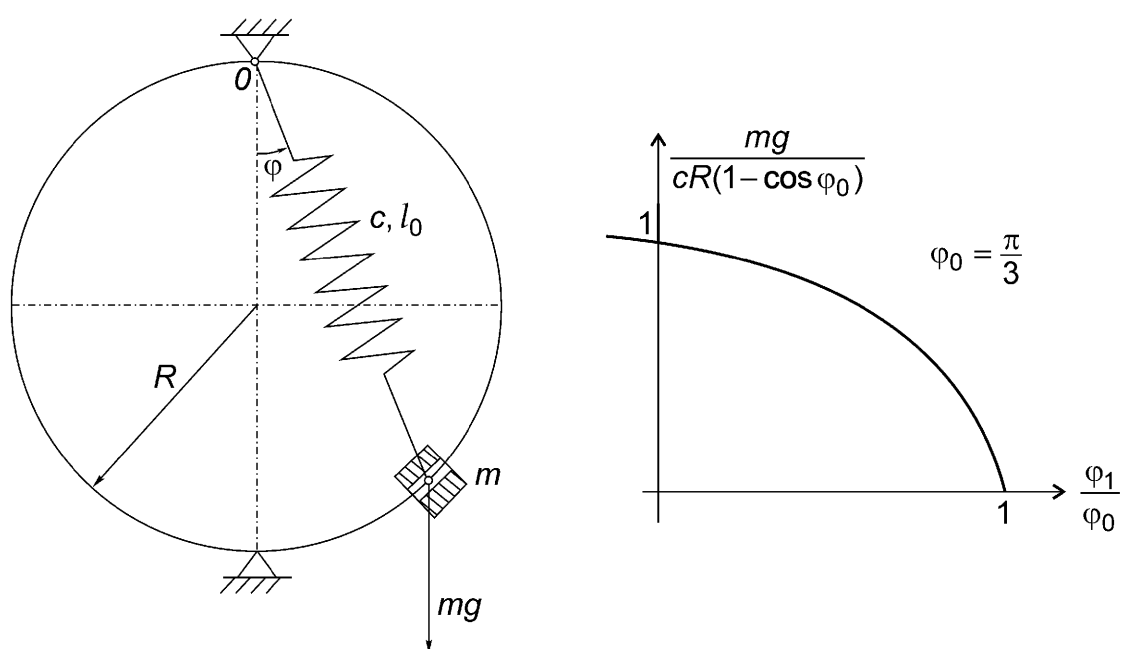


Рис. А 9.1.

это уравнение имеет тривиальное решение $\varphi_1 = 0$. Два других (симметричных) положения существуют, если уравнение $\cos \varphi = cl_0/2(cR - mg) > 0$ имеет вещественные корни, $\varphi_1 \neq 0$, $mg < c(R - l_0/2) > 0$. Условие устойчивости равновесия

$$\left. \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_1} = 2R[cl_0 \cos \varphi_1 + 2(mg - cR)\cos 2\varphi_1] > 0.$$

При $\varphi_1 = 0$ это условие сводится к неравенству $mg > c(R - l_0/2)$. Положения $\varphi_1 \neq 0$ устойчивы, если $mg < c(R - l_0/2) > 0$. Применение динамического метода малых возмущений для проверки полученных выше результатов с помощью исследования колебаний предоставляем читателю.

А 9.2: Определить выпучивающую нагрузку для тонкого линейно упругого стержня, который закреплен и нагружен так, как показано на рис. А 9.2. Главная жесткость на изгиб $B = EJ_Y = \text{const}$.

Решение: Изгибающий момент в изогнутом положении для различных участков стержня равен $M_I(x) = Fw(x) + Hx$ при $0 \leq x \leq l_1$ и $M_{II}(x) = Fw(x) + Hl_1$ при $l_1 \leq x \leq (l_2 + l_1) = l$. Линеаризованная кривизна пропорциональна моменту, и общее решение получающегося неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $w_I(x) = C_1 \cos \alpha x + D_1 \sin \alpha x - (H/F)x$ между опорами и $w_{II}(x) = C_2 \cos \alpha x + D_2 \sin \alpha x - (H/F)l_1$ за правой опорой. Из граничных условий и условия непрерывности производной при $x = l_1$ получим систему пяти однородных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1, \\ 0 &= D_1 \sin \alpha l_1 - (H/F)l_1, \\ 0 &= C_2 \cos \alpha l_1 + D_2 \sin \alpha l_1 - (H/F)l_1, \\ 0 &= -C_2 \alpha^2 \cos \alpha l - D_2 \alpha^2 \sin \alpha l, \end{aligned}$$

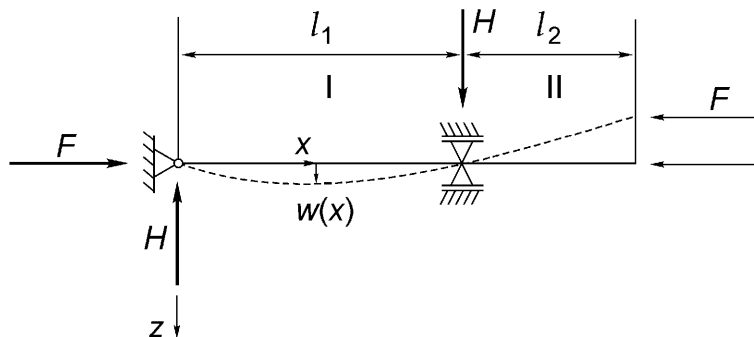


Рис. А 9.2.

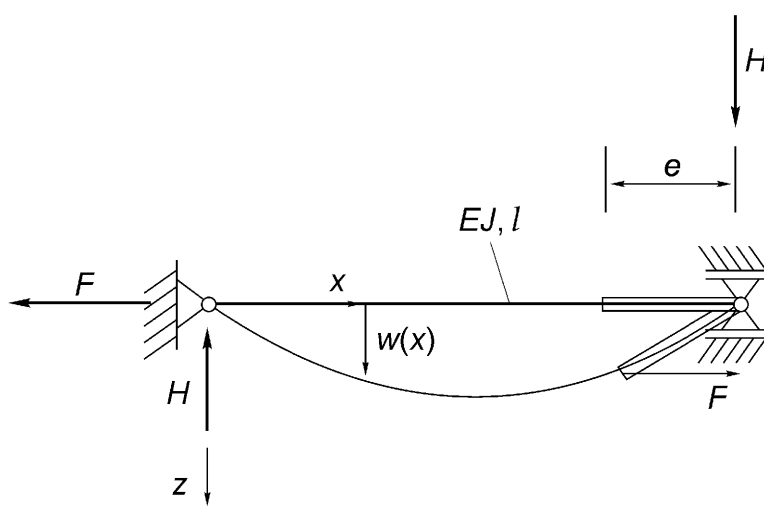


Рис. А 9.4. Выпучивание при растяжении.

$$D_1 \alpha \cos \alpha l_1 + C_2 \alpha \sin \alpha l_1 - D_2 \alpha \cos \alpha l_1 - (H/F) = 0.$$

Приравнявая нулю определитель, приходим к трансцендентному уравнению

$$\alpha l_1 \sin \alpha l - \sin \alpha l_1 \sin \alpha l_2 = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения, который можно найти численно, дает критическую нагрузку F_c или длину на выпучивание l_c . Если $l_1 = l_2 = l/2$, то уравнение можно разбить на множители, $\left[\alpha l \cos(\alpha l/2) - \sin(\alpha l/2) \right] \sin(\alpha l/2) = 0$, и наименьшее собственное значение равно приблизительно $l_c = 1,35 l$.

А 9.3: На рис А 9.3 показаны варианты закрепления тонкого линейно упругого стержня. Найти приведенную длину при выпучивании l_c в формуле Эйлера для критической нагрузки $F_c = \pi^2 EJ/l_c^2$ при данной длине l .

Решение: см. рис. А 9.3.

А 9.4: Даже растягивающая сила F может стать критической, если она приложена к концу (твердого) кронштейна, другой конец которого приварен к тонкому линейно упругому стержню постоянной жесткости на изгиб $B = EJ$; такая система показана на рис. А 9.4. Определить условие выпучивания при растяжении.

Решение: Изгибающий момент в отклоненном положении $M(x) = Hx - Fw(x)$, где $Hl + Fe(\partial w/\partial x)|_{x=l} = 0$. Исключая реакцию H , получаем линеаризованное дифференциальное уравнение для отклонения ($\alpha^2 = F/EJ$)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \alpha^2 w = \alpha^2 \frac{ex}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$w(x) = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x - \frac{ex}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l}.$$

Учтем граничные условия $w(0) = w(l)$ и $w'(l) = (\partial w / \partial x)_{x=l}$. Тогда найдем $C_1 = 0$ и остается система двух линейных однородных уравнений для двух неизвестных C_2 и $w'(l)$; эта система имеет нетривиальное решение, только если ее определитель обращается в нуль,

$$\tanh \alpha l = \frac{\alpha e}{(1 + e/l)}.$$

Единственный корень этого характеристического уравнения дает критическую растягивающую силу F_c . Если кронштейн очень короткий, $e \ll l$, то выпучивающая сила близка к значению $F_c = EJ/e^2$. Дальнейшие проблемы такого рода обсуждались в работе

- Grammel R. Ingenieur Archiv, 17 (1949), p. 107.

Смотрите также:

- Herrmann G. and Armenakas A.E. ASME Journal of Applied Mechanics, 31, 1960, p. 455.

А 9.5: Определить изменение критической нагрузки для эйлера стержня (рис. 9.10) при учете сдвиговых деформаций.

Решение: Полагая $q_z = -d^2 M_y / dx^2$ в (6.70) и считая момент в отклоненном положении равным $M_y(x) = Fw(x)$, получим линеаризованное дифференциальное уравнение (постоянный коэффициент здесь иной, нежели для балки, жесткой на сдвиг)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha_S^2 w = 0, \quad \alpha_S^2 = F / (1 - \kappa_z F / GA) / EJ_y.$$

Так как это уравнение того же вида, что и (9.44), то сразу находим критическую нагрузку для стержня с шарнирными закреплениями на концах

$$F_c = \frac{F_c^{(Euler)}}{\left(1 + \kappa_z F_c^{(Euler)} / GA\right)}.$$

Это значение меньше, чем $F_c^{(Euler)} = \pi^2 EJ_y / l^2$, так как знаменатель больше единицы. Для слоистых балок возникает еще одна задача устойчивости, так как возможно возникновение морщин в тонких слоях (явление локального выпучивания). Для исследования этого явления можно непосредственно применить результаты раздела 11.3.2, если положить жесткость k основания равной жесткости основного материала.

А 9.6: Тонкая прямоугольная пластина (a, b) с двумя шарнирно опертыми параллельными краями $x = 0$ и $x = a$ нагружена в своей плоскости постоянной силой $n_x = -n, n_y = n_{xy} = 0$. Чтобы удовлетворить данным граничным условиям, выберем моду выпучивания в виде $w(x, y) = f(y) \sin(m\pi x/a)$, $m = 1, 2, \dots$. Найдите коэффициенты критической нагрузки в двух случаях: шарнирного закрепления и защемления оставшихся краев $y = 0$ и $y = b$.

Решение: Линеаризованное уравнение Кармана сводится к уравнению

$$K\Delta\Delta w + \lambda n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Подставляя сюда моду выпучивания, получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка (аналогичное уравнению для предварительно нагруженной балки)

$$f^{IV} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 f'' + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \lambda \frac{n}{K} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] f = 0.$$

Общее решение этого уравнения представляет собой моды выпучивания тонкой балки длины b

$$f(y) = C_1 \cosh \alpha_1 y + C_2 \sinh \alpha_1 y + C_3 \sin \alpha_2 y + C_4 \cos \alpha_2 y,$$

$$\alpha_{1,2} = \left\{ \left[\lambda \frac{n}{K} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right]^{1/2} \pm \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Из граничных условий при $y = 0$ и $y = b$ определяются три постоянные C_i и критическое значение коэффициента нагрузки. Если все четыре края пластины шарнирно оперты, то собственные значения равны

$$\lambda_m = \pi^2 K \left[2 + \left(\frac{a}{mb}\right)^2 + \left(\frac{mb}{a}\right)^2 \right] / nb^2.$$

Если остающиеся два параллельных края жестко защемлены, то собственные значения равны (пластина становится более жесткой по сравнению с пластиной, края которой шарнирно оперты)

$$\lambda_m = \pi^2 K \left[\frac{5}{2} + 5 \left(\frac{a}{mb} \right)^2 + \left(\frac{mb}{a} \right)^2 \right] / nb^2.$$

Критическим является минимальное собственное значение, $\lambda_c = \min \lambda_m$. Более подробно смотрите:

- Kollbrunner C.F. und Meister M. Ausbeulen. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1958.

А 9.7: Установить связь между свободными колебаниями мембраны, имеющей форму многоугольника и однородное и изотропное натяжение S , и свободными колебаниями пластины той же формы с шарнирно опертыми краями и предварительными гидростатическими напряжениями в своей плоскости.

Решение: Можно использовать статическое уравнение (6.191), добавив инерционную нагрузку на мембрану, $p = -\rho^* h^* (d^2 u / dt^2)$. Для гармонических колебаний $u = U \exp(i\omega^* t)$ и, сократив на временной множитель, получаем уравнение Гельмгольца

$$\Delta U + \rho^* h^* \omega^{*2} U / S = 0.$$

На границе $U = 0$ и, следовательно, $\Delta U = 0$.

В уравнении для пластины появляется бигармонический оператор. Действуя оператором Лапласа на уравнение Гельмгольца, найдем

$$\Delta \Delta U + \rho^* h^* \omega^{*2} \Delta U / S = 0.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим бигармоническое уравнение того же типа, которое получилось бы после сокращения временного множителя в первом (линеаризованном) уравнении Кармана (5.30а), если учесть предварительные гидростатические напряжения $n_x = n_y = n = \text{const}$, $n_{xy} = 0$ и положить $p = -\rho h (d^2 w / dt^2)$. Для отклонения $w(x, y, t) = W(x, y) \exp(i\omega t)$ найдем

$$K \Delta \Delta W - n \Delta W - \rho h \omega^2 W = 0.$$

Для прямолинейных шарнирно опертых краев граничные условия совпадают с приведенными выше: $W = 0, \Delta W = 0$, см. раздел 6.6.3. Учитывая, что

$\Delta W + \lambda^2 W = 0$ и рассматривая дискретный спектр мембраны $\lambda_j^{*2} = \rho^* h^* \omega_j^{*2} / S$, получим собственные частоты предварительно напряженной пластины

$$\omega_j^2 = K \lambda_j^4 (1 - n/n_j) / \rho h, \quad n_j = -K \lambda_j^2, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

выраженные через дискретный спектр λ_j соответствующей краевой задачи Дирихле на собственные значения для уравнения Гельмгольца второго порядка. Силы n_j , лежащие в плоскости, суть выпучивающие нагрузки при $\omega_j = 0$. Их наименьший модуль есть критическая нагрузка для пластины, n_c . Собственные значения λ_j для мембраны можно приближенно определить методом Ритца-Галеркина, см. гл. 11. Для прямоугольной мембраны они находятся легко:

$$\lambda_{jk} = \pi \sqrt{(j/a)^2 + (k/b)^2}, \quad j, k = 1, 2, 3, \dots$$

Численное исследование свободных и вынужденных колебаний мембран произвольной формы эффективно проводится методом граничных элементов.

А 9.8: Найти определитель, возникающий при исследовании устойчивости на выпучивание тонкой круглой линейно упругой пластины с осесимметричным отверстием. Внешний край диаметра $2a$ жестко зашпемлен и нагружен радиальной силой, внутренний край диаметра $2b$ свободен.

Указание: Перед исследованием устойчивости следует найти радиальное мембранное напряжение $n_r = F/r$, соответствующее нагрузке в плоскости пластины с функцией напряжений $F = Ar + B/r$.

Решение: Граничные условия $n_r(a) = -n$, $n_r(b) = 0$ дают для пластины, нагруженной в своей плоскости (теория первого порядка),

$$n_r = -\frac{n}{1 - (b/a)^2} \left[1 - (b/r)^2 \right].$$

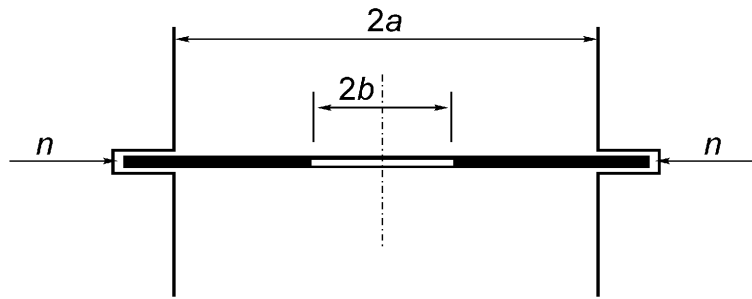


Рис. А 9.8.

Подставляя это выражение в уравнение Кармана, см. А 11.9, найдем, $\eta = \partial w / \partial r$,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left[\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \right] \eta = 0, \quad \alpha^2 = \frac{na^2}{K(a^2 - b^2)}, \quad \beta^2 = 1 + (b\alpha)^2.$$

Общее решение этого уравнения есть линейная комбинация функций Бесселя первого и второго рода порядка β

$$\eta(r) = C_1 J_\beta(\alpha a) + C_2 N_\beta(\alpha a) = 0.$$

Граничные условия $\eta(a) = 0, m_r(b) = 0$ дают однородную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} C_1 J_\beta(\alpha a) + C_2 N_\beta(\alpha a) &= 0, \\ -K \left\{ C_1 \left[J'_\beta(\alpha b) + \frac{\mu}{b} J_\beta(\alpha b) \right] + C_2 \left[N'_\beta(\alpha b) + \frac{\mu}{b} N_\beta(\alpha b) \right] \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим нелинейное уравнение

$$\frac{J_\beta(\alpha b)}{N_\beta(\alpha b)} = \frac{b J'_\beta(\alpha b) + \mu J_\beta(\alpha b)}{b N'_\beta(\alpha b) + \mu N_\beta(\alpha b)}.$$

Метод численного решения этого уравнения обсуждается в работе Бицено и Граммеля

- Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика. М.-Л., ГИТТЛ, 1952.
- Biezeno C.B. und Grammel R. Technische Dynamik. Berlin, Springer-Verlag, 1953.

10 Принцип Д'Аламбера и уравнения Лагранжа

Принцип виртуальной работы (5.3) можно обобщить, включив динамические силы инерции. В статике рассматривается положение равновесия системы; в динамике следует рассматривать мгновенное положение движущегося тела в некоторый момент времени t . Сохраняя время t постоянным, придадим системе виртуальные перемещения в мгновенном положении, аналогично виртуальным перемещениям в положении равновесия. Умножив скалярно векторное уравнение движения (7.1) Эйлера-Коши на виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}$ материальной точки, получим, что обобщенная виртуальная работа равна нулю

$$(\mathbf{f} - \rho \mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \quad (10.1)$$

Интегрирование по материальному объему $V(t)$ движущегося тела дает суммарную виртуальную работу внешних и внутренних сил [см.(5.3)]

$$\int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} dV = \delta W = \delta W^{(e)} + \delta W^{(i)}. \quad (10.2)$$

Тем самым, получен общий вид принципа Д'Аламбера

$$\delta W - \int_m (\mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{r}) dm = 0. \quad (10.3)$$

«Сумма виртуальных работ всех сил и обобщенных виртуальных работ сил инерции, $-\mathbf{a} dm$, равна нулю для любых возможных виртуальных вариаций мгновенного положения системы».

Уравнение (10.3) есть скалярное соотношение и выполняется для произвольного движения деформируемых тел. Оно будет использовано для механической интерпретации метода Галеркина (раздел 11.1.2) в приложении к задачам динамики. В данной главе принцип Д'Аламбера применяется к исследованию движения систем с конечным числом степеней свободы. Система с n степенями свободы имеет конечное число независимых скалярных координат $q_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, определяющих ее мгновенное положение; радиус-вектор любой точки представляет собой функцию этих координат и может также явно зависеть от времени

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n; t). \quad (10.4)$$

В частности, радиус-вектор точки приложения некоторой силы \mathbf{F} есть подобная векторная функция, и виртуальная работа $\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$ (время t фиксировано) выражается через вариации обобщенных координат $\delta q_k, k = 1, 2, \dots, n$, следующим образом

$$\delta \mathbf{r} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n; t)}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (10.5)$$

Виртуальное перемещение аналогично полной производной радиуса-вектора при постоянном времени. Вся виртуальная работа K внутренних и внешних сил есть сумма отдельных виртуальных работ

$$\delta W = \sum_{l=1}^K (\mathbf{F}_l \cdot \delta \mathbf{r}_l) = \sum_{l=1}^K \mathbf{F}_l \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k. \quad (10.6)$$

Здесь введены величины

$$Q_k = \sum_{l=1}^K \left(\mathbf{F}_l \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_k} \right), \quad (10.7)$$

представляющие собой n обобщенных сил. Умножая обобщенную силу на вариацию δq_k соответствующей обобщенной координаты и складывая все такие произведения, получим виртуальную работу. Поэтому обобщенные силы содержат всю информацию о внешних и внутренних силах в системе, в том смысле, что, зная обобщенные силы, можно найти виртуальную работу. Если силы, вносящие вклад в виртуальную работу, потенциальны, то их потенциал можно представить как функцию обобщенных координат и времени $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$. Следовательно, виртуальная работа при фиксированном времени выражается через вариацию δV потенциальной энергии

$$\delta W = -\delta V = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k. \quad (10.8)$$

Приравнивая коэффициенты при вариациях одинаковых обобщенных координат, можно выразить обобщенные силы через производные от потенциальной функции

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}. \quad (10.9)$$

Полученные выражения полезны и в статике. Теперь остается представить виртуальную работу сил инерции в виде суммы произведений некоторых коэффициентов на вариации обобщенных координат. Полагая по определению

$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ и меняя порядок дифференцирования $(d/dt)(\partial\mathbf{r}/\partial q_k) = \partial\mathbf{v}/\partial q_k$, приведем скалярное произведение к виду

$$(\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) - \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k.$$

Поскольку вектор скорости есть производная по времени

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt}, \quad \frac{dq_k}{dt} \equiv \dot{q}_k,$$

то частная производная от этого вектора по обобщенной скорости равна

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}. \quad (10.10)$$

Подставим (10.10) в записанное выше в квадратных скобках выражение, применим преобразование $(\mathbf{v} \cdot \partial\mathbf{v}/\partial q_k) = \partial(v^2/2)/\partial q_k$ и аналогичное для производной от вектора скорости по обобщенной скорости. Окончательно получим сумму

$$(\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial q_k} \right] \delta q_k. \quad (10.11)$$

Так как масса системы предполагается постоянной, то при подстановке (10.11) в (10.3) можно поменять местами интегрирование в (10.3) и дифференцирование по параметру в (10.11). Выполняя эту подстановку и учитывая, что кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm, \quad (10.12)$$

получим принцип Д'Аламбера в форме, удобной в динамике систем с конечным числом степеней свободы

$$\sum_{k=1}^n \left[Q_k - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0. \quad (10.13)$$

Для вычисления производных в (10.13) следует представить кинетическую энергию как функцию обобщенных скоростей, обобщенных координат и, возможно, времени

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; q_1, q_2, \dots, q_n; t).$$

Заметим, что если обобщенные координаты совпадают с декартовыми, то частная производная T по q_k равна нулю. Такие производные появляются в криво-

линейных координатах, например, для полярного угла в цилиндрических координатах.

Из независимости обобщенных координат динамической системы независимость их виртуальных вариаций автоматически не следует. Существуют системы с так называемыми неголономными связями; в этих системах число N степеней свободы для бесконечно малых движений меньше, чем число n степеней свободы для положений. Есть класс односторонних связей, содержащих неравенства, и есть неинтегрируемые дифференциальные связи вида

$$\sum_{i=1}^n f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \dot{q}_i + g(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \neq \frac{\partial f_k}{\partial q_i}, \quad i \neq k.$$

Примерами неголономных связей второго типа являются: качение без проскальзывания твердой сферы или твердого диска (наклон диска остается постоянным) по твердой плоскости; скольжение лезвия конька по льду; два колеса на концах оси, которые катятся без проскальзывания по твердой плоскости, но могут вращаться вокруг оси независимо друг от друга, и т.д. Если связь наложенная на точку, движущуюся в плоскости, состоит в том, что вектор скорости точки должен быть направлен на другую точку, которая движется по заданному (дифференцируемому) закону, то эта связь также является неголономной. Для таких систем следует применить метод множителей Лагранжа.

Существует, однако, большой класс практически важных систем, в которых связи голономны, то есть число степеней свободы для бесконечно малых движений равно числу степеней свободы для положений. Виртуальные вариации обобщенных координат тогда независимы и (10.13) может быть выполнено для всех возможных вариаций, только если все коэффициенты в квадратных скобках равны нулю по отдельности, то есть

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \left(= - \frac{\partial V}{\partial q_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.14)$$

Эта система уравнений Лагранжа равносильна принципу Д'Аламбера в применении к голономным системам с конечным числом степеней свободы. Число уравнений равно числу степеней свободы. Для составления уравнений требуется знать кинетическую энергию системы в функциональной форме (10.12) и обобщенные силы Q_k . В общем случае обобщенные силы находятся из выражения (10.6) для виртуальной работы как соответствующие коэффициенты. Те внутренние и внешние силы, которые имеют потенциальную функцию $V(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$, зависящую от обобщенных координат и, возможно, от времени, вносят вклад в обобщенные силы в соответствии с (10.9). Обобщенные силы, соответствующие оставшимся силам, находятся из выражения для виртуальной работы. Силы сопротивления представляют собой важный пример тако-

го рода сил. Если все силы, вносящие вклад в виртуальную работу, имеют потенциал (это обязательно система без сопротивления), то удобно ввести функцию Лагранжа $L = T - V$. В этом случае уравнения Лагранжа приобретают более простой вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad L = T - V. \quad (10.14a)$$

В такой форме уравнения можно обобщить и применить к задачам электродинамики. Силу Лоренца можно получить из обобщенной потенциальной функции, зависящей от скоростей; при этом уравнения (10.14a) не изменяются. Выразить обобщенные силы через обобщенную потенциальную функцию можно из соображений симметрии, $k = 1, 2, \dots, n$,

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad V = V^*(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t). \quad (10.14b)$$

(§) Точечная масса m , несущая заряд q ; сила Лоренца

Заряженная частица движется со скоростью \mathbf{v} в электромагнитном поле. В гауссовой системе единиц сила, действующая на точку, равна (c – скорость света)

$$\mathbf{F} = q \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right], \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (10.15)$$

Здесь \mathbf{A} – векторный потенциал магнитного поля. Из уравнений Максвелла (в стандартном виде; они здесь не приводятся) можно вывести, что функция Лагранжа равна ($T = mv^2/2$):

$$L = T - q\varphi + \frac{q}{c} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}). \quad (10.16)$$

Скалярный потенциал соответствует потенциальному векторному полю $\mathbf{E} + (1/c)(\partial \mathbf{A} / \partial t) = -\text{grad } \varphi$. Сила Лоренца получается подстановкой в (10.14b) обобщенного потенциала, который явно зависит от скорости,

$$V = q \left[\varphi - \frac{1}{c} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right]. \quad (10.17)$$

Последующие простые примеры иллюстрируют приложение лагранжева формализма к чисто механическим системам. Рассмотрены свободные и вынужденные колебания и моды свободных колебаний. Дальнейшее использование принципа Д'Аламбера рассмотрено при изложении приближенного метода Ритца (см. раздел 11.1.1).

10.1. Свободные колебания основания на упругих опорах

Жесткость поддерживающих линейно упругих пружин подобрана так, что жесткая «балка» веса mg в равновесии горизонтальна. Рассмотрим малые свободные колебания в окрестности положения равновесия. Система имеет две степени свободы; в качестве обобщенных координат выберем вертикальное смещение центра масс $q_1 = z_S(t)$ и угол поворота $q_2 = \varphi(t)$ (см. рис.10.1). Считая пружину невесомой, найдем кинетическую энергию жесткого основания как сумму энергий поступательного движения и вращения вокруг центра масс (который выбран за полюс)

$$T = \frac{m}{2} (\dot{z}_S^2 + i_S^2 \dot{\varphi}^2) , \quad I_S = m i_S^2 . \quad (10.18a)$$

Если в мгновенном положении системе сообщить независимые виртуальные перемещения δz_S и $\delta \varphi$, то вклад в виртуальную работу внесут только сила тяжести и силы упругости пружин, так как сопротивлением пренебрегаем.

Движение является консервативным, и все силы можно учесть, вводя потенциальную энергию $V = W_p + U$. Так как сила тяжести не влияет на свободные колебания, то следует учесть только относительные потенциалы пружин. Увеличение потенциальной энергии по отношению к положению равновесия равно (см. (3.40))

$$V = U = \frac{c_1 s_1^2}{2} + \frac{c_2 s_2^2}{2} , \quad s_1 = z_S - a_1 \sin \varphi , \quad s_2 = z_S + a_2 \sin \varphi . \quad (10.18b)$$

Ниже выписаны производные, входящие в уравнения Лагранжа (10.14),

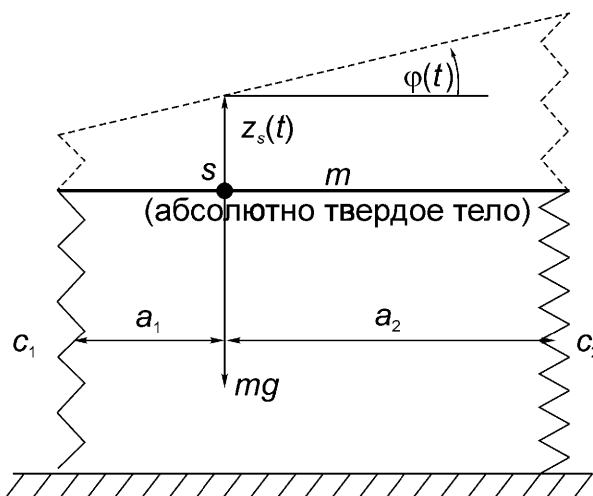


Рис. 10.1. Свободные колебания жесткого основания.

$$\frac{\partial V}{\partial z_S} = c_1 s_1 + c_2 s_2, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = c_1 s_1 (-a_1 \cos \varphi) + c_2 s_2 a_2 \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_S} = m \dot{z}_S, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m i_S^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_S} \right) = m \ddot{z}_S, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = M i_S^2 \ddot{\varphi}.$$

Кинетическая энергия явно не зависит от обобщенных координат, поэтому соответствующие частные производные равны нулю. Так как предполагается, что $|\varphi| \ll 1$, то полученные выражения можно линеаризовать, и в итоге получим систему связанных линейных уравнений (они выполняются приближенно для малых колебаний)

$$\ddot{z}_S + \Omega_z^2 z_S + k_1^2 \varphi = 0, \quad \Omega_z^2 = (c_1 + c_2)/m, \quad k_1^2 = (c_2 a_2 - c_1 a_1)/m > 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \Omega_\varphi^2 \varphi + k_2^2 z_S = 0, \quad \Omega_\varphi^2 = (c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2)/m i_S^2, \quad k_2^2 = k_1^2 / i_S^2.$$
(10.18c)

Решение представляет собой временные гармоника и поэтому достаточно подставить

$$z_S = A \cos \omega t, \quad \varphi = B \cos \omega t \quad (10.19)$$

в линеаризованные уравнения движения и получить однородную систему линейных уравнений для амплитуд A и B . Нетривиальное решение ее существует только при двух значениях циклической частоты, равных собственным частотам линеаризованной системы. Эти частоты суть корни уравнения частот, представляющего собой условие равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов (см. также раздел 7.4.9),

$$D(\omega) = \omega^4 - (\Omega_z^2 + \Omega_\varphi^2) \omega^2 + \Omega_z^2 \Omega_\varphi^2 - k_1^2 k_2^2 = 0.$$

Система имеет две степени свободы, и последнее уравнение имеет, вообще говоря, два различных корня, соответствующих низшей и следующей за ней собственным частотам $\omega_1 < \omega_2$,

$$\omega_{2,1}^2 = \frac{1}{2} (\Omega_z^2 + \Omega_\varphi^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\Omega_z^2 - \Omega_\varphi^2)^2 + k_1^2 k_2^2}, \quad \omega_1 \leq (\Omega_z, \Omega_\varphi) \leq \omega_2. \quad (10.20)$$

Подставляя эти собственные значения последовательно в одно из линейных уравнений

$$(\Omega_z^2 - \omega^2) A + k_1^2 B = 0, \quad (10.21)$$

получим константы интегрирования $B_{1,2} = \kappa_{1,2} A_{1,2}$, где коэффициенты пропорциональности являются параметрами системы и выражаются формулой

$\kappa_{1,2} = (\omega_{1,2}^2 - \Omega_z^2) / k_1^2$. Общее решение, описывающие связанные колебания, имеет вид

$$\begin{aligned} z_S &= A_1 \cos(\omega_1 t - \varepsilon_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \varepsilon_2), \\ \varphi &= \kappa_1 A_1 \cos(\omega_1 t - \varepsilon_1) + \kappa_2 A_2 \cos(\omega_2 t - \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Кроме амплитуд $A_{1,2}$, из начальных условий следует определить фазы $\varepsilon_{1,2}$. Например, если $z_S(t=0) = z_0$ и $dz_S/dt = \varphi = d\varphi/dt = 0$ при $t=0$, то фазы равны нулю и оставшиеся константы интегрирования пропорциональны начальному значению координаты, соответствующей поступательному движению системы,

$$A_1 = \frac{\omega_2^2 - \Omega_z^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} z_0, \quad A_2 = \frac{\Omega_z^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} z_0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0. \quad (10.23a)$$

Если значения собственных частот близки, то наблюдается очень интересное явление. Пусть, например, параметры системы таковы, что $\Omega_z^2 = \Omega_\phi^2 = \Omega^2$ и $k_1 k_2 = 2\eta^2 \ll \Omega^2$. Используя теорему сложения для тригонометрических функций и (10.22), приведем в этом случае частное решение (10.23a) к виду

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{z_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = z_0 \cos\left(\frac{\eta^2}{\omega^*} t\right) \cos(\omega^* t), \quad \omega^* = (\omega_1 + \omega_2)/2 = \Omega, \\ i_S \varphi &= \frac{z_0}{2} (-\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = z_0 \sin\left(\frac{\eta^2}{\omega^*} t\right) \cos(\omega^* t + \pi/2). \end{aligned} \quad (10.23b)$$

Быстрые колебания с периодом $2\pi/\omega^*$ модулированы амплитудой, медленно меняющейся со временем по гармоническому закону. Сдвиг фаз между такими биениями составляет $\pi/2$, и энергия перетекает между модами колебаний, возбуждая попеременно поступательное и вращательное движения. Максимальное значение амплитуды в (10.23b) равно z_0 . Структуры, чувствительные к закручиванию, могут разрушиться при таких биениях.

В общих терминах теории управления $z_S(t)$ есть модулированное колебание с несущей частотой ω^* и частотой модуляции η^2/ω^* .

Свободные колебания (10.22) можно разделить на две независимые моды, которые являются решениями несвязанных уравнений колебаний,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t - \varepsilon_1), \quad \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = 0, \\ \xi_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t - \varepsilon_2), \quad \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 = 0. \end{aligned} \quad (10.24)$$

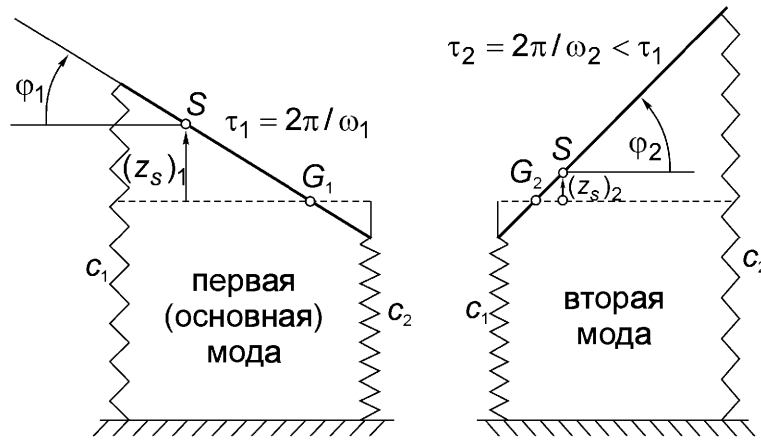


Рис. 10.2. (Несвязанные) моды свободных колебаний системы, показанной на рис. 10.1.

Здесь $\xi_{1,2}$ – главные обобщенные координаты, в которых колебания распадаются на два несвязанных движения. Геометрия основной моды получается исключением координаты ξ_1 :

$$(z_S)_1 = \xi_1 \quad , \quad \varphi_1 = \kappa_1 \xi_1 \quad \Rightarrow \quad (z_S)_1 = \frac{1}{\kappa_1} \varphi_1 \quad . \quad (10.25)$$

Следующая, вторая (быстрая) мода колебаний с периодом $2\pi/\omega_2$ находится аналогично исключением координаты ξ_2 :

$$(z_S)_2 = \xi_2 \quad , \quad \varphi_2 = \kappa_2 \xi_2 \quad \Rightarrow \quad (z_S)_2 = \frac{1}{\kappa_2} \varphi_2 \quad . \quad (10.26)$$

На рис. 10.2 показаны моды для параметров $\kappa_1 < 0$ и $\kappa_2 > 0$. Также показаны узлы скоростей $G_i, i = 1, 2$ и вращение по и против часовой стрелки в модах 1 и 2, соответственно. Векторная форма мод свободных колебаний обсуждается в разделе 10.4.

10.2. Маятник с движущимся подвесом

Рассматривается плоское движение твердых тел; ось подвеса движется в прямолинейных направляющих и соединена с линейно упругой пружиной.

10.2.1. Горизонтальное движение подвеса

Рассмотрим систему двух твердых тел: маятник с параметрами (m, i_S) и скользящий подвес массы m_1 , рис. 10.3; система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат $q_1 = x_1$ и $q_2 = \varphi$. Декартовы координаты центра масс S маятника связаны с обобщенными координатами геометриче-

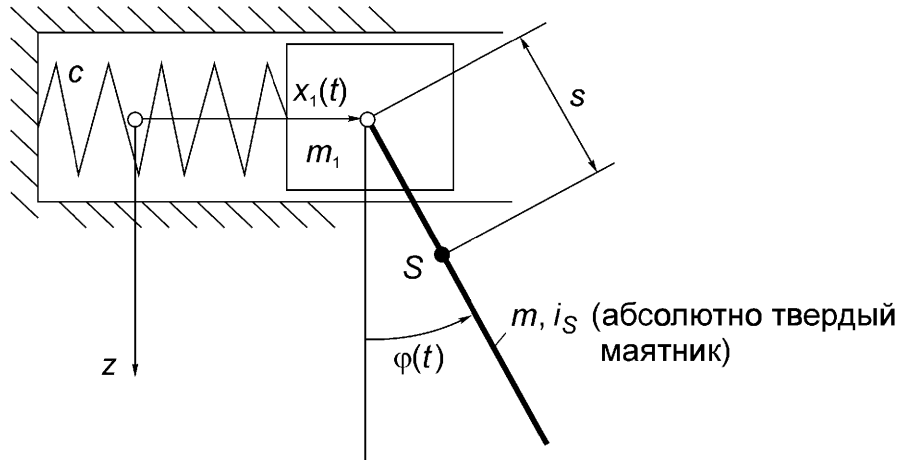


Рис. 10.3. Плоский маятник с горизонтально движущимся подвесом.
Модель башни с колоколом.

скими соотношениями $x_S = x_1 + s \sin \varphi$, $z_S = s \cos \varphi$. Кинетическая энергия системы равна [центр масс S выбран для маятника за полюс, см. (8.10)]

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \left(\frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} m i_S^2 \dot{\varphi}^2 \right), \quad i_S^2 = I_S / m, \quad (10.27)$$

$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{z}_S^2 = \dot{x}_1^2 + (s\dot{\varphi})^2 + 2s\dot{x}_1\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Находим частные производные по обобщенным координатам и скоростям и затем полные производные по времени:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (m + m_1) \dot{x}_1 + m s \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m (s^2 + i_S^2) \dot{\varphi} + m s \dot{x}_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m s \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = (m + m_1) \ddot{x}_1 + m (s \ddot{\varphi} \cos \varphi - s \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m (s^2 + i_S^2) \ddot{\varphi} + m s (\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi).$$

Виртуальная работа при вариации мгновенного положения системы совершается силой тяжести, действующей на маятник, и силой упругости пружины жесткости c . Поэтому следует рассмотреть потенциальную энергию и ее производные (так как система консервативна – трением или сопротивлением пренебрегаем)

$$V = -mgs \cos \varphi + \frac{c}{2} x_1^2 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x_1} = c x_1 = -Q_x, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgs \sin \varphi = -Q_\varphi.$$

(10.28)

Составляя уравнения Лагранжа и деля на коэффициенты при старших производных, получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \Omega_x^2 x_1 + k_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi - k_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi &= 0, \quad \Omega_x^2 = c/(m + m_1), \\ \ddot{\varphi} + \Omega_\varphi^2 \sin \varphi + \frac{\Omega_\varphi^2}{g} \ddot{x}_1 \cos \varphi &= 0, \quad \Omega_\varphi^2 = gs/(s^2 + i_s^2), \quad k_1 = ms/(m + m_1). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Линеаризация для случая малых колебаний в окрестности положения равновесия $x_1 = \varphi = 0$ дает

$$\ddot{x}_1 + \Omega_x^2 x_1 + k_1 \ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{\varphi} + \Omega_\varphi^2 \varphi + \frac{\Omega_\varphi^2}{g} \ddot{x}_1 = 0. \quad (10.30)$$

Подставляя сюда временные гармоники, в соответствии с (10.19), где z_S заменим на x_1 , и решая уравнение частот, которое опять имеет вид равенства определителя нулю, получим квадраты частот собственных линейных колебаний

$$\omega_{2,1}^2 = \frac{1}{2} \frac{\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2}{1 - k_1 \Omega_\varphi^2 / g} \left\{ 1 \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega_x^2 - \Omega_\varphi^2}{\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2} \right)^2 + k_1 \frac{\Omega_\varphi^2}{g} \frac{4\Omega_x^2 \Omega_\varphi^2}{(\Omega_x^2 + \Omega_\varphi^2)^2}} \right\}. \quad (10.31)$$

Рассмотренная система есть упрощенная модель собственных колебаний колокола на упругой башне.

10.2.2. Вертикальное движение подвеса

В соответствии с рис. 10.4 обобщенные координаты суть z_1 и угол φ . Декартовы координаты центра масс маятника равны $x_S = s \sin \varphi$ и $z_S = z_1 + s \cos \varphi$. Кинетическая энергия (8.10) системы равна

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m}{2} (v_S^2 + i_S^2 \dot{\varphi}^2), \quad v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{z}_S^2 = \dot{z}_1^2 + s^2 \dot{\varphi}^2 - 2s\dot{z}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (10.32)$$

Все необходимые производные выписаны ниже:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} &= (m + m_1) \dot{z}_1 - ms\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(s^2 + i_S^2) \dot{\varphi} - ms\dot{z}_1 \sin \varphi, \\ \frac{\partial T}{\partial z_1} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -ms\dot{z}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

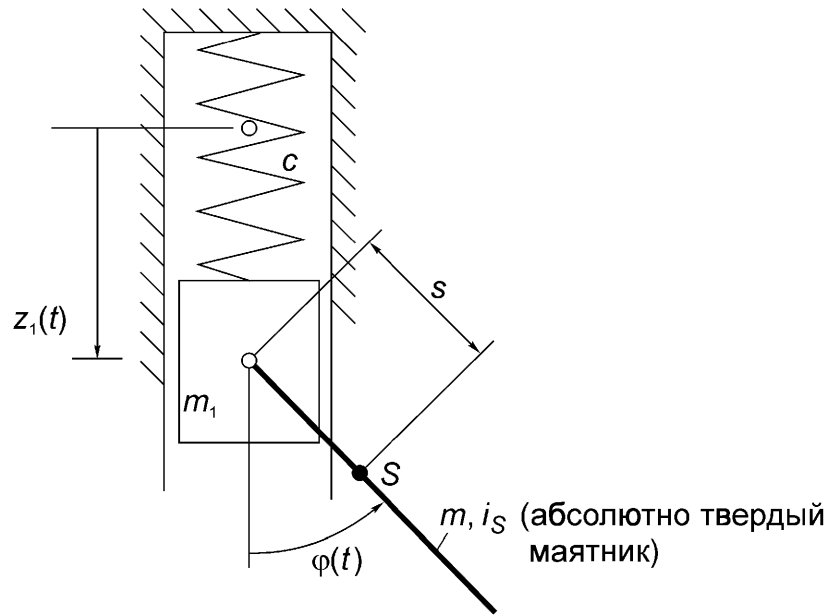


Рис. 10.4. Плоский маятник с вертикально движущимся подвесом. Иллюстрация параметрического возбуждения.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) = (m + m_1) \ddot{z}_1 - ms(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m(s^2 + i_S^2) \ddot{\varphi} - ms(\ddot{z}_1 \sin \varphi + \dot{z}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi).$$

Потенциальная энергия системы в поле силы тяжести и энергия линейно упругой пружины жесткости c в сумме равны (см. рис. 10.4)

$$V = -mg(z_1 + s \cos \varphi) - m_1 g z_1 + \frac{c}{2} z_1^2. \quad (10.33)$$

Частные производные дают обобщенные силы

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = -mg - m_1 g + c z_1 = -Q_z, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgs \sin \varphi = -Q_\varphi. \quad (10.34)$$

В соответствии с (10.14) получаем нелинейные уравнения движения

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + \Omega_z^2 z_1 - k_1 \ddot{\varphi} \sin \varphi - k_1 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - g = 0, \quad \Omega_z^2 = c/(m + m_1), \\ \ddot{\varphi} + \Omega_\varphi^2 \sin \varphi - \frac{\Omega_\varphi^2}{g} \ddot{z}_1 \sin \varphi = 0, \quad \Omega_\varphi^2 = gs/(s^2 + i_S^2), \quad k_1 = ms/(m + m_1). \end{aligned} \quad (10.35)$$

Если для перехода к малым колебаниям выполнить здесь стандартную процедуру линеаризации, то уравнения распадаются на два несвязанных. Полагая в первом уравнении (10.35) $\varphi = d\varphi/dt = 0$, получим линейное уравнение поступательных колебаний

$$\ddot{z}_1^* + \Omega_z^2 z_1^* = 0 \quad , \quad z_1^* = z_1 - z_{1S} . \quad (10.36)$$

Решение этого уравнения можно назвать основным колебанием

$$z_1^* = A \cos(\Omega_z t - \varepsilon) \quad , \quad \varphi \equiv 0 . \quad (10.37)$$

Второе уравнение (10.35) дает тогда тождественный нуль. Линеаризуя это уравнение частично, по угловой координате $|\varphi^*| \ll 1$ и подставляя основное колебание в ускорение поступательного движения, найдем

$$\ddot{\varphi}^* + \Omega_\varphi^2 \left[1 + \frac{A \Omega_z^2}{g} \cos(\Omega_z t - \varepsilon) \right] \varphi^* = 0 . \quad (10.38)$$

Получилось дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами. Это означает, что начальное основное колебание в вертикальном направлении вызывает вращательное движение посредством параметрического возбуждения. Первое из уравнений (10.35) по-прежнему выполняется в линейном приближении. Уравнение (10.38) называется дифференциальным уравнением Матье; оно является частным случаем более общего уравнения Хилла. Смотрите:

- Klotter K. Technische Schwingungslehre. 1 Band, Teil A. Berlin, Springer-Verlag, 3 Auflage, 1978.

С помощью уравнения (10.38) можно исследовать неустойчивость движения; она обнаруживается в окрестности параметров $\Omega_z = 2\Omega_\varphi / n$, $n = 1, 2, \dots$. Система является консервативной, и переход от чисто поступательной моды к вращательному движению должен иметь характеристики связанных колебаний. Поэтому классическая, прямая линеаризация (10.35) не дает надежных результатов. Параметрический резонанс является важным, но нежелательным явлением во многих инженерных конструкциях и механизмах.

10.3. Колебательная система с несколькими степенями свободы, состоящая из точечных масс, укрепленных на невесомой нити

Для иллюстрации системы рассмотрим три одинаковых точки, массы m каждая, укрепленные на нити, имеющей натяжение S . В соответствии с рис. 10.5 возвращающие силы возникают при отклонении (невесомой) нити в процессе поперечных колебаний. Так как амплитуды колебаний малы, то модуль силы считается приблизительно постоянным и равным предварительному натяжению, $N = S$. В качестве обобщенных координат выберем поперечные смещения точечных масс $q_k = w_k$, $k = 1, 2, 3$. Кинетическая энергия системы равна сумме ки-

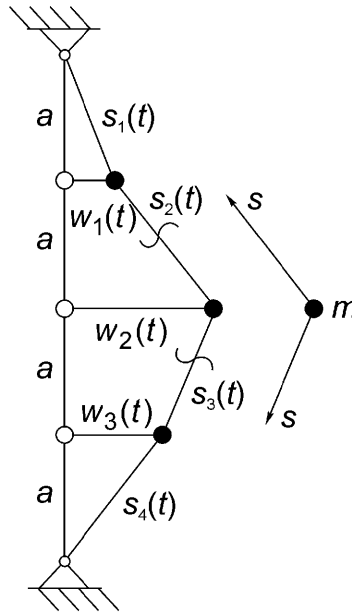


Рис. 10.5. Свободные поперечные колебания трех точечных масс, укрепленных на невесомой нити, натянутой с силой S .

нетических энергий поперечных движений точек. Обобщенные силы определяются из выражения для виртуальной работы в соответствии с (10.6):

$$\delta W = \sum_{k=1}^3 Q_k \delta q_k = -S \sum_{j=1}^4 \delta s_j, \quad s_j = \sqrt{a^2 + (w_j - w_{j-1})^2} \quad (10.39)$$

$$\Rightarrow \delta s_j = \frac{w_j - w_{j-1}}{s_j} (\delta w_j - \delta w_{j-1}).$$

Приравнявая коэффициенты при $\delta q_k = \delta w_k$, $k = 1, 2, 3$, найдем

$$Q_1 = -S \left(\frac{w_1}{s_1} - \frac{w_2 - w_1}{s_2} \right), \quad Q_2 = -S \left(\frac{w_2 - w_1}{s_2} - \frac{w_3 - w_2}{s_3} \right), \quad (10.40)$$

$$Q_3 = -S \left(\frac{w_3 - w_2}{s_3} + \frac{w_3}{s_4} \right).$$

Уравнения Лагранжа (10.14) представляют собой систему нелинейных связанных уравнений (дифференцирование кинетической энергии выполняется просто),

$$T = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^3 \dot{w}_k^2 \Rightarrow$$

$$\ddot{w}_1 + \alpha^2 \left[\left(\frac{a}{s_1} + \frac{a}{s_2} \right) w_1 - \frac{a}{s_2} w_2 \right] = 0, \quad \alpha^2 = \frac{S}{ma},$$

$$\begin{aligned}\ddot{w}_2 + \alpha^2 \left[\left(\frac{a}{s_2} + \frac{a}{s_3} \right) w_2 - \frac{a}{s_2} w_1 - \frac{a}{s_3} w_3 \right] &= 0, \\ \ddot{w}_3 + \alpha^2 \left[\left(\frac{a}{s_3} + \frac{a}{s_4} \right) w_3 - \frac{a}{s_3} w_2 \right] &= 0.\end{aligned}\quad (10.41)$$

Возвращающие силы можно линеаризовать, если учесть приближенные геометрические соотношения $(a/s_j) \approx 1 - (w_j - w_{j-1})^2 / 2a^2$. Тогда получим линеаризованную систему уравнений с постоянными коэффициентами, приближенно справедливую для малых свободных колебаний,

$$\begin{aligned}\ddot{w}_1 + \alpha^2 [2w_1 - w_2] &= 0, \quad \ddot{w}_2 + \alpha^2 [2w_2 - w_1 - w_3] = 0, \\ \ddot{w}_3 + \alpha^2 [2w_3 - w_2] &= 0.\end{aligned}\quad (10.42)$$

Задача о собственных значениях приводит к кубическому характеристическому уравнению для квадратов собственных частот; это уравнение в соответствии с общей теорией имеет три вещественных положительных корня. Выпишем собственные частоты в порядке возрастания

$$\omega_1 = \alpha\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \alpha\sqrt{2}, \quad \omega_3 = \alpha\sqrt{2 + \sqrt{2}}.\quad (10.43)$$

Соответствующие главные колебания имеют следующие отношения амплитуд:

1. Симметричное основное колебание $(1/\sqrt{2}):1:(1/\sqrt{2})$; его период равен $2\pi/\omega_1$.
2. Антисимметричное второе колебание $1:0:(-1)$ (с одной узловой точкой); его период равен $2\pi/\omega_2$.
3. Симметричное третье колебание $(1/\sqrt{2}):(-1):(1/\sqrt{2})$ (с двумя узловыми точками); его период равен $2\pi/\omega_3$.

Если закрепить струну в узловой точке, то соответствующее главное колебание не изменится.

10.4. Колебательная система с несколькими степенями свободы, состоящая из точечных масс, укрепленных на невесомой балке

Рассмотрим изгибные колебания невесомой шарнирно опертой балки с постоянной жесткостью $B = EJ$ на изгиб. К балке прикреплены две точки с массами m и M на расстояниях c и d от левого конца; длина балки равна l . С помощью уравнений Лагранжа рассмотрим свободные колебания без сопротивления и вынужденные колебания под действием сосредоточенных сил $F_j(t)$, $j = 1, 2$. Система, изображенная на рис. 10.6, имеет две степени свободы, и в качестве обобщенных координат выберем $q_1 = w_1$ и $q_2 = w_2$. Отклонения отсчитываются

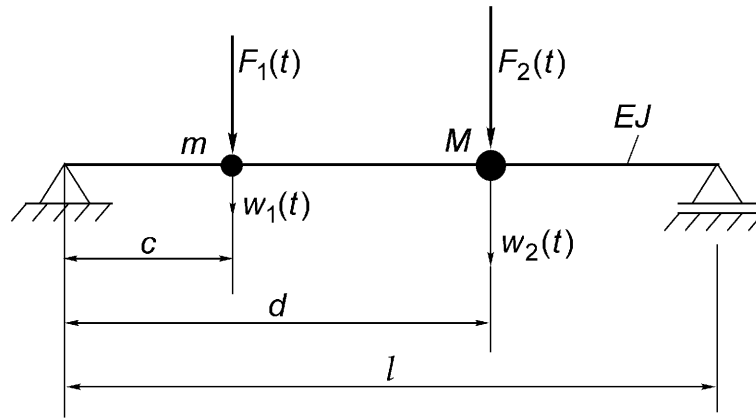


Рис. 10.6. Упругая балка с двумя сосредоточенными массами. Расчет с помощью разложения по собственным колебаниям.

от равновесного положения системы, которое она принимает под действием сил тяжести. Кинетическая энергия системы имеет вид (энергией вращательного движения пренебрегаем)

$$T = \frac{1}{2} (m\dot{w}_1^2 + M\dot{w}_2^2). \quad (10.44)$$

Упругий потенциал линейно упругой балки следует выразить через прогибы $w_{1,2}$, $U = U(w_1, w_2)$. Так как закрепление балки статически определенное, то проще вычислить коэффициенты влияния α_{ij} , $i, j = 1, 2$, прикладывая постоянные единичные силы $F_{i,j}^* = 1$ в точках, где находятся массы. Учитывая (3.46), найдем статические прогибы в виде сумм

$$w_1^* = F_1^* \alpha_{11} + F_2^* \alpha_{12}, \quad w_2^* = F_1^* \alpha_{21} + F_2^* \alpha_{22}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21}. \quad (10.45)$$

Выражая отсюда силы (и тем самым обращая матрицу податливостей), получим

$$F_1^* = k_{11}w_1^* + k_{12}w_2^*, \quad F_2^* = k_{21}w_1^* + k_{22}w_2^*, \quad k_{12} = k_{21}. \quad (10.46)$$

Коэффициенты жесткости k_{ij} (элементы симметричной матрицы жесткости) выражаются через коэффициенты влияния следующим образом:

$$k_{11} = \alpha_{22} / (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2), \quad k_{12} = k_{21} = -\alpha_{12} / (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2), \\ k_{22} = \alpha_{11} / (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2). \quad (10.47)$$

Из (3.45) находим потенциал балки, расписывая скалярное матричное произведение, $U = (1/2)\mathbf{w}^T \mathbf{k} \mathbf{w} = (1/2)(k_{11}w_1^2 + k_{22}w_2^2 + 2k_{12}w_1w_2)$. Добавляя (не зависящий от времени) потенциал внешних сил $W_P = -w_1F_1 - w_2F_2$, получим обобщенные силы как частные производные суммарного потенциала V

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial w_1} = F_1 - (k_{11}w_1 + k_{12}w_2), \quad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial w_2} = -F_2 - (k_{22}w_2 + k_{12}w_1). \quad (10.48)$$

Коэффициенты влияния для однопролетной балки, изображенной на рис. 10.6, легко вычисляются методами статики и выписаны ниже для удобства:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{6B} \left(\frac{2c^4}{l} + 2lc^2 - 4c^3 \right), \quad \alpha_{12} = \frac{1}{6B} \left(\frac{dc^3 + cd^3}{l} + 2lcd - 3cd^2 - c^3 \right),$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{6B} \left(\frac{2d^4}{l} + 2ld^2 - 4d^3 \right). \quad (10.49)$$

Связанные уравнения движения можно, в соответствии с (10.14), записать в матричной форме

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{k}\mathbf{w} = \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{w}^T(t) = (w_1(t), w_2(t)), \quad \mathbf{F}^T(t) = (F_1(t), F_2(t)),$$

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}. \quad (10.50)$$

Матрица инерции диагональна и матрица жесткости симметрична. Положив вектор сил равным нулю, найдем уравнение частот в виде равенства нулю определителя и, решив это уравнение, получим квадраты собственных частот

$$\omega_{2,1}^2 = \frac{1}{2mM} \left[(Mk_{11} + mk_{22}) \pm \sqrt{(Mk_{11} - mk_{22})^2 + 4mMk_{12}^2} \right]. \quad (10.50a)$$

Формы главных колебаний найдем, решая систему линейно зависимых однородных уравнений задачи на собственные значения,

$$(\mathbf{k} - \omega_k^2 \mathbf{m}) \Phi_k = 0 \Rightarrow \Phi_k^T = \left(1, (k_{11} - m\omega_k^2)/(-k_{12}) \right), \quad k = 1, 2. \quad (10.50b)$$

Выражение в скобках для Φ_k называется динамической матрицей. Собственные векторы взаимно ортогональны, и, следовательно, любое решение (10.50) можно разложить по этим векторам, $\omega_1 \neq \omega_2$ (считаем, что собственные частоты не являются близкими)

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^2 Y_k(t) \Phi_k, \quad (10.50c)$$

где $Y_k(t)$ – главные координаты. Подставляя (10.50c) в (10.50), умножая результат слева на любой транспонированный собственный вектор и используя условие ортогональности, которое выполняется с учетом вида матриц инерции и жесткости, получим несвязанные уравнения колебаний

$$\ddot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k = \frac{1}{m_k} \Phi_k^T \cdot \mathbf{F} \quad , \quad k=1, 2 \quad , \quad m_k = \Phi_k^T \cdot \mathbf{m} \cdot \Phi_k \quad . \quad (10.50d)$$

Степень возбуждения каждого из этих главных колебаний выражается проекцией вектора сил на соответствующий главный вектор. Следовательно, физические силы F_1 и F_2 , вообще говоря, умножаются на различные величины. Можно сделать Φ_k ортонормированными, если домножить их на $1/\sqrt{m_k}$. Если считать, что массы $m_k = 1$, то собственные векторы образуют ортонормированный базис. Обычно на данном этапе решения вводят небольшое сопротивление, добавляя соответствующее слагаемое $2\zeta_k \omega_k (dY_k/dt)$ в (10.50d) [см.(7.81) и обсуждение эффективных методов решения во временной и частотной областях].

10.5. Плоская стержневая система с внешним вязким сопротивлением

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, изображенную на рис. 10.7. Система содержит несколько твердых однородных стержней, соединенных идеальными шарнирами. Выберем угол $q = \varphi$ в качестве обобщенной координаты и применим уравнения Лагранжа (10.14), что в данном случае особенно удобно, так как не нужно рассматривать каждое тело отдельно. Тела 1 и 3 совершают вращательное движение [см.(8.11)], тело 2 – поступательное движение. Кинетическая энергия системы есть сумма кинетических энергий тел 1-3

$$T = \frac{1}{2} (m_1 i_1^2 \dot{\varphi}^2 + m_3 i_3^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 v_2^2) \quad , \quad v_2 = l \dot{\varphi} \quad . \quad (10.51)$$

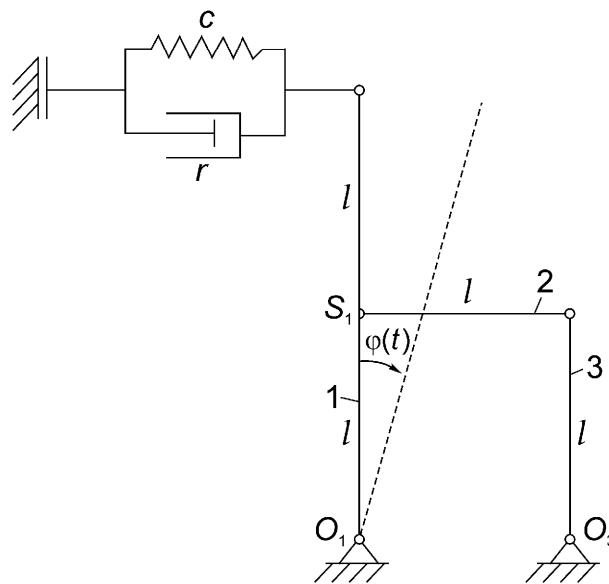


Рис. 10.7. Исследование устойчивости тяжелой стержневой системы динамическим методом.

Моменты инерции следует взять относительно точек O_1 и O_3 , соответственно. Движение происходит в однородном поле сил тяжести, и пружина считается линейно упругой с жесткостью c . Потенциальная энергия системы равна

$$V^* = W_P + U = -m_1 gl(1 - \cos \varphi) - m_3 g \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi) - m_2 gl(1 - \cos \varphi) + \frac{c}{2} (2l \sin \varphi)^2. \quad (10.52)$$

Вклад внешней силы вязкого сопротивления, действующей со стороны демпфера, в обобщенную силу определяем, вычисляя соответствующую виртуальную работу,

$$Q_\varphi^{**} \delta \varphi = -r \frac{d(2l \sin \varphi)}{dt} \delta(2l \sin \varphi) = -r(2l \dot{\varphi} \cos \varphi)(2l \cos \varphi \delta \varphi) \\ \Rightarrow Q_\varphi^{**} = -4rl^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi. \quad (10.53)$$

Положим $m_2 = m_3 = m$ и $m_1 = 2m$, тогда нелинейное уравнение движения получим в виде

$$\ddot{\varphi} - \frac{7g}{8l} \sin \varphi + \frac{c}{2m} \sin 2\varphi = -\frac{r}{m} \dot{\varphi} \cos^2 \varphi. \quad (10.54)$$

Малые колебания с сопротивлением в окрестности положения равновесия $\varphi = 0$ приближенно описываются линеаризованным уравнением

$$\ddot{\varphi} + 2\zeta \omega_0 \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \zeta = r/2m\omega_0 \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \left(\frac{c}{m} - \frac{7g}{8l} \right) > 0. \quad (10.55)$$

Вещественное значение главной частоты указывает на асимптотическую устойчивость состояния покоя. Период линейных колебаний с сопротивлением равен $\tau = 2\pi / \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$, $\zeta < 1$, см. также раздел 9.1.2.

10.6. Вибрационные испытания с применением несбалансированного ротора

Для динамических испытаний на месте всех видов упругих конструкций требуется источник гармонического по времени возбуждения с регулировкой частоты в широком диапазоне. Простым механическим устройством такого рода является несбалансированный ротор, приводимый во вращение электромотором с регулируемой скоростью. Одноосное возбуждение достигается использованием пары вращающихся в разные стороны колес при надлежащем разнесении не-

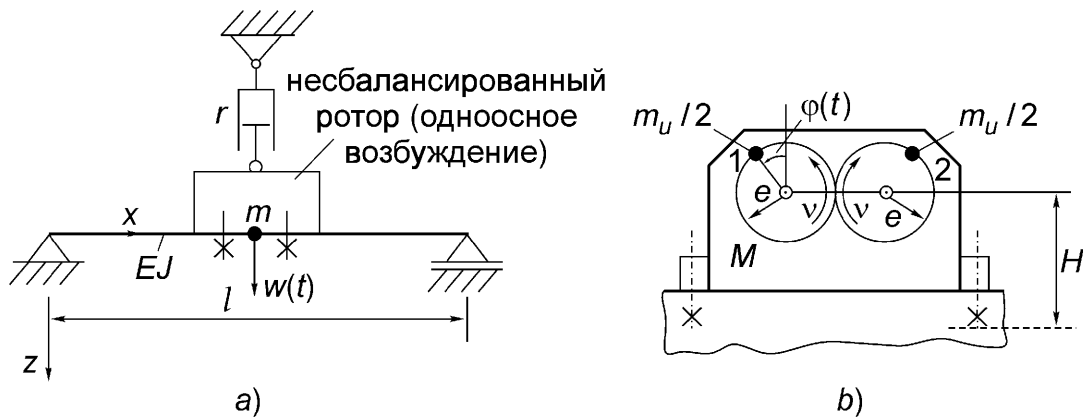


Рис. 10.8. (а) Резонансные испытания балки с сосредоточенной массой m . (б) Схема несбалансированного ротора, применяемого для достижения одномерного гармонического возбуждения в вертикальном направлении.

сбалансированной массы m_u ; см. рис. 10.8(б). На рис. 10.8(а) показана схема испытаний невесомой однопролетной балки; несбалансированный ротор укреплен в середине балки, где также помещена точечная масса m . Наличие сопротивления у линейно упругой балки условно показано в виде вязкого демпфера. Система имеет одну степень свободы, в качестве обобщенной координаты выберем прогиб $q(t) = w(t)$ середины балки. Массы M и m_u , регулируемый эксцентриситет e и число $60\nu/2\pi$ оборотов в минуту известны. Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{(m+M)}{2} \dot{w}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_u}{2} (v_1^2 + v_2^2), \quad (10.56)$$

где $v_{1,2}$ – абсолютные скорости несбалансированных точечных масс. Эти скорости легко найти, вычисляя производные по времени от соответствующих декартовых координат: $x_1 = (l/2) - e - e \sin \varphi$, $z_1 = -H - e \cos \varphi + w$, $x_2 = (l/2) + e + e \sin \varphi$, $z_2 = z_1$ (с учетом стационарности вращения, угол $\varphi = \nu t$),

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -e\nu \cos \varphi, & \dot{z}_1 &= e\nu \sin \varphi + \dot{w}, & \dot{x}_2 &= e\nu \cos \varphi, & \dot{z}_1 &= \dot{z}_2, \\ v_1^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2 = (e\nu)^2 + 2e\nu \dot{w} \sin \varphi + \dot{w}^2 = v_2^2. \end{aligned} \quad (10.57)$$

Так как вращение предполагается стационарным, то виртуальная работа равна

$$Q_w \delta w = -\frac{\partial U_B}{\partial w} \delta w - r \dot{w} \delta w, \quad U_B = \frac{c}{2} w^2, \quad c = 48EJ/l^3. \quad (10.58)$$

Жесткость на изгиб предполагается постоянной по всей длине балки. После вычисления соответствующих производных от кинетической энергии получаем

уравнения движения [вынуждающая сила пропорциональна квадрату угловой скорости, см. (7.135) и имеет период $\tau_e = 2\pi/\nu$]

$$(m + M + m_U)\ddot{w} + r\dot{w} + cw = -m_U e\nu^2 \cos \nu t. \quad (10.59)$$

Динамический прогиб $w(t)$ отсчитывается от положения равновесия, которое принимает система под действием сил тяжести. Сопротивление обычно является малым, и следует соблюдать осторожность при вводе системы в резонанс; $e m_U$ является регулируемым параметром. Важно, что коэффициент сопротивления можно определить, анализируя резонансную кривую, см. (7.94). Кроме максимальной амплитуды a_c измеряются частоты ν_1 и ν_2 , на которых амплитуда принимает значения $a_c/\sqrt{2}$; это так называемый метод ширины полосы. Легко показать что критический коэффициент сопротивления приблизительно равен отношению разности этих частот к их сумме

$$0 < \zeta \cong \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2 + \nu_1} \ll 1. \quad (10.60)$$

Уравнение (10.60) нечувствительно к небольшому смещению частотной шкалы, которое может быть вызвано ошибкой измерения резонансной амплитуды, см. рис. 7.17 (а).

10.7. Упражнения А 10.1 – А10.3 и решения

А 10.1: На рис. А 10.1 схематично показана крыша, состоящая из двух однородных весьма жестких стержней длины l и заданной массы, которые соединены линейно упругой пружиной жесткости c . Если конструкция нагружена только силами тяжести и сосредоточенной силой и находится в равновесии, то со стороны опор действуют только вертикальные реакции. Реакции остаются вертикальными при колебаниях системы около положения равновесия. Треугольная петля является основным элементом стропил. Составить линеаризованные уравнения (Лагранжа) малых свободных колебаний системы в окрестности положения равновесия; сопротивлением пренебречь.

Решение: Треугольник остается равнобедренным при движении, поэтому положение системы определяется одной (угловой) обобщенной координатой $\alpha(t)$. Кинетическая энергия двух стержней равна (массой пружины пренебрегаем)

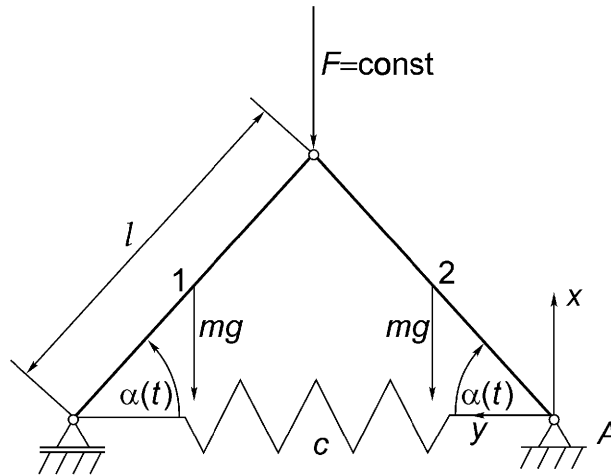


Рис. А 10.1 Схема участка крыши.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m}{2} v_{S1}^2 + \frac{I_{S1}}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{I_A}{2} \dot{\alpha}^2, \quad I_{S1} = \frac{ml^2}{12}, \quad I_A = \frac{ml^2}{3},$$

$$v_{S1}^2 = \dot{x}_{S1}^2 + \dot{y}_{S1}^2 = \frac{l^2}{4} \dot{\alpha}^2 (1 + 8 \sin^2 \alpha).$$

Потенциальная энергия $V = W_p + U$, отсчитываемая от ненапряженной конфигурации, равна $W_p = (mg + F)l \sin \alpha$ и $U = 2cl^2(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2$. Она является функцией $\alpha(t)$. Нелинейное уравнение Лагранжа поэтому содержит силу тяжести

$$\frac{2m}{3} l \ddot{\alpha} (1 + 3 \sin^2 \alpha) + m l \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha - 4cl(\cos \alpha - \cos \alpha_0) \sin \alpha + (F + mg) \cos \alpha = 0.$$

Положение равновесия $\alpha = \alpha_s$ находится из решения статической части динамического уравнения

$$-4cl(\cos \alpha - \cos \alpha_0) \sin \alpha + (F + mg) \cos \alpha = 0.$$

Рассмотрим малые колебания, положив $\alpha = \alpha_s + \varepsilon$ и требуя $|\varepsilon| \ll 1$. Линеаризация по ε дает

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0, \quad \omega_0^2 = \gamma c / 2m,$$

$$\gamma = 12 \left\{ \sin^2 \alpha_s - \left(1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_s} \right) \cos 2\alpha_s \right\} / (1 + 3 \sin^2 \alpha_s).$$

Заметим, что условие $\omega_0 = 0$ определяет критическое положение $\alpha_s = \alpha_c$ перед началом прощелкивания, а условие равновесия при этом критическом значении α определяет критическую нагрузку (см. раздел 9.1.3).

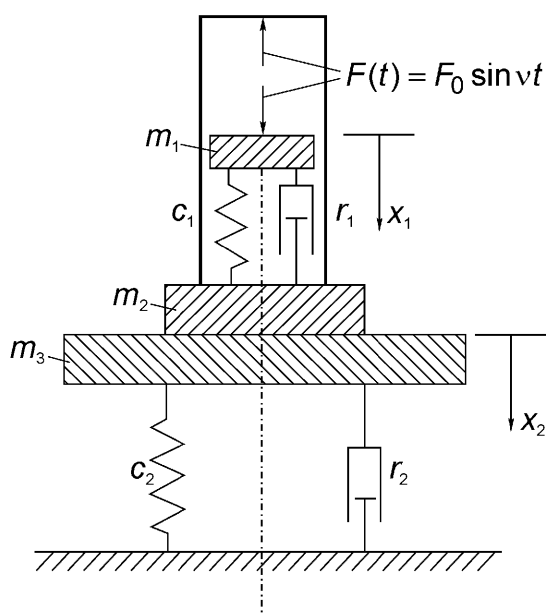


Рис. А 10.2. Модель уплотнителя почвы. Предполагается, что подпрыгивания нет.

А 10.2: На рис. А 10.2 схематично показан вибратор, используемый для уплотнения почвы; для грунта принята простейшая линейная динамическая модель. Внутренняя периодическая сила $F(t)$ есть сила взаимодействия между поршнем массы m_1 и цилиндром массы m_2 . Составить уравнения движения при условии отсутствия подпрыгивания.

Решение: Вычисляя соответствующие производные кинетической энергии

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2 + m_3}{2} \dot{x}_2^2$$

и определяя обобщенные силы из выражения для виртуальной работы

$$Q_1 \delta x_1 + Q_2 \delta x_2 = F \delta x_1 - F \delta x_2 - r_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) (\delta x_1 - \delta x_2) - c_1 (x_1 - x_2) (\delta x_1 - \delta x_2) - r_2 \dot{x}_2 \delta x_2 - c_2 x_2 \delta x_2 + m_1 g \delta x_1 + (m_2 + m_3) g \delta x_2,$$

получим связанные уравнения движения системы с двумя степенями свободы

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + r_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1 (x_1 - x_2) &= m_1 g + F(t), \\ (m_2 + m_3) \ddot{x}_2 - r_1 \dot{x}_1 + (r_1 + r_2) \dot{x}_2 - c_1 x_1 + (c_1 + c_2) x_2 &= (m_2 + m_3) g - F(t). \end{aligned}$$

А 10.3: Составить уравнения движения плоского жесткого маятника массы m_2 , точка A подвеса которого находится на вращающемся диске, как показано на рис. А 10.3. Найти частоту малых свободных колебаний маятника в случае равномерного вращения диска: $d\varphi/dt = \Omega = \text{const}$. Такой маятник можно рассматривать как динамический гаситель нежелательных крутильных колебаний не-

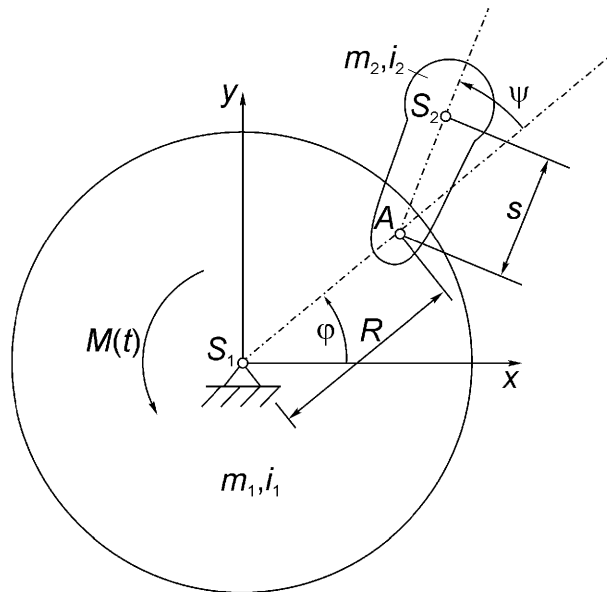


Рис. 10.3. Маятник с вертикальной осью: гаситель крутильных колебаний.

сущего диска массы m_1 , которые накладываются на стационарное вращение устройства. Момент, действующий в этом случае на диск, равен $M(t) = -k\theta + M'(t)$, где $\theta = \varphi - \Omega t$ есть относительный угол поворота (см. рис. А 10.3), и вынуждающий момент $M'(t) = M_0 \cos vt$ предполагается зависящим от времени по гармоническому закону. Определить настройку такого маятника в отсутствие сопротивления.

Решение: Система имеет две степени свободы; в качестве обобщенных координат выберем углы φ и ψ . Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{m_1 i_1^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 + \frac{m_2 i_2^2}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2, \quad v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2,$$

где

$$\begin{aligned} x_2 &= R \cos \varphi + s \cos(\varphi + \psi), & y_2 &= R \sin \varphi + s \sin(\varphi + \psi), \\ \dot{x}_2 &= -R \dot{\varphi} \sin \varphi - s(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \sin(\varphi + \psi), & \dot{y}_2 &= R \dot{\varphi} \cos \varphi + s(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos(\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Вычисляя виртуальную работу $\delta W = M \delta \varphi = Q_\varphi \delta \varphi + Q_\psi \delta \psi$, найдем $Q_\varphi = M$ и $Q_\psi = 0$. Нелинейные уравнения Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned} (m_1 i_1^2 + m_2 i_2^2 + 2m_2 R s \cos \psi) \ddot{\varphi} + m_2 (i_A^2 + R s \cos \psi) \ddot{\psi} - \\ - m_2 R s (2\dot{\varphi} \dot{\psi} + \dot{\psi}^2) \sin \psi = M(t), \end{aligned}$$

$$i_A^2 \ddot{\psi} + (i_A^2 + Rs \cos \psi) \ddot{\phi} + Rs \dot{\phi}^2 \sin \psi = 0, \quad i_A^2 = i_2^2 + s^2, \\ i_0^2 = i_A^2 + R^2.$$

Полагая $d\phi/dt = \Omega = \text{const}$ и проводя линеаризацию с учетом $|\psi| \ll 1$, получим уравнение колебаний и частоту малых линейных свободных колебаний в окрестности положения $\psi = 0$:

$$\ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0, \quad \omega = \Omega \sqrt{Rs} / i_A.$$

Из условия $\Omega = \text{const}$ находим, что момент должен быть приблизительно равен $M \approx \left[-m_2 (i_A^2 + Rs) \omega^2 \psi \right]$. Линеаризация малых крутильных колебаний с учетом $|\theta| \ll 1$ дает

$$(m_1 i_1^2 + m_2 i_0^2 + 2m_2 Rs) \ddot{\theta} + m_2 (i_A^2 + Rs) \ddot{\psi} = -k\theta + M'(t), \\ \ddot{\psi} i_A^2 + (i_A^2 + Rs) \ddot{\theta} + Rs \Omega^2 \psi = 0.$$

В случае гармонического по времени вынуждающего момента $M'(t)$ частное решение есть $\theta = A \cos vt$ и $\psi = B \cos vt$; подставляя эти выражения в написанные выше уравнения, получим линейную неоднородную систему уравнений

$$\left\{ k - v^2 (m_1 i_1^2 + m_2 i_0^2 + 2m_2 Rs) \right\} A - v^2 m_2 (i_A^2 + Rs) B = M_0, \\ -v^2 (i_A^2 + Rs) A + (Rs \Omega^2 - v^2 i_A^2) B = 0.$$

Для отсутствия крутильных колебаний, $\theta \equiv 0$, при определенном значении вынуждающей частоты v нужно, чтобы амплитуда обратилась в нуль, $A = 0$. Так как $B \neq 0$, то в нуль должен обратиться коэффициент при этом параметре: $i_A^2 = Rs \Omega^2 / v^2$. Для настройки динамического гасителя поэтому требуется равенство его собственной частоты и вынуждающей частоты, $\omega = v$. См. также рис. 7.31. Движение маятника происходит с периодом $2\pi/v$, амплитудой $B = -M_0 / m_2 Rs v^2 \left[1 + (\Omega/v)^2 \right]$ и в противофазе с вынуждающим моментом.

11 Некоторые приближенные методы динамики и статики

Положение деформированного тела в общем случае определяется полем векторов смещений $u = u(x, y, z, t; X, Y, Z)$, то есть сплошная среда имеет бесконечное число степеней свободы. Описывающие такую систему с распределенными параметрами дифференциальные уравнения в частных производных с присоединенными граничными и начальными условиями могут быть точно решены только для областей простой формы, даже в случае линейно упругих тел. Для преодоления этого затруднения обычно используются два класса приближенных методов. (1) Строятся функции, которые точно удовлетворяют граничным условиям, но не являются решениями дифференциальных уравнений. Ниже обсуждается основанный на таком наборе допустимых функций метод Рэлея – Ритца – Галеркина; приведены примеры дискретизации с помощью метода конечных элементов (МКЭ). (2) Строятся точные решения дифференциальных уравнений, которые удовлетворяют предписанным граничным условиям только в дискретном наборе точек. Такие методы называются методами коллокации. К ним относится, например, метод граничных элементов. В данной книге методы коллокации не рассматриваются.

Движение деформируемого тела следует так отобразить на конечномерное функциональное пространство, чтобы получившаяся система с конечным числом степеней свободы сохраняла основные динамические свойства исходной. Например, должны быть близки несколько первых частот свободных колебаний или критические нагрузки на выпучивание. Поля деформаций и напряжений должны приближенно совпадать в среднеквадратичном смысле; предпочтительна (но не обязательна) сходимость при увеличении числа степеней свободы аппроксимирующей системы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V (w - w^*)^2 dV \rightarrow 0.$$

Применение метода Галеркина к уравнениям Лагранжа дает систему приближенных (нелинейных) уравнений для амплитуд; в некоторых случаях выгоднее численно решать ее, а не исходную систему дифференциальных уравнений. В настоящей главе рассматривается также метод так называемого гармонического баланса, применяемый для приближенного расчета колебательных систем. Приближенные уравнения движения, к которым приводит МКЭ, часто численно решаются θ -методом Вильсона (методом линейного ускорения)

с подходящим шагом по времени; в разделе 11.6 этот метод кратко изложен для систем с одной степенью свободы.

11.1. Приближенный метод Рэлея – Ритца – Галеркина

Основная идея метода состоит в приближении какого-либо характеризующего деформируемое тело поля, например, компоненты $w(x, y, z, t)$ смещений конечным рядом функций, в котором пространственные и временные переменные разделены (приближение Ритца)

$$w^*(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \varphi_k(x, y, z), \quad (11.1)$$

где $q_k(t)$ суть n обобщенных координат системы, заменяющей сплошную среду. Конечное множество функций $\varphi_k(x, y, z)$, $k = 1, 2, \dots, n$ подбирается по заданным граничным условиям. Каждая из функций должна обязательно удовлетворять геометрическим граничным условиям и, насколько это возможно, учитывать и динамические граничные условия. Пусть, например, (11.1) есть приближенное выражение для прогиба балки или пластины. В этом случае в (11.1) нет зависимости от поперечной координаты z , а для балки в (11.1) достаточно учесть зависимость только от продольной координаты x . Обобщенные координаты, которые в задачах статики постоянны, должны выбираться из соображений наилучшего приближения. После выбора функций, зависящих от пространственных координат, имеется по меньшей мере два способа записи уравнений движения “оптимальной” заменяющей системы с конечным числом степеней свободы. Об отношении Рэлея см. раздел 8.4.2.

11.1.1. Метод Рэлея-Ритца и уравнения Лагранжа для заменяющей системы с конечным числом степеней свободы

Кинетическая энергия рассматриваемого тела выражается определением (8.3). Подставляя в это определение приближение Ритца (11.1), получим функцию обобщенных скоростей и, возможно, обобщенных координат и времени. Если внутренние и внешние силы потенциальны, то существует потенциальная энергия $V = U + W_p$, которая, после подстановки приближения Ритца, становится функцией обобщенных координат (и, возможно, времени). Следовательно, уравнения Лагранжа (10.14) для заменяющей системы с конечным числом степеней свободы дают систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (11.2)$$

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; q_1, q_2, \dots, q_n; t).$$

Силы, которые не являются потенциальными, но вносят вклад в виртуальную работу при виртуальных перемещениях точек их приложения, учитываются с помощью обобщенных сил, получаемых из выражения для виртуальной работы. Соответствующее выражение для сосредоточенных сил дается формулой (10.7). Учитывая (11.1), получим поле виртуальных вариаций в виде

$$\delta w^* = \sum_{k=1}^n \delta q_k \varphi_k(x, y, z) \quad , \quad t = \text{const} .$$

Для статических деформаций $T \equiv 0$ и получается конечный набор условий равновесия [см. (5.9) и (5.15)]

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad \text{или, в более общем виде,} \quad Q_k = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.3)$$

Построенная таким образом система с конечным числом степеней свободы является наилучшим приближением к системе с распределенными параметрами для выбранного заранее приближения Ритца (11.1). Это утверждение основывается на том, что в задачах динамики применение принципа д'Аламбера к заменяющей системе приводит к уравнениям Лагранжа (11.2), а в задачах статики принцип виртуальной работы приводит к условиям равновесия (11.3). Применение приближенных методов требует навыков, которые надо приобретать, начиная с решения простых задач. Ниже приведены соответствующие примеры.

11.1.2. Метод Галеркина

Запишем предполагаемые известными дифференциальные уравнения, описывающие систему с распределенными параметрами, в виде

$$D\{w\} = 0, \quad (11.4)$$

где в символической записи D – (нелинейный) дифференциальный оператор с частными производными в соответствии с бесконечным числом степеней свободы системы. Все внешние силовые функции перенесены в левую часть и включены в оператор (11.4). Аналогично принципу д'Аламбера (10.3) умножаем (11.4) на виртуальную вариацию δw мгновенного положения и интегрируем результат по области задания механического поля w (в общем случае, это тело объема B)

$$\int_B D\{w\} \delta w \, dB = 0. \quad (11.5)$$

Подставляя приближение Ритца (11.1) для поля w в (11.4), получим ошибку p^* , которую по отношению к точному уравнению (11.4) можно интерпретировать как фиктивную нагрузку на данное тело

$$D\{w\} = p^* \neq 0. \quad (11.6)$$

В редких случаях, когда все граничные условия включены в приближение Ритца, достаточно, чтобы эта фиктивная нагрузка была самоуравновешена в любой момент времени. Тогда из принципа виртуальной работы (5.9) вытекает, что

$$\int_B p^* \delta w^* dB = 0. \quad (11.7)$$

Если же в приближении Ритца динамические граничные условия не учтены, то в дополнение к ошибке p^* следует рассматривать фиктивные поверхностные нагрузки Q_w^* . В этом случае требуется самоуравновешенность всей системы фиктивных сил и (11.7) нужно обобщить, включив дополнительную виртуальную работу фиктивных поверхностных сил,

$$\int_B p^* \delta w^* dB + \oint_{\partial B} Q_w^* \delta w^* dS = 0. \quad (11.8)$$

В данное уравнение следует подставить вариацию приближения Ритца

$$\delta w^* = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x, y, z) \delta q_k, \quad t = \text{const}. \quad (11.9)$$

При этом виртуальные вариации обобщенных координат считаем независимыми (заменяющая система голономна). Следовательно, все коэффициенты при δq_k должны обратиться в нуль, и правило Галеркина в общем виде

$$\int_B p^* \varphi_k dB + \oint_{\partial B} Q_w^* \varphi_k dS = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (11.10)$$

имеет n уравнений движения в обобщенных координатах. Если, в классическом случае, все граничные условия учтены в приближении Ритца, то $Q_w^* = 0$, и правило Галеркина сводится к

$$\int_B p^* \varphi_k dB = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.11)$$

Уравнение (11.1) выражает равенство нулю скалярного произведения двух функций: «Ошибка, допускаемая при подстановке приближения Ритца в исходные дифференциальные уравнения в частных производных, функция p^* , ортогональна каждой из функций φ_k в области B ». То есть ошибка минимизируется по отношению к заданному в приближении Ритца набору пространственных функций. Правило Галеркина приводит к уравнениям Лагранжа (11.2),

если оператор D самосопряжен и если приближение Ритца совместимо с процедурами, описанными в разделах 11.1.1 и 11.1.2. При заданных исходных дифференциальных уравнениях в частных производных (11.4) правило Галеркина можно считать более удобным в приложениях, чем первоначальную процедуру Ритца, для получения системы (нелинейных) уравнений движения. Более того, это правило можно применить также для сведения системы дифференциальных уравнений к алгебраической задаче.

11.1.3. Полная алгебраизация уравнений Лагранжа

Уравнения (10.14) в общем случае суть нелинейные дифференциальные (по времени) уравнения. Их можно записать в операторном виде

$$L_k(q_1, q_2, \dots, q_n; t) = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.12)$$

В некоторых случаях можно найти такие подходящие функции $\psi_{kj}(t)$, что для обобщенных координат $q_k(t)$ применимо обобщенное приближение Ритца

$$q_k^*(t) = \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} \psi_{kj}(t) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.13)$$

Начальные условия и конечные условия в некоторый момент времени $t = \tau$ для точного и приближенного движений должны совпадать. Для этих, весьма ограничительных условий правило Галеркина (11.11) обобщается в виде

$$\int_0^{\tau} L_k(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*; t) \psi_{kj}(t) dt = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m_k \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.14)$$

Получившиеся (нелинейные) алгебраические уравнения для констант a_{kj} решаются численно. Такой приближенный метод можно более или менее успешно применить только к задачам теории колебаний, в которых период τ задан заранее. В случае слабых нелинейностей при свободных колебаниях период можно аппроксимировать периодом линейных колебаний; приближенное решение получается тогда в рамках асимптотических методов. Так как остаются трудности решения нелинейных уравнений, то предпочтительным является метод гармонического баланса (см. раздел 11.5). В инженерной практике преобладают численные методы приращений; пример приведен в разделе 11.6.

11.1.4. Вынужденные колебания нелинейного осциллятора

Нелинейная возвращающая сила выражается полиномом третьей степени $F = -(cx + bx^3)$. Точка массы m прикреплена к пружине и находится под дейст-

вием внешней силы $S \cos vt$. Пренебрегая сопротивлением, получим уравнение движения в виде

$$m\ddot{x} = -(cx + bx^3) + S \cos vt. \quad (11.15)$$

Это уравнение называется уравнением Дуффинга; перепишем его в стандартной форме

$$D\{x\} = \ddot{x} + \omega^2 x + \beta x^3 - \frac{S}{m} \cos vt = 0, \quad \omega^2 = c/m, \quad \beta = b/m. \quad (11.16)$$

Установившееся решение ищем в виде колебаний с периодом $2\pi/v$, то есть приближение Ритца можно выбрать в виде гармонических колебаний

$$x^*(t) = a\psi(t), \quad \psi(t) = \cos vt. \quad (11.17)$$

Колебания с меньшими частотами, например $v/3$, которые возможны для отдельных значений вынуждающей частоты, здесь не рассматриваются. Правило Галеркина (11.14)

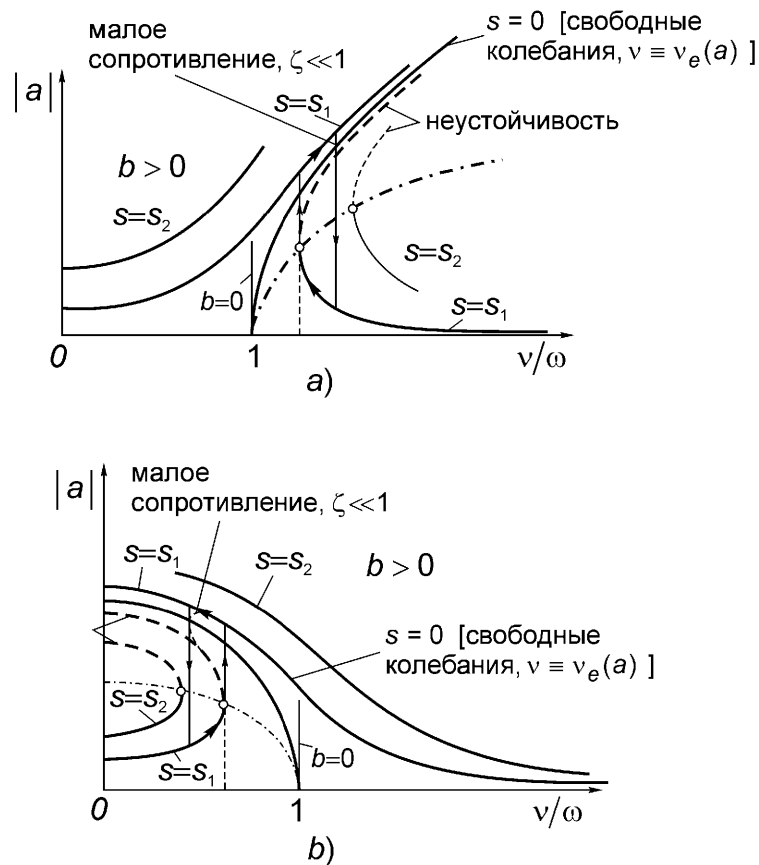


Рис. 11.1. Резонансные кривые для осциллятора с упрочняющейся (а) и разупрочняющейся (б) пружиной. Явление скачка показано вертикальными линиями со стрелками.

$$\int_0^{\tau=2\pi/\nu} D\{x^*(t)\}\psi(t)dt = 0, \quad \psi(t) = \cos \nu t \quad (11.18)$$

после (аналитического) интегрирования приводит к кубическому уравнению

$$\frac{3\beta}{4}a^3 + (\omega^2 - \nu^2)a - \frac{S}{m} = 0. \quad (11.19)$$

Для свободных колебаний следует положить $S = 0$ и (11.19) дает связь между частотой и амплитудой этих колебаний $\nu_e = \nu_e(a)$. В выбранном приближении

$$\nu_e = \sqrt{\omega^2 + \frac{3\beta}{4}a^2}. \quad (11.20)$$

В случае упрочняющейся пружины найденная частота увеличивается с увеличением частоты ω свободных линейных колебаний, в случае разупрочняющейся пружины – уменьшается.

Приближенная резонансная кривая получается просто, если из (11.19) найти обратное значение частоты

$$\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{S}{ca} + \frac{3b}{4c}a^2. \quad (11.21)$$

Вид кривой показан на рис. 11.1. При изменении частоты вынуждающей силы наблюдается эффект скачка. Фактически наблюдаются интенсивные переходные колебания, если амплитуды стационарных состояний сильно различаются.

11.2. Примеры линеаризованных упругих систем с большими массами и малыми жесткостями; заменяющая система имеет одну степень свободы

В таких системах обычно наблюдается только основная мода колебаний; систему, находящуюся под действием периодической силы, можно приближенно заменить системой с одной степенью свободы, то есть использовать в (11.1) одно слагаемое. Метод Ритца – Галеркина дает одно приближенное уравнение движения. Достаточно поэтому определить одну эквивалентную массу (обычно это масса тяжелого элемента системы и некоторая часть массы упругого элемента) и соответствующую эквивалентную жесткость (в линейном случае постоянную). Если сосредоточенная сила действует на сосредоточенную массу, то она без изменения входит в заменяющую систему.

11.2.1. Продольные колебания

На конце линейно упругого стержня длины l_0 прикреплено тело массы m . Предполагая массу единицы длины стержня ρA и жесткость при растяжении EA

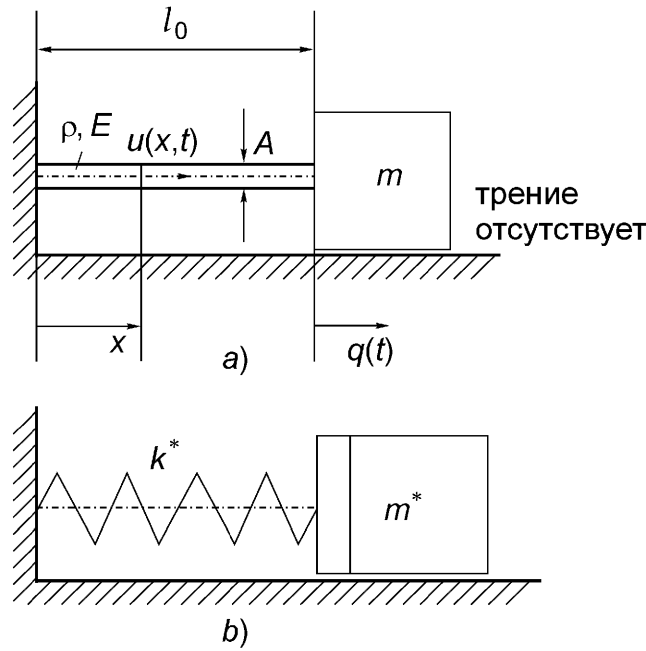


Рис. 11.2. Продольные колебания: (а) Система с распределенными параметрами. (б) Заменяющая система, $m^* = m + m_S/3$, $k^* = EA/l_0$.

постоянными (для удобства интегрирования), получим приближенное уравнение движения для первой моды свободных продольных колебаний. В соответствии с закреплением, показанным на рис. 11.2, поле смещений $u(x,t)$ для этой моды монотонно возрастает с ростом x от закрепленного конца до скользящего тела. Допустимое приближение Ритца можно всегда выбрать похожим на подходящее статическое распределение деформаций. Следовательно, достаточно выбрать линейную функцию x

$$u^*(x,t) = q(t)\varphi(x) \quad , \quad \varphi(x) = x/l_0 \quad , \quad \varphi(x=l_0) = 1. \quad (11.22)$$

Тогда обобщенная координата $q(t)$ имеет смысл меры поступательного движения тела и кинетическая энергия равна

$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \dot{u}^{*2}(x,t)\rho A dx = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_S}{3} \right) \dot{q}^2, \quad (11.23)$$

$$\dot{u}^* = \dot{q}\varphi(x) \quad , \quad m_S = \rho A l_0 .$$

Эта энергия соответствует движению эквивалентной массы $m^* = m + m_S/3$ со скоростью, равной скорости тела массы m . Добавляется одна треть равномерно распределенной массы стержня. Потенциальная энергия аппроксимируется упругой энергией пружины, деформация соответствует (11.22),

$$V = U = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} EA \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{EA}{l_0} q^2, \quad \frac{\partial u^*}{\partial x} = q(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (11.24)$$

Эффективная жесткость $k^* = EA/l_0$ невесомой эквивалентной пружины равна статической жесткости (3.40) в соответствии с линейным приближением Ритца. Уравнение Лагранжа есть уравнение движения линейного осциллятора, показанного на рис. 11.2(b),

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k^*/m^*}. \quad (11.25)$$

Основной период свободных колебаний исходной системы приближенно равен $2\pi/\omega_0$; выражение для частоты записано выше. Заменяющая система с одной степенью свободы оказывается менее жесткой, чем исходная система с бесконечным числом степеней свободы.

11.2.2. Изгибные колебания

Рассмотрим шарнирно опертую по краям однопролетную линейно упругую балку. Обозначим длину через l , плотность равномерного (для удобства интегрирования) распределения массы и изгибную жесткость через ρA и $B = EJ$. В середине балки укреплено тело массы m . Основная мода колебаний должна быть выпуклой, как показано на рис. 11.3. В качестве приближения Ритца выберем одну полуволну синусоиды, это удобно и в случае переменного сечения балки

$$w^*(x, t) = q(t) \varphi(x), \quad \varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \varphi(x = l/2) = 1. \quad (11.26)$$

Кинематические и динамические граничные условия учитываются таким приближением: $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Для тонкой балки вращательная энергия пренебрежимо мала, поэтому кинетическая энергия приближенно равна

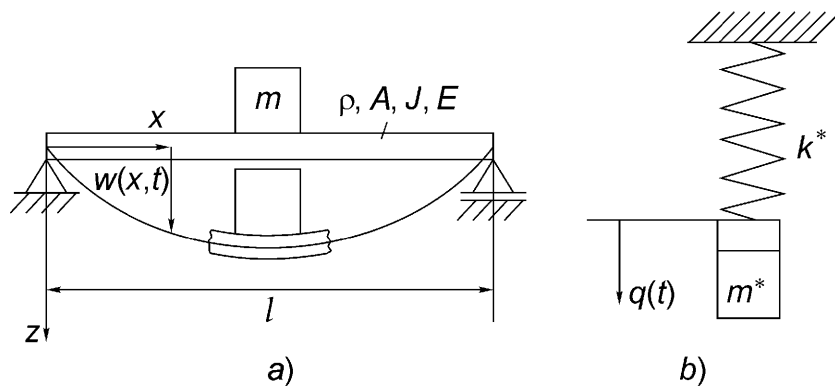


Рис. 11.3. Изгибные колебания: (a) Основная мода для системы с распределенными параметрами. (b) Заменяющий осциллятор с одной степенью свободы.

$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}^{*2}(x,t) \rho A dx = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_S}{2} \right) \dot{q}^2(t), \quad (11.27)$$

$$\dot{w}^* = \dot{q} \varphi(x), \quad m_S = \rho A l.$$

Рассматривая малые колебания в окрестности положения равновесия и пренебрегая потенциальной энергией сдвиговых деформаций, из (5.17) приближенно получим

$$V = U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} q^2(t), \quad (11.28)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = q(t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad k^* = \frac{\pi^4 EJ}{2l^3}.$$

Можно сделать вывод, что заменяющая система, изображенная на рис. 11.3(b), имеет эффективную массу $m^* = m + m_S/2$ (к массе тела должна быть добавлена половина массы балки) и эффективную жесткость невесомой пружины k^* . Заметим, что в данном случае статическая жесткость $c = F/w_0 = 48 EJ/l^3 < k^*$. Приближенное уравнение Лагранжа для прогиба середины балки имеет вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k^*/m^*}. \quad (11.29)$$

Можно заметить сходство между приближением Ритца и основной модой свободных изгибных колебаний балки без дополнительной массы m . Следовательно, $\lim_{m \rightarrow 0} \omega_0 = \omega_{0 \text{ exact}}|_{m=0}$, но $\lim_{m_S \rightarrow 0} \omega_0 > \sqrt{c/m}$, $c = 48 EJ/l^3$; ошибка весьма мала. Альтернативой является выбор полиномиального приближения Ритца, соответствующего статическому прогибу под действием сосредоточенной силы, $\varphi(x) = (3x/l)(1 - 4x^2/3l^2)$, $\varphi(x=l/2) = 1$, $0 \leq x \leq l/2$ (функция симметрична). Эффективная масса $m^* = m + 17 m_S/35$ и $k^* = c$. В этом случае $\lim_{m_S \rightarrow 0} \omega_0 = \sqrt{c/m}$, но $\lim_{m \rightarrow 0} \omega_0 > \omega_{0 \text{ exact}}|_{m=0} = \pi^2 \sqrt{EJ/m_S l^3}$. Ошибка и здесь мала. Можно сделать вывод, что основная собственная частота мало чувствительна к изменениям формы выпуклого приближения Ритца.

11.2.3. Крутильные колебания

Линейно упругий вал длины l зашпелен на одном конце; к другому концу прикреплел жесткий диск с параметрами $m, I_S = mI_S^2$, см. рис. 11.4(a). Рассмотрим свободные крутильные колебания в предположении, что вал имеет форму кругового цилиндра и однороден (для удобства интегрирования). Допустимое приближение Ритца выберем из соображений подобия основной моды свободных

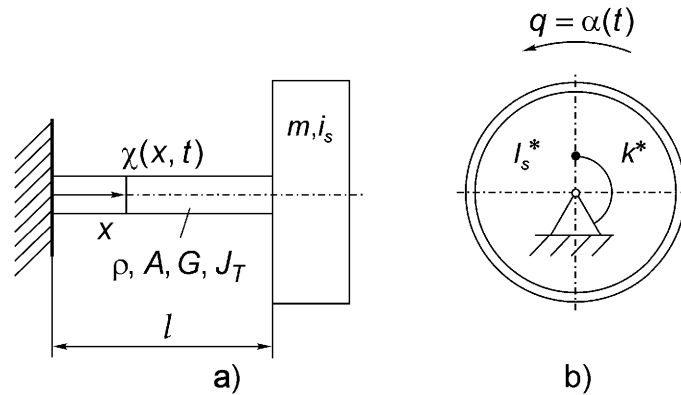


Рис. 11.4. Крутильные колебания: (а) Система с распределенными параметрами. (б) Заменяющий крутильный осциллятор с невесомой пружиной жесткости на закручивание k^* .

колебаний и функции, описывающей статическое закручивание вала под действием момента, приложенного к диску,

$$\chi^*(x, t) = q(t)\varphi(x) \quad , \quad \varphi(x) = x/l \quad , \quad \varphi(x=l) = 1. \quad (11.30)$$

Обобщенная координата $q(t)$ равна углу поворота диска $\alpha(t)$. Кинетическая энергия вала, имеющего форму кругового цилиндра, для которого $A = \pi R^2$, $dl_x/dx = \rho A R^2/2$ равна

$$T = \frac{mi_S^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^l \dot{\chi}^{*2}(x, t) \frac{dl_x}{dx} dx = \frac{1}{2} \left(mi_S^2 + \frac{1}{3} m_S \frac{R^2}{2} \right) \dot{\alpha}^2(t), \quad (11.31)$$

$$\dot{\chi}^* = \dot{\alpha}\varphi(x) \quad , \quad I^* = \left(mi_S^2 + \frac{1}{3} m_S \frac{R^2}{2} \right).$$

Потенциальная энергия равна деформационной энергии закручивания по Сен-Венану [(см. (5.51) и (6.104)]

$$V = U = \frac{1}{2} \int_0^l GJ_T \left(\frac{\partial \chi^*}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{GJ_T}{l} \alpha^2 \quad , \quad J_T = J_p = AR^2/2, \quad k^* = GJ_T/l. \quad (11.32)$$

Заменяющая система есть крутильный осциллятор с одной степенью свободы, момент инерции его жесткого диска равен I^* , а жесткость невесомой пружины, работающей на закручивание, равна k^* . Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{k^*/I^*}, \quad (11.33)$$

где жесткость на закручивание равна статической, $k^* = c = M/\chi_0 = GJ_T/l$.

11.2.4. Одноярусная рама

Переключатель массы m , которую предполагаем жесткой (чтобы динамическая система была как можно более простой), поддерживается двумя заземленными однородными тонкими линейно упругими стержнями, см. рис. 11.5.

Статически неопределимая рама совершает колебания в своей плоскости. Для основной моды колебаний выберем приближение Ритца в виде

$$w^*(x, t) = q(t)\varphi(x) \quad , \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{H} \right) \quad , \quad \varphi(x=H) = 1. \quad (11.34)$$

Обобщенная координата очень наглядна, так как равна горизонтальному перемещению жесткой переключателя. Приближенное выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2} + 2 \frac{1}{2} \int_0^H \dot{w}^{*2}(x, t) \rho A dx = m^* \frac{\dot{q}^2}{2} \quad , \quad m^* = (m + 2m_1^*). \quad (11.35)$$

Часть масс поддерживающих стержней прибавляется к массе переключателя

$$m_1^* = \int_0^H \rho A \varphi^2(x) dx = \frac{3m_S}{8} \quad , \quad m_S = \rho A H. \quad (11.36)$$

Стержни имеют предварительное статическое сжатие за счет большого веса mg , которое уменьшает их жесткость на изгиб. Поэтому энергия деформации вычисляется по теории второго порядка [см. (9.42)]; потенциальной энергией стержней в поле силы тяжести пренебрегаем и $N = -mg/2 = \text{const}$,

$$V = 2 \frac{1}{2} \int_0^H EJ \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right)^2 dx - 2 \frac{mg}{2} \frac{1}{2} \int_0^H \left(\frac{\partial w^*}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{k^* q^2}{2}. \quad (11.37)$$

Если жесткость стержней на изгиб постоянна, то эффективная жесткость с постоянной геометрической поправкой равна

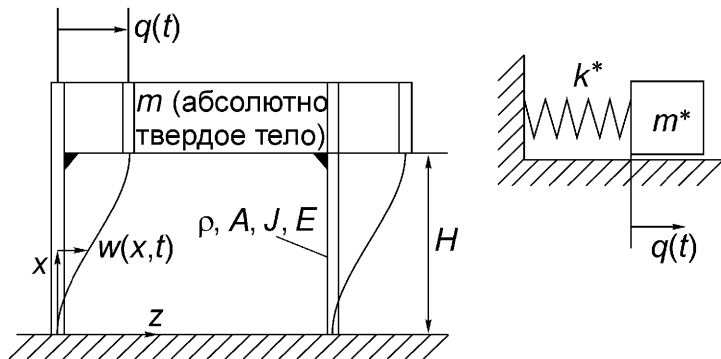


Рис. 11.5. Основная мода свободных колебаний рамной конструкции. Система с распределенными параметрами и заменяющий осциллятор.

$$k^* = 2 \int_0^H EJ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 dx - mg \int_0^H \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx = 2 \frac{\pi^4 EJ}{8H^3} \left(1 - \frac{mg}{2} \frac{H^2}{\pi^2 EJ} \right). \quad (11.38)$$

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (11.39)$$

где приближенное значение основной частоты свободных колебаний рамы (см. рис. 11.5) равно

$$\omega_0 = \sqrt{k^*/m^*}. \quad (11.40)$$

В уравнение (11.39) можно добавить небольшое сопротивление. Деформируемость перекладины можно грубо учесть, расположив массы $m/2$ в углах рамы и добавив энергию деформации балки в (11.37).

11.2.5. Упругая круглая пластина с точечной массой в центре

Если считать, что граница $r = R$ закреплена, то основная мода колебаний осесимметрична. Допустимое приближение Ритца для прогиба можно выбрать в виде полинома

$$w^*(r, t) = q(t) \varphi(r), \quad \varphi(r) = \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2, \quad \varphi(r = R) = 0, \quad \varphi'(r = R) = 0, \quad \varphi(0) = 1. \quad (11.41)$$

Кинетическая энергия массы m в центре и пластины постоянной толщины h и плотности ρ тогда приближенно равна

$$T = \frac{m \dot{q}^2}{2} + \frac{1}{2} \int_m \dot{w}^{*2}(r, t) dm = \frac{m \dot{q}^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^R 2\pi \rho h \dot{w}^{*2}(r, t) r dr = m^* \frac{\dot{q}^2}{2}, \quad (11.42)$$

$$m^* = \left(m + \frac{m_S}{5} \right), \quad m_S = \rho \pi R^2 h.$$

Потенциальная энергия равна энергии деформации при изгибе

$$V = \frac{1}{2} \int_0^R 2\pi K \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial r} \right)^2 r dr = k^* \frac{q^2}{2}, \quad (11.43)$$

$$k^* = \frac{64\pi K}{3R^2}, \quad K = Eh^3/12(1-\nu^2).$$

Заменяющий осциллятор имеет параметры m^* и k^* . Основную частоту свободных колебаний, которые описываются уравнением Лагранжа (11.39), находим, подставляя эффективные параметры в (11.40). О приближении Ритца для шарнирно опертых круглых пластин см. упражнение А 11.8.

11.3. Примеры упругих конструкций с абстрактными заменяющими системами

Приближенный метод Ритца-Галеркина иллюстрируется ниже на примерах, в которых заменяющая система имеет несколько степеней свободы или носит совершенно абстрактный характер.

11.3.1. Свободные изгибные колебания предварительно нагруженной тонкой балки

На рис.11.6 показана шарнирно опертая балка длины l , растянутая постоянной силой S ; балка может совершать изгибные колебания. Приближение Ритца с допустимыми по отношению к шарнирно закрепленным краям функциями выберем в виде конечной суммы

$$w^*(x,t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \varphi_k(x) \quad , \quad \varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (11.44)$$

Если считать нормальную силу постоянной, $N = S$ (согласно теории второго порядка), то основное линейное дифференциальное уравнение теории Бернулли-Эйлера имеет четвертый порядок [(см. (9.60) и (7.147)]. Вместо поперечной нагрузки подставляем силы инерции, и уравнение получается однородным

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (11.45)$$

Подстановка сюда приближения Ритца дает ошибку, соответствующую фиктивной поперечной нагрузке. Предполагая жесткость на изгиб EJ постоянной (для удобства интегрирования), найдем

$$p^*(x,t) = D\{w^*\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \rho A \ddot{q}_k + \left[\left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 EJ + N \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] q_k \right\} \sin k\pi x. \quad (11.46)$$

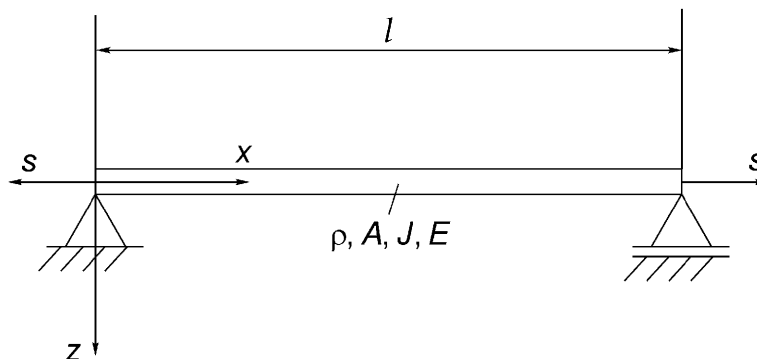


Рис. 11.6. Изгибные колебания предварительно нагруженной балки (или струны).

В данном случае при $n \rightarrow \infty$ ошибка стремится к нулю, так как допустимые функции образуют систему (ортогональных) собственных функций уравнения (11.45), а (11.44) есть разложение по этой системе собственных функций. Правило Галеркина (11.11) требует ортогональности ошибки к каждой из допустимых функций. Динамические граничные условия выполнены,

$$\int_0^l p^* \varphi(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.47)$$

Так как жесткость на изгиб постоянна, то интегрирование выполняется аналитически с учетом условий ортогональности на отрезке длины l :

$$\int_0^l \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = \frac{l}{2} \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}. \quad (11.48)$$

Уравнения движения соответствуют несвязанным осцилляторам, и приближенные значения собственных частот получаются в виде

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \omega_k = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{EJ}{\rho A} + \frac{S}{\rho A}}. \quad (11.49)$$

Если балка предварительно не была растянута, $N = S = 0$, то полученный дискретный спектр является точным в рамках теории Бернулли-Эйлера. Если считать, что $EJ = 0$, а натяжение S сохранить постоянным, то получим однородную колеблющуюся струну. Ее собственные частоты ω_{0k} также даются формулой (11.49) точно, так как допустимые функции φ_k и в этом предельном случае образуют систему ортогональных собственных функций. Всякая струна имеет небольшую жесткость EJ на изгиб; эффект влияния этой жесткости на спектр собственных колебаний описывается первым слагаемым под корнем в формуле (11.49), которую перепишем в виде

$$\omega_k = \omega_{0k} \sqrt{1 + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{EJ}{S}}, \quad \omega_{0k} = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{IS}{m}}, \quad m = \rho Al. \quad (11.50)$$

Полученные собственные значения остаются верными и для предварительного сжатия осевой силой $S = -F$. Подставляя это равенство в (11.49), получим приближенно собственные частоты, которые будут меньше частот, соответствующих предварительно ненапряженной балке с постоянной жесткостью на изгиб

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{l}{m} \sqrt{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 EJ - F}}. \quad (11.51)$$

При увеличении сжатия основная собственная частота ω_1 обращается в нуль первой. Для бóльших сжатий свободные колебания в окрестности прямолинейного положения равновесия невозможны, при критической эйлеровой нагрузке на выпучивание возникает бифуркация

$$\omega_1 \rightarrow 0: F_c = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (11.52)$$

Мода выпучивания и основная мода свободных колебаний подобны, см. раздел 9.1.4.

11.3.2. Нагрузка на выпучивание для эйлерова стержня на упругом основании

На рис. 11.7 показано линейное винклеровское основание; оно создает возвращающую силу, пропорциональную (при отнесении к единице длины) отклонению после выпучивания, $q_z = -kw$.

Используем приближение Ритца с двумя слагаемыми, этого достаточно для обнаружения явления скачка моды при превышении осевой сжимающей силой F критического значения,

$$w^*(x) = q_1 \sin \frac{\pi x}{l} + q_2 \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (11.53a)$$

Обобщенные координаты суть постоянные амплитуды мод выпучивания. Потенциальная энергия включает упругую энергию основания в дополнение к (9.42) (см. рис. 11.7)

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{F}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w^*}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l kw^{*2} dx. \quad (11.53b)$$

Для аппроксимирующих функций, которые являются собственными функциями в случае постоянной жесткости EJ на изгиб, выполняются соотношения ортогональности и смешанные слагаемые при интегрировании исчезают,

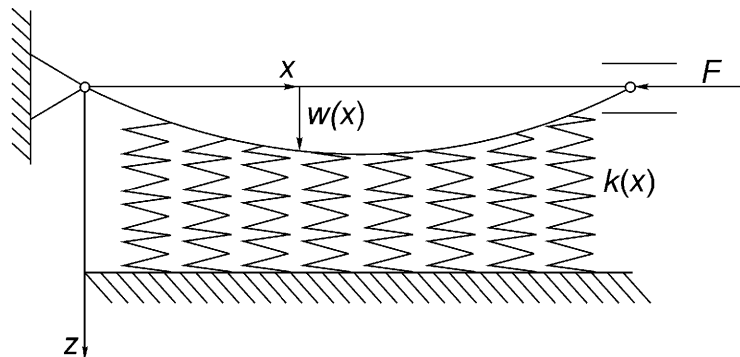


Рис. 11.7. Эйлеров стержень на винклеровском основании. Скачок моды.

$$V = \frac{k_1^* q_1^2}{2} + \frac{k_2^* q_2^2}{2}, \quad \begin{cases} k_1^* = \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} - F \frac{\pi^2}{2l} + \frac{kl}{2} \\ k_2^* = \frac{8\pi^4 EJ}{l^3} - F \frac{2\pi^2}{l} + \frac{kl}{2} \end{cases}. \quad (11.53c)$$

Условия равновесия получаются из равенства $\delta V = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = k_1^* q_1 = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = k_2^* q_2 = 0.$$

Прямолинейный стержень, $q_1 = q_2 = 0$, является устойчивым в соответствии с критерием Дирихле, если потенциальная энергия $V(q_1 = q_2 = 0)$ имеет локальный минимум [см. раздел 9.1]

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right|_{q_1=q_2=0} = k_1^* > 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \right|_{q_1=q_2=0} = k_2^* > 0. \quad (11.54a)$$

Предел устойчивости достигается если $k_1^* = 0$ или $k_2^* = 0$. Критическая нагрузка является минимальной из нагрузок на выпучивание, которые выражаются через эйлерову нагрузку,

$$F_1 = F_E \left(1 + \frac{kl^4}{\pi^4 EJ} \right) \quad \text{и} \quad F_2 = F_E \left(4 + \frac{kl^4}{4\pi^4 EJ} \right), \quad F_E = \pi^2 EJ/l^2, \\ \Rightarrow F_c = \min\{F_1, F_2, \dots\}. \quad (11.54b)$$

При увеличении жесткости основания мода выпучивания, соответствующая критической нагрузке, становится более волнистой. Переход через кратный корень $F_c = F_1 = F_2$ не является гладким и называется скачком моды. Форму стержня в окрестности критической нагрузки определяют его несовершенства.

11.3.3. Крутильная жесткость упругого стержня с прямоугольным сечением

Сечение площади $A = 2B \times 2H$ является односвязным, поэтому крутильная жесткость, в соответствии с первой частью (6.171), пропорциональна интегралу

$$J_T = 4 \int_A \psi dA. \quad (11.55)$$

Рассмотрим уравнение Пуассона (6.170) с краевым условием $\psi = 0$ и используем допустимое приближение Ритца с одним слагаемым (q – подгоночный параметр)

$$D\{\psi\} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 1 = 0, \quad (11.56)$$

$$\psi^*(y, z) = q(B^2 - y^2)(H^2 - z^2), \quad \psi = 0 \text{ при } y = \pm B, z = \pm H. \quad (11.57)$$

Согласно правилу Галеркина (11.11) следует минимизировать ошибку $D\{\psi^*\}$, которая получается при подстановке приближения в (11.56). Подынтегральная функция симметрична по обеим координатам, поэтому

$$4 \int_0^B \int_0^H D\{\psi^*(y, z)\} (B^2 - y^2)(H^2 - z^2) dy dz = 0. \quad (11.58)$$

После простого интегрирования находим значение подгоночного параметра

$$q = 5/8 (B^2 + H^2). \quad (11.59)$$

При вычислении интеграла (11.55) ошибка подынтегральной функции несколько сглаживается, и окончательный результат получается с хорошей точностью

$$J_T^* = 4 \int_A \psi^* dA = 40 (HB)^3 / 9 (B^2 + H^2). \quad (11.60)$$

Сравнив этот результат с точным для квадратного сечения $2B = 2H$ значением $J_T = 2,24 B^4$, которое получается в виде медленно сходящегося ряда, найдем, что приближенное значение меньше примерно на 0,8%. Приближенное значение максимального сдвигового напряжения при $y = B, z = 0$ можно найти, взяв производную; оно равно

$$\tau_{\max}^* = -2 \frac{M_T}{J_T^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = 9 M_T / 16 HB^2. \quad (11.61)$$

Точное для квадратного сечения значение равно $\tau_{\max} = 0,601 \times M_T / B^3$; ошибка увеличивается здесь до -6,5% из-за дифференцирования приближения Ритца.

11.4. Метод конечных элементов (МКЭ)

В данной книге изложен только очерк основных концепций метода в рамках приближения Ритца-Галеркина. Рассмотренное выше приближение Ритца (11.1) основывалось на наборе (гладких) допустимых функций, определенных во всей области, занимаемой телом, и удовлетворяющих нужным граничным условиям. В МКЭ тело разделяется на конечные элементы; соседние элементы просто соединены друг с другом. Вектор смещений записывается в приближении Ритца внутри каждого элемента. В качестве обобщенных координат в таком приближении выбираются обобщенные смещения в узлах. Можно сказать, что конечный элемент, имеющий некоторую заранее выбранную форму, рассматривается здесь так же, как выше рассматривалось все тело: составляются уравнения

движения небольшой (по возможности, имеющей малое число степеней свободы) заменяющей системы. Следующий шаг состоит в переходе к нелокальным (глобальным) координатам, что дает возможность провести «суперпозицию» заменяющих систем. На современных компьютерах можно проводить матричные вычисления, поэтому после определения матриц жесткости всех элементов можно собрать глобальную матрицу жесткости тела или конструкции. Аналогично строится матрица инерции в задачах динамики. Далее изложенный метод иллюстрируется на примерах колеблющегося балочного элемента и треугольного элемента статически нагруженной в своей плоскости термоупругой пластины.

11.4.1. Балочный элемент

Проведем дискретизацию линейно упругой балки в соответствии с МКЭ. В рамках теории изгибных колебаний Бернулли-Эйлера применимо уравнение (7.147); для свободных колебаний оно является однородным

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (11.62)$$

Приближение Ритца для прогиба внутри элемента длины l выбирается так, чтобы обобщенными координатами были смещения и углы поворота в узлах соединения элементов (центрах масс сечений при $x=0$ и $x=l$ в локальных координатах), показанных на рис. 11.8(a).

Допустимыми функциями являются полиномы наименьшего порядка, которые суть функции влияния балки постоянного сечения, защемленной на одном конце и с предписанными граничными условиями, показанными на рис. 11.8(b), на другом конце:

$$w^*(x, t) = \sum_{k=1}^4 q_k(t) H_k(\xi) \quad , \quad \mathbf{q} = \{w^l(t), \psi^l(t), w^r(t), \psi^r(t)\} \quad , \quad \xi = x/l. \quad (11.63)$$

Верхний индекс l соответствует левому концу, индекс r – правому концу. Решение простых задач статики для единичного смещения или единичного угла поворота приводит к полиномам Эрмита на отрезке $0 \leq \xi \leq 1$

$$\begin{aligned} H_1 &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad , \quad H_2 = -l(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \\ H_3 &= -2\xi^3 + 3\xi^2 \quad , \quad H_4 = -l(\xi^3 - \xi^2). \end{aligned} \quad (11.64)$$

Подставляя выбранное приближение в (11.62), найдем фиктивную поперечную нагрузку и, в соответствии с правилом Галеркина (11.7), приравняем нулю ее виртуальную работу

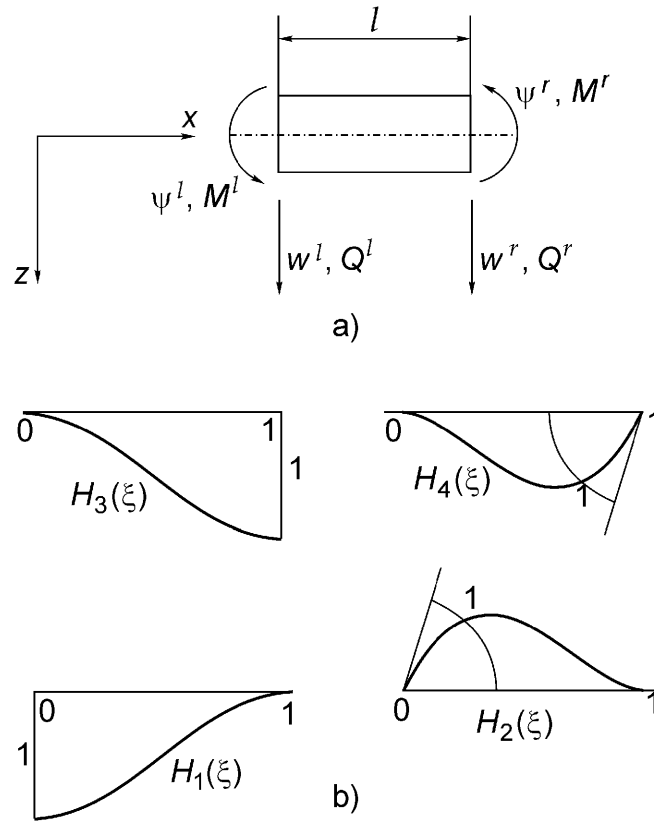


Рис. 11.8. (а) Простой балочный элемент. (б) Полиномы Эрмита низших порядков.

$$\int_0^l q^* \delta w^* dx = 0. \tag{11.65}$$

Интегрируя первое слагаемое дважды по частям и учитывая виртуальную работу равнодействующих сил в сечениях [на рис.11.8(а) эти силы считаются положительными], получим

$$\int_0^1 \frac{EJ}{l^3} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) d\xi + \int_0^1 \rho Al \ddot{w}^* \delta w^* d\xi - (Q^l \delta w^l + M^l \delta \psi^l + Q^r \delta w^r + M^r \delta \psi^r) = 0. \tag{11.66}$$

Выполняя интегрирование и сравнивая коэффициенты, найдем четыре дифференциальных уравнения движения, которые в матричных обозначениях можно записать следующим образом:

$$\left(\mathbf{k} + \mathbf{m} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{D} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}^T = (Q^l, M^l, Q^r, M^r), \quad \mathbf{D}^T = (w^l, \psi^l, w^r, \psi^r). \tag{11.67}$$

Элементы симметричной (4×4) матрицы жесткости **k** определяются интегралами

$$k_{lm} = \int_0^1 \frac{EJ}{l^3} H_l'' H_m'' d\xi, \quad H'' = \frac{d^2 H}{d\xi^2}, \quad (11.68)$$

и элементы симметричной (4×4) матрицы инерции \mathbf{m} аналогично равны

$$m_{kl} = \int_0^1 \rho A l H_k H_l d\xi. \quad (11.69)$$

Эти интегралы легко вычисляются для однородных элементов, когда изгибная жесткость и масса единицы длины суть заданные константы,

$$\mathbf{k} = \frac{EJ}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ . & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ . & . & 12 & 6l \\ . & . & . & 4l^2 \end{pmatrix}, \quad (11.70)$$

$$\mathbf{m} = \frac{m_S}{420} \begin{pmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ . & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ . & . & 156 & 22l \\ . & . & . & 4l^2 \end{pmatrix}, \quad m_S = \rho A l. \quad (11.71)$$

Суперпозиция должна выполняться с учетом законов изменения количества движения и момента количества движения при любом движении без деформаций. Рассмотрение движений конечного элемента как твердого тела приводит к соотношению (в случае поступательного движения, когда $w^l = w^r, \psi = 0$)

$$Q^l + Q^r = \frac{1}{2} m_S \left(\frac{\partial^2 w^l}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w^r}{\partial t^2} \right) \quad (11.72)$$

и в случае малого вращения, когда $\psi^l = \psi^r, w^l = 0, w^r = -l\psi^r$, к соотношению

$$M^l + M^r - lQ^r = \frac{l^2}{3} m_S \frac{\partial^2 \psi^r}{\partial t^2}. \quad (11.73)$$

Так как здесь рассматриваются две степени свободы такого движения, то соответствующая сингулярная матрица жесткости имеет порядок два. Обратная матрица податливости не существует.

Покажем, как производится суперпозиция матриц при соединении двух соседних элементов. В общем узле 0 условия совместности имеют вид

$$w_0 = w_1^r = w_2^l, \quad \psi_0 = \psi_1^r = \psi_2^l, \quad (11.74)$$

последнее означает непрерывность угла наклона. В дополнение к распределенной массе в узле может быть закреплена сосредоточенная масса m_0 с мо-

ментом инерции $m_0 i_0^2$. Законы изменения количества движения и момента количества движения дают в этом случае два уравнения (предполагается, что в узле действует внешняя сила F_0 и внешний момент M_0)

$$m_0 \ddot{w}_0 = F_0 - (Q_1^r + Q_2^l), \quad m_0 i_0^2 \ddot{\psi}_0 = M_0 - (M_1^r + M_2^l). \quad (11.75)$$

Уравнение (11.67) дает сумму сдвиговых сил и моментов и, складывая жесткости в узлах, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} Q_1^r + Q_2^l &= F_0 - m_0 \ddot{w}_0 = \\ &= \frac{EJ}{l^3} [-12w_1^l + 6l\psi_1^l + 12w_0 + 6l\psi_0 + 12w_0 - 6l\psi_0 - 12w_2^r - 6l\psi_2^r] + \\ &+ \frac{m_S}{420} [54\ddot{w}_1^l - 13l\ddot{\psi}_1^l + 156\ddot{w}_0 + 22l\ddot{\psi}_0 + 156\ddot{w}_0 - 22l\ddot{\psi}_0 + 54\ddot{w}_2^r + 13l\ddot{\psi}_2^r], \\ M_1^r + M_2^l &= M_0 - m_0 i_0^2 \ddot{\psi}_0 = \\ &= \frac{EJ}{l^3} [-6lw_1^l + 2l^2\psi_1^l + 6lw_0 + 4l^2\psi_0 - 6lw_0 + 4l^2\psi_0 + 6lw_2^r + 2l^2\psi_2^r] + \\ &+ \frac{m_S}{420} [13l\ddot{w}_1^l - 3l^2\ddot{\psi}_1^l + 22l\ddot{w}_0 + 4l^2\ddot{\psi}_0 - 22l\ddot{w}_0 + 4l^2\ddot{\psi}_0 - 13l\ddot{w}_2^r - 3l^2\ddot{\psi}_2^r]. \end{aligned}$$

Если надлежащим образом увеличить размер матриц, например, вектор деформаций $\mathbf{D}_{1,2}^T = (w_1^l, \psi_1^l, w_0, \psi_0, w_2^r, \psi_2^r)$ считать матрицей размера (1×6) и в соответствии с этим расположить элементы вектора обобщенных сил, то получим уравнения движения балки из двух элементов в матричной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1,2}^T &= \left(Q_1^l, M_1^l, [F_0 - m_0 \ddot{w}_0], \left[M_0 - m_0 i_0^2 \ddot{\psi}_0 \right], Q_2^r, M_2^r \right), \\ \mathbf{m}_{1,2} \ddot{\mathbf{D}}_{1,2} + \mathbf{k}_{1,2} \mathbf{D}_{1,2} &= \mathbf{F}_{1,2}, \end{aligned} \quad (11.76)$$

где силы инерции, соответствующие сосредоточенной массе m_0 , оставлены в векторе сил для удобства записи глобальной матрицы инерции. Окончательно получим матрицы жесткости и инерции размера (6×6) для рассмотренной выше однородной балки из двух элементов

$$\mathbf{k}_{1,2} = \frac{EJ}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l & 0 & 0 \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & 6l & 24 & 0 & -12 & -6l \\ -6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & 6l & 12 & 6l \\ 0 & 0 & -6l & 12l^2 & 6l & 4l^2 \end{pmatrix}, \quad (11.77)$$

$$\mathbf{m}_{1,2} = \frac{m_S}{420} \begin{pmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l & 0 & 0 \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 54 & -13l & \underline{312} & 0 & 54 & 13l \\ 13l & -3l^2 & 0 & \underline{8l^2} & -13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 54 & -13l & 156 & 22l \\ 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{pmatrix}. \quad (11.78)$$

Элементы, получившиеся в результате суперпозиции, подчеркнуты; слагаемые, отвечающие сосредоточенной массе, по-прежнему не перенесены в матрицу инерции. Проведенная выше процедура есть первый шаг прямого метода жесткостей, и она аналогично распространяется на суперпозицию любого числа балочных элементов. На левом конце первого элемента и на правом конце последнего следует учесть граничные условия. Для практических приложений здесь существенно использование компьютерного инструментария, например, пре- и пост-процессоров. Реакции опор остаются неизвестными и определяются позже при анализе колебаний. Сохраняя время постоянным, предполагаем в этом случае, что балка нагружена заданными силами и силами инерции. Тогда можно применить методы статики.

Матрицы жесткости и инерции можно преобразовать к повернутой глобальной системе отсчета. С помощью такого преобразования легко провести дискретизацию рам и других балочных конструкций с ответвлениями. В общем случае следует учесть нормальные силы и продольные колебания составляющих конструкцию балок. Следующие руководства содержат исчерпывающую информацию:

- Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., Стройиздат, 1982.
- Bathe K. J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1982.
- Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва, Мир, 1975.
- Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method. New York, McGraw-Hill, 1977.

11.4.2. Плоский треугольный элемент пластины

Рассмотрим тонкую пластину, на которую действуют силы, лежащие в ее плоскости; примем, что имеет место плоское напряженное состояние. В этом случае обычно используются треугольные конечные элементы и, чтобы число степеней свободы было минимальным, узлы помещаются в вершинах элементов (см. рис.11.9). Тогда приближения Ритца для перемещений внутри каждого элемента суть линейные функции координат x и y , так что перемещения в узлах становятся обобщенными координатами и элемент имеет шесть степеней свободы,

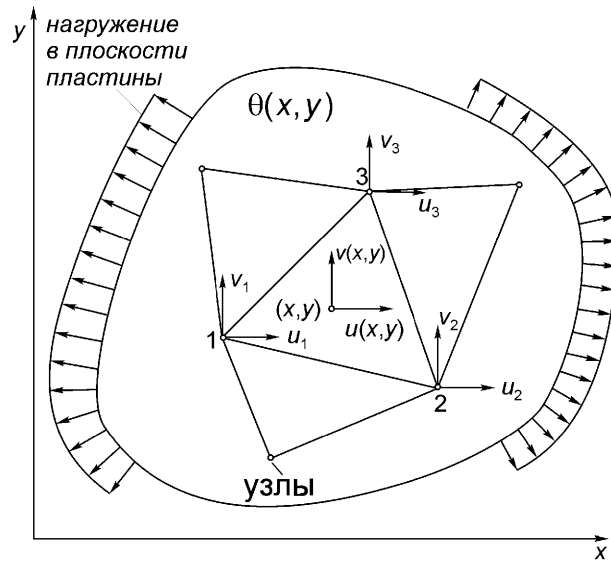


Рис. 11.9. Пластина в равновесии; показан увеличенный треугольный элемент. Лежащая в плоскости пластины нагрузка на некотором участке границы и (среднее) температурное поле считаются заданными.

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^3 u_n \varphi_n(x, y) \quad , \quad v(x, y) = \sum_{n=1}^3 v_n \varphi_n(x, y),$$

$$\varphi_n(x, y) = a_n + b_n x + c_n y. \quad (11.79)$$

Девять коэффициентов ($a_n, b_n, c_n, n = 1, 2, 3$) легко находятся из (3×3) линейных условий

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_1, y_1) &= \delta_{n1} = a_n + b_n x_1 + c_n y_1, \\ \varphi_n(x_2, y_2) &= \delta_{n2} = a_n + b_n x_2 + c_n y_2, \quad n = 1, 2, 3 \quad , \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \\ \varphi_n(x_3, y_3) &= \delta_{n3} = a_n + b_n x_3 + c_n y_3, \end{aligned}$$

(11.80a)

Объединяя координаты x и y узлов в матрицы-столбцы $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y}^T = (y_1, y_2, y_3)$ и обозначая их разности через $x_{ij} = x_i - x_j$ и $y_{ij} = y_i - y_j$, запишем упомянутые коэффициенты в компактной форме

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2A} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}), \quad \mathbf{a}^T = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b}^T = \frac{1}{2A} (y_{23}, y_{31}, y_{12}),$$

$$\mathbf{c}^T = \frac{1}{2A} (x_{32}, x_{13}, x_{21}) \quad , \quad 2A = (\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{x}).$$

(11.80b)

Деформации внутри элемента постоянны и выражаются через перемещения в узлах посредством (линеаризованных) геометрических соотношений

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} u_n, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} v_n, \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} v_n + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} u_n \right), \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = b_n, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = c_n.\end{aligned}\quad (11.81)$$

Запишем в матричной форме также закон Гука, (4.20) и (6.29), введя столбец \mathbf{S} средних напряжений, строку \mathbf{u} перемещений и, в общем случае, столбец θ значений температурного поля в узлах,

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{S}\mathbf{u} - \Psi\theta, \quad \mathbf{S}^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}), \quad \mathbf{u} = (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3), \\ \theta(x, y) &= \sum_{n=1}^3 \theta_n \varphi_n(x, y), \quad \theta^T = (\theta_1, \theta_2, \theta_3), \\ \mathbf{S} &= \frac{G}{(1-\nu)A} \begin{pmatrix} y_{23} & \nu x_{32} & y_{31} & \nu x_{31} & y_{12} & \nu x_{21} \\ \nu y_{23} & x_{32} & \nu y_{31} & x_{13} & \nu y_{12} & x_{21} \\ \lambda x_{32} & \lambda y_{23} & \lambda x_{13} & \lambda y_{31} & \lambda x_{21} & \lambda y_{12} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \frac{E\alpha}{1-\nu} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda &= (1-\nu)/2.\end{aligned}\quad (11.82)$$

Обобщенные внутренние силы приложены в узлах и определяются градиентом энергии деформации. Считая, что толщина $h = \text{const}$ и учитывая (3.41), (3.35), находим частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial u_n} = h \int_A \left(\sigma_{xx} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) dA, \quad \frac{\partial U}{\partial v_n} = h \int_A \left(\sigma_{yx} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) dA.$$

Исключая напряжения с помощью закона Гука, получим в матричной записи

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial u_n} \\ \frac{\partial U}{\partial v_n} \end{pmatrix} = hA \begin{pmatrix} b_n & 0 & c_n \\ 0 & c_n & b_n \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{S}\mathbf{u} - \Phi\theta).$$

Здесь Φ определяется интегралом по области

$$\Phi = \frac{1}{A} \int_A \Psi dA = \frac{E\alpha}{3(1-\nu)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\quad (11.83)$$

Надлежащее увеличение размеров матриц окончательно дает

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial u_1} & \frac{\partial U}{\partial v_1} & \frac{\partial U}{\partial u_2} & \frac{\partial U}{\partial v_2} & \frac{\partial U}{\partial u_3} & \frac{\partial U}{\partial v_3} \end{pmatrix}^T = (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{T}\Phi\theta), \quad \mathbf{K} = \mathbf{T}\mathbf{S},\quad (11.84)$$

где

$$\mathbf{T} = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{pmatrix}, \quad (11.85a)$$

\mathbf{K} – симметричная (6×6) матрица жесткости треугольного элемента; температурные эффекты учитываются столбцом

$$\Lambda^T = (\mathbf{T}\Phi\bar{\theta})^T = \frac{Eh\alpha\bar{\theta}}{2(1-\nu)} (y_{23}, x_{32}, y_{31}, x_{13}, y_{12}, x_{21}), \quad \bar{\theta} = \sum_{i=1}^3 \theta_i / 3. \quad (11.85b)$$

Шесть условий равновесия в векторной форме связывают (11.84) и внешние силы в узлах, которые статически эквивалентны заданной нагрузке, распределенной в плоскости элемента,

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u} - \Lambda, \quad \mathbf{F}^T = (X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3). \quad (11.86)$$

Конечные элементы объединяются при сложении условий их равновесия. Нумерация узлов должна гарантировать ленточную структуру получающейся большой системы уравнений. Матрицы надлежащим образом заполняются нулевыми элементами, и узловые перемещения находятся при решении системы линейных уравнений

$$(\mathbf{K}_I + \mathbf{K}_{II} + \mathbf{K}_{III} + \dots)\mathbf{u}_r = \mathbf{F}_r + \Lambda_r, \quad \mathbf{u}_r^T = (\mathbf{u}_I^T, \mathbf{u}_{II}^T, \mathbf{u}_{III}^T, \dots). \quad (11.87)$$

Геометрические граничные условия учтены в \mathbf{u}_r . Система эффективно решается методом Холецкого, в котором матрица коэффициентов раскладывается в произведение двух треугольных матриц.

11.5. Линеаризация нелинейных уравнений движения

Уравнения движения системы с n степенями свободы можно представить в виде системы $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, обозначая [см. (7.109)] $x_i = q_i, i = 1, \dots, n, \dot{x}_i = dq_i/dt, i = (n+1), \dots, 2n,$

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2n} a_{ik} x_k + \mu_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_{2n}). \quad (11.88)$$

Далее рассматриваются только колебательные системы, имеющие по крайней мере одно периодическое решение для свободного движения. Следовательно, в приближении гармонического движения по времени

$$x_k = A_k \sin(\omega t + \varepsilon_k) \equiv A \kappa_k \sin \phi_k, \quad \phi_k = \omega t + \varepsilon_k, \quad \kappa_k = A_k / A. \quad (11.89)$$

Подстановка этих формул в нелинейные функции f_i делает эти функции периодическими с периодом $\tau = 2\pi/\omega$; следуя правилам метода гармонического баланса, проведем разложение в ряд Фурье. Ограничимся основными гармониками, положив

$$f_i \approx a_i \cos \phi_1 + b_i \sin \phi_1. \quad (11.90)$$

Коэффициенты Фурье, по определению, суть проекции этих функций на основные гармоники, которые были выбраны как компоненты колебательного движения x_1 ,

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(A\kappa_1 \sin \phi_1, \dots, A\kappa_{2n} \sin \phi_{2n}) \cos \phi_1 d\phi_1,$$

$$b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(A\kappa_1 \sin \phi_1, \dots, A\kappa_{2n} \sin \phi_{2n}) \sin \phi_1 d\phi_1. \quad (11.91)$$

Во всех практических приложениях вектор состояния следует упорядочить так, чтобы движение x_1 отвечало “ведущей степени свободы”.

Подставляя принятое приближение в нелинейные уравнения (11.88) и сравнивая коэффициенты с соответствующими коэффициентами эквивалентных линейных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2n} (a_{ik}^* x_k + \bar{a}_{ik} x_k), \quad (11.92)$$

найдем

$$\bar{a}_{ik} = a_{ik}, \quad a_{ik}^* = 0, \quad \text{если } k \neq 1,$$

$$\bar{a}_{i1} = a_{i1} + \frac{\mu_i}{A\kappa_1} b_i, \quad a_{i1}^* = \frac{\mu_i}{\omega A\kappa_1} a_i. \quad (11.93)$$

(§) Линеаризация методом гармонического баланса

Особенно просто выглядит применение вышеизложенной процедуры к нелинейному осциллятору с одной степенью свободы. Свободное движение в общем виде описывается одним уравнением

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (11.94)$$

Подставляем сюда гармоническое приближение $x = A \cos \omega t$ и его производную $dx/dt = -A\omega \sin \omega t$ и находим коэффициенты Фурье

$$a = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t),$$

$$b = -\frac{1}{\pi A \omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t). \quad (11.95)$$

Эквивалентное линеаризованное уравнение получается в виде

$$\ddot{x} + b\dot{x} + ax = 0. \quad (11.96)$$

Коэффициенты a и b являются функциями амплитуды A , следовательно, линеаризованная система отражает характеристическое свойство нелинейных колебаний – зависимость периода свободных колебаний от амплитуды.

(§) Переходные колебания нелинейных систем

Приближенное решение можно найти методом Крылова-Боголюбова, в котором предполагается, что имеются медленно меняющиеся амплитуда и фаза. Линейное слагаемое в возвращающейся силе отделяется; проиллюстрируем метод на примере уравнения (11.94)

$$\ddot{x} + \omega^2 x + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (11.97)$$

В следующем приближенном решении амплитуда и фаза предполагаются зависящими от времени

$$x(t) = A(t) \cos \varphi(t), \quad \varphi(t) = \omega t + \varepsilon(t). \quad (11.98)$$

Скорость находим дифференцированием

$$\dot{x}(t) = \dot{A} \cos \varphi - (\omega + \dot{\varepsilon}) A \sin \varphi. \quad (11.99)$$

Основное предположение относительно преобразования уравнения к новым переменным A и ε состоит в том, что скорость должна иметь тот же вид, что и для линейной системы

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin \varphi. \quad (11.100)$$

Приравнивая два последних выражения, получим первое соотношение между амплитудой и фазой

$$\dot{A} \cos \varphi - \dot{\varepsilon} A \sin \varphi = 0. \quad (11.101)$$

Второе соотношение получается после подстановки приближений (11.98) и (11.100) в уравнение движения (11.97). Заметим, что ускорение аппроксимируется производной по времени от (11.100)

$$-\omega \dot{A} \sin \varphi - \dot{\varepsilon} \omega A \cos \varphi + f(A \cos \varphi, -\omega A \sin \varphi) = 0. \quad (11.102)$$

Полученные дифференциальные уравнения можно разрешить относительно производных и окончательно они образуют систему, аналогичную системе уравнений первого порядка, к которой сводится исходное уравнение движения,

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{\omega} f(A \cos \varphi, -\omega A \sin \varphi) \sin \varphi, \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{\omega A} f(A \cos \varphi, -\omega A \sin \varphi) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (11.103)$$

Так как амплитуда A и фаза ε изменяются медленно, то их можно приближенно считать постоянными на протяжении одного периода; интегрируя по этому периоду, получим два дифференциальных уравнения, которые по-прежнему нелинейны, но первое из них, для средней амплитуды $A(t)$, можно решить отдельно

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \varphi, -\omega A \sin \varphi) \sin \varphi \, d\varphi, \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \varphi, -\omega A \sin \varphi) \cos \varphi \, d\varphi. \end{aligned} \quad (11.104)$$

В качестве примера рассмотрим снова уравнение Дуффинга (11.16), которое обобщим, добавив нелинейное «турбулентное» сопротивление

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \beta x^3 + \alpha \dot{x}|\dot{x}| = 0. \quad (11.105)$$

Вычисление интегралов (11.104) дает усредненную систему уравнений

$$\dot{A} = -\frac{4}{3\pi} \alpha \omega A^2, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega} A^2. \quad (11.106)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим зависящую от времени (убывающую) амплитуду

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + (4\alpha/3\pi)A_0\omega t}. \quad (11.107)$$

Подставляя этот результат во второе дифференциальное уравнение (используется экспоненциальная функция), найдем зависимость фазы от времени

$$\varepsilon(t) = \frac{9}{32} \frac{\pi\beta}{\alpha\omega^2} A_0 \left(1 - \frac{1}{1 + (4\alpha/3\pi)A_0\omega t} \right). \quad (11.108)$$

Если пренебречь сопротивлением, $\alpha = 0$, то получим то же приближенное значение для собственной частоты, которое было найдено выше по правилу Галеркина, см. (11.20).

11.6. Численное интегрирование нелинейного уравнения движения

В инженерных приложениях обычно используется θ -метод Вильсона, так как он безусловно устойчив, линеен и применим к широкому классу уравнений. Реализация этого метода на компьютере требует только наличия эффективной процедуры решения системы линейных уравнений, например процедуры Холецкого, которая обычно уже имеется в блоке решения задач линейной упругости. Проиллюстрируем метод на примере нелинейной системы с одной степенью свободы. Уравнение (11.94) рассматривается для моментов времени t и $t + \Delta t$, и разность дает уравнение для приращений

$$m\Delta\ddot{x}(t) + r(t)\Delta\dot{x}(t) + k(t)\Delta x(t) = \Delta F(t). \quad (11.109)$$

Касательная жесткость определяется как производная от возвращающей силы

$$k(t) = \left. \frac{dF_S}{dx} \right|_t, \quad (11.110)$$

и аналогично вводится касательный коэффициент сопротивления

$$r(t) = \left. \frac{dF_D}{d\dot{x}} \right|_t. \quad (11.111)$$

Предполагается, что сила сопротивления есть нелинейная функция скорости, см. раздел 4.2.3. Для ускорения принимается линейная аппроксимация на расширенном интервале времени

$$\tau = \theta\Delta t, \quad \theta > 1,37, \quad (11.112)$$

при этом коэффициенты (11.109) считаются постоянными. Учитывая соотношение

$$\ddot{x}(t+s) = \ddot{x}(t) + \frac{\Delta\ddot{x}}{\tau}s, \quad 0 \leq s \leq \tau, \quad (11.113)$$

найдем конечные значения приращений скорости и перемещения, соответственно,

$$\hat{\Delta}\dot{x}(t+s) = \tau\ddot{x}(t) + \frac{\tau}{2}\hat{\Delta}\ddot{x} \quad , \quad \hat{\Delta}x(t) = \tau\dot{x}(t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{x}(t) + \frac{\tau^2}{6}\hat{\Delta}\ddot{x}(t). \quad (11.114)$$

Приращение перемещения считается независимой переменной и соотношение (11.109) становится квазистатическим

$$\hat{k}(t)\hat{\Delta}x(t) = \hat{\Delta}\hat{F}(t), \quad (11.115)$$

где

$$\hat{k}(t) = k(t) + \frac{6}{\tau^2}m + \frac{3}{\tau}r(t) \quad (11.116)$$

и

$$\hat{\Delta}\hat{F}(t) = \hat{\Delta}F(t) + m\left[\frac{6}{\tau}\dot{x}(t) + 3\ddot{x}(t)\right] + r(t)\left[3\dot{x}(t) + \frac{\tau}{2}\ddot{x}(t)\right]. \quad (11.117)$$

Выражая из (11.115) приращение координаты,

$$\hat{\Delta}x(t) = \hat{\Delta}\hat{F}(t) / \hat{k}(t), \quad (11.118)$$

найдем приращение ускорения

$$\hat{\Delta}\ddot{x}(t) = \frac{6}{\tau^2}\hat{\Delta}x(t) - \frac{6}{\tau}\dot{x}(t) - 3\ddot{x}(t). \quad (11.119)$$

Приращение ускорения на шаге Δt получаем линейной интерполяцией

$$\Delta\ddot{x}(t) = \frac{1}{\theta}\hat{\Delta}\ddot{x}(t). \quad (11.120)$$

С помощью (11.120) находим приращения скорости и перемещения

$$\Delta\dot{x}(t) = \Delta t\ddot{x}(t) + \frac{\Delta t}{2}\Delta\ddot{x}(t) \quad , \quad \Delta x(t) = \Delta t\dot{x}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{x}(t) + \frac{\tau^2}{6}\Delta\ddot{x}(t). \quad (11.121)$$

Начальное механическое состояние для следующего шага по времени с достаточной точностью определяется формулами

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x(t) \quad , \quad \dot{x}(t+\Delta t) = \dot{x}(t) + \Delta\dot{x}(t). \quad (11.122)$$

Ускорение следует определить из модифицированного уравнения движения

$$\ddot{x}(t+\Delta t) = \frac{1}{m}[F(t+\Delta t) - F_D(t+\Delta t) - F_S(t+\Delta t)], \quad (11.123)$$

для того, чтобы избежать накопления ошибок, вносимых, например, использованием касательных жесткостей. Смотрите также

- Clough R. W. and Penzien J. Dynamics of Structures. New York, McGraw-Hill, 1975. Имеется русский перевод: Клаф Р.В., Пензиен Д. Динамика сооружений. Москва, Стройиздат, 1979.

11.7. Упражнения А 11.1 – А 11.12 и решения

А 11.1: Рассмотрим изгибные колебания линейно упругой однородной балки длины $2l$, массы m и постоянной изгибной жесткости $B = EJ$. Балка симметрично укреплена на шарнирных опорах, находящихся на расстоянии $2\lambda l \leq 2l$. Найти связь между отношением длин λ и основной частотой свободных симметричных колебаний.

Решение: Удобно применить приближение Ритца; для прогиба достаточно использовать одно слагаемое $w^*(x, t) = q(t)\varphi(x)$. В качестве функции формы выбираем $\varphi(x) = 1 - (x/\lambda l)^2$. Она не удовлетворяет одному из динамических граничных условий $w''(x=l) = 0$. Кинетическая и потенциальная энергии равны, соответственно,

$$T = 2 \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{w}^{*2} A dx = \frac{m^* \dot{q}^2}{2}, \quad V = U = 2 \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{k^* q^2}{2},$$

$$m^* = m \left(1 - \frac{2}{3\lambda^2} + \frac{1}{5\lambda^4} \right), \quad k^* = \frac{64B}{\lambda^4 (2l)^3}.$$

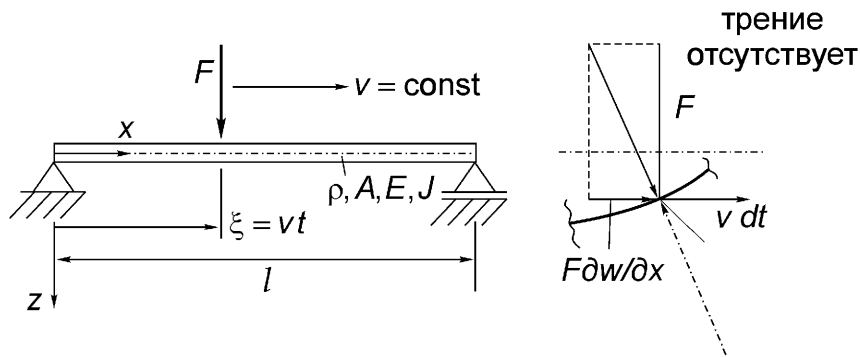
Уравнение Лагранжа имеет вид (11.29), и квадрат частоты свободных колебаний приближенно равен

$$\omega_0^2 = k^*/m^* = \frac{320B/(2l)^3}{m(5\lambda^4 - 10\lambda^2/3 + 1)}.$$

Взяв крайние значения отношения длин и сравнив результаты с точными значениями частот, которые дает теория балок Бернулли-Эйлера, можно получить представление о качестве приближения

$$\lambda = 1: \quad \omega_0 / \omega_{exact} = \frac{10,97}{\pi^2} > 1, \quad \lambda \rightarrow 0: \quad \omega_0 / \omega_{exact} = \frac{17,89}{14,06} > 1.$$

А 11.2: Точка приложения (например, небольшое колесо) постоянной силы F движется с постоянной скоростью v вдоль шарнирно опертой однородной балки длины l , массы m и изгибной жесткости $B = EJ$, см. рис. А 11.2. Эту задачу можно рассматривать как простейшую модель движения автомобиля по одно-

Рис. А 11.2. Движущаяся поперечная сила $F = \text{const}$.

пролетному мосту. Нестационарная поперечная нагрузка вызывает вынужденные изгибные колебания. Построить систему с несколькими степенями свободы, используя функции формы $\varphi_j = \sin j\pi x/l$, которые в случае однородной балки суть ортогональные собственные функции. Найти первую критическую скорость, при которой возбуждается первая резонансная мода. В пределе при $v \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ получить в качестве побочного результата быстро сходящийся ряд Фурье для статической функции влияния сосредоточенной силы [см. (6.78) и (6.79)].

Решение: Приближение Ритца в виде конечного ряда

$$w^*(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \varphi_j(x), \quad \varphi_j = \sin j\pi x/l$$

удовлетворяет граничным условиям; кинетическая и потенциальная энергии выражаются следующими интегралами:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}^*{}^2 \rho A dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j^* \dot{q}_j^2, \quad m_j^* = m/2, \quad m = \rho A l,$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l B \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_j^* q_j^2, \quad k_j^* = j^4 \pi^4 B / 2l^3, \quad B = EJ.$$

Часть обобщенных сил Q_j , соответствующая движущейся силе F , определяется градиентом зависящего от времени потенциала $W_p = -F w^*(x = \xi = vt, t)$ или, согласно определению, находится сравнением коэффициентов в выражении для виртуальной работы

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = F \delta w^*, \quad \delta w^* = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\xi) \delta q_j \Rightarrow Q_j = F \varphi_j(\xi) = F \sin v_j t, \quad v_j = j \frac{\pi v}{l}.$$

Заменяющая система состоит из n несвязанных линейных осцилляторов, подвергающихся гармоническому по времени возбуждению при $t > 0$. Уравнения Лагранжа для этих осцилляторов имеют вид

$$\ddot{q}_j + \omega_j^{*2} q_j = \frac{F}{m_j^*} \sin v_j t, \quad \omega_j^{*2} = k_j^*/m_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Так как движение начинается из состояния покоя, то $q_j(0) = dq_j/dt|_{t=0} = 0$ в момент, когда нагрузка начинает действовать на балку при $x = 0$; соответствующие решения имеют вид

$$q_j(t) = \frac{F}{k_j^{(eff)}} \left(\sin v_j t - \frac{v_j}{\omega_j^*} \sin \omega_j^* t \right), \quad k_j^{(eff)} = m_j^* (\omega_j^{*2} - v_j^2) = k_j^* \left(1 - \frac{mv^2 l}{j^2 \pi^2 B} \right).$$

Эффективная изгибная жесткость равна жесткости балки при предварительном сжатии, $N = -mv^2/l$, см. (11.51). На рис. А 11.2 показана результирующая сила при контакте без трения; наблюдается эффект уменьшения эффективной изгибной жесткости при движении поперечной нагрузки. Наименьшая резонансная нагрузка соответствует $v_1 = \omega_1^*$ и критическая скорость равна

$$v_c = \sqrt{\pi B/ml}, \quad \frac{2\pi}{\omega_1^*} = \frac{2l}{v_c}.$$

С помощью правила Лопиталья можно найти резонансный отклик $q_1(t)$ и определить его максимум. Заметим, что прогиб в первой моде максимален, когда сила покидает балку, $\xi = l, t_c = l/v$; амплитуда равна

$$q_1(t_c) = \frac{Fl^3}{\pi^3 B}.$$

Работа поперечной силы F в этом критическом промежутке времени должна быть равна нулю. Энергия колеблющейся балки определяется работой отрицательной продольной компоненты реакции, действующей в точке ξ [см. рис. А 11.2, где показан изогнутый элемент балки, $F(\partial w/\partial x)|_{x=\xi}$]

$$U(t) = W(t) = \int_0^{t_c} \left(F \frac{\partial w}{\partial x} \right) v dt.$$

Дальнейшие детали см. в работе

- Lee E. H. On a Paradox in Beam Vibration Theory. Quaterly Applied Mathematics, 10, 1952, p. 290.

Максимум первой моды прогиба в середине балки можно сравнить с максимальным статическим прогибом. Последний отвечает положению силы F в середине балки и поэтому равен $(q_1)_{stat} = Fl^3/48B$. Отношение можно назвать динамическим коэффициентом увеличения первой моды $\chi_1 = 48/\pi^3 = 1,55$.

Суммарный прогиб и инерционная нагрузка аппроксимируются конечными рядами

$$w^*(x,t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \varphi_j(x) \quad , \quad \rho A \ddot{w}^*(x,t) = -\rho A \sum_{j=1}^n \omega_j^{*2} q_j(t) \varphi_j(x).$$

При сохранении времени постоянным как перерезывающая сила, так и изгибающий момент находятся методами статики с учетом распределенной поперечной инерционной нагрузки $p(x,t) = -\rho A (\partial^2 w^* / \partial t^2)$.

Переходя в w^* к пределу при $v \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$, но при условии $\lim_{v \rightarrow 0, t \rightarrow \infty} (\xi = vt) \neq 0$, получим статическую функцию влияния сосредоточенной силы [бесконечный ряд ($n \rightarrow \infty$) сходится; см. (6.78) и (6.79)]

$$\bar{w}_S(x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F}{k_j^*} \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{j\pi \xi}{l}.$$

А 11.3: На однопролетную балку, изображенную на рис. А 11.2, действует зависящая от времени поперечная сила $F = F(t)$; при этом $\xi = \text{const}$. Найти динамический прогиб $w(x, \xi, t)$, приняв то же приближение Ритца, что и в упражнении А 11.2. Рассмотреть частный случай гармонической по времени силы $F(t) = F_0 \sin vt$. Полагая амплитуду силы равной единице, $F_0 = 1$, получить приближенное выражение в виде конечного ряда для динамической функции Грина однородной балки. Найти механический импеданс – отношение амплитуды силы к амплитуде скорости деформации в точке приложения силы.

Решение: Жесткости и массы, соответствующие несвязанным осцилляторам (модам), те же, что и в упражнении А 11.2. Обобщенные силы формально имеют тот же вид $Q_j = F(t) \varphi_j(\xi)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Уравнения Лагранжа тогда записываются в форме

$$\ddot{q}_j + \omega_j^{*2} q_j = \frac{F(t)}{m_j^*} \sin \frac{j\pi \xi}{l} \quad , \quad \omega_j^{*2} = k_j^* / m_j^* \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Множитель при $F(t)$ называется коэффициентом участия. Гармоническое по времени возбуждение приводит к вынужденным колебаниям [см. (7.87); в (7.94) следует положить $\zeta = 0$]

$$q_j(t) = a_j \sin vt \quad , \quad a_j = \frac{F_0}{m_j^*(\omega_j^{*2} - v^2)} \sin \frac{j\pi\xi}{l} .$$

Фазы некоторых мод колебаний совпадают с фазой силы, фазы других противоположны. Полагая $F_0 = 1$, получим с помощью суперпозиции функцию Грина для прогиба

$$\bar{w}^*(x, \xi, t) = a(x, \xi) \sin vt \quad , \quad a(x, \xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{j\pi \xi}{l}}{m_j^*(\omega_j^{*2} - v^2)} .$$

На резонансных частотах $v = \omega_j^*$ амплитуда обращается в бесконечность, этот нефизичный результат можно исправить, добавляя в знаменатели небольшие сопротивления. Механический импеданс балки при $x = \xi$ равен

$$Z(\xi) = \frac{F_0}{va(\xi, \xi)} = F_0 \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{v \left(\sin \frac{j\pi \xi}{l} \right)^2}{m_j^*(\omega_j^{*2} - v^2)} \right\}^{-1} .$$

На резонансных частотах импеданс обращается в нуль. Обратная величина – адмиттанс – обращается в бесконечность.

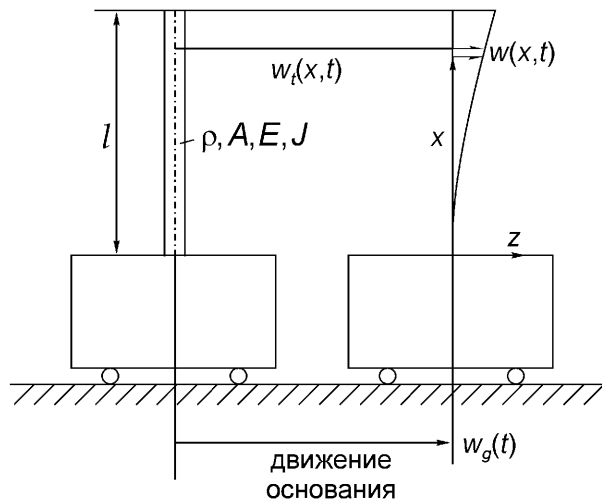


Рис. А 11.4. Конструкция, моделирующая башню, основание которой движется при землетрясении.

А 11.4: Упругая башня на жестком основании моделируется однородным кронштейном, показанным на рис. А 11.4. Основание движется по заданному закону $w_g(t)$, например, при землетрясении. Используя приближение Ритца с одним слагаемым, получить уравнение движения кронштейна в рамках балочной теории Бернулли-Эйлера.

Решение: Суммарное смещение элемента балки равно $w_t = w_g(t) + w(x, t)$. В выражение для кинетической энергии балки входит абсолютная скорость,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}_t^2 \rho A dx = \frac{1}{2} m \dot{w}_g^2 + \dot{w}_g \int_0^l \dot{w} \rho A dx + \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}^2 \rho A dx.$$

Предполагая, что основную роль играет возбуждение основной моды, используем приближение Ритца с одним слагаемым $w^*(x, t) = q(t)\varphi(x)$, $\varphi(l) = 1$, учитывающим кинематические граничные условия на защемленном конце, $x = 0 : w = 0, \partial w / \partial x = 0$. Качество приближения улучшится, если будут учтены также динамические граничные условия на свободном конце $x = l : \partial^2 w / \partial x^2 = 0, \partial^3 w / \partial x^3 = 0$. Подставляя приближение в выражение для кинетической энергии, найдем

$$T = \frac{1}{2} m \dot{w}_g^2 + \dot{w}_g \dot{q} \int_0^l \varphi(x) \rho A dx + \frac{1}{2} \dot{q}^2 \int_0^l \varphi^2(x) \rho A dx.$$

Так как движение основания задано, то внешние силы не вносят вклад в виртуальную работу; остающийся упругий потенциал равен

$$V = U = \frac{1}{2} q^2 \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dx = \frac{k^* q^2}{2}.$$

Уравнение Лагранжа получаем, вычисляя соответствующие производные,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = L m a_g + m^* \ddot{q}, \quad a_g = \ddot{w}_g(t), \quad L = \frac{1}{m} \int_0^l \varphi(x) \rho A dx,$$

$$m = \int_0^l \rho A dx, \quad m^* = \int_0^l \varphi^2(x) \rho A dx,$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = k^* q, \quad k^* = \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Это уравнение совпадает с уравнением, описывающим осциллятор, свободный конец пружины которого движется по заданному закону,

$$m^* \ddot{q} + k^* q = -L m a_g.$$

Решение существенно улучшается, если взять приближение Ритца только для динамической части $w_D^* = (q - q_S) \varphi(x)$, $q_S = -L \left(m/k^* \right) a_g$ и добавить квазистатический прогиб $w_S(x, t)$, обусловленный действием распределенных сил инерции при движении жесткого основания с ускорением a_g ,

$$w(x, t) = w_S + w_D^*.$$

Величину $w_S(x, t)$ можно выразить через статическую функцию влияния кронштейна.

Равнодействующие динамических напряжений вычисляются методами статики при фиксированном времени с учетом плотности распределенной поперечной нагрузки $p(x, t) = -\rho A [a_g(t) + \partial^2 w(x, t) / \partial t^2]$.

Подходящей функцией формы будет $\varphi(x) = 1 - \cos \pi x / 2l$, тогда остается только ошибочная перерезывающая сила на свободном конце кронштейна. Так как $\rho A = \text{const}$, $m = \rho A l$ и $B = EJ = \text{const}$, то эффективная масса $m^* = 0,227 m$, эффективная жесткость $k^* = \pi^4 B / 32 l^3$ и коэффициент участия для первой моды $L = 0,3634$. Квазистатический прогиб легко вычисляется:

$$w_S(x, t) = -\frac{m a_g(t) l^3}{2B} \frac{x^2}{2l^2} \left(1 - \frac{2x}{3l} + \frac{x^2}{6l^2} \right).$$

А 11.5: На изображенную на рис. А 11.5 однопролетную, шарнирно опертую балку действует зависящий от времени температурный момент $m_\theta(x, t)$, например, при температурном ударе. Так как граничные условия неоднородны, то решение распадается на квазистатическую и динамическую части. Найти уравнения движения, применив приближение Ритца с функциями формы $\varphi_j(x) = \sin j\pi x / l$ к динамической части.

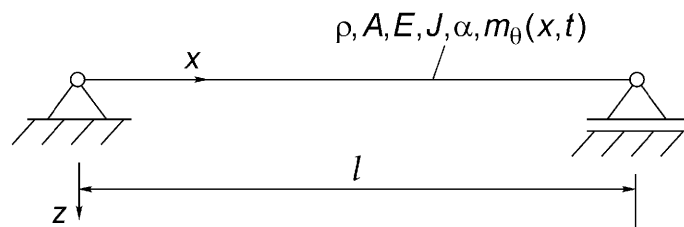


Рис. А 11.5. Ударная температурная нагрузка.

Решение: Квазистатический температурный прогиб получаем интегрированием (6.36) при постоянном времени

$$\frac{\partial^2 w_S}{\partial x^2} = -\alpha m_\theta.$$

Полагая в (7.147) поперечную нагрузку равной нулю, найдем для остающейся динамической части дифференциальное уравнение в частных производных, $B = EJ = \text{const}$,

$$B \frac{\partial^4 w_D}{\partial x^4} + \rho A (\ddot{w}_D + \ddot{w}_S) = 0.$$

Граничные условия здесь однородны, $w_D = \partial^2 w_D / \partial x^2 = 0$ при $x=0$ и $x=l$. Применив приближение Ритца порядка n (функция формы ортогональны), получим по правилу Галеркина

$$w_D^*(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \varphi_j(x), \quad \varphi_j(x) = \sin j\pi x/l \Rightarrow \ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\ddot{u}_j, \quad \omega_j^2 = k_j/m_j,$$

$$k_j = B j^4 \pi^4 / 2l^3, \quad m_j = \rho A l / 2, \quad \ddot{u}_j = \frac{2}{l} \int_0^l \ddot{w}_S \sin(j\pi x/l) dx, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Динамические реакции и равнодействующие напряжений определяются при статическом рассмотрении для поперечной нагрузки $p(x, t) = -\rho A \cdot \partial^2 (w_S + w_D^*) / \partial t^2$. В данном случае дифференцирование приближения Ритца по осевой координате x даст тот же результат; это встречается редко.

А 11.6: Лопасты турбины компрессора или пропеллера представляют собой стержни, которые, вообще говоря, сильно изогнуты и имеют переменное сечение (по гидродинамическим причинам). Если ось стержня приблизительно прямолинейна, то в первом приближении крутильные колебания не зависят от исходных углов поворота $\chi_0(x)$ сечения. Поэтому частоты и формы свободных линейных крутильных колебаний очень близки к соответствующим характеристикам классических стержней без поворотов сечения. Однако такие повороты существенно влияют на малые амплитуды изгибных колебаний, см. рис. А 11.6. Смотрите также

- Траупель В. Тепловые турбомашини. М.-Л., Госэнергоиздат, 1961-1963.
- Traupel W. Thermische Turbomaschinen. Berlin – Heidelberg – New York, Springer-Verlag, 1968, Band 2 (Lit. – Zitat Nr. [26]).

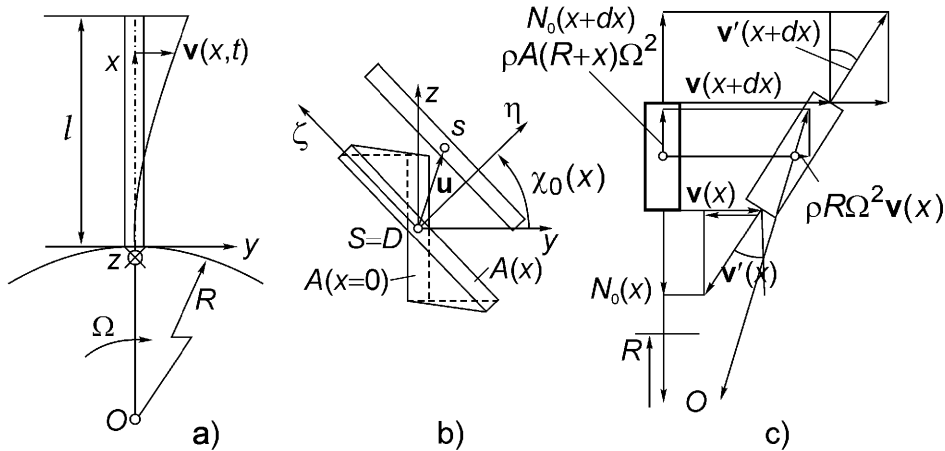


Рис. А 11.6. (а) Модель лопасти в виде кронштейна. (б) Поворачивающиеся сечения. Главные оси инерции обозначены η, ζ , оси системы отсчета – y, z . (с) Деформированный элемент; указана продольная сила $N(x)$.

Предполагая, что центр масс S и центр кручения D сечения (переменной) площади $A(x)$ совпадают, получим дифференциальное уравнение изгибных колебаний. Колебания рассматриваются при неподвижном роторе; в приближении второго порядка следует учесть влияние угловой скорости Ω стационарного вращения. Ось недеформированной балки с поворачивающимся сечением предполагаем прямолинейной. Получить по правилу Галеркина наименьшую собственную частоту основной изгибной моды колебаний вокруг оси z , используя приближение Ритца с одним слагаемым $v^*(x, t) = q(t)\varphi(x)$; исходным поворотом сечений здесь пренебречь.

Решение: Ось балки считаем нерастяжимой. В каждой точке x кривой изгиб можно заменить двумя главными (малыми) изгибами, и закон Гука дает линейную связь между линеаризованными главными кривизнами и главными изгибающими моментами (см. рис. А 11.6)

$$M_\eta = -EJ_\eta w'' \quad , \quad M_\zeta = EJ_\zeta v'' \quad , \quad ()' = \frac{\partial}{\partial x}.$$

В матричных обозначениях

$$\begin{pmatrix} M_\eta \\ M_\zeta \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} J_\eta & 0 \\ 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w'' \\ v'' \end{pmatrix}.$$

Любой вектор можно спроектировать на оси повернутых систем координат. Например, радиус-вектор точки в плоскости $x = \text{const}$ представляется в виде

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \chi_0 & \sin \chi_0 \\ -\sin \chi_0 & \cos \chi_0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты вектора \mathbf{M} изгибающего момента преобразуются посредством той же матрицы поворота

$$\begin{pmatrix} M_\eta \\ M_\zeta \end{pmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} M_y \\ M_z \end{pmatrix}.$$

Аналогично линейризованные компоненты вектора кривизны изогнутой оси балки $d\mathbf{e}_t/ds$ (см. раздел 1.1.3) преобразуются по закону

$$\begin{pmatrix} -w'' \\ v'' \end{pmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} -\bar{w}'' \\ \bar{v}'' \end{pmatrix}.$$

Учитывая выписанные выше преобразования, умножая главные изгибающие моменты на транспонированную матрицу поворота и принимая во внимание тензорные преобразования моментов инерции [см. (2.123); отметим различие в знаке внедиагонального элемента тензора], получим линейное векторное преобразование косоугольного изгиба, выраженное в глобальных координатах y и z ,

$$\begin{pmatrix} M_y \\ M_z \end{pmatrix} = E\mathbf{D}^T \cdot \begin{pmatrix} J_\eta & 0 \\ 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D} \begin{pmatrix} -\bar{w}'' \\ \bar{v}'' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^T \cdot \begin{pmatrix} J_\eta & 0 \\ 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} J_y & J_{yz} \\ J_{yz} & J_z \end{pmatrix}.$$

Заметим, что это преобразование подобия. Эти линейные и связанные соотношения имеют определенное практическое значение

$$M_y = -EJ_y \bar{w}'' + EJ_{yz} \bar{v}'' \quad , \quad M_z = EJ_z \bar{v}'' - EJ_{yz} \bar{w}'' . \quad (a)$$

Законы изменения количества движения и момента количества движения элемента дают, после исключения перерезывающей силы [см. (2.150) и (2.152)],

$$M_y'' = -q_z \quad , \quad M_z'' = q_y . \quad (b)$$

Подразумевается, что поперечная сила на единицу длины включает инерционную нагрузку. Объединяя (a) и (b) [и сокращая временной множитель $\exp(i\omega t)$], получим уравнения свободного движения невращающейся лопасти

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ_z \bar{v}'' - EJ_{yz} \bar{w}'') - \rho A \omega^2 \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ_y \bar{w}'' - EJ_{yz} \bar{v}'') - \rho A \omega^2 \bar{w} = 0 . \quad (c)$$

Учет стационарного вращения производится добавлением продольной силы $N_0(x)$. В соответствии с теорией упругости второго порядка эта сила вносит вклад в перерезывающую силу в направлениях y и z ,

$$dQ_y = N(x+dx)\bar{v}'(x+dx) - N(x)\bar{v}'(x) = [N'(x)\bar{v}'(x) + N(x)\bar{v}''(x)] dx,$$

$$dQ_z = N(x+dx)\bar{w}'(x+dx) - N(x)\bar{w}'(x) = [N'(x)\bar{w}'(x) + N(x)\bar{w}''(x)] dx,$$

где $N \cong N_0(x)$.

Далее, радиальная центробежная сила $q_x = \rho A(R+x)\Omega^2$ вносит вклад в поперечную нагрузку q_y (но не в q_z) [см. рис. А 11.6(с)]

$$q_y = \rho A\omega^2\bar{v} + \rho A(R+x)\Omega^2 \frac{\bar{v}}{R+x} = \rho A(\omega^2 + \Omega^2)\bar{v}.$$

Следовательно, уравнения (b) заменяются на

$$M_z'' = [q_y + N'\bar{v}' + N\bar{v}''], \quad M_y'' = -[q_z + N'\bar{w}' + N\bar{w}''] . \quad (d)$$

В уравнения (с) добавляются новые слагаемые; с учетом того, что $A = \text{const}$, $N_0 = \rho A(l-x)(2R+l+x)\Omega^2/2$ эти уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ_z\bar{v}'' - EJ_{yz}\bar{w}'') - \rho A \frac{\Omega^2}{2} (l-x)(2R+l+x) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} +$$

$$+ \rho A\Omega^2(R+x) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \rho A(\omega^2 + \Omega^2)\bar{v} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ_y\bar{w}'' - EJ_{yz}\bar{v}'') - \rho A \frac{\Omega^2}{2} (l-x)(2R+l+x) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} +$$

$$+ \rho A\Omega^2(R+x) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \rho A\omega^2 \bar{w} = 0. \quad (e)$$

Основная мода $v_0(x)$ свободных колебаний определяется из несвязанных уравнений, записанных с достаточной точностью (далее предполагается, что $EJ_z = \text{const}$),

$$EJ_z \frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4} - \rho A \frac{\Omega^2}{2} (l-x)(2R+l+x) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} +$$

$$+ \rho A\Omega^2(R+x) \frac{\partial v_0}{\partial x} - \rho A(\omega^2 + \Omega^2)v_0 = 0.$$

Функцию формы выберем похожей на функцию статического прогиба под действием постоянной поперечной нагрузки (см. упражнение А 11.4)

$$v_0 = a\varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \left(6 - 4 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Правило Галеркина, то есть условие ортогональности ошибки и функции формы при $a \neq 0$, дает приближенное значение основной частоты свободных колебаний

$$\omega^* = \omega_0^* \left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \left(0,173 + 1,556 \frac{R}{l} \right) \right]^{1/2},$$

где $\omega_0^* = 3,530 \sqrt{EJ_z/ml^2}$, «точно» $\omega_0 = 3,516 \sqrt{EJ_z/ml^2}$. Здесь ω_0 – частота, соответствующая неподвижному ротору.

А 11.7: К тонкой прямоугольной пластине с шарнирно опертыми краями приложена чисто сдвиговая нагрузка (см., например, упражнение А 2.5); размеры пластины $L \times B$. Найти критическую выпучивающую нагрузку с помощью следующего приближения Ритца для прогиба

$$w^*(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{B}.$$

Решение: Функции формы удовлетворяют всем граничным условиям на краях пластины $x=0$ и $x=L$ и $y=0$ и $y=B$. Используя линеаризованные уравнения Кармана с нагрузкой $n_{xy} = -T = \text{const}$ в плоскости пластины, получим по правилу Галеркина систему линейных уравнений

$$K\Delta\Delta w + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad D\{w^*\} = p^* \Rightarrow$$

$$\pi^4 K \frac{BL}{4} \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{B^2} \right)^2 A_{mn} - 8T \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N A_{kj} \frac{mnkj}{(k^2 - m^2)(j^2 - n^2)} = 0.$$

Индексы k и j следует выбрать так, чтобы числа $(k+m)$ и $(j+n)$ были нечетными. Приравнявая нулю определитель системы, найдем приближенное значение критической сдвиговой нагрузки,

$$T_{crit} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi^2 K}{B^2} \left(5,34 + 4/\alpha^2 \right), \quad \alpha \geq 1 \\ \frac{\pi^2 K}{B^2} \left(4 + 5,34/\alpha^2 \right), \quad \alpha \leq 1 \end{array} \right\}, \quad \alpha = L/B.$$

Критическая сила из упражнения А 2.5 по отношению к выпучиванию пластины выражается тогда формулой $F_{crit} = BT_{crit}$. Предполагается, что краевые балки сохраняют устойчивость.

А 11.8: Найти коэффициент критической нагрузки для шарнирно опертой круглой пластины радиуса R и постоянной изгибной жесткости K . К пластине в ее плоскости приложена центрально-симметричная сжимающая нагрузка $n_r(r) = \left[-(\pi^2 K/R^2) \cos(\pi r/2R) \right]$. В качестве приближения Ритца для основной моды выпучивания взять $w^*(r) = [q_1 \cos(\pi r/2R)]$ и применить обобщенное правило Галеркина. Ошибка момента на краю $m_r^*(R) = \pi q_1 \nu K/2R$ нарушает однородность динамического граничного условия.

Решение: Применим уравнение (11.8) и найдем ошибку $p^*(r)$ в дополнение к $m_r^*(R)$

$$\int_0^R p^* \varphi 2\pi r dr - \int_0^{2\pi} m_r^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} R d\theta = 0, \quad \varphi = \cos \pi r/2R, \quad p^* = K \Delta \Delta w^* - \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r n_r \frac{\partial w^*}{\partial r} \right).$$

Преобразуя надлежащим образом разность расходящихся интегралов и учитывая определение постоянной Эйлера C , получим конечное значение и найдем приближенное выражение для коэффициента критической нагрузки в виде

$$\lambda_c = 9 \left[2\nu + (\pi^2 - 4)/8 + C + \ln \pi - \text{Ci}(\pi) \right] / 4(3\pi - 4) \equiv 0,8295\nu + 0,9878,$$

$$\text{Ci}(\pi) = - \int_0^{\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$

А 11.9: К упругой защемленной пластине в ее плоскости приложена постоянная нагрузка, см. рис. А 11.9. Нагрузка приводит к выпучиванию пластины. Найти прогиб в центре пластины, выбирая его в качестве обобщенной координаты q_1 в приближении Ритца для прогиба $w^*(r) = q_1 (1 - r^2/a^2)^2$. Следует применить правило Галеркина к нелинейным уравнениям Кармана.

Замечание: Если учесть отсутствие поперечной нагрузки и центральную симметрию, то в полярных координатах уравнения Кармана принимают вид

$$K \frac{d}{dr} (\Delta w) = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \frac{dw}{dr}, \quad \frac{d}{dr} (\Delta F) = - \frac{Eh}{2r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \Delta F = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right).$$

Они имеют третий порядок и, следовательно, более удобны для интегрирования, чем (5.30 а, б). Смотрите

- Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. Москва, ГИТТЛ, 1956.

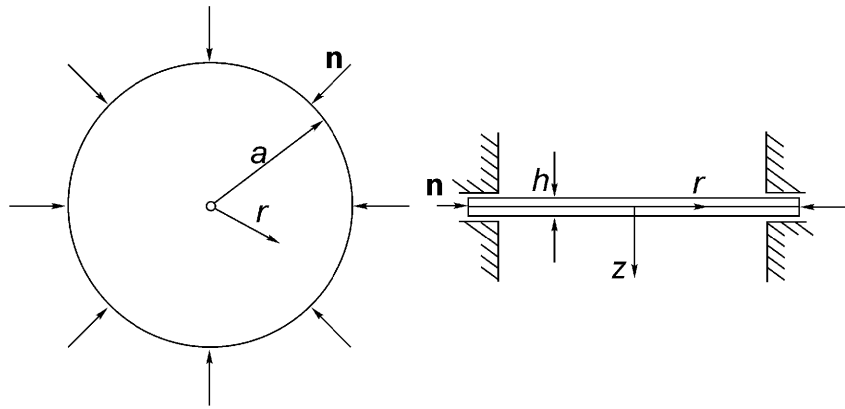


Рис. А 11.9. Недеформированная защемленная круглая пластина при постоянном радиальном сдавливании.

Решение: Подставим приближение Ритца во второе уравнение Кармана. После интегрирования, с учетом граничных условий и осевой симметрии, найдем

$$\frac{dF^*}{dr} = \frac{Ehq_1^2}{6a} \left(\frac{3r}{a} - \frac{6r^3}{a^3} + \frac{4r^5}{a^5} - \frac{r^7}{a^7} \right) - \bar{n}h,$$

$$r=0: \frac{dF}{dr} = 0 \quad , \quad r=a: \quad n_r = \frac{1}{a} \frac{dF}{dr} = -\bar{n}.$$

Теперь оба приближения подставим в первое уравнение Кармана. Кинематические граничные условия при $r=a$ ($w^* = dw^*/dr = 0$) выполнены, и правило Галеркина дает кубическое уравнение

$$\left[\left(\frac{8K}{3} - \frac{\bar{n}a^2}{6} \right) + \frac{Eh}{28} q_1^2 \right] q_1 = 0.$$

Тривиальный корень соответствует положению без прогиба $q_1 = 0$. Если перейти к пределу $q_1 \rightarrow 0$ и приравнять нулю выражение в круглых скобках, то получим критическую выпучивающую нагрузку $n_c^* = 16K/a^2$; ее «точное» значение равно $n_c = 14,68K/a^2 \approx 0,92n_c^*$. Прогиб в центре пластины при небольшом превышении критической нагрузки найдем, приравняв нулю выражение в квадратных скобках (знак определяется начальной деформацией),

$$q_1 = \pm 2,16a \sqrt{(\bar{n} - n_c)/Eh} = 0 \quad , \quad \bar{n} > n_c.$$

А 11.10: На пологую цилиндрическую оболочку бесконечной длины с шарнирно опертыми краями действует равномерно распределенное радиальное давление $p_r(t)$, см. рис. А 11.10. Рассмотреть вынужденные колебания, принимая во

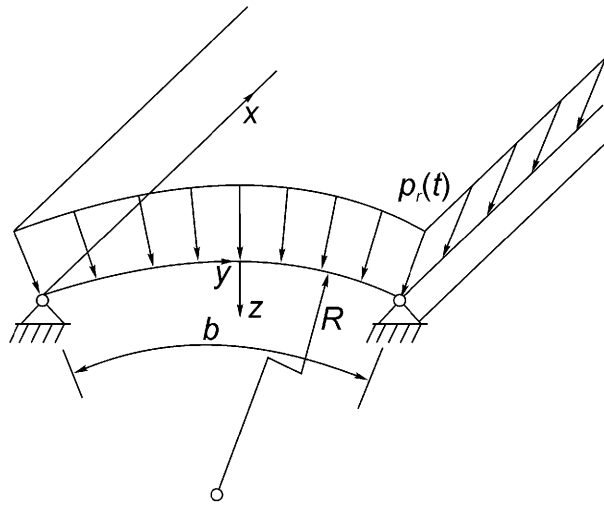


Рис. А 11.10. Вынужденные колебания длинной полой цилиндрической оболочки.

внимание существенные геометрические нелинейности; использовать приближение Ритца для прогиба с одним слагаемым $w^*(x, t) = [q_1(t) \sin(\pi y/b)]$. Изгибная жесткость K и жесткость на растяжение Eh заданы.

Замечание: Нелинейные уравнения Кармана можно обобщить, включив небольшие начальные кривизны прямоугольной пластины. Если имеется небольшая начальная цилиндрическая деформация пластины с кривизной $1/R$, то см.:

- Marguerre K. Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs. Berlin, Springer-Verlag, 1950, S. 234.

$$K\Delta\Delta w = p + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\Delta\Delta F = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right].$$

Криволинейная координата y отсчитывается вдоль дуги окружности полой цилиндрической оболочки и распределение давления p на пластину заменяется на распределение радиального давления p_r .

Решение: Все величины в этой задаче не зависят от продольной координаты x , поэтому второе уравнение Кармана является однородным. Пренебрежем касательной к поверхности составляющей сил инерции.

Мембранная сила n_y в первом уравнении не зависит от y , см. (2.98). Ее значение определяется из геометрических граничных условий на неподвижных опорах; из этих условий следует условие на серединной поверхности

$$\int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0.$$

Учитывая нелинейное геометрическое соотношение $-\partial v/\partial y = -\varepsilon_y - w/R + (1/2)(\partial w/\partial x)^2$, закон Гука $\varepsilon_y = n_y(1-\nu^2)/Eh$, $\varepsilon_x \equiv 0$ и подставляя приближение Ритца в последнее соотношение, найдем приближенное значение мембранной силы

$$n_y^* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\pi^4}{4} \frac{q_1^2}{b^2} - \frac{2}{\pi} \frac{q_1}{R} \right).$$

Далее применим правило Галеркина к первому уравнению Кармана, в котором сила инерции $-\rho h \partial^2 w/\partial t^2$ складывается с $p_r(t)$. В результате интегрирования по длине дуги b получим уравнение колебаний с несимметричной возвращающей силой

$$\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 + \alpha q_1^2 + \beta q_1^3 = \frac{4}{\pi \rho h} p_r(t), \quad \omega^2 = \frac{\pi^4 K}{\rho h b^4} \left(1 + \frac{96 b^4}{\pi^6 R^2 h^2} \right),$$

$$\alpha = -\frac{3\pi E}{(1-\nu^2) \rho R b^2}, \quad \beta = \frac{\pi^4 E}{4(1-\nu^2) \rho b^4}.$$

В статическом случае для центрального прогиба q_1 получается кубическое уравнение. Из него следует, что в полой арке может происходить прощелкивание, см. раздел 9.1.3. Равнодействующие динамических напряжений находятся методами статики при постоянном времени с учетом распределенной инерционной нагрузки $p_D(y, t) = \left[-\rho h (d^2 q_1/dt^2) \sin(\pi y/b) \right]$. Ускорение выражается через оставшиеся слагаемые в написанном выше уравнении движения. Это уравнение нелинейно, поэтому $q_1(t)$ может быть найдено только численно каким-либо приближенным методом (например, с помощью правила Галеркина).

А 11.11: Найти формы и частоты главных линейных колебаний системы с несколькими степенями свободы иным, нежели в разделе 7.4.9 методом, – с помощью матричных итераций. Этот метод первоначально был предложен А. Стодолой.

Замечание: Проблему собственных значений в матричной форме [см. (10.50b)] можно представить как статическую с учетом инерционной нагрузки. Обозначим через \mathbf{a} вектор амплитуды [см. (3.46)], тогда:

$$\frac{1}{\omega^2} \mathbf{a} = \mathbf{f} \mathbf{m} \mathbf{a} \quad , \quad \mathbf{f} = \mathbf{k}^{-1}.$$

Произведение $\mathbf{d} = \mathbf{f} \mathbf{m}$ есть динамическая матрица; она вообще говоря, несимметрична. Основная мода находится с помощью итераций. Обозначим начальное приближение через $\mathbf{a}_1^{(0)}$; обычно все его компоненты выбираются равными единице.

Любой вектор можно разложить по ортонормированным собственным векторам

$$\mathbf{a}_1^{(0)} = \sum_{k=1}^n c_k^{(0)} \phi_k.$$

Последующее умножение на \mathbf{d} дает некоторое приближение для формы основной моды, если собственные частоты не слишком близки,

$$\mathbf{a}_1^{(s)} = \sum_{k=1}^n c_k^{(s)} \phi_k \rightarrow \phi_1 \quad , \quad c_k^{(s)} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_k} \right)^{2s} c_k^{(0)}.$$

Если отбросить компоненту \mathbf{a} в направлении ϕ_1 , то эта же итерационная схема даст следующую моду. Сначала следует построить удаляющую матрицу \mathbf{S}_1 ; после удаления мод низшего порядка – матрицу \mathbf{S}_2 и так далее. Используйте дискретную обобщенную форму (8.21) для улучшения приближенных значений квадратов собственных частот.

Решение: Умножение начального приближения на динамическую матрицу дает вектор $\mathbf{A}_1^{(1)}$, который следует нормализовать или разделить все компоненты на наибольшую перед началом следующей итерации. После s шагов точность приближения существенно возрастает,

$$\mathbf{A}_1^{(s)} = \mathbf{d} \mathbf{a}_1^{(s-1)} \quad , \quad \phi_1 = \mathbf{a}_1^{(s)} \quad , \quad \omega_1^2 \cong \frac{a_{1k}^{(s-1)}}{A_{1k}^{(s)}} \quad \text{или} \quad \omega_1^2 = \frac{\mathbf{A}_1^{(s)T} \mathbf{m} \mathbf{a}_1^{(s-1)}}{\mathbf{A}_1^{(s)T} \mathbf{m} \mathbf{A}_1^{(s)}}.$$

Подлежащая удалению компонента любого начального вектора $\mathbf{a}_2^{(0)}$ определяется умножением его разложения в ряд слева на $\phi_1^T \mathbf{m}$

$$\phi_1^T \mathbf{m} \mathbf{a}_2^{(0)} = m_1^* c_1^{(0)} \quad , \quad m_1^* = \phi_1^T \mathbf{m} \phi_1 = 1 \quad , \quad \mathbf{a}_2^{(0)} = \mathbf{a}_2^{(0)} - \phi_1 c_1^{(0)} = \mathbf{S}_1 \mathbf{a}_2^{(0)} \rightarrow$$

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{I} - \frac{1}{m_1^*} \phi_1 \phi_1^T \mathbf{m}.$$

Умножение на удаляющую матрицу S_1 должно производиться на каждом шаге итераций для того, чтобы обеспечить сходимость к следующей моде: эта мода становится основной для системы с динамической матрицей dS_1 ,

$$\mathbf{A}_{2'}^{(s)} = dS_1 \mathbf{a}_2^{(s-1)}, \quad \phi_2 = \mathbf{a}_{2'}^{(s)}, \quad \omega_2^2 \cong \frac{a_{2'k}^{(s-1)}}{A_{2'k}^{(s)}} \quad \text{или} \quad \omega_2^2 = \frac{\mathbf{A}_{2'}^{(s)T} \mathbf{m} \mathbf{a}_{2'}^{(s-1)}}{\mathbf{A}_{2'}^{(s)T} \mathbf{m} \mathbf{A}_{2'}^{(s)}}.$$

Можно улучшить приближение для второй моды, если пропустить одну компоненту начального вектора и затем найти ее из условия ортогональности

$$\mathbf{a}_{2'}^{(s)T} \mathbf{m} \phi_1 = 0.$$

Для третьей моды удаляющая матрица дополняется так, чтобы обеспечить удаление компонент начального приближения как в направлении основной моды, так и в направлении второго собственного вектора,

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{I} - \frac{1}{m_1^*} \phi_1 \phi_1^T \mathbf{m} - \frac{1}{m_2^*} \phi_2 \phi_2^T \mathbf{m},$$

$$\mathbf{A}_{3'}^{(s)} = dS_2 \mathbf{a}_3^{(s-1)}, \quad \phi_3 = \mathbf{a}_{3'}^{(s)}, \quad \omega_3^2 \cong \frac{a_{3'k}^{(s-1)}}{A_{3'k}^{(s)}} \quad \text{или} \quad \omega_3^2 = \frac{\mathbf{A}_{3'}^{(s)T} \mathbf{m} \mathbf{a}_{3'}^{(s-1)}}{\mathbf{A}_{3'}^{(s)T} \mathbf{m} \mathbf{A}_{3'}^{(s)}},$$

$$\mathbf{a}_{3'}^{(s)T} \mathbf{m} \phi_1 = 0, \quad \mathbf{a}_{3'}^{(s)T} \mathbf{m} \phi_2 = 0.$$

Приближение можно улучшить, пропуская две компоненты исходного вектора. Два дополнительных уравнения получаются из упомянутых выше соотношений ортогональности. Число мод, определяемых с помощью матричных итераций, должно быть значительно меньше числа степеней свободы. Собственные векторы можно объединить в матрицу и тогда итерацию можно провести сразу для такой матрицы, используя удаляющую гиперматрицу.

А 11.12: Найти основную моду свободных колебаний пластины постоянной толщины (и, следовательно, постоянной плотности и изгибной жесткости), показанной на рис. А 11.12. Применить обобщенный метод Галеркина, используя «плохое» приближение Ритца $\varphi(x, y) = (x/a)^2 (y/a)^2$. Вспомните граничные условия на свободном краю и заметьте, что возникают фиктивные моменты, перерезывающие силы и сосредоточенная сила в углу $x = a, y = b$.

Решение: Подставляем приближение Ритца $w^*(x, y; t) = q(t)\varphi(x, y)$ в соотношения

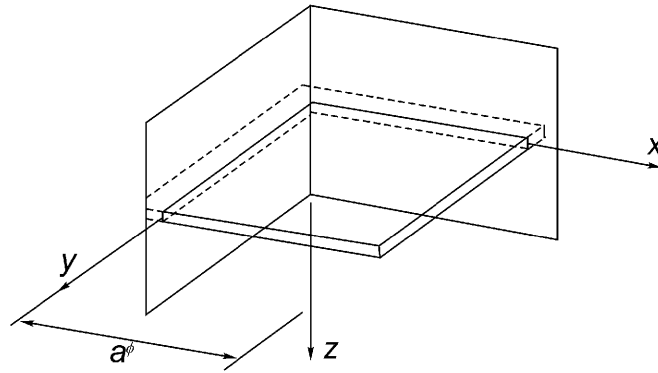


Рис. А 11.12.

$$\int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \{K\Delta\Delta w^* + \rho h \ddot{w}^*\} \varphi(x, y) dx dy + \int_{y=0}^a [\bar{q}_x^* \varphi - m_{x\varphi, x}^*]_{x=a} dy + \\ + \int_{x=0}^a [\bar{q}_y^* \varphi - m_{y\varphi, y}^*]_{y=a} dx - A^* \varphi(x=a, y=a) = 0,$$

используем (6.262) и учитываем (6.266) и (6.273). Сосредоточенная сила в углу определяется предельным переходом вдоль свободных краев; градиент крутящего момента стремится к бесконечности,

$$A^* = \lim_{y \rightarrow a} \left[\int \frac{\partial m_{xy}^*(x=a, y)}{\partial y} dy \right] + \lim_{x \rightarrow a} \left[\int \frac{\partial m_{yx}^*(x, y=a)}{\partial x} dx \right] = 2m_{xy}^*(x=a, y=a).$$

После интегрирования приходим к уравнению

$$m^* \ddot{q}(t) + k^* q(t) = 0, \quad m^* = \frac{\rho h a^2}{25}, \quad k^* = \frac{8K}{3a^2} \left(\frac{29}{15} - \nu \right).$$

Следовательно, собственная частота приближенно равна $\omega_0^* = \sqrt{k^*/m^*}$. Так как функция формы слишком проста, то это значение содержит большую ошибку; оно сильно преувеличено по сравнению с точным значением, которое, например для $\nu = 0,3$, равно $\omega_0 a^2 \sqrt{\rho h/K} = 6,958$. Для получения лучшего результата следует использовать произведение основных мод консольных балок. Детали см. в работе

- Leissa A.W. Vibration of Plates. NASA SP-160 (1969), p.73.

12 Удар

Процесс обмена количеством движения между двумя сталкивающимися телами в течение малого промежутка времени их контакта называется ударом. На каждое соударяющееся тело в течении этого короткого периода времени действует нагрузка большой интенсивности. В результате первоначальное распределение скоростей быстро изменяется (к таким процессам относятся даже распространение волн сжатия, возникающих, к примеру, при взрыве). Вследствие действия этой быстро изменяющейся нагрузки в области контакта испускаются волны, распространяющиеся затем с конечными скоростями по телу.

В случае достаточно небольших амплитуд (в области, достаточно удаленной от места удара) волны в линейно упругом теле распространяются со скоростью звука, причем различия между быстрой продольной Р-волной (primary wave) и более медленной поперечной S-волной (secondary wave) усложняют картину (см. раздел 7.6 и пример А 7.12); кроме того, имеют место дальнейшее преломление и дифракция. В разделе 12.7 приводится пример, в котором рассматривается удар по конечному стержню. Отметим, что решение многих задач усложняется, если вблизи области контакта имеют место большие деформации или нелинейное поведение тел. Иногда необходимо рассматривать вязко-пластичность. Кроме того, высокие скорости деформирования могут быть причиной образования трещин в статически пластичных материалах. Вышеописанное показывает, что полный анализ протекания удара в геометрически непростых соударяющихся телах зачастую требует использования численных методов (например, метода конечных элементов), реализации итерационных процедур с очень малым временным шагом. Такие затратные модели необходимы для исследования, к примеру, падения самолета на атомную электростанцию. Для «каждодневных» инженерных задач модели могут быть существенно упрощены.

Наиболее важное идеализирующее упрощение состоит в предположении, что при стремлении к нулю времени контакта имеет место резкий скачок в распределении скоростей и, следовательно, количества движения. Это означает, что скорость распространения в теле волны напряжений стремится к бесконечности. Кроме того, ударные силы, ускорения и напряжения принимают бесконечные значения, тогда как интегралы от них по времени удара остаются конечными величинами. Идеализированный удар становится внезапным механическим процессом в некоторый момент времени, причем соударяющиеся тела сохраняют свои положения в пространстве с неизменными конфигу-

рациями. После удара тела имеют новые распределения скоростей и количества движения, которые достигаются скачком.

Второе предположение связано с распределением скоростей точек тела в пространстве в момент времени после удара. Такое распределение должно соответствовать граничным условиям и обеспечивать целостность тела. Если тело абсолютно твердое, то согласно соотношению (1.4) распределение скоростей линейно и определяется через вектор скорости некоторой точки (обычно центра масс тела) и через вектор угловой скорости тела. Если тело деформируемо, то при решении большого класса задач предполагают, что распределение скоростей точек тела подобно надлежащим образом выбранному распределению статических деформаций (отметим аналогию с аппроксимацией Ритца, формула (11.1)).

Третье предположение касается общей энергии соударяющихся тел. При абсолютно упругом ударе энергия сохраняется, в противном случае происходит диссипация части энергии. При абсолютно неупругом ударе имеет место максимальная диссипация энергии.

В рамках такой идеализированной теории удара теоремы динамики и уравнения Лагранжа записываются в интегральной форме. После интегрирования по времени и, переходя к пределу при стремлении времени нагружения к нулю, они преобразуются в систему конечно-разностных соотношений.

Эта упрощенная теория достаточно успешно используется даже при рассмотрении таких задач как распространение волн в конечном упругом стержне или в наполненной жидкостью трубе («гидравлический удар»), что позволяет более ясно понять протекающие процессы и обосновать приближенные модели процессов.

12.1. Интегральная форма соотношений для количества движения и момента количества движения

Запишем теорему об изменении количества движения (7.10), предполагая, что нагружение производится сосредоточенными силами,

$$I(t_2) - I(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R} dt, \quad \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (12.1)$$

Если поменять местами знаки конечного суммирования и интегрирования по времени, а затем перейти к пределу при стремлении t_1 и t_2 слева и справа к некоторому моменту времени t_0 , при котором происходит идеализированный удар, то получим

$$\mathbf{I}' - \mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \lim_{(t_2 \rightarrow t_{0+}), (t_1 \rightarrow t_{0-})} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = \sum_{j=1}^{m \leq n} \mathbf{S}_j. \quad (12.2)$$

При ударе распределения скоростей и количества движения изменяются скачком, то есть в момент времени t_0 , в частности, количество движения изменяется на вектор $\mathbf{I}' - \mathbf{I} = m(\mathbf{v}'_M - \mathbf{v}_M)$.

В соотношении (12.2) вошли только импульсы ударных сил, то есть сил, действующих на тело во время удара и достигающих при этом таких больших значений, что их импульсы \mathbf{S}_j за это время принимают конечные величины,

$$\mathbf{S}_j = \lim_{(t_2 \rightarrow t_{0+}), (t_1 \rightarrow t_{0-})} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_j dt. \quad (12.3)$$

Импульсы всех внешних неударных сил, остающихся конечными (например, силы тяжести или восстанавливающей силы упругой пружины), в пределе стремятся к нулю и поэтому не входят в (12.2).

Аналогичным образом рассмотрим теорему об изменении момента количества движения относительно некоторой точки (см. соотношение (7.23))

$$\mathbf{H}(t_2) - \mathbf{H}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i dt. \quad (12.4)$$

В пределе положения точек тела остаются неизменными ($\mathbf{r}_i = \text{const}$), поэтому при идеализированном ударе

$$\mathbf{H}' - \mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \lim_{(t_2 \rightarrow t_{0+}), (t_1 \rightarrow t_{0-})} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = \sum_{j=1}^{m \leq n} \mathbf{r}_j \times \mathbf{S}_j, \quad (12.5)$$

то есть изменение за время удара момента количества движения относительно некоторой точки равно сумме моментов относительно той же точки импульсов всех действующих на систему внешних ударных сил.

В общем случае соотношения (12.2) и (12.5) представляют собой систему шести линейных разностных уравнений, записанных в проекциях на оси. Для их решения необходимо предположение о распределении скоростей после удара, а внешние ударные импульсы должны быть известны априори или исключены посредством использования дополнительных независимых соотношений. Если импульсы сил известны, то решение этих шести уравнений позволяет найти поле скоростей абсолютно твердого тела с шестью степенями свободы. Приведем два иллюстративных примера.

12.1.1. Пример: удар по абсолютно твердой пластине

Квадратная пластина $2a \times 2a$ подвешена за угол O с помощью сферического шарнира (рис. 12.1). Ударом молотком по углу A передается импульс $\mathbf{S} = -S\mathbf{e}_3$. До удара пластина покоилась. После удара скорости, по предположению, линейно распределены по закону вращения абсолютно твердого тела. Возникновение изгибных колебаний не учитывается.

Запишем теорему об изменении момента количества движения относительно точки O (12.5)

$$\mathbf{H}'_O - \mathbf{H}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{S},$$

причем $\mathbf{H}_O = \mathbf{0}$, $\mathbf{H}'_O = I_1\omega'_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega'_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega'_3\mathbf{e}_3$ (см. (7.56)), $\mathbf{r}_A = a\sqrt{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$,

$$I_1 = \frac{m(2a)^2}{12} + m(2a/\sqrt{2})^2 = \frac{7}{3}ma^2, \quad I_2 = \frac{m(2a)^2}{12}.$$

Из этих соотношений вытекает, что компоненты угловой скорости пластины равны

$$\omega'_1 = \frac{3\sqrt{2}}{7} \frac{S}{ma}, \quad \omega'_2 = 3\sqrt{2} \frac{S}{ma}, \quad \omega'_3 = 0.$$

Таким образом, абсолютно твердая пластина после удара начинает вращаться с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}'$ вокруг оси, повернутой в плоскости пластины на угол

$$\alpha = \arctg \frac{1}{7}.$$

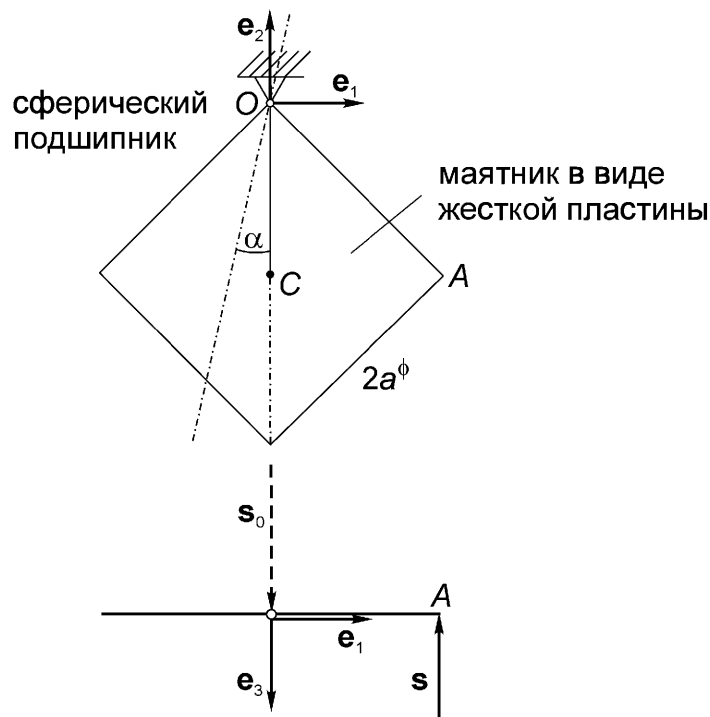


Рис. 12.1. Удар по правому углу A жесткой квадратной пластины.

Определим теперь импульс \mathbf{S}_0 реакции, возникающей в точке O при ударе. Воспользуемся теоремой об изменении количества движения (12.2)

$$\mathbf{I}' = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S},$$

причем $\mathbf{I}' = m\mathbf{v}'_c = -\frac{6}{7}\mathbf{S}\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{v}'_c = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_c$, $\mathbf{r}_c = -a\sqrt{2}\mathbf{e}_2$, C – центр масс пластины).

Следовательно, $\mathbf{S}_0 = \frac{\mathbf{S}}{7}\mathbf{e}_3$. Отметим, что условия, при которых динамические реакции в точке подвеса O при ударе не возникают, обсуждены в разделе 12.4.

12.1.2. Пример: продольный удар по упругой колонне

На свободный конец находящейся в покое однородной колонны действует импульс \mathbf{S} . Другой конец колонны жестко закреплен (рис. 12.2(a)). Движение колонны как жесткого целого невозможно.

Необходимо сделать предположение о распределении скоростей точек колонны после удара, которое отражает деформацию в результате удара. Если бы вместо импульса была приложена сила \mathbf{P} (рис. 12.2(b)), то распределение статических продольных перемещений точек линейно упругой колонны определялось бы по формуле

$$u_s(x) = -\frac{P}{EA}x = \frac{lP}{EA}\varphi(x), \quad (12.6)$$

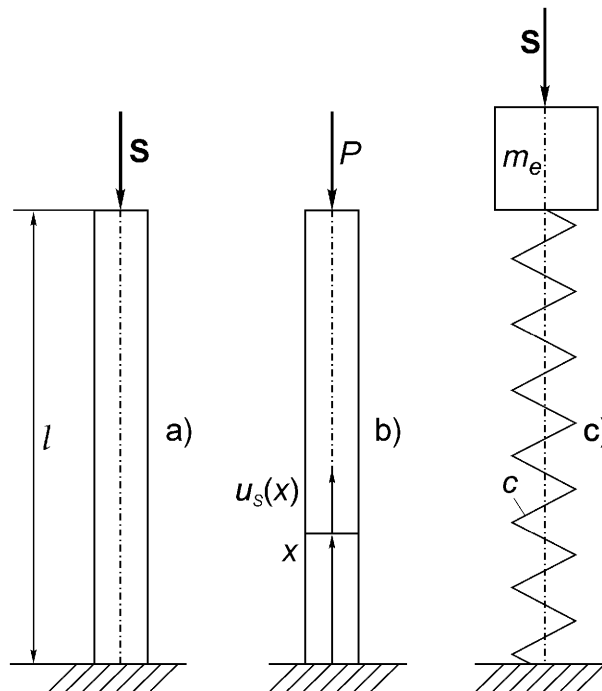


Рис. 12.2. (a) – Продольный удар. (b) – Статическая деформация упругой колонны. (c) – Простейшая эквивалентная система.

где $\varphi(x) = -x/l$. Предположим, что после удара (рис. 12.2(a)) распределение скоростей подобно и, следовательно, имеет то же самое линейное распределение

$$\dot{u}'(x) = \dot{q}'\varphi(x), \quad (12.7)$$

здесь обобщенная скорость \dot{q}' есть скорость ударяемого сечения.

Количество движения не является в общем случае положительно определенной величиной, поэтому в качестве меры для определения простой эквивалентной системы выбирается кинетическая энергия, которая запасается в колонне сразу после удара,

$$T' = \frac{1}{2} \int_m \dot{u}'^2 dm = \frac{\dot{q}'^2}{2} \int_0^l \varphi^2(x) \rho A dx = \frac{1}{2} \frac{m}{3} \dot{q}'^2 = \frac{m_e}{2} \dot{q}'^2, \quad (12.8)$$

где $m_e = m/3$; $m = \rho Al$.

Эквивалентная система включает тело массы m_e (рис. 12.2(c)), на которое действует исходный ударный импульс и которое имеет кинетическую энергию, приближенно равную кинетической энергии колонны, причем скорость тела равна скорости ударяемого конца колонны. Также в эквивалентную систему входит невесомая пружина со статической жесткостью $c = EA/l$. Во время удара сила упругости пружины остается конечной и неизменной.

Запишем теорему об изменении количества движения (12.2)

$$I' - I = S,$$

причем в этой задаче $I = 0$, $I' = -\dot{q}' m_e \mathbf{e}_x$, $S = -S \mathbf{e}_x$, поэтому $m_e \dot{q}' = S$.

Следовательно, $\dot{q}' = \frac{S}{m_e} = \frac{3S}{m}$, тогда с учетом (12.7)

$$\dot{u}'(x, t_{0+}) = -\frac{3S}{m} \frac{x}{l}. \quad (12.9)$$

Соотношение (12.9) определяет начальное условие при решении задачи изучения движения точек колонны после удара. Линейное распределение скоростей поперечных сечений в момент времени t_{0+} наводит на мысль о дальнейшем использовании той же самой функции формы для деформаций.

О связанном с этой задачей понятии коэффициента динамического усиления будет далее написано в разделе 12.6.

12.2. Уравнения Лагранжа для идеализированного удара

Проинтегрируем уравнения Лагранжа для системы с несколькими степенями свободы (10.14) и затем пределы интегрирования устремим справа и слева к некоторому числу t_0 :

$$\lim_{(t_2 \rightarrow t_{0+}), (t_1 \rightarrow t_{0-})} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = Q_i \right] dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12.10)$$

откуда (во время удара величина $\partial T / \partial q_i$ остается конечной)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)' - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = H_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.11)$$

Заметим, что число степеней свободы n при ударе не должно изменяться.

Вклад в обобщенные импульсы H_i вносят только обобщенные силы, принимающие при ударе бесконечные значения,

$$H_i = \lim_{(t_2 \rightarrow t_{0+}), (t_1 \rightarrow t_{0-})} \int_{t_1}^{t_2} Q_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.12)$$

Эти импульсы определяются из записи виртуальной “мощности” действительных импульсов \mathbf{S}_k (по аналогии с определением обобщенных сил (10.6))

$$\sum_{k=1}^m (\mathbf{S}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k) = \sum_{i=1}^n H_i(t) \delta \dot{q}_i, \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n). \quad (12.13)$$

Ниже приводятся два примера, в которых записывается система обсуждаемых соотношений для случая идеализированного удара. Отметим, что построение эквивалентной системы больше не требуется.

12.2.1. Пример: удар по маятнику типа цепи (система с несколькими степенями свободы)

Цепочка из n одинаковых однородных стержней массы m и длины $2l$ каждый подвешена к тележке массы M (рис. 12.3). Необходимо определить распределение скоростей непосредственно после воздействия на тележку ударного импульса S . Все соединения идеальны. Нижний конец нижнего стержня свободен.

Исследуемая система имеет $(n+1)$ степеней свободы, причем это число не меняется после удара. До удара система покоилась ($T=0$), после удара система имеет кинетическую энергию

$$T' = \frac{M}{2} v'^2 + \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n v_i'^2 + \frac{m l_s^2}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i'^2, \quad (12.14)$$

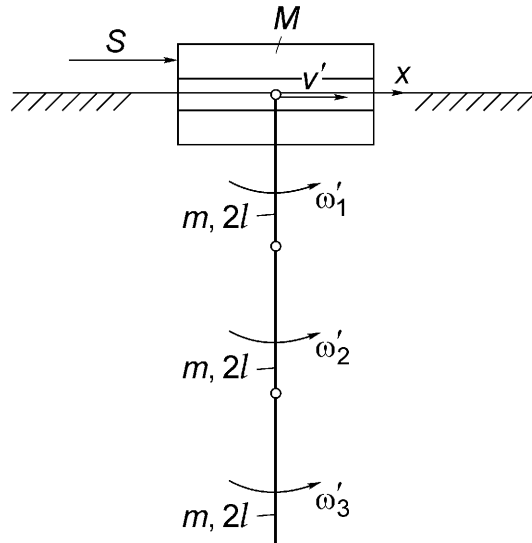


Рис. 12.3. Удар по тележке С маятником типа цепи.

где $i_s^2 = (2l)^2 / 12$.

Скорость центра масс i -го стержня определяется по формуле

$$v'_i = v' + 2l \sum_{k=1}^{i-1} \omega'_k + l \omega'_i. \quad (12.15)$$

Обобщенные импульсы находятся из записи виртуальной «мощности»

$S\delta v = H_x \delta v + \sum_{i=1}^n H_i \delta \omega_i$ сравнением коэффициентов, поэтому

$$H_x = S, \quad H_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (12.16)$$

Для цепочки из трех стержней применение (12.11) приводит к системе четырех линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{l} \left(\frac{M}{m} + 3 \right) v' + 5\omega'_1 + 3\omega'_2 + \omega'_3 = \frac{S}{lm}, \\ \frac{3}{l} v' + 6\omega'_1 + 6\omega'_2 + 4\omega'_3 = 0, \\ \frac{9}{l} v' + 18\omega'_1 + 16\omega'_2 + 6\omega'_3 = 0, \\ \frac{15}{l} v' + 28\omega'_1 + 18\omega'_2 + 6\omega'_3 = 0, \end{cases} \quad (12.17a)$$

решая которую, получим ($\Delta = 15 + 52M/m$)

$$v' = \frac{52 S}{\Delta m}, \quad \omega'_1 = -\frac{33 S}{l \Delta m}, \quad \omega'_2 = \frac{9 S}{l \Delta m}, \quad \omega'_3 = -\frac{3 S}{l \Delta m}. \quad (12.17b)$$

12.2.2. Пример: поперечное ударное нагружение шарнирно закрепленной на концах упругой балки

К середине однородной шарнирно опертой балки длины l приложен импульс S , рис. 12.4(a). Движение балки как жесткого целого невозможно.

Распределение скоростей элементарных элементов балки $dm = \rho A dx$ должно соответствовать граничным условиям и выбирается подобным предполагаемому упругому прогибу

$$\dot{w}'(x) = \dot{q}'\varphi(x), \quad \varphi(x) = \cos \frac{\pi x}{l}, \quad -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad (12.18)$$

здесь обобщенная скорость \dot{q}' есть скорость срединного поперечного сечения ($x=0$) после удара. Заметим, что в качестве функции, описывающей форму балки, можно взять функцию, соответствующую статическому прогибу однородной балки под действием сосредоточенной силы ($\varphi(x) = 1 - 6(x/l)^2 + 4(|x/l|)^3$).

Кинетическая энергия аппроксимируется с использованием (12.18), причем учитывается только поступательное движение элементарных элементов балки,

$$T' = \frac{1}{2} \int_m \dot{w}'^2 dm = \frac{\dot{q}'^2}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \varphi^2(x) \rho A dx = \frac{m_e}{2} \dot{q}'^2, \quad (12.19)$$

где $m_e = m/2$.

Приведенное соотношение для кинетической энергии соответствует эквивалентной системе (рис. 12.4(b)), поэтому задачу можно решить с помощью теоремы об изменении количества движения при ударе (аналогичным образом получено соотношение (12.9)).

Если же использовать проинтегрированные уравнения Лагранжа, то эквивалентная система явно не используется. В этом случае обобщенный импульс определяется путем сравнения коэффициентов. Так как в решаемой задаче импульс S приложен в точке с координатой $x = 0$, то

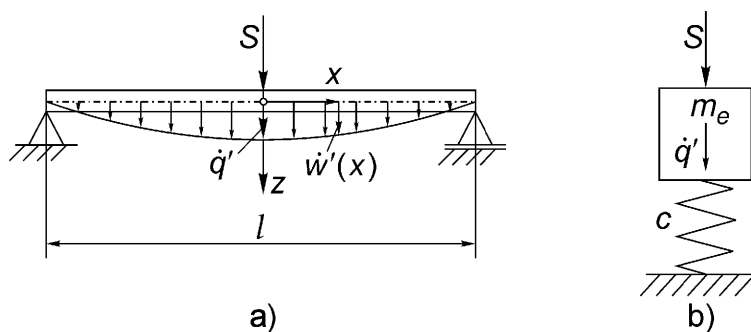


Рис. 12.4. (a) – Поперечный удар посередине упругой балки. (b) – Эквивалентная система.

$$H\delta\dot{q} = S\delta\dot{w}|_{x=0} = S\delta\dot{q}, \text{ поэтому } H = S. \quad (12.20)$$

Тогда, подставляя (12.19) и (12.20) в (12.11), получим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)' = m_e \dot{q}' = S \Rightarrow \dot{q}' = 2S/m.$$

Следовательно, с учетом (12.18)

$$\dot{w}'(x) = \frac{2S}{m} \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (12.21)$$

Еще раз подчеркнем, что использование уравнений Лагранжа позволяет рассматривать эквивалентные системы с несколькими степенями свободы при надлежащим образом выборе допустимых функций в аппроксимации (12.18).

12.3. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары

Для определения импульса контактной силы, действующей со стороны одного соударяющегося тела на другое, необходимо сделать предположение физического характера о потере энергии во время удара. Рассмотрим два предельных случая.

12.3.1. Абсолютно упругий удар

При абсолютно упругом ударе диссипации механической энергии не происходит, то есть полная механическая энергия двух соударяющихся тел (соотношение (8.8)) во время удара сохраняется.

Если соударяющиеся тела ведут себя упруго, то существует потенциал внутренних сил, и, переходя к пределу по времени, получаем

$$T' + V' = T + V, \quad (12.22)$$

где $V = U + W_p$.

Так как при ударе начальная конфигурация не изменяется, то потенциальная энергия также неизменна, поэтому кинетическая энергия всей системы также сохраняется

$$T' - T = 0, \quad V' = V. \quad (12.23)$$

12.3.2. Абсолютно неупругий удар

В случае полной диссипации предполагается, что столкнувшиеся тела не отделяются непосредственно после удара. Общие точки поверхности контакта (точка P на рис. 12.5) в конце удара имеют одинаковые компоненты скорости по направлению «нормали удара» e_n , то есть

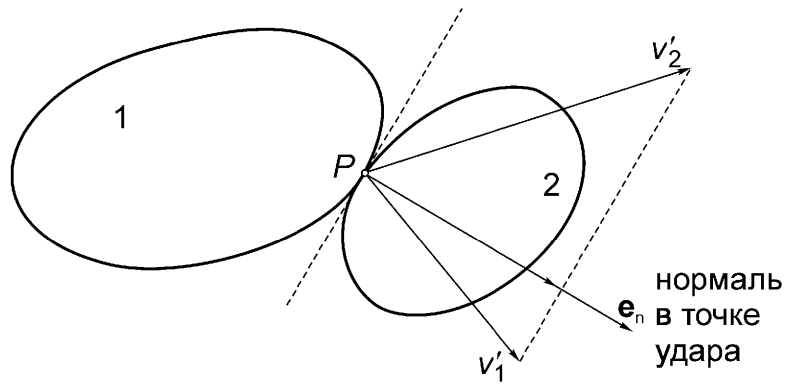


Рис. 12.5. Неупругий удар. Пояснение условия (12.24).

$$(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \cdot \mathbf{e}_n = 0. \quad (12.24)$$

12.3.3. Пример: столкновение двух материальных точек

Рассмотрим центральный удар двух тел массы m_1 и m_2 (нормаль к поверхностям тел в точке удара проходит через центры масс обоих тел), которые движутся поступательно, как показано на рис. 12.6. При ударе на тела действуют импульсы \mathbf{S} и $-\mathbf{S}$. Соотношения (12.2), записанные для каждого из тел в проекции на ось x , имеют вид

$$m_1(v'_1 - v_1) = -S, \quad (12.25)$$

$$m_2(v'_2 - (-v_2)) = S. \quad (12.26)$$

При сложении этих соотношений получим уравнение для количества движения всей системы, где исключаются импульсы внутренних сил,

$$m_1(v'_1 - v_1) + m_2(v'_2 + v_2) = 0. \quad (12.27)$$

Для нахождения величин v'_1 и v'_2 необходимо дополнительное условие. Это условие отражает физическую природу ударного взаимодействия тел.

(§) Абсолютно упругий удар

Сохранение кинетической энергии всей системы (12.23) приводит к следующему соотношению

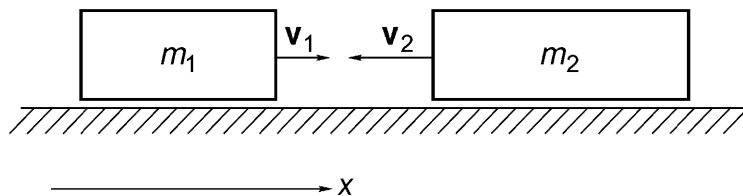


Рис. 12.6. Центральный удар двух тел.

$$T' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (12.28)$$

откуда

$$m_1(v_1' + v_1)(v_1' - v_1) + m_2(v_2' + v_2)(v_2' - v_2) = 0. \quad (12.29)$$

Подставляя соотношения (12.25), (12.26) в (12.29), получим

$$(v_1' + v_1)(-S) + (v_2' - v_2)S = 0. \quad (12.30)$$

Так как $S \neq 0$, то получим линейное уравнение, заменяющее нелинейное относительно скоростей соотношение (12.28),

$$-v_1' + v_2' - v_1 - v_2 = 0. \quad (12.31)$$

Соотношения (12.27) и (12.31) представляют собой систему двух линейных алгебраических уравнений, решение которой есть

$$v_1' = [(1-\mu)v_1 - 2\mu v_2]/(1+\mu), \quad v_2' = [2v_1 + (1-\mu)v_2]/(1+\mu),$$

где $\mu = m_2 / m_1$.

В результате из (12.25) и (12.26) находим, что

$$S = 2m_2(v_1 + v_2) / (1 + \mu). \quad (12.32)$$

Отметим, что предельный случай ($m_1 \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$) представляет собой упругое отражение массы m_2 от неподвижной стенки.

(§) Абсолютно неупругий удар

В этом случае соотношение (12.24) дает

$$v_1' - v_2' = 0. \quad (12.33)$$

Из решения (12.26), (12.27) и (12.33) находим общую скорость после удара и импульс

$$v_1' = v_2' = (v_1 - \mu v_2)/(1 + \mu), \quad S = m_2(v_1 + v_2) / (1 + \mu). \quad (12.34)$$

Диссипация кинетической энергии во время удара равна разности кинетических энергий системы после и до удара

$$T' - T = -\frac{1}{2} \frac{m_2}{1 + \mu} (v_1 + v_2)^2. \quad (12.35)$$

В пределе ($m_1 \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$) имеет место случай неупругого удара массы m_2 о неподвижную стенку (полная диссипация кинетической энергии).

12.4. Баллистический маятник и центр удара

Материальная точка массы m_1 (например, пуля) ударяется о плоский тяжелый маятник, в результате чего маятник начинает вращаться как жесткое целое относительно точки подвеса O (рис. 12.7). Следовательно, будет иметь место линейное распределение скоростей точек маятника.

Запишем теоремы об изменении количества движения и момента количества движения при ударе:

$$m_1(v'_1 - v_1) = -S, \quad m_2(v'_2 - v_2) = S - S_0, \quad m_2 i_0^2 (\omega'_2 - \omega_2) = lS,$$

причем $v'_2 = s_2 \omega'_2$, $i_0^2 = i_2^2 + s_2^2$, $v_2 = 0$, $\omega_2 = 0$.

С учетом обозначения $\mu = m_2 / m_1$ получаем

$$v'_1 - v_1 = -\frac{\mu i_0^2}{l} \omega'_2. \quad (12.36)$$

Необходимо еще одно условие, которое отражает физическую природу ударного взаимодействия.

(§) Идеализированный упругий удар

В этом случае имеет место сохранение кинетической энергии системы

$$T' = T = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 i_0^2 \omega_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2, \quad (12.37)$$

откуда

$$(v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) = -\mu i_0^2 \omega_2' \omega_2. \quad (12.38)$$

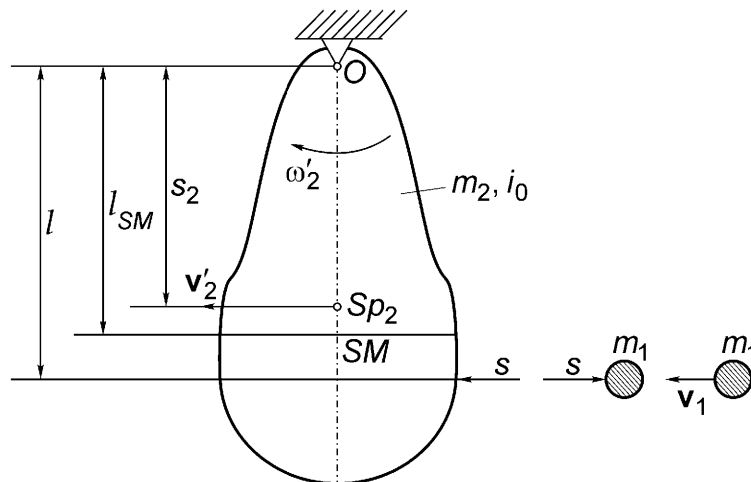


Рис. 12.7. Баллистический маятник. Центр удара SM ниже центра тяжести Sp_2 .

С учетом (12.36) получаем окончательно

$$v'_1 + v_1 = l\omega'_2. \quad (12.39)$$

(§) Идеализированный неупругий удар

В этом случае соотношение (12.24) принимает вид

$$v'_1 - l\omega'_2 = 0. \quad (12.40)$$

Решения систем четырех линейных алгебраических уравнений для случаев упругого и неупругого ударов приведены в таблице 12.1.

Таблица 12.1

	упругий удар	неупругий удар
ω'_2	$\frac{2l}{l^2 + \mu i_0^2} v_1$	$\frac{l}{l^2 + \mu i_0^2} v_1$
v'_1	$\frac{l^2 - \mu i_0^2}{l^2 + \mu i_0^2} v_1$	$\frac{l^2}{l^2 + \mu i_0^2} v_1$
S	$\frac{2m_2 i_0^2}{l^2 + \mu i_0^2} v_1$	$\frac{m_2 i_0^2}{l^2 + \mu i_0^2} v_1$
S_0	$2m_2 \frac{i_0^2 - l s_2}{l^2 + \mu i_0^2} v_1$	$m_2 \frac{i_0^2 - l s_2}{l^2 + \mu i_0^2} v_1$

Из последней строки таблицы видно, что числитель в выражении для импульса реакции S_0 один и тот же как для упругого, так и для неупругого ударов. Импульс реакции в точке O равен нулю, если этот числитель обращается в нуль, то есть если

$$i_0^2 - l s_2 = 0. \quad (12.41)$$

Уравнение (12.41) позволяет найти расстояние l_{SM} , которое определяет центр удара

$$l_{SM} = s_2 + i_0^2 / s_2. \quad (12.42)$$

Из соотношения (12.42) видно, что $l_{SM} > s_2$.

Центр удара не зависит от ударного импульса, и знание его положения позволяет избежать динамических нагрузок на руку при ударе молотком или теннисной ракеткой.

Чтобы найти угол α , на который отклонится маятник непосредственно после удара, можно записать теорему об изменении кинетической энергии (предполагается, что $m_1 \ll m_2$, а также, что трение отсутствует)

$$\frac{m_2 i_0^2}{2} \omega_2'^2 = m_2 g s_2 (1 - \cos \alpha), \quad (12.43)$$

где выражение для ω_2' для соответствующего вида удара должно быть взято из таблицы 12.1.

12.5. Внезапное закрепление оси вращения

Внезапное закрепление оси свободно движущегося твердого тела вызывает неупругий удар. Примером служит удар катящегося колеса об угол тротуара (рис. 12.8). В точке O существует конус трения, причем предполагается, что импульс контактной силы остается внутри конуса, то есть скольжение отсутствует. Считается, что до контакта с тротуаром колесо катится без скольжения, в момент удара контактная сила остается конечной.

Момент количества движения относительно точки контакта O согласно (12.5) остается постоянным ($H'_O = H_O$). Используя (7.28), получим

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_M + \mathbf{r}_M \times m \mathbf{v}_M, \quad (12.44)$$

где M – центр масс колеса.

Для рассматриваемой задачи

$$H'_O = H_O = I\omega' + (mR\omega')R = I\omega + (mR\omega)(R - h), \quad (12.45)$$

откуда сразу следует, что

$$\omega' = \omega \left[1 - \frac{h}{R} \frac{1}{1 + (i_M/R)^2} \right]. \quad (12.46)$$

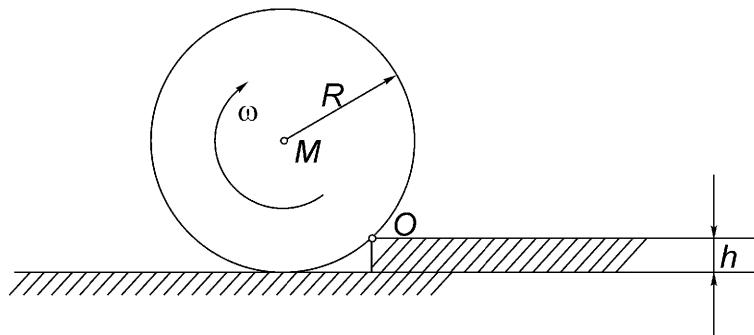


Рис. 12.8. Удар катящегося колеса об угол тротуара.

12.6. Коэффициент динамического усиления продольного и поперечного ударов

Вернемся к примерам 12.1.2 и 12.2.2. Пусть импульс S создается падающим со скоростью v телом массы M . Запишем теорему об изменении количества движения

$$M(v' - v) = -S. \quad (12.47)$$

Предположим, что удар неупругий ($v' - \dot{q}' = 0$). Тогда соотношение (12.47) переписывается в виде $S = M(v - \dot{q}') = m_e \dot{q}'$, откуда

$$\dot{q}' = \frac{v}{1 + \mu_e}, \quad (12.48)$$

где $\mu_e = \frac{m_e}{M} = \beta \frac{m}{M}$.

Таким образом, скорость ударяемого поперечного сечения равна части скорости падения тела массы M , причем коэффициент β для случая продольного удара стержня равен приблизительно $1/3$, для случая поперечного удара по среднему сечению балки – $1/2$ или $17/35$ (см. соотношения (12.8) и (12.19)).

Движение упругого стержня после удара консервативно. Теорема об изменении кинетической энергии (8.8) приводит к соотношению

$$T' = \frac{1}{2}(M + m_e)\dot{q}'^2 = V|_{T=0} = -Mga + \frac{1}{2}ca^2, \quad (12.49)$$

где a – динамическая амплитуда смещения;

$c = EA/l$ для случая продольного сжимающего удара;

$c = \pi^4 EJ/2l^3$ или $c = 48EJ/l^3$ для случая поперечного удара по среднему сечению.

Подставляя (12.48) в (12.49), найдем коэффициент динамического усиления

$$\chi = a/a_s = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{ga_s(1 + \beta m/M)}} \geq 2, \quad (12.50)$$

где $a_s = Mg/c$ – часть статического отклонения, вызванного действием дополнительного веса.

В случае незатухающих линейных колебаний максимальные динамические напряжения можно найти, зная продольную силу или момент (см. рис. 12.4)

$$\max|M| = \chi Mg \quad (\text{удар по упругой колонне}), \quad (12.51)$$

$$\max\{M_y(x=0)\} = \chi \frac{IMg}{4} \quad (\text{удар по шарнирно опертой балке}). \quad (12.52)$$

Отметим, что случай $v = 0$ соответствует мгновенному приложению веса Mg (умноженному на функцию Хэвисайда). Тогда согласно (12.50) коэффициент динамического усиления принимает свое минимальное значение $\chi = 2$. Формулу (12.50) удобно применять, например, при исследовании опускания подъемным краном груза на упругое основание.

12.7. Продольный удар по тонкому упругому стержню.

Распространение волн

Составим уравнение движения элемента стержня массы $dm = \rho A dx$, предполагая, что поперечные сечения остаются плоскими и поперечными смещениями можно пренебречь:

$$\frac{\partial N}{\partial x} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (12.53)$$

где $N(x, t) = A \sigma_{xx}(x, t)$ – продольная сила; $u(x, t)$ – перемещение поперечного сечения.

По закону Гука $\sigma_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x}$, поэтому

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (12.54)$$

Подставляя соотношение (12.54) в (12.53), получим гиперболическое волновое уравнение в перемещениях

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12.55)$$

или в напряжениях

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho A} \frac{\partial (A \sigma_{xx})}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial t^2}. \quad (12.56)$$

Если стержень однородный, то имеют место классические волновые уравнения

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial t^2}, \quad (12.57)$$

где $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной упругой волны в упругом стержне, окруженном вакуумом, то есть скорость распространения малых возмущений.

Вместо волновых уравнений (12.57) можно использовать систему двух дифференциальных уравнений первого порядка по координате x (см. (12.53) и (12.54))

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \sigma_{xx} = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (12.58)$$

Обозначив скорость $v = \partial u / \partial t$, получим систему «симметризованных» уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (12.59)$$

Отметим, что, умножив каждое из соотношений (12.59) справа и слева на площадь поперечного сечения A , эти соотношения можно переписать через силу N и массу на единицу длины ρA .

Общее решение, предложенное Д'Аламбером, представляет собой две волны, бегущие с одинаковой скоростью в противоположных направлениях,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g(t - x/c) + G(t + x/c), \\ v(x, t) &= s(t - x/c) + S(t + x/c), \\ \sigma_{xx}(x, t) &= f(t - x/c) + F(t + x/c). \end{aligned} \quad (12.60)$$

С учетом соотношения $v = \partial u / \partial t$ получим $s = \dot{g}$, $S = \dot{G}$, следовательно (так как

$$\sigma_{xx} = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x})$$

$$f = \rho c^2 \left(-\frac{1}{c} \dot{g} \right) = -\rho c \dot{g} = -\rho c s, \quad F = \rho c^2 \left(\frac{1}{c} \dot{G} \right) = \rho c \dot{G} = \rho c S. \quad (12.61)$$

Подчеркнем, что связь между f и s линейная с коэффициентом пропорциональности ρc – механическим импедансом (по аналогии с электрическим импедансом).

Рассмотрим волну напряжений, которая инициируется ударом по концу $x = 0$ стержня конечной длины l в момент $t = 0$,

$$\sigma_0(x, t) = f(t - x/c), \quad 0 \leq t \leq l/c. \quad (12.62)$$

Волна доходит до свободного конца стержня за время l/c . Динамическое граничное условие требует, чтобы нормальное напряжение равнялось нулю

$$\sigma(l, t) = f(t - l/c) + \sigma_r(l, t) = 0. \quad (12.63)$$

Таким образом, отраженная волна должна описываться той же самой функцией, но с противоположным знаком, и распространяться в противоположном направлении,

$$\sigma_r(x, t) = -f\left(t - l/c + \frac{x-l}{c}\right), \quad l/c \leq t \leq 2l/c. \quad (12.64)$$

Распределение напряжений, которые равны нулю при $x=l$, есть следующая суперпозиция

$$\sigma_0 + \sigma_r = f(t - x/c) - f\left(t - l/c + \frac{x-l}{c}\right), \quad l/c \leq t \leq 2l/c. \quad (12.65)$$

Если при $t = 2l/c$ поперечное сечение $x=0$ не нагружено, то второе отражение будет иметь место при нулевых напряжениях, а знак соответствующих напряжений снова меняется. Поэтому полные напряжения равны

$$\sigma_0 + \sigma_r + \sigma_{rr} = f(t - x/c) - f\left(t - l/c + \frac{x-l}{c}\right) + f\left(t - 2l/c - \frac{x}{c}\right), \quad 2l/c \leq t \leq 3l/c. \quad (12.66)$$

Так как демпфирование материала и дисперсия волн не учитываются, то группа волн сохраняет свою первоначальную форму. Для простоты рассмотрим случай, когда ударная нагрузка производится постоянной ударной силой P в течении интервала времени Δt . Тогда полный импульс будет равен $S = P\Delta t$ и $\sigma_0 \leq 0$, поэтому

$$\sigma_0(x, t) = \frac{P}{A} \left[H(t - x/c) - H\left(t - \frac{x-\delta}{c}\right) \right], \quad (12.67)$$

где $\delta = c\Delta t$; $H(t)$ – функция Хэвисайда.

Проходя слева направо, волна сжатия разгоняет элемент $\rho A\delta$ до скорости

$$v(x, t) = \frac{P}{\rho c A} \left[H\left(t - \frac{x-\delta}{c}\right) - H(t - x/c) \right], \quad \delta = c\Delta t. \quad (12.68a)$$

Однако в конце времени нагружения центр масс принимает постоянную скорость (см. (7.10)),

$$\rho A l v_M = P\Delta t, \quad t > \Delta t. \quad (12.68b)$$

Соотношение (12.68b) представляет также среднее значение распределения скоростей в упруго деформируемом стержне. На рис. 12.9 показывается влияние волн сжатия, распространяющихся вправо, на волны растяжения, распространяющиеся влево. В случае резкого нагружения может произойти растягивающее разрушение, несмотря на то, что исходная нагрузка сжимающая, из-за

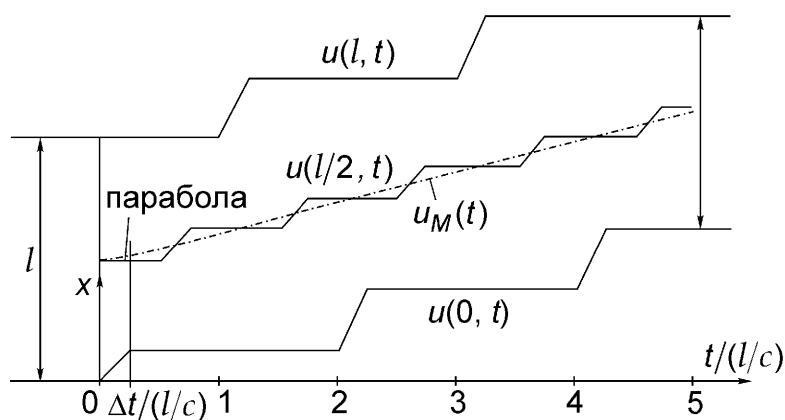


Рис. 12.9. Перемещение точек упругого стержня длины l после удара в течение короткого промежутка Δt .

смены знака при отражении. Этот эффект называется откалыванием, смотрите, например,

- Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, North-Holland, 1975.

12.8. Гидравлический удар: распространение волн

Рассмотрим задачу управления течением сжимаемой жидкости в прямой трубе с линейно упругими стенками, рис. 7.8. Любое малое возмущение давления распространяется со скоростью звука системы. Если давление стационарного течения изменяется при $x = L$, то перепад давления распространяется против течения по направлению к (более широкому) контейнеру. На концах имеет место полное или частичное отражение с или без изменения знака волны давления (см., например, (12.63)). Для вывода уравнений рассмотрим контрольную цилиндрическую поверхность, показанную на рис. 12.10. Предполагается, что поперечное сечение совпадает с размерами трубы при стационарном течении ($A = \pi a^2$). Из-за нестационарного увеличения давления диаметр трубы увеличивается, так же как ее длина. Поэтому при записи уравнения баланса массы (1.72) необходимо учитывать радиальное течение через контрольную поверх-

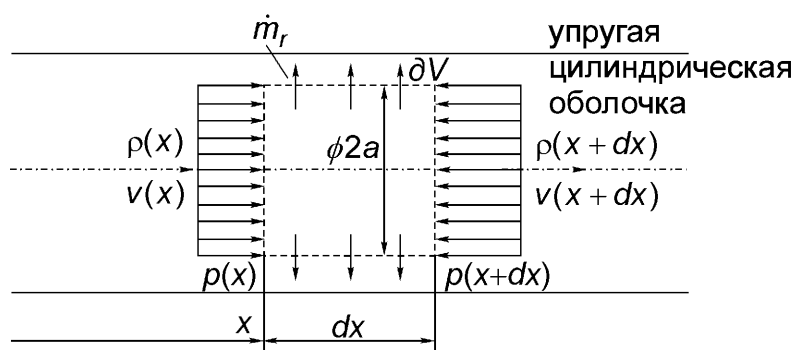


Рис. 12.10. Контрольный элемент в нестационарно упруго-деформируемой трубе.

ность. Если пренебречь конвективным изменением плотности жидкости (условие $|v \partial \rho / \partial x| \ll |\partial \rho / \partial t|$ будет проверено ниже), то нестационарный расход приближенно равен

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} A dx = -A(\mu_1 + \mu_2) - \dot{m}_r, \quad \mu_1 = -\rho v, \quad \mu_2 \approx \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right). \quad (12.69)$$

Радиальная скорость течения приближенно определяется путем рассмотрения квазистатической упругой деформации трубы (силами инерции пренебрегаем) из-за дополнительного зависящего от времени динамического давления $(\partial p / \partial t) dt$. Окружные напряжения в тонкостенной цилиндрической оболочке под действием внутреннего давления определяются согласно (2.98): $\sigma_{\varphi\varphi} = pa/s$, причем толщина $s \ll a$. Осевые напряжения $\sigma_{xx} = \alpha \sigma_{\varphi\varphi}$ зависят от вида граничных условий. Условие $\alpha = 0$ отражает свободное растяжение в продольном направлении; $\alpha = \nu$ имеет место в условиях плоской деформации; $\alpha = 1/2$ – труба закрыта и не поддерживается извне.

Закон Гука для изотропного материала связывает мембранные напряжения с главными деформациями (используются линеаризованные геометрические соотношения в цилиндрических координатах)

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{a} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu \sigma_{xx}), \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{\varphi\varphi}). \quad (12.70)$$

Таким образом, статическое увеличение объема трубы длины l под действием внутреннего давления p равно

$$\pi(a+u)^2(l+\Delta l) - \pi a^2 l \approx \pi a^2 l \frac{pa}{Es} \beta, \quad \beta = 2 + \alpha - \nu(1 + 2\alpha).$$

Следовательно, величина массы, которая прошла через контрольную поверхность в радиальном направлении из-за квазистатической деформации трубы при увеличении величины давления от $p(x)$ до $p(x) + (\partial p / \partial t) dt$, приближенно равна

$$\dot{m}_r dt \approx \rho A dx \frac{\partial p}{\partial t} dt \frac{a}{Es} \beta. \quad (12.71)$$

Здесь на приращение времени dt можно сократить. Предполагая линейную сжимаемость баротропной жидкости (см. (2.87)) $dp = K_F \frac{d\rho}{\rho}$, имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{K_F} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (12.72)$$

С учетом (12.72) плотность жидкости можно исключить, тогда уравнение неразрывности (12.69) сводится к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad c^2 = \frac{E_{\text{eff}}}{\rho}, \quad E_{\text{eff}} = \left(\frac{1}{K_F} + \frac{\beta a}{E_s} \right)^{-1}. \quad (12.73)$$

Скорость звука c в стальной трубе имеет порядок 1000 м/с. Эффективный модуль E_{eff} соответствует последовательному соединению пружин: сжимаемой жидкости и упругой стенки трубы (см. рис. А 3.1 и соотношение (12.57)).

Уравнение изменения количества движения (7.13), учитывая только локальное ускорение, имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} \rho A dx = -A \frac{\partial p}{\partial x} dx, \quad \left| v \frac{\partial v}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|. \quad (12.74)$$

Следовательно, второе дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка запишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (12.75)$$

Наоборот, исключая скорость v или давление p из (12.73) и (12.75), получаем следующие волновые уравнения:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (12.76)$$

Их решения (решения Д'Аламбера) представляют собой две волны, бегущие с одинаковой скоростью в противоположных направлениях,

$$p - p_0 = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + F\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad v - v_0 = \frac{1}{\rho c} \left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - F\left(t + \frac{x}{c}\right) \right]. \quad (12.77)$$

Нетрудно убедиться, что линейризация из-за опускания нелинейных конвективных членов в основных уравнениях сохраняется, так как в общем случае $v \ll c$, $|v \partial v / \partial x| = (v/c) |\partial v / \partial t|$, $|v \partial p / \partial x| = (v/c) |\partial p / \partial t|$ и т.д. В реальных трубопроводах $v_0 / c \leq 10^{-2}$.

При быстром перекрытии трубопровода, по которому стационарно текла жидкость, скачок давления равен

$$p - p_0 = F\left(t + \frac{x-l}{c}\right), \quad \text{поэтому} \quad v - v_0 = -\frac{1}{\rho c} F\left(t + \frac{x-l}{c}\right). \quad (12.78)$$

Конкретный вид функции определяется граничным условием $v(x=l) = 0$, а также при стремлении времени к нулю

$$-v_0 = -\frac{1}{\rho c} F(t), \quad F(t) = \rho c v_0 H(t). \quad (12.79)$$

Следовательно, волна давления, которая движется против течения, описываемая соотношениями

$$p - p_0 = \rho c v_0 H\left(t + \frac{x-l}{c}\right), \quad v - v_0 = -v_0 H\left(t + \frac{x-l}{c}\right), \quad (12.80)$$

имеет три основных свойства:

1. Течение позади фронта волны отсутствует; жидкость находится в покое.
2. Давление позади фронта волны увеличивается, а труба упруго расширяется.
3. Плотность жидкости, находящейся в покое, увеличивается ввиду (линейной) сжимаемости.

Вследствие деформации трубы и увеличивающейся плотности масса жидкости позади фронта волны увеличивается по сравнению с массой при стационарных условиях. В момент $t = l/c$ волна достигает свободного конца, где при $x = 0$ давление жидкости в большом контейнере задано. Таким образом, увеличивающееся давление и упругость трубы вызывают обратное течение из трубы к контейнеру. Отраженная волна распространяется вправо. Идеализированное граничное условие при $x = 0$ есть $p = p_0$, а для $t \geq l/c$ должно выполняться условие

$$0 = F\left(t - \frac{l}{c}\right) + f\left(t - \frac{l}{c}\right). \quad (12.81)$$

Следовательно, позади фронта волны направление течения меняется, и давление снова равняется p_0 (см. рис. 12.11)

$$p - p_0 = \rho c v_0 + f\left(t - \frac{l}{c} - \frac{x}{c}\right) = \rho c v_0 - \rho c v_0 H\left(t - \frac{l}{c} - \frac{x}{c}\right), \quad l/c \leq t \leq 2l/c,$$

$$v - v_0 = -v_0 + \frac{1}{\rho c} f\left(t - \frac{l}{c} - \frac{x}{c}\right) = -v_0 - v_0 H\left(t - \frac{l}{c} - \frac{x}{c}\right). \quad (12.82)$$

Когда фронт достигает закрытых ворот (в момент $t = 2l/c$), имеет место полное отражение (граничное условие при $x = l$ все еще $v = 0$)

$$0 = f\left(t - \frac{2l}{c}\right) - F\left(t - \frac{2l}{c}\right), \quad t \geq 2l/c, \quad (12.83)$$

и новая волна распространяется по направлению к контейнеру

$$v - v_0 = -2v_0 - \frac{1}{\rho c} F\left(t - \frac{2l}{c} + \frac{x-l}{c}\right) = -2v_0 + v_0 H\left(t - \frac{2l}{c} + \frac{x-l}{c}\right),$$



Рис. 12.11. Внезапное перекрытие трубы. Волны распространяются без учета диссипации и дисперсии. Учитываются линейно упругая квазистатическая деформация трубы и линейная сжимаемость жидкости.

$$p - p_0 = F\left(t - \frac{2l}{c} + \frac{x-l}{c}\right) = -\rho c v_0 H\left(t - \frac{2l}{c} + \frac{x-l}{c}\right), \quad 2l/c \leq t \leq 3l/c. \quad (12.84)$$

Позади фронта волны жидкость пониженной плотности находится в покое, и давление уменьшается до $p = p_0 - \rho c v_0$. Имеется опасность кавитации около ворот, и тонкостенная труба может даже потерять устойчивость под действием внешнего атмосферного давления, когда сжимающие окружающие напряжения достигнут критического значения. После отражения на свободном конце $x = 0$ в момент $t = 3l/c$ снова достигаются начальные условия: жидкость опять течет к закрытым воротам. На рис. 12.11 изображен фронт волны. После нескольких отражений волны ослабляются ввиду вязкости и дисперсии волны давления из-за боковой инерции. Эффекты гидравлического удара в реальных трубопроводах должны рассматриваться на этапе их проектирования. Специальное внимание надо уделять коленам. На гидроэлектростанциях в системах с высоко поднятыми резервуарами следует избегать изменяющихся ударных нагрузок, см. рис. 8.11.

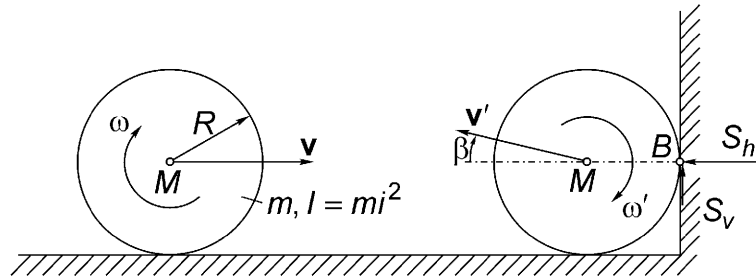


Рис. А 12.1.

12.9. Упражнения А 12.1 – 12.4 и решения

А 12.1: Определить угол отражения β катящегося мяча от неподвижной жесткой стены (рис. А 12.1). Удар считается абсолютно упругим, скольжение в точке контакта B отсутствует.

Решение: Проекция вектора скорости точки B на вертикальную ось равна нулю, поэтому $v' \sin \beta - R\omega' = 0$. Теорема об изменении момента количества движения при ударе (12.5) требует выполнения условия $I\omega' + mv'R \sin \beta - I\omega = 0$. Из этих соотношений следует, что $\omega' = \omega / (1 + R^2 / i^2)$; $v' \sin \beta = v / (1 + R^2 / i^2)$.

Так как удар абсолютно упругий, то кинетическая энергия до и после удара одинакова, то есть $T = T' = (1/2)[mv'^2 + I\omega'^2] = (\omega^2 / 2)(I + mR^2)$, поэтому скорость центра масс мяча после удара равна

$$v' = \omega[(R^2 + i^2)^3 - i^6]^{1/2} / (R^2 + i^2).$$

Угол отражения определяется по формуле $\sin \beta = Ri^2 / [(R^2 + i^2)^3 - i^6]^{1/2}$. Для тонкой сферической оболочки $i^2 = R^2 / 3$, поэтому $\sin \beta = 1 / \sqrt{21}$.

Компоненты вектора импульса реакции можно определить с помощью теоремы об изменении количества движения при ударе

$$mv' \sin \beta = S_v; \quad mv' \cos \beta + mv = S_h.$$

Сила реакции должна лежать внутри конуса трения ($S_v / S_h \leq \mu$), следовательно, минимальный коэффициент трения для того, чтобы сферический мяч отразился от стены, равен $\mu_{\min} = 1 / (4 + 2\sqrt{5})$.

А 12.2: Материальная точка массы m_1 падает на правый конец упругой однородной консоли со скоростью v (рис. А 12.2). Считая удар прямым и неупругим,

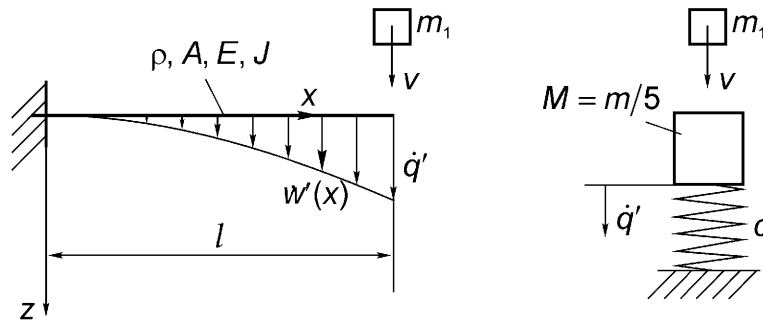


Рис. А 12.2.

определить коэффициент динамического усиления. Допустимая функция прогиба имеет вид $\varphi(x) = (x/l)^2$.

Решение: Кинетическая энергия консоли непосредственно после удара равна

$$T' = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}'^2 \rho A dx = \frac{M}{2} \dot{q}'^2,$$

где $\dot{w}'(x) = \dot{q}' \varphi(x)$; $m^* \equiv M = m/5$; $m = \rho A l$.

Рассмотрение эквивалентной системы, показанной на рис. А 12.2, или прямое применение проинтегрированного уравнения Лагранжа (12.11) приводят к соотношению $M\dot{q}' = S$. Запись теоремы об изменении количества движения при ударе дает $m_1(\dot{q}' - v) = -S$. Поэтому

$$\dot{q}' = \frac{v}{1 + M/m_1}.$$

Если тело массы m_1 прикреплено к консоли во время последующих незатухающих собственных колебаний, то максимальный прогиб можно легко определить из условия сохранения энергии

$$T' = \frac{m_1 + M}{2} \dot{q}'^2 = V(a) = -m_1 g a + \frac{c^*}{2} a^2,$$

где $c^* = 4EJ/l^3$.

Тогда с учетом обозначения $a_s = m_1 g / c^*$ заключаем, что коэффициент динамического усиления находится из решения квадратного уравнения

$$\chi = a / a_s = 1 + \sqrt{1 + 2T' / m_1 g a_s}.$$

А 12.3: К правому концу упругой однородной консоли массы m_2 и длины l прикреплен груз массы m_1 (рис. А 12.3). Консоль имеет постоянную изгибную жест-

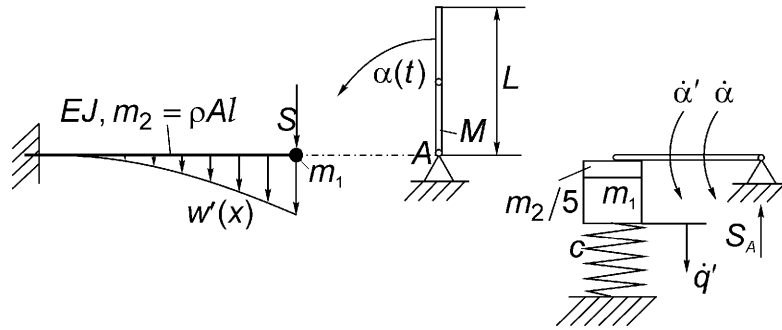


Рис. А 12.3.

кость $B = EJ$. Абсолютно твердый однородный маятник массы M и длины L падает из первоначально вертикального положения и ударяет по грузу m_1 . Определить распределение скоростей и внутренний импульс S после упругого удара. Функцию формы взять из задачи А 12.2.

Решение: Кинетическая энергия системы груз массы m_1 + консоль непосредственно после удара равна

$$\frac{m_1}{2} \dot{q}'^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}'^2 \rho A dx = \frac{1}{2} (m_1 + \frac{m_2}{5}) \dot{q}'^2.$$

Рассмотрение эквивалентной системы, показанной на рис. А 12.3, или прямое применение проинтегрированного уравнения Лагранжа (12.11) приводит к соотношению $(m_1 + m_2/5) \dot{q}' = S$. Применим соотношение (12.5) для падающего маятника:

$\frac{ML^2}{3} (\dot{\alpha}' - \dot{\alpha}) = -SL$. Если удар упругий, то неизменность кинетической энергии определяется выражением

$$\frac{1}{2} (m_1 + \frac{m_2}{5}) \dot{q}'^2 + \frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} (\dot{\alpha}'^2 - \dot{\alpha}^2) = 0.$$

Рассматривая три последних соотношения совместно, находим выражения для угловой скорости маятника и скорости груза массы m_1 непосредственно после удара, а также для внутреннего импульса:

$$\dot{\alpha}' = \frac{M/3 - m_1 - m_2/5}{M/3 + m_1 + m_2/5} \dot{\alpha}, \quad \dot{q}' = \frac{2ML}{M + 3m_1 + 3m_2/5} \dot{\alpha},$$

$$S = 2M \frac{(m_1 + m_2/5)L}{M + 3m_1 + 3m_2/5} \dot{\alpha}.$$

А 12.4: Пуля массы $m_1=0,1$ кг ударяется с некоторой неизвестной скоростью v о тяжелое неподвижное тело массы $m_2=50$ кг, лежащее на наклонной плоскости ($\operatorname{tg} \alpha = 0,3$). Коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен $\mu = 0,6$. Вектор скорости системы (груз и пуля) сразу после абсолютно неупругого удара направлен вверх вдоль наклонной плоскости. До остановки система прошла путь $s = 0,1$ м. Найти скорость v .

Решение: Для случая неупругого удара $m_1v = (m_1 + m_2)v'$, где v' - скорость системы сразу после удара. Еще одно соотношение получается из записи теоремы об изменении кинетической энергии (8.6) для движения системы после удара до остановки:

$$0 - \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{2} = -F_{\text{тр}}s - (m_1 + m_2)g s \sin \alpha,$$

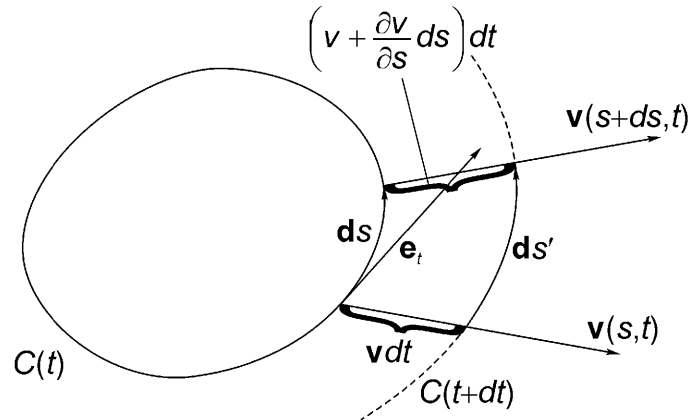
где сила трения $F_{\text{тр}} = \mu(m_1 + m_2)g \cos \alpha$. С учетом этих соотношений находим, что первоначальная скорость пули приблизительно равна $v \approx 652$ м / с.

13 Элементарные приложения гидродинамики

Ранее при изложении вопросов изменения количества движения контрольного объема были рассмотрены гидродинамические силы как равнодействующие распределенных сил давления. Однако существует еще одна важная характеристика – «циркуляция». Она является ключевой для понимания наиболее важной из этих сил – подъемной силы. Ее связь с вектором вихря (соотношение (1.50)), то есть с поворотами, выводится ниже. Рассматривается влияние вязкости на течение ньютоновской жидкости (определяющие соотношения для последней см. в разделе 4.2.1), а также выводится уравнение Навье-Стокса. Обсуждаются основные параметры автомодельных решений, которые тестируются при исследованиях в аэродинамических трубах и водных каналах. Вычисляется пограничный слой, который образуется при течении вдоль пластины. Безвихревое течение идеальной жидкости (например, внешнее течение) изучается с помощью теории потенциалов, дается краткое описание метода сингулярностей. Одним из таких приложений является вихревая дорожка Кармана, образующаяся позади закругленного тела, движущегося в вязкой жидкости; также вводится понятие лобового сопротивления. Движущиеся стенки приводят к нестационарным граничным условиям, подобные задачи возникают при исследованиях землетрясений. Эффекты сжимаемости и число Маха обсуждаются в связи с часто встречающейся в инженерной практике задачей – стационарным истечением газа из резервуара давления. С этим, к примеру, связан сильный шум при работе тепловых электростанций. Вопросы об ударных волнах, формирующихся при сверхзвуковых течениях, рассматриваются в специальной литературе по газовой динамике.

13.1. Циркуляция и вектор вихря

Важной величиной в гидродинамике идеальной жидкости является циркуляция Γ , которая сохраняется вдоль замкнутой материальной линии. Этот скалярный кинематический параметр определяется как линейный интеграл от тангенциальной компоненты скорости вдоль любой замкнутой кривой C , проведенной в жидкости в некоторый момент времени (см. рис. 13.1; тангенциальная компонента скорости есть скалярное произведение $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_t$, где \mathbf{v} – вектор скорости, \mathbf{e}_t – единичный касательный вектор; s – длина дуги)

Рис. 13.1. Циркуляция. Деформация элемента жидкой (материальной) линии $C(t)$.

$$\Gamma = \oint_C (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_t) ds. \quad (13.1)$$

В. Томсон (лорд Кельвин) в связи со статьей Г. Гельмгольца “On Integrals of the Hydrodynamic Equations Corresponding to Vortex Motions” (1858) обнаружил, что производная по времени от циркуляции вдоль замкнутой материальной кривой C равна нулю при течении невязкой жидкости

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad (13.2)$$

или «циркуляция вдоль замкнутой материальной линии $C(t)$ остается постоянной при течении невязкой жидкости, если внешние силы безвихревые». Линия $C(t)$ называется жидкой линией.

Теорема Кельвина о постоянстве циркуляции легко доказывается. Для этого вычисляем производную по времени от выражения (13.1), рассматривая замкнутую жидкую линию $C(t)$,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = \oint_{C(t)} \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{v} \cdot \frac{d(d\mathbf{s})}{dt} \right],$$

где ускорение $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a} = -(1/\rho) \text{grad}(W'_p + p)$ может быть исключено подстановкой уравнения Эйлера (8.30), W'_p есть удельный (на единицу массы) потенциал безвихревых внешних сил. Скорость деформации дифференциала материальной дуги $ds = \mathbf{e}_t ds$ за время dt можно определить из рассмотрения рис. 13.1, на котором изображено движение за время dt : $v dt + ds' = ds + (\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} ds) dt$, поэтому

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{ds' - ds}{dt} = \frac{d}{dt} (ds) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} ds.$$

Учитывая, что $\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right)$, получаем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C(t)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{p}{\rho} - \frac{W'}{\rho} \right) ds = 0.$$

Для удобства рассматривается течение несжимаемой жидкости. Интеграл по замкнутому контуру содержит выражение в круглых скобках, которое равно нулю, поэтому для непрерывного поля скоростей он также принимает нулевое значение. Теорема справедлива также и для более общего случая – течения сжимаемой баротропной жидкости ($\rho = \rho(p)$). В. Бьеркнес в 1900 году обобщил теорему, доказав ее для неоднородных жидкостей, что имеет важное значение для метеорологии. Из рассмотрения соотношения (13.1) можно заключить, что циркуляция при безвихревом течении должна равняться нулю при отсутствии сингулярностей: так как $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$ (см. (1.51)), то подынтегральное выражение является полным дифференциалом $d\phi$, и интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Из вышесказанного следует, что циркуляция, вычисленная вдоль замкнутой кривой C , и вектор вихря (1.50), то есть ротор скорости, должны быть связаны между собой. Выберем в качестве плоской кривой C бесконечно малый прямоугольник в плоскости (x, y) (см. рис. А 1.7). Тогда бесконечно малая циркуляция в направлении против часовой стрелки в линейной аппроксимации равна следующей сумме

$$\begin{aligned} d\Gamma &= v_x dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) dx - v_y dy = \\ &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy = 2\omega_z dA, \end{aligned} \quad (13.3)$$

где $dA = dx dy$; $\boldsymbol{\omega} = (1/2) \text{rot } \mathbf{v}$.

Последнее соотношение содержит нормальную компоненту вектора вихря $\boldsymbol{\omega}$ и малую площадь dA , окруженную бесконечно малой кривой C любой формы. Следовательно, оно не зависит от выбранной системы координат. Кривая не обязательно должна быть плоской, так как в пределе, когда площадь стремится к нулю, связь между бесконечно малой циркуляцией и нормальной компонентой вектора вихря сохраняется. Поэтому для любого элемента поверхности dS с двойной кривизной с нормалью \mathbf{e}_n справедливо соотношение

$$d\Gamma = 2\omega_n dS, \quad (13.4)$$

где $\omega_n = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_n)$.

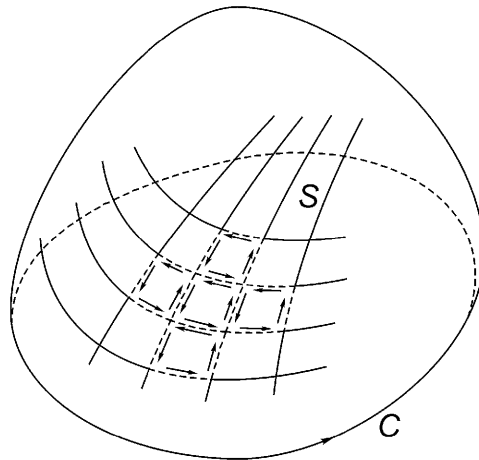


Рис. 13.2(a). Поверхность S и кривая C . Определение циркуляции через интегрирование вдоль замкнутого контура или через поток вектора вихря через S .

Рассмотрим замкнутую пространственную кривую C , показанную на рис. 13.2(a), и некоторую поверхность S , опирающуюся на эту кривую. Поверхность определяется системой криволинейных координат, показанной на рисунке. Тогда циркуляцию можно определить путем суммирования левой части выражения (13.4) вдоль всех образованных четырехугольных элементов (эта сумма все равно остается равной интегралу вдоль периметра C) или путем суммирования правой части выражения по любой поверхности, опирающейся на C . Таким образом, мы доказали интегральную теорему Стокса

$$\Gamma = \int_C d\Gamma = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n dS = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_t ds. \quad (13.5)$$

Область, окруженная кривой C , должна быть односвязной. Физический смысл поверхностного интеграла есть “течение” вектора вихря через поверхность S , поэтому назовем его “интенсивностью вихря”. По аналогии с линиями тока в качестве векторных линий вектора $\boldsymbol{\omega}$ рассматриваются линии вихря, а также применяется обобщенное локальное уравнение неразрывности $\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0$. Важно отметить, что при безвихревом движении свойство, что циркуляция вдоль любой замкнутой кривой C равна нулю, получается непосредственно из (13.5).

На рис. 13.2(b) изображено плоское движение невязкой жидкости вокруг неподвижного жесткого цилиндрического тела. Предполагается, что циркуляция равна нулю вдоль любой надлежащим образом выбранной замкнутой кривой (кривая должна быть проведена так, чтобы область, ограниченная ею, была односвязной). Например, такая замкнутая кривая состоит из кривых C_1 и C_2 , соединенных между собой благодаря разрезу. В этом случае цилиндр не нарушает односвязность. Нулевая циркуляция есть сумма циркуляций вдоль этих кри-

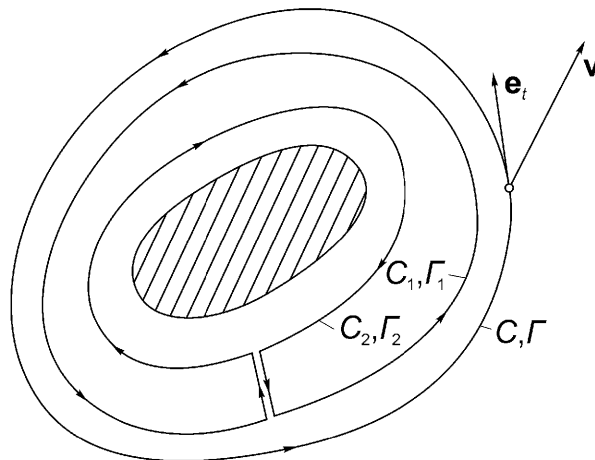


Рис. 13.2(b). Безвихревое течение невязкой жидкости вокруг жесткого цилиндра с возможной циркуляцией Γ .

вых C_1 и C_2 . Следовательно, циркуляция, взятая вдоль любой замкнутой кривой C , окружающей тело, постоянна (в том числе может быть равна нулю)

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0, \text{ то есть } \Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma. \quad (13.6)$$

Плоское движение идеальной жидкости вокруг погруженного цилиндра без источников массы можно определить через уравнение неразрывности $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и, возможно, сделав предположение о постоянстве циркуляции $\Gamma \neq 0$ вдоль любой кривой C , окружающей твердое тело.

13.2. Гидродинамическая подъемная сила

Подъемная сила является важной характеристикой при рассмотрении течения вокруг тел, представляющих собой тонкие тела с ненулевой циркуляцией. Рассмотрим двумерное стационарное и периодическое течение через систему равноотстоящих тонких цилиндрических лопастей (решетку), см. рис. 13.3. Можно вычислить суммарную силу, то есть результирующую распределенных сил давления на отдельное крыло. Контрольная поверхность, показанная прерывистой линией, окружает отдельное крыло; внешняя часть образуется двумя подобными линиями тока (трубка тока) с учетом условий периодичности. Вход и выход имеют одинаковое поперечное сечение t , измеренное в направлении, параллельном каскаду. На достаточном удалении от лопастей течение считается однородным с постоянными скоростями \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Условие постоянства массового расхода жидкости с учетом предположения о несжимаемости приводит к условию

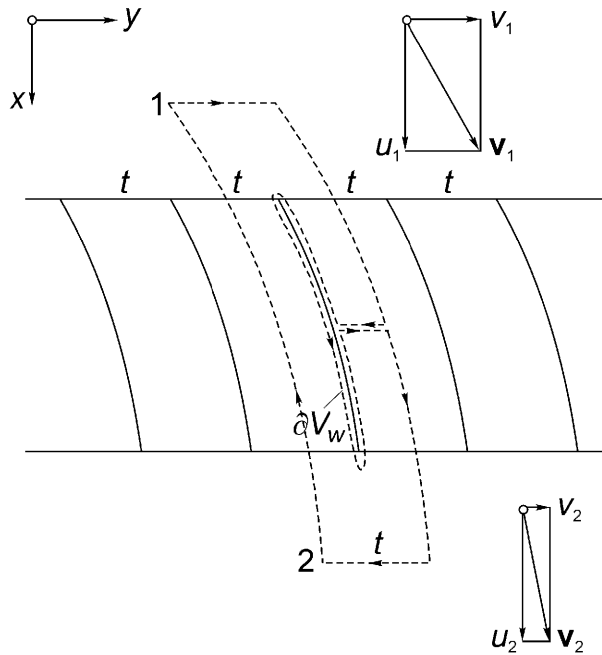


Рис. 13.3. Отклонение стационарного параллельного потока периодической системой цилиндрических лопастей. Контрольная поверхность окружает одиночную лопасть и учитывает периодичность потока в канале.

$$\dot{m} = \rho t b u_1 = \rho t b u_2 \Rightarrow u_1 = u_2 = u. \quad (13.7a)$$

Компонента скорости вдоль оси x (то есть ортогонально системе лопастей) остается постоянной. Записывая закон сохранения количества движения (7.13) для контрольного объема, получим (учитывается, что результирующая сила реакции, действующая на жидкость со стороны “стенки” ∂V_w , равна $-\mathbf{F}_w = -F_x \mathbf{e}_x - F_y \mathbf{e}_y$, см. рис. 13.3)

$$\dot{m}(u_2 - u_1) = (p_1 - p_2) t b - F_x = 0, \quad \dot{m}(v_2 - v_1) = -F_y. \quad (13.7b)$$

Уравнение Бернулли (8.40), записанное для линии тока при течении от точки 1 вниз по течению до точки 2 в параллельном потоке, позволяет определить разность давлений

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{\rho}{2}(u_1^2 + v_1^2) &= p_2 + \frac{\rho}{2}(u_2^2 + v_2^2) \Rightarrow \\ p_1 - p_2 &= \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -\rho(v_1 - v_2) \frac{v_1 + v_2}{2}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Следовательно, компоненты силы, действующей на одиночную лопасть, с учетом (13.7b) равны

$$F_x = -\rho t b (v_1 - v_2) \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad F_y = \rho t b (v_1 - v_2) u. \quad (13.9)$$

Введем вектор средней скорости

$$\mathbf{v}_\infty = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = u\mathbf{e}_x + \frac{v_1 + v_2}{2}\mathbf{e}_y. \quad (13.10)$$

Рассматривая циркуляцию, вычисленную вдоль внешней замкнутой кривой C контрольной поверхности, и учитывая периодичность распределения скоростей, получим

$$\Gamma = \oint_C (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_t) ds = t(v_1 - v_2) = \text{const}. \quad (13.11)$$

Выражения для компонент силы приобретают следующий вид ($v_{\infty x} = u$, $v_{\infty y} = (v_1 + v_2) / 2$, см. рис. 13.4)

$$F_x = -\rho v_{\infty y} \Gamma b, \quad F_y = \rho v_{\infty x} \Gamma b,$$

откуда

$$|\mathbf{F}| = \rho v_{\infty} \Gamma b, \quad \mathbf{F} \perp \mathbf{v}_{\infty}. \quad (13.12)$$

Если расстояние между лопастями каскада $t \rightarrow \infty$, параллельное течение не искривляется ($\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}_\infty$), однако циркуляция $\Gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} t(v_1 - v_2)$ из-за неопределенности произведения может быть ненулевой. Ниже по течению поток может несколько отклоняться от первоначального направления. В случае одного профиля с ненулевой циркуляцией, погруженного в параллельный поток со скоростью \mathbf{v}_∞ (при измерении скорости достаточно далеко впереди и сзади от крыла) поперечная сила, известная как подъемная сила, находится по теореме Кутта-Жуковского

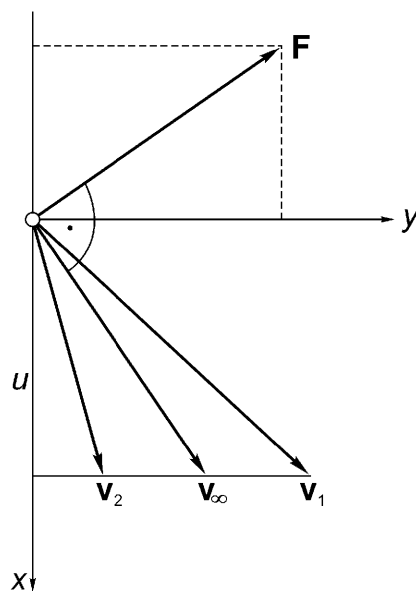


Рис. 13.4. Отклонение параллельного потока с замедлением и боковая сила, действующая на одну из лопастей.

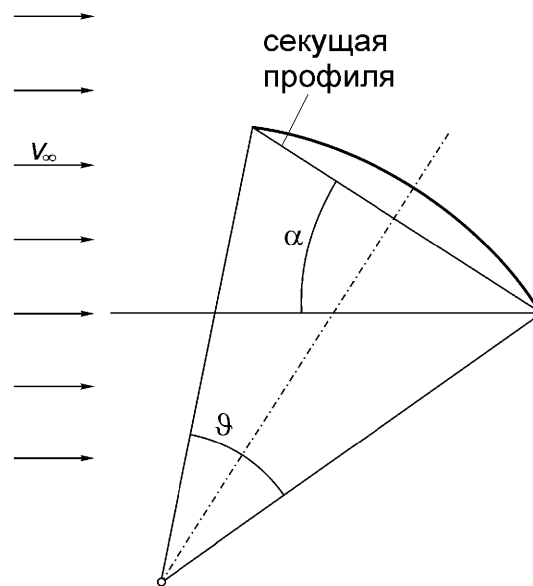


Рис. 13.5. Пологий круговой профиль в параллельном потоке (угол α преувеличен).

$$F_L = \rho v_\infty \Gamma b, \quad \mathbf{F} \perp \mathbf{v}_\infty. \quad (13.13)$$

Подъемная сила перпендикулярна основному течению, которое параллельно в достаточно удаленной области. При течении невязкой жидкости проекция силы на направление потока отсутствует (нет сопротивления). Однако в случае крыльев с конечным размахом b и свободных открытых концов хвостовые вихри от концов крыльев изменяют подъемную силу и вызывают сопротивление даже при течении невязкой жидкости. Эффекты таких подковообразных вихревых линий в настоящей книге не обсуждаются. Циркуляция пропорциональна скорости v_∞ и хорде крыла l , ее величина зависит от формы удлиненной лопасти и угла атаки α (см. рис. 13.5 и пример А 7.7), поэтому инженерная формула для вычисления подъемной силы имеет вид (b – размах крыла)

$$F_L = c_L(\alpha) \frac{\rho v_\infty^2}{2} b l. \quad (13.14)$$

Безразмерный коэффициент подъемной силы $c_L(\alpha)$ обычно определяется в аэродинамической трубе, диаграмма для так называемых НАСА-профилей приведена на рис. 13.6. Параметры действительного основного течения связаны с давлением торможения. Для тонкой жесткой пластины и малых углов атаки ($\alpha \ll 1$) весьма сложное теоретическое исследование циркуляции дает следующую формулу

$$c_L(\alpha) = 2\pi \sin \alpha \Rightarrow c_L(\alpha) = 2\pi\alpha \quad \text{при } |\alpha| \ll 1. \quad (13.15)$$

Коэффициент подъемной силы пологой цилиндрической тонкой оболочкой с заданным углом расвора ϑ равен (см. рис. 13.5)

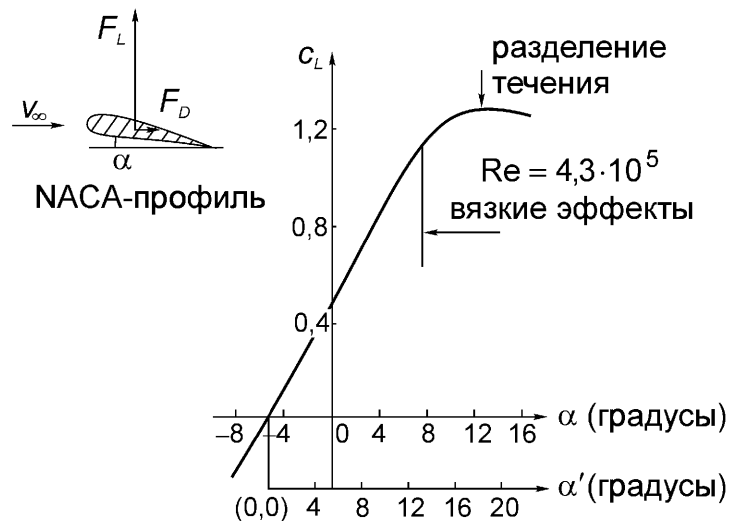


Рис. 13.6. Коэффициент подъемной силы NACA-профиля. Линейная функция обобщается на нелинейный участок, на котором вязкие эффекты становятся доминирующими.

$$c_L(\alpha) = 2\pi \sin\left(\alpha + \frac{\vartheta}{4}\right). \quad (13.16)$$

Аналогично для кругового профиля «нулевой угол атаки» $\alpha = \alpha_0$ может быть определен из условия, что циркуляция, а значит и подъемная сила, равны нулю. Измеряется угол атаки $\alpha' = \alpha - \alpha_0$, и тогда линейризованная формула через угол α' , справедливая для тонких профилей любой выпуклой пологой формы, имеет вид (см. рис. 13.6)

$$c_L(\alpha) \cong 2\pi\alpha' \quad \text{при} \quad |\alpha'| \ll 1. \quad (13.17)$$

При больших углах α' подъемная сила нелинейна, вязкие эффекты доминируют, а коэффициент подъемной силы достигает максимального значения. В этом случае вводится еще один параметр – динамический коэффициент вязкости (см. соотношение (4.62)), и коэффициент подъемной силы выражают через безразмерный параметр – число Рейнольдса (см. (4.68) и (13.24))

$$Re = \frac{v_\infty l}{\nu}, \quad \nu = \eta / \rho. \quad (13.18)$$

Вторая компонента силы (сила сопротивления F_D) параллельна v_∞ . Она возрастает при увеличении α и выражается аналогично формуле для подъемной силы

$$F_D = c_D(\alpha, Re) \frac{\rho v_\infty^2}{2} b l. \quad (13.19)$$

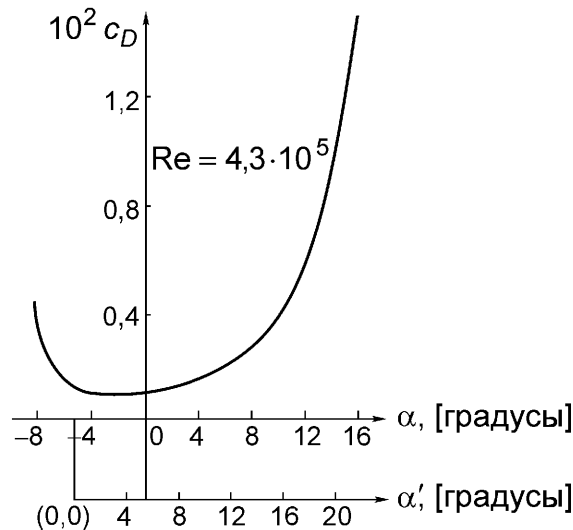


Рис. 13.7. Коэффициент сопротивления NACA-профиля.
Отметим неодинаковость шкал.

Из рис. 13.7 видно, что при небольших углах атаки коэффициент нежелательного сопротивления невысок ($c_D \ll c_L$, $c_D \approx 10^{-2} c_L$). Коэффициент сопротивления резко увеличивается, если верхняя поверхность становится зоной разделенного течения. Подъемная сила и сила сопротивления максимальны, когда профиль крыла срывает поток. Оба коэффициента часто приводят на полярных диаграммах при заданных числах Рейнольдса. Срыв течения также наблюдается около обтекаемых тел с закругленной задней кромкой. В этом случае коэффициент сопротивления имеет порядок от 0,2 до 1. В настоящее время эксперименты в аэродинамической трубе, впервые проведенные для нужд авиационной промышленности, распространены при исследованиях всех видов транспортных средств и даже костюмов лыжников, чтобы получить малое сопротивление.

Отметим, что течения при больших числах Рейнольдса исследованы в различных работах; явления в так называемых ползущих течениях описаны Озееном.

13.3. Уравнение Навье-Стокса, автомодельные решения

Выражение (7.1) справедливо для описания механики любых элементарных объемов независимо от определяющих соотношений. Для ньютоновских жидкостей, используя закон Стокса (4.62), исключим вязкие сдвиговые напряжения. Тогда при выполнении уравнения несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, условия постоянства динамической вязкости $\eta = \text{const}$ (для этого должны быть малы температурные изменения) получим векторное уравнение Навье-Стокса

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{k} - \operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (13.20)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Соотношение (13.20) содержит дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка ввиду присутствия вязкого члена, поэтому они принципиально отличаются от уравнений Эйлера для невязкой жидкости (8.30). Решения качественно отличаются даже в случае малой вязкости; в невязких жидкостях возможно появление сингулярных возмущений. При течении вязкой жидкости возникает дополнительное граничное условие на покоящейся стенке $v = 0$, то есть $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n = 0$ (как в случае невязкой жидкости) и $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_t = 0$ (отсутствие скольжения, частицы прилипают к стенке). Уравнение (13.20) справедливо как для ламинарных, так и турбулентных течений. В последнем случае скорость может иметь стационарное среднее значение и, к тому же, зависящую от времени компоненту пульсаций, что дает пример стохастического процесса в пространстве и во времени,

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}_m(\mathbf{r}) + \mathbf{v}'(t, \mathbf{r}), \quad \langle \mathbf{v}' \rangle = 0. \quad (13.21)$$

Детальное изложение этого вопроса можно найти в специальных книгах по турбулентности, в которых также вводится важный термин – «турбулентные сдвиговые напряжения», смотрите, например,

- Schlichting H. Grenzschicht – Theorie. Karlsruhe, Braun, 1965. Имеется русский перевод: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Москва, Наука, 1969.
- Wieghardt K. Theoretische Strömungslehre. Stuttgart, Teubner, 1965.

Автомодельные решения уравнения (13.20) по отношению как к геометрическим, так и механическим свойствам можно найти путем введения безразмерных координат, например, $x^* = x/L$, где L – характеристическая длина; а также безразмерного времени $t^* = tu/L$, где u – характеристическая скорость. Подстановка $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}/u$ и перегруппировка членов в (13.20) приводят к следующей записи уравнения Навье-Стокса в безразмерной форме

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = -\text{grad}^* \left(\frac{p}{\rho u^2} + \frac{gL}{u^2} z^* \right) + \frac{\eta}{\rho u L} \Delta^* \mathbf{v}^*. \quad (13.22)$$

Предполагается, что жидкость несжимаема, гравитационное поле однородно, вертикальный вектор \mathbf{e}_z направлен вверх. Проанализируем эти ограничения.

1. Если влияние гравитации и вязкости незначительно, то подобие между полем давления $p(t, \mathbf{r})$ и скоростным напором $\rho u^2 / 2$ определяется согласно первому из безразмерных членов. Для иллюстрации рассмотрим неподвижную тонкую пластину, помещенную параллельно потоку, так что закругленная сторона обращена к потоку. Сила сопротивления F_D есть результирующая сила

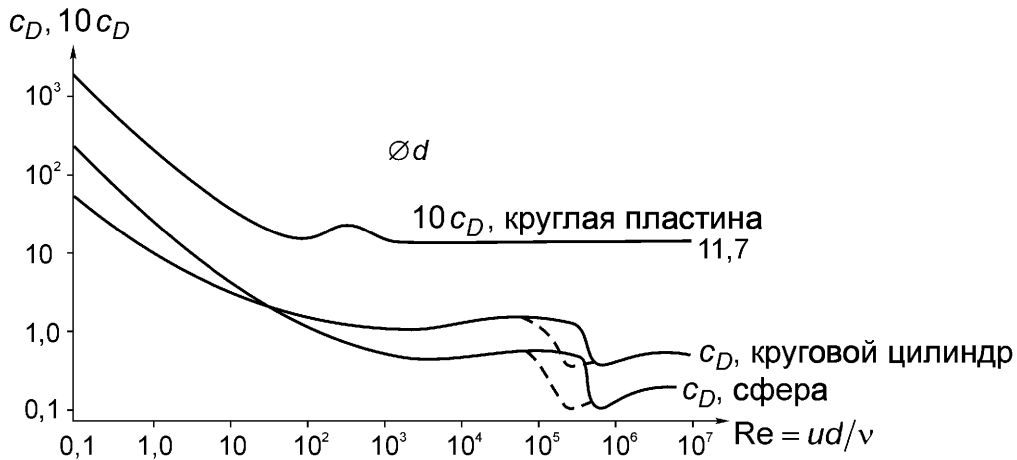


Рис. 13.8. Коэффициент сопротивления закругленных и круглых тел (экспериментальные результаты).

распределения давления по передней и задним граням пластины и равна (см. также (13.19))

$$F_D = c_D \frac{\rho u^2}{2} A. \quad (13.23)$$

Безразмерный коэффициент сопротивления c_D при течении невязкой жидкости зависит только от формы пластины и определяется в аэродинамической трубе или в водном канале с помощью не зависящей от размеров модели. Например, для круглой пластины $c_D = 1,17$. Следовательно, для закругленных тел коэффициент сопротивления при больших числах Рейнольдса не зависит от параметров жидкости и равен асимптотическому значению (см. рис. 13.8, где нужно обратить внимание на разницу масштабов).

2. В большинстве случаев течений, встречающихся в инженерной практике, подобие существенно зависит от вязкости, тогда как гравитация не имеет существенного значения. Безразмерный коэффициент γ члена с высшим порядком производной в (13.22) определяет число Рейнольдса (см. также (13.18))

$$Re = u L / \nu, \quad \nu = \eta / \rho. \quad (13.24)$$

Все детали течения (расположение точек остановки движения, образование пограничного слоя между ламинарным и турбулентным течениями, так же как и коэффициент сопротивления) зависят от числа Рейнольдса (см. также раздел 13.4.4)

$$c_D = c_D(Re). \quad (13.25)$$

На рис. 13.8 приведена эта функция для круглой пластины, расположенной нормально основному течению; плоского течения вокруг круглого цилиндра с поперечной осью; осесимметричного течения вокруг сферы. Следует заме-

туть, что графики изображены в разном масштабе. При тестировании моделей, расположенных в параллельном основном течении, могут использоваться как воздух, так и вода, если число Рейнольдса сохраняется.

3. В случае течения со свободной поверхностью подобие также требует, чтобы безразмерный коэффициент гравитации был постоянным. Квадратный корень от обратной величины называется числом Фруда (см. также (9.135))

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gL}}. \quad (13.26)$$

Эта характеристика играет важную роль при тестировании моделей кораблей и при изучении задач, связанных с мелкими волнами на воде.

Таким образом, результаты анализа уравнения (13.22) показывают, что физическое подобие течения требует (в дополнение к геометрическому аффинному преобразованию) введения характеристических чисел. Наиболее важное из них – число Рейнольдса – должно оставаться неизменным. Если велико влияние гравитации, то число Фруда также должно быть постоянным.

13.3.1. Течение вязкой жидкости в трубе

Стационарное ламинарное течение несжимаемой жидкости через трубу с круглым поперечным сечением является осесимметричным. Радиальная проекция уравнения Навье-Стокса (13.20), записанная через цилиндрические координаты r и x , соответствует условию равновесия

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \text{ то есть } p = p(x). \quad (13.27)$$

Учитывая соотношение непрерывности $\partial u / \partial x = 0$, осевая проекция уравнения (13.20) равна (см. уравнение (6.180) для записи оператора Лапласа)

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + 0 \right). \quad (13.28)$$

Разделение переменных и двойное интегрирование соотношения (13.28) приводит к параболическому распределению скорости в поперечном сечении (см. также рис. 4.6)

$$u(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} r^2 + C_1 \ln r + C_2, \quad (13.29)$$

причем $C_1 = 0$ (так как при $r = 0$ u – конечно), $C_2 = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} R^2$ (при $r = R$ $u = 0$, условие прилипания частиц жидкости к стенке).

Так как правая часть (13.29) есть функция от r и не зависит от x , градиент давления должен быть постоянной величиной ($dp/dx = \text{const}$), и давление линейно уменьшается вдоль течения

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{L}, \quad \Delta p = p(x) - p(x+L). \quad (13.30)$$

Плотность кинетической энергии постоянна, поэтому рассеянная энергия уменьшает потенциальную энергию внутренних сил, то есть давление, которое является потенциальной энергией на единицу объема. Скорость диссипации неизменна, так как ни распределение скоростей, ни распределение вязких сдвигов не зависят от x (см. (8.45), $P < 0$). Средняя скорость ламинарного движения согласно параболическому распределению (13.29) определяется по закону Хагена-Пуазейля

$$u_m = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{1}{A} \int_0^R 2\pi r u dr = \frac{1}{8\eta} \frac{\Delta p}{L} R^2 = \frac{1}{2} u_{\text{max}}. \quad (13.31)$$

Коэффициент сопротивления λ ламинарного течения вязкой жидкости определяется через безразмерное падение давления и зависит от числа Рейнольдса (см. также (4.69))

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} u_m^2} = \frac{L}{2R} \lambda(\text{Re}), \quad \lambda(\text{Re}) = 64 / \text{Re}, \quad \text{Re} = \frac{2R u_m}{\nu}. \quad (13.32)$$

Распределение скоростей при ламинарном течении в трубе некруглого поперечного сечения можно найти из решения уравнения Пуассона (см. (6.170))

$$\Delta u = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} = \text{const}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (13.33)$$

Если использовать выражение (13.29) в качестве частного решения ($r^2 = y^2 + z^2$), то задача сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа в теории потенциала

$$\Delta \psi = 0, \quad \psi|_{\text{на границе } B} = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} (y_B^2 + z_B^2), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$u(y, z) = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} (y^2 + z^2) + \psi(y, z). \quad (13.34)$$

Считается, что форма поперечного сечения задана неявно: $f(y_B, z_B) = 0$.

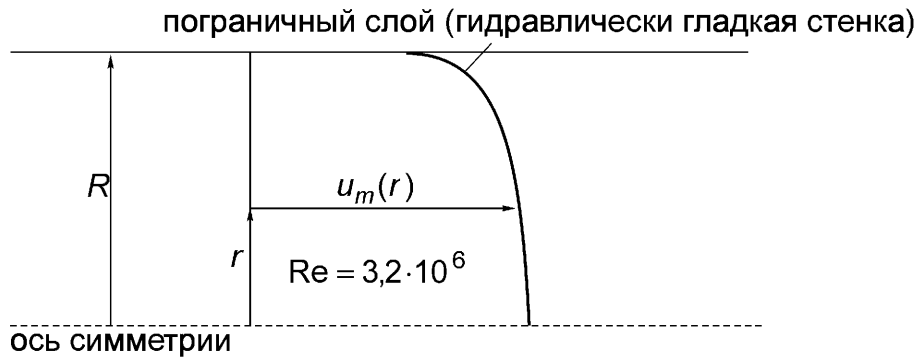


Рис. 13.9. Распределение средней продольной скорости при турбулентном течении в круглой трубе. Ламинарный подслой пограничного слоя невидим. Сравните с параболическим распределением при ламинарном течении (рис. 4.6).

Ламинарное осесимметричное течение через трубу, имеющую поперечное сечение в виде кольца, также легко определить путем следующей суперпозиции

$$u(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} \left(r^2 - R_i^2 - \frac{R_e^2 - R_i^2}{\ln(R_e / R_i)} \ln \frac{r}{R_i} \right), \quad R_i \leq r \leq R_e. \quad (13.35)$$

Наблюдается быстрое увеличение коэффициента сопротивления из-за трения о внутреннюю поверхность. Даже при малом соотношении радиусов ($R_i / R_e = 1/20$) расход массы уменьшается на треть, считая, что при невозмущенном течении в круглой трубе того же самого радиуса R_e (то есть $R_i = 0$) $u(0) = u_{\max}$. Граничное условие при $r = R_i$ ($u = 0$) приводит к дополнительным поперечным градиентам скорости и, следовательно, вязким сдвиговым напряжениям – см. (4.59), где y следует заменить на x .

Ламинарное течение в трубе устойчиво только для сравнительно малых значений числа Рейнольдса. Если, к примеру, скорость увеличивается, то течение становится турбулентным. Для переходной зоны критическое число Рейнольдса $Re_c = 2320$; если $Re > 5000$, то течение полностью турбулентно. При этом условии средняя продольная скорость быстро увеличивается в тонком пограничном слое, который имеет ламинарный подслой у стенки, и приблизительно постоянна вдали от стенки (см. рис. 13.9). Распределение уже больше не параболическое. Коэффициент сопротивления имеет “скачок” в переходной зоне и увеличивается при турбулентном течении по сравнению с ламинарным.

На рис. 13.10 число Рейнольдса отложено в логарифмической шкале. Коэффициент сопротивления в районе турбулентного течения уменьшается гораздо медленнее при увеличении числа Рейнольдса или уменьшении влияния вязкости по сравнению с зоной ламинарного течения. Следует отметить, что турбулентность является исключительно эффектом вязкости. Коэффициент сопротивления в этом случае зависит не только от числа Рейнольдса. Его значе-

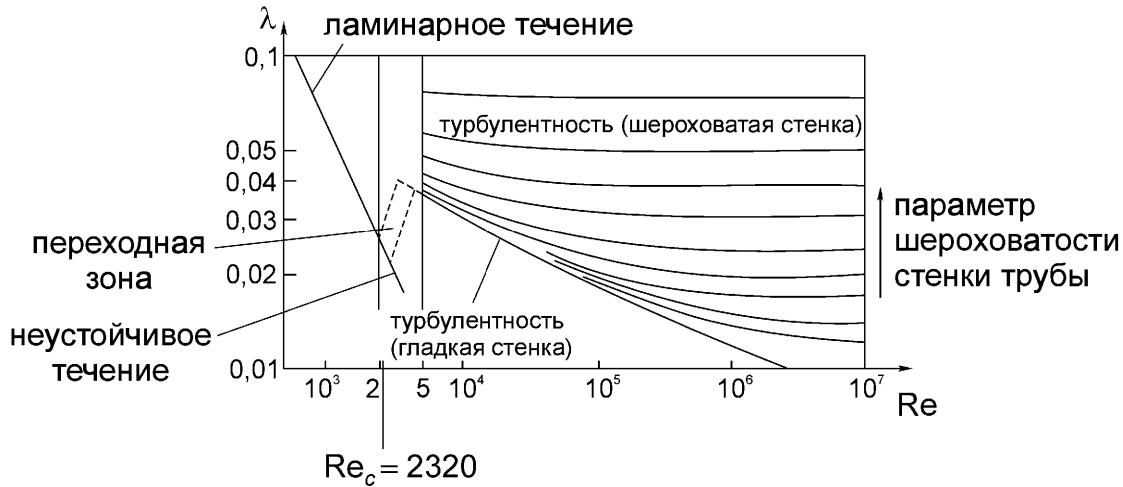


Рис. 13.10. Коэффициент сопротивления трубы при ламинарном и турбулентном течениях.

ние также определяется тем, покрыты ли шероховатости поверхности ламинарным пограничным подслоем или нет. Представление о гидравлически гладких и гидравлически шероховатых трубах, а также о всех промежуточных ситуациях дается на рис. 13.10. В первом случае шероховатость поверхности не влияет на внешнее течение. Коэффициент сопротивления определяется по явной или неявной формулам

$$\lambda = 0,316 Re^{-1/4}, \quad 5000 < Re < 10^5 \quad (\text{Блазиус}), \quad (13.36)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8, \quad Re > 5000 \quad (\text{Прандтль-Никурадзе}).$$

Течение, соответствующее нижней кривой на рис. 13.10, всегда турбулентно. Однако коэффициент сопротивления может резко уменьшиться при добавлении небольшого количества второй фазы с длинными цепочками молекул. Затраты энергии на насосных станциях при таком двухфазном течении могут быть значительно уменьшены. Проблема выброса частиц требует дальнейшего исследования.

13.3.2. Пограничный слой около пластины

В 1904 году Людвиг Прандтль опубликовал работу, в которой высказал предположение, что течение вдоль жесткой стенки разделяется на невязкое внешнее течение и вязкое внутреннее течение. Последнее происходит в тонком слое у стенки, который называется пограничным слоем. При рассмотрении уравнения Навье-Стокса (13.20) для жидкостей с малой вязкостью η и большим числом Рейнольдса Re такое разделение на зоны доминирующего и незначительного влияния вязкости в свете современной теории сингулярных возмущений кажется вполне естественным. Граничное условие у неподвижной стенки требует равенства нулю скорости (условие отсутствия скольжения), что возможно только с

учетом вязкого члена. Этот член определяет течение в непосредственной близости от стенки, причем градиент поперечной скорости принимает большие значения.

На некотором расстоянии от стенки скорость течения отличается от скорости свободного потока, скажем, на 0,5 - 1 %. Значение скорости свободного потока не зависит от условия прилипания частиц жидкости к стенке. Поперечный градиент скорости и, следовательно, сдвиговые напряжения незначительны вне пограничного слоя (в пределе $Re \rightarrow \infty$), поэтому для внешнего слоя применимы уравнения Эйлера (8.30). В соответствии с правилами согласованного асимптотического разложения координата, нормальная стенке, соответствующим образом вытягивается в пределах пограничного слоя, а на границе внутреннее решение (первого порядка при анализе возмущений) затем согласуется с условиями внешнего течения. Чтобы состыковать два решения, требуется условие на тангенциальную компоненту скорости: скорость на поверхности вязкого пограничного слоя (т.е. асимптотически, когда масштабированная координата $\rightarrow \infty$) должна быть равна скорости на поверхности невязкого потенциального течения (то есть у неподвижной стенки, где нормальная координата равна нулю). Вдоль стенки проходит линия тока внешнего невязкого течения. Если используется аппроксимация второго порядка, то для определения течения в пограничном слое требуется вторая итерация, смотрите:

- Schneider W. Mathematische Methoden der Strömungsmechanik. Braunschweig, Vieweg, 1978.

В общем случае на первом этапе численного решения задачи течения жидкости с большим числом Рейнольдса определяются скорости и давления при потенциальном течении невязкой жидкости, имеющей линию тока у стенки.

При изучении равномерного течения вдоль пластины условия $U = \text{const}$ и $p = \text{const}$ представляют собой соответствующие решения для основного потока. Уравнение Навье-Стокса (13.20), записанное для компоненты x , имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right\} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (13.37)$$

В вязком члене должна быть оставлена только наибольшая по абсолютной величине производная ($|\partial^2 u / \partial x^2| \ll |\partial^2 u / \partial y^2|$). При таком приближении уравнение (13.37) называется уравнением пограничного слоя. Для стационарного ламинарного течения вязкой жидкости в пограничном слое справедливо

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad y = 0: u = v = 0; \quad y \rightarrow \delta: u \rightarrow U. \quad (13.38)$$

В ряде задач, которые могут быть решены аналитически, в качестве параметра течения может быть выбрана толщина ламинарного пограничного слоя при рассмотрении, например, расхода массы. Тогда толщина смещения δ^* пограничного слоя из-за его торможения имеет такой же проинтегрированный дефицит скорости $(1 - u/U)$, как и истинный пограничный слой. Аналогично, толщину количества движения θ можно ввести через проинтегрированный дефицит количества движения $(u/U)(1 - u/U)$, см. соотношение (13.100). Также можно использовать толщину энергии δ^{**} , то есть интеграл от $(u/U)(1 - u^2/U^2)$ по нормальной координате y . Подробнее об этом см. в разделе 13.5. Сравнивая порядки членов в (13.38), заключаем, что $u \partial u / \partial x \sim U^2 / L$ и $\nu \partial^2 u / \partial x^2 \sim \nu U / \delta^2$, $\delta \sim L / \sqrt{\text{Re}}$. Так как пластина не имеет характеристической длины L , подобие течения в пограничном слое должно быть справедливым для всех значений x ,

$$\frac{u}{U} = f(Y),$$

где $Y = y / \delta$ – безразмерная нормальная координата.

Полагая, что $L = x$ – расстояние вверх по течению от острого переднего края полубесконечной пластины, толщина пограничного слоя имеет порядок

$$\delta \approx \sqrt{\nu x / U}. \quad (13.39)$$

Внешнее потенциальное течение больше не параллельно. Граница пограничного слоя искривлена, однако не является линией тока, так как некоторые линии тока ее пересекают. Если использовать так называемую функцию тока ψ (см. (13.48) для определения), то уравнение неразрывности $\text{div } \mathbf{v} = 0$ тождественно удовлетворяется. Интегрирование в пределах вязкого течения приводит к соотношению

$$\psi = \int_0^y u dy = U \delta \int_0^Y f(Y) dY = \sqrt{\nu U x} F(Y). \quad (13.40)$$

После подстановки этой разделяющейся функции в соотношение (13.38) приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка относительно масштабированной координаты Y

$$FF'' + 2F''' = 0, \quad Y = 0: F = F' = 0; \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} F' = 1. \quad (13.41)$$

Это уравнение можно решить численно с однородными геометрическими условиями у стенки и указанным выше асимптотическим условием. На расстоянии $y \approx 5\delta$ имеем $u/U = 0,99$.

Распределение сдвиговых напряжений в ламинарном пограничном слое определяет безразмерный коэффициент локального сопротивления на единицу толщины для одной стороны пластины ($0 \leq x \leq L$)

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{\rho U^2}{2} Bx} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}(x)}}. \quad (13.42a)$$

Локальный коэффициент приповерхностного трения есть половина этой величины. Результаты вычислений очень хорошо согласуются с экспериментальными результатами. Ламинарный пограничный слой расширяет критическое расстояние x_c от вершины в соответствии с множеством критических чисел Рейнольдса $3 \times 10^5 < \text{Re}_c < 5 \times 10^5$. Для параллельного потока воздуха с $U = 20$ м/с, $\nu = 15 \times 10^{-6}$ м²/с критическое число Рейнольдса равно $\text{Re}_c = 4 \times 10^5$ и $x_c = 300$ мм. Толщина 99 % ламинарного пограничного слоя увеличивается при этих условиях до $\delta_c = 2,4$ мм. За ним следует переходная зона перед полностью развитым турбулентным слоем. Его толщина увеличивается быстрее на $\sim (x - x_c)^{0,8}$. С помощью интегрального метода количества движения (раздел 13.5), используя формулу Блазиуса, можно приближенно определить локальный коэффициент трения турбулентного слоя (см. (13.36) для течения в трубе)

$$c_f = \frac{0,0592}{\text{Re}_x^{1/5}}, \quad (13.42b)$$

а коэффициент сопротивления после интегрирования становится равным

$$c_D = \frac{0,074}{\text{Re}_x^{1/5}}. \quad (13.42c)$$

Уточненная формула для вычисления коэффициента сопротивления для одной стороны пластины, основанная на логарифмическом распределении скорости по Прандтлю-Шлихтингу, справедлива при всех числах Рейнольдса (турбулентный слой)

$$c_D = \frac{0,455}{(\log \text{Re}_x)^{2,58}}. \quad (13.42d)$$

Течение вязкой жидкости у границ, особенно вдоль искривленных поверхностей, когда давление увеличивается в направлении течения, разделяется. У точки разделения упорядоченное течение отсутствует. Ниже по течению поток составляют вихри. Позади погруженного тела образуется след, и ввиду уменьшения количества движения сопротивление увеличивается. Отделение

турбулентного слоя наблюдается далее по течению по сравнению с ламинарным слоем. Следовательно, в дополнение к управлению пограничным слоем посредством соответствующей формы тела, чтобы вызвать турбулентность, можно прикрепить к поверхности проволоку. Более дорогими способами возбудить медленную часть жидкости являются направление в слой более быстрой жидкости и удаление жидкости, тем самым толщина слоя уменьшается. Последний метод нередко применяют при исследованиях в аэродинамических трубах.

13.4. Потенциальное течение, метод сингулярностей

Знание законов течения невязкой жидкости позволяет решать многие реальные задачи, такие как обтекание погруженных в жидкость закругленных тел, где внешнее течение должно быть определено, или даже течение в изогнутых трубах. Значительно облегчает анализ предположение о том, что течение безвихревое

$$2\omega = \text{rot } \mathbf{v} \equiv 0. \quad (13.43)$$

В этом случае существует такая функция, называемая потенциалом скоростей Φ , через которую векторы скоростей определяются по формуле (см. уравнение (3.12) для безвихревых сил и (1.51))

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi, \quad (13.44)$$

то есть соотношение (13.43) тождественно удовлетворяется.

При рассмотрении несжимаемой жидкости ($\text{div } \mathbf{v} = 0$, см. (1.77)) с учетом (13.44) имеем уравнение Лапласа

$$\text{div grad } \Phi = \Delta \Phi = 0, \quad (13.45)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Зависимость от времени, которая может быть следствием нестационарных граничных условий, требует в качестве аргумента наличия параметра t : $\Phi(t, x, y, z)$, см. (1.78). Еще одно соотношение, при котором уравнение несжимаемости тождественно удовлетворяется, может быть записано через векторный потенциал \mathbf{A}

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (13.46)$$

Если течение безвихревое, то векторный потенциал является решением следующего уравнения

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (13.47)$$

Векторный потенциал чрезвычайно полезен при рассмотрении плоских (например, в плоскости (x, y)) и осесимметричных (r, x) течений. В обоих случаях векторный потенциал зависит только от функции ψ , называемой функцией тока. Для плоских течений $\mathbf{A} = \psi(x, y) \mathbf{e}_z$, тогда с учетом (13.44)

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{e}_y, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (13.48a)$$

Подстановка полученного выражения в соотношение (13.47) приводит к следующему двумерному уравнению Лапласа

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \mathbf{e}_z = 0. \quad (13.48b)$$

Радиальная $v(r, x)$ и осевая $u(r, x)$ компоненты осесимметричного поля скоростей связаны с производными функции $\psi(r, x)$ следующими соотношениями

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

поэтому

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0. \quad (13.48c)$$

Линии уровня поверхности $z = \psi(x, y)$, то есть $z = \text{const}$, являются линиями тока C при течении несжимаемой жидкости: полная производная вдоль этих линий равна нулю

$$d\psi|_C = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy = 0,$$

то есть

$$\frac{dy}{dx}|_C = \frac{v}{u}. \quad (13.49)$$

Таким образом, касательная к линии тока функции тока совпадает по направлению с направлением скорости \mathbf{v} . Это свойство объясняет название функции тока. В тех случаях, когда необходимо учитывать сжимаемость жидкости, понятие функции тока остается полезным, когда удельный расход массы, например, ρu для стационарного течения, подставляется вместо компонент скорости, например, u , и уравнение (1.74) с $\partial \rho / \partial t = 0$ удовлетворяется тождественно.

Из анализа соотношения (13.48a), описывающего плоское течение несжимаемой жидкости, вытекает, что потенциал скоростей и функция тока свя-

заны дифференциальными уравнениями Коши-Римана. Следовательно, обе функции можно скомбинировать в аналитический комплексный потенциал $F(z)$, где $z = x + iy$ есть точка на плоскости течения (x, y) , $i^2 = -1$,

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad \Delta F = 0, \quad \Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \bar{z} = x - iy. \quad (13.50)$$

Отметим, что действительная и мнимая части являются гармоническими функциями.

Изотропная комплексная производная потенциала

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv \quad (13.51)$$

определяет комплексно-сопряженный вектор скорости; ее действительная часть есть x -компонента скорости, мнимая часть – противоположное по знаку значение y -компоненты скорости. Ниже приводятся примеры потенциальных течений и их линий тока, для чего используются несколько простых аналитических комплексных функций. Применение уравнения Бернулли (8.40) дает соответствующее поле давления. Сложные картины течений можно определить путем суперпозиции более простых. Кроме этого, возможно применение метода конформных отображений.

13.4.1. Примеры

(§) Плоское потенциальное течение по направлению к жесткой стенке

Пусть комплексный потенциал скоростей имеет вид $F(z) = az^2$ (a – действительное число), поэтому $\Phi = a(x^2 - y^2)$, $\psi = 2axy$. Линиями уровня $\psi = \text{const}$ являются ортогональные гиперболы, заполняющие все четыре четверти в плоскости (x, y) . Производная $dF/dz = 2az$ означает, что $u = 2ax$, $v = -2ay$,

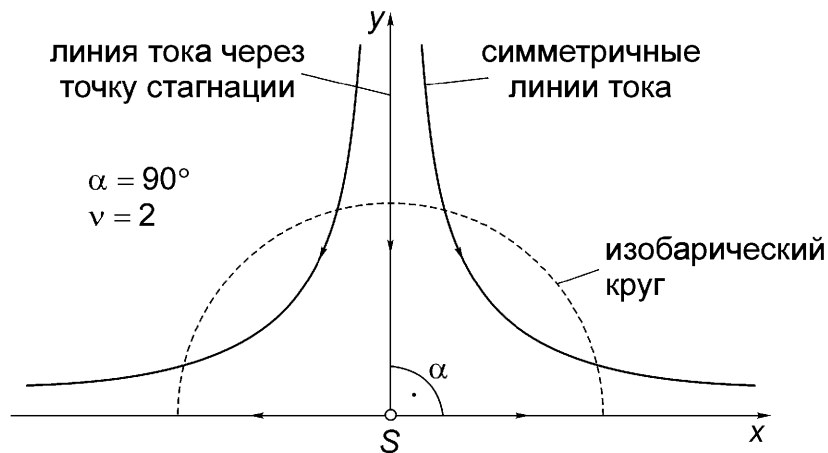


Рис. 13.11. Плоское потенциальное течение по направлению к жесткой стенке. В точке стагнации S – бифуркация линии тока.

то есть компоненты скорости линейно зависят от соответствующих координат. Линии тока в верхней полуплоскости $y \geq 0$ изображены на рис. 13.11.

Ни одна частица жидкости не переходит из верхней полуплоскости в нижнюю. Ось x является осью симметрии и частью раздваивающейся линии тока в точке стагнации S . Поэтому можно считать, что ось x проходит через неподвижную стенку. После аналогичных рассуждений заключаем, что ось $y = 0$ также проходит через неподвижную стенку. Линии постоянного давления представляют собой концентрические окружности с максимальным давлением в точке стагнации S , см. соотношение (8.40).

(§) Плоские течения в угловом пространстве и вокруг острого края

Если выбрать функцию $F(z) = a z^\nu$ (a, ν – действительные числа), где в полярных координатах $z = r \exp(i\varphi)$, то функция тока имеет вид $\psi = a r^\nu \sin(\nu\varphi)$. Для избежания двусмысленности из-за многозначности функции при материализации некоторых из прямых линий жесткими стенками считается, что $\nu = 3$, $\alpha = \pi/3$ (см. рис. 13.12(a)). В общем случае $\alpha = \pi/\nu$, $\nu > 1$.

Течение идеальной жидкости вокруг острого края имеет место при $0,5 < \nu < 1$ и изображается экспонентами. На рис. 13.12(b) показано течение при $\nu = 0,6$. Чтобы определить сингулярное течение идеальной жидкости вокруг края тонкой полубесконечной пластины, надо положить $\nu = 0,5$.

(§) Сингулярные потенциальные течения

Рассмотрим изотропный точечный источник постоянной мощности. Закон сохранения массы требует, чтобы расход через все контрольные сферы радиуса R , окружающие особую точку, был одинаковым и равнялся объему жидкости, пришедшему (источник) или ушедшему (сток) через эту точку. Такое течение должно быть радиальным. В плоском случае должна быть постоянной скорость изменения массы, вытекшей через круговую цилиндрическую контрольную по-

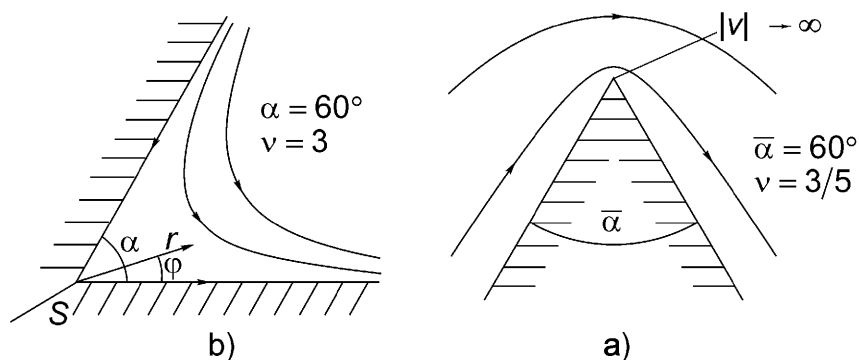


Рис. 13.12. Плоские потенциальные течения (a) в угловом пространстве и (b) вокруг острого края. Отметим точку стагнации S для случая (a) и нереалистическое бесконечное значение скорости у края для случая (b).

верхность радиуса r с центром в линейном источнике постоянной мощности, соответствующем точечному источнику в плоскости. Следовательно, зависимости радиальных скоростей от расстояния от особой точки существенно различаются при пространственном и плоском течениях,

$$\begin{aligned} \dot{m} = \rho 4\pi R^2 v_R(R) = \text{const} &\Rightarrow v_R(R) = \frac{\dot{m}}{\rho 4\pi R^2}; \\ \dot{m} = \rho 2\pi r v_r(r) = \text{const} &\Rightarrow v_r(r) = \frac{\dot{m}}{\rho 2\pi r}. \end{aligned} \quad (13.52)$$

После интегрирования получим потенциалы скоростей сингулярного радиального источника, которые также существенно различаются (для плоского течения также приведены функция тока и комплексный потенциал)

$$\begin{aligned} \Phi(R) &= \int v_R(R) dR = -\frac{\dot{m}}{\rho 4\pi} \frac{1}{R}; \\ \Phi(r) &= \int v_r(r) dr = \frac{\dot{m}}{\rho 2\pi} \ln r, \quad \Psi = \frac{\dot{m}}{\rho 2\pi} \varphi, \quad F(z) = \frac{\dot{m}}{\rho 2\pi} \ln z. \end{aligned} \quad (13.53a)$$

Вектор скорости и комплексно-сопряженная скорость после вычисления производных равны

$$\mathbf{v}(R) = \text{grad } \Phi(R); \quad F'(z) = \frac{\dot{m}}{\rho 2\pi} \frac{\bar{z}}{r^2}, \quad \bar{z} = r e^{-i\varphi}. \quad (13.53b)$$

Течение по направлению к малому отверстию в боковой стенке или на дне очень большого резервуара можно визуализировать, рассматривая половину модели течения в направлении стока. Течение, получающееся от суперпозиции источника и стока, можно найти, складывая их потенциалы.

Другой важный элемент сингулярного безвихревого плоского течения можно получить при анализе вихревой линии. Рассмотрим круговое течение вокруг оси с циркуляцией, равной нулю для любой замкнутой кривой, не окружающей точку оси. Выберем для такой петли две круговые дуги, ограниченные двумя радиальными линиями, тогда $\Gamma = v_2 r_2 \varphi - v_1 r_1 \varphi = 0$. Следовательно, величина скорости равна $v_\varphi(r) = C/r$, а векторы скоростей имеют вид $\mathbf{v} = v_\varphi(r) \mathbf{e}_\varphi$. Циркуляция вдоль любой замкнутой кривой, окружающей особую точку, постоянна. Например, после интегрирования вдоль концентрической окружности получим напряженность вихревой линии

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\varphi r d\varphi = 2\pi C = \text{const}. \quad (13.54a)$$

Так как отношение Γ / A становится бесконечно большим при стягивании кривой в точку, то вихрь ω бесконечен вдоль оси (т.е. вихревой линии) и равен нулю в любой другой точке течения. Потенциалы такого безвихревого течения в центрированной полярной системе координат имеют вид

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \Rightarrow F(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (13.54b)$$

Отметим также, что при вращении жидкости как жесткого целого ($v_\varphi = r\omega$) движение не является безвихревым. Сравнение этих потенциалов с потенциалами для точечного источника в плоскости (формула (13.53a)) показывает, что вещественные и мнимые части формул меняются местами. Два течения могут быть скомбинированы таким образом, чтобы исключить особенность на вихревой линии; согласование решений делается на цилиндрической поверхности $r = r_0$.

13.4.2. Метод сингулярностей

Различные виды течений получаются при комбинации источников, стоков, вихревых линий, а также параллельного однородного основного потока, простейшие из которых для плоского случая будут рассмотрены ниже. Подробное изложение этого вопроса приведено в книге

- Keune F., Burg K. Singularitätenverfahren der Strömungslehre. Karlsruhe, Braun, 1975.

(§) Суперпозиция линейного источника и параллельного основного потока

Линейный комплексный потенциал $u_\infty z$ описывает параллельный поток с постоянной скоростью, параллельной оси x . Комбинация с плоским точечным источником приводит к выражению

$$F(z) = u_\infty z + \frac{\dot{m}}{2\pi\rho} \ln z. \quad (13.55)$$

Комплексный потенциал определяет течение с особой точкой, в которой линия тока $y = 0$ разделяется, а координаты точки стагнации S находятся из соотношений

$$\frac{dF(z)}{dz} = u - iv = u_\infty + \frac{\dot{m}}{2\pi\rho} \frac{\bar{z}}{r^2} = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

следовательно,

$$r_s = |x_s|, \quad \varphi(s) = \pi, \quad x_s = -\frac{\dot{m}}{2\pi\rho u_\infty}, \quad y_s = 0. \quad (13.56)$$

В точке стагнации функция тока ψ принимает значение ψ_s , а линия тока, проходящая через эту точку, определяется согласно следующему соотношению

$$\psi = u_\infty y + \frac{\dot{m}}{2\pi\rho} \varphi = \psi_s = \frac{\dot{m}}{2\rho}. \quad (13.57)$$

Ее асимптоты, параллельные оси абсцисс, определяются выражением

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{\dot{m}}{2\rho u_\infty}. \quad (13.58)$$

На нижней половине рис. 13.13(а) показано, что истечение из точечного источника не выходит за линию тока, проходящую через точку стагнации. Поэтому последняя может быть “материализована”. Оставшееся течение может быть охарактеризовано как течение невязкой жидкости вокруг цилиндрического выступа полубесконечного тела ($x > x_S$).

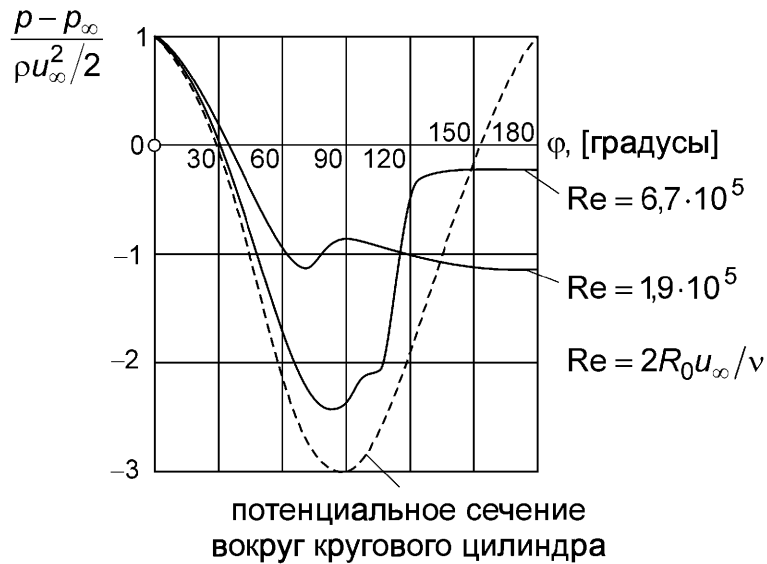
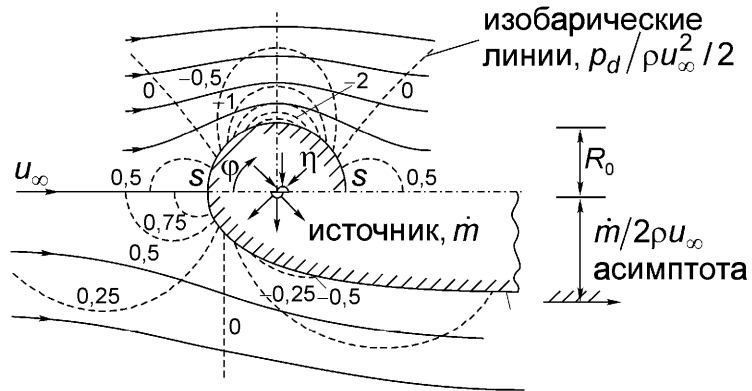


Рис. 13.13(а). Картины потенциальных течений: параллельный основной поток с точечным источником (полубесконечное тело) и диполем (круговой цилиндр). Диаграмма распределения давления на поверхности кругового цилиндра. Зависимость от вязкости.

Если в некоторой точке с координатой $x = a$ расположен сток с такой же мощностью, то имеет место вторая точка стагнации. Потенциал записывается путем суперпозиции

$$F(z) = u_{\infty}z + \frac{\dot{m}}{2\pi\rho} \ln \frac{z}{z-a}, \quad (13.59a)$$

после взятия производной и определения координат точек стагнации

$$F'(z) = u_{\infty} + \frac{\dot{m}}{2\pi\rho} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-a} \right) = 0, \quad x_s = \frac{a}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{\dot{m}}{\pi a \rho u_{\infty}}} \right), \quad y_s = 0$$

можно записать уравнение разветвляющейся линии тока

$$\psi = u_{\infty}y - \frac{\dot{m}}{2\pi\rho} \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{r} - \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \right] = \psi_s = 0.$$

Внешнее течение, то есть течение вокруг конечного цилиндра, называется течением Рэнкина.

При уменьшении расстояния a между источником и стоком форма тела становится все более и более круговой. Устремим a к нулю и одновременно будем увеличивать мощность источника до бесконечности так, чтобы их произведение оставалось конечным. Такую предельную совокупность источника и стока называют диполем, характеризующимся величиной η – моментом диполя. Линия тока, проходящая через точки стагнации и, следовательно, отделяющая внутреннее течение от внешнего, представляет собой окружность. Таким образом,

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ \dot{m} \rightarrow \infty}} \frac{\dot{m}}{\rho} a = \eta \Rightarrow F(z) = u_{\infty}z + \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{1}{z}; \quad (13.59b)$$

$$\psi = u_{\infty}y - \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{y}{r^2} = \psi_s = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = R_0 = \sqrt{\frac{\eta}{2\pi u_{\infty}}}, \\ \eta = 2\pi R_0^2 u_{\infty}. \end{cases}$$

Мощность диполя определяется через радиус кругового цилиндра R_0 . На верхней половине рис. 13.13(a) показана картина внешнего течения. Линии тока и изобары потенциального течения вокруг подобных конечных цилиндров соответствуют реальному течению вязкой жидкости только в некоторой близости от точки стагнации. На рис. 13.13(a) также приведена зависимость давления от числа Рейнольдса.

(§) Суперпозиция потенциальных вихревых линий и параллельного основного потока

Рассмотрим две параллельные вихревые линии с мощностями Γ_1 и Γ_2 , расположенные в точках $z_1(t)$ и $z_2(t)$ бесконечного жидкого тела. Комплексный потенциал получающегося безвихревого потока определяется путем суперпозиции

$$F_{1,2}(z) = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \ln(z - z_1) + \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \ln(z - z_2). \quad (13.60)$$

Вихри приводят в движение друг друга в направлении, перпендикулярном плоскости, образованной этими осями. Тогда вызванные скорости равны

$$\dot{z}_1 = \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2}, \quad \dot{z}_2 = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - z_1}. \quad (13.61)$$

Должна иметься ось, параллельная вихревым линиям и проходящая через «вихревой центр», у точек которой скорость постоянно равна нулю. Координаты легко определить из условия

$$\frac{dF_{1,2}}{dz} = 0 \Rightarrow z_\Gamma = \frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \text{const}, \quad \dot{z}_\Gamma \equiv 0. \quad (13.62)$$

Центр определяется по формуле (2.76) через статические моменты циркуляции. Жесткая линия, связывающая сингулярные вихревые точки, вращается вокруг этого центра с угловой скоростью

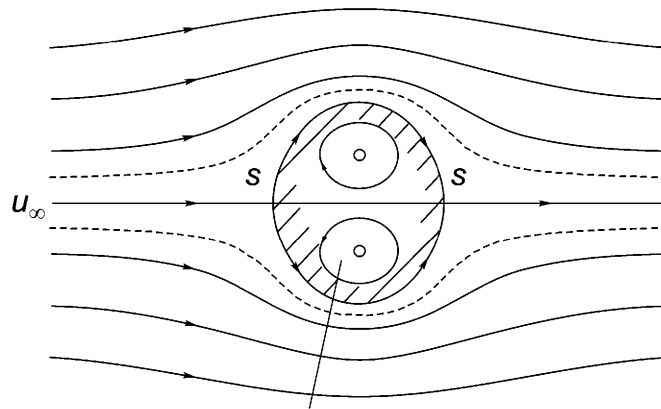
$$\omega = \frac{|\dot{z}|}{|z_1 - z_\Gamma|} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi a^2} = \text{const}, \quad a = |z_1 - z_2| = \text{const}. \quad (13.63)$$

Согласно (13.62) центр циркуляции уходит в бесконечность для противоположно направленных вихрей равной мощности, $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$ и $\omega \rightarrow 0$. Следовательно, в этом случае вихревые линии движутся вдоль параллельных прямых со скоростями $\Gamma / 2\pi a$. Ось симметрии разделяет течение на две половины и, следовательно, может считаться жесткой стенкой.

Наложим параллельный основной поток так, чтобы пара вихрей равной мощности стала стационарной. Суперпозиция приводит к соотношению

$$F(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{z}{a} + \ln \frac{z + a/2}{z - a/2} \right). \quad (13.64)$$

Две точки стагнации получающегося течения расположены на оси x . Контур линии тока разветвляется в этих точках (x есть ось симметрии), а внешнее течение приводит к картине потенциального течения вокруг округленного тела. На рис. 13.13(b) изображены линии тока параллельного основного потока, обте-



внутреннее течение (неподвижные вихри)

Рис. 13.13(b). Линии тока, вызванные стационарной парой потенциальных вихрей в параллельном основном потоке. Различия картин течения, разделенных линией тока, разветвляющейся в застойных точках S.

кающего цилиндра. Суперпозиция источников, стоков, диполей и вихревых линий может дать картины течений, при которых производится гидродинамическая подъемная сила, например, в профиле крыла. Классическим решением, найденным с помощью конформного отображения, является профиль Жуковского; это решение можно найти в литературе по механике жидкостей.

13.4.3. Гидродинамические силы при плоском стационарном потенциальном течении, формула Блазиуса

Результирующая распределения давления, действующего на жесткое тело, которое перемещается в идеальной жидкости поступательно с постоянной скоростью, может быть найдена с помощью комплексного анализа. Компоненты силы, приходящейся на единицу длины элементарного элемента на поверхности цилиндрического тела (рис. 13.14), равны ($dy/dx > 0$)



Рис. 13.14. Давление, действующее на твердое тело, движущееся поступательно и равномерно в идеальной жидкости.

$$dF_x = -pdy, \quad dF_y = pdx. \quad (13.65)$$

Момент относительно оси z определяется по формуле

$$dM_z = p(x dx + y dy). \quad (13.66)$$

Для построения комплексных обозначений введем мнимую компоненту аксиального момента с помощью вириала силы $d\mathbf{F}$, что можно рассматривать как обобщение статического момента к векторным величинам

$$dN = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{F} = p(-x dy + y dx). \quad (13.67)$$

При безвихревом движении давление можно найти из уравнения Бернулли (8.42)

$$p = \text{const} - \frac{\rho}{2} |\mathbf{v}|^2. \quad (13.68)$$

В терминах комплексного потенциала скоростей квадрат скорости равен

$$|\mathbf{v}|^2 = (u - iv)(u + iv) = \frac{dF}{dz} \frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}. \quad (13.69)$$

Если опустить константу Бернулли (так как постоянное давление, действующее на замкнутом контуре, самоуравновешено), то справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} dF_x - i dF_y &= -p(dy + i dx) = -i p d\bar{z} = \frac{i\rho}{2} \frac{dF}{dz} d\bar{F}, \\ dM_z + i dN &= p z d\bar{z} = -\frac{\rho}{2} z \frac{dF}{dz} d\bar{F}. \end{aligned} \quad (13.70)$$

Контур тела является частью разветвляющейся линии тока ($\psi = \psi_s$) и, следовательно, полная производная вдоль этой линии равна нулю ($d\psi = 0$). Это означает, что дифференциал комплексного потенциала dF действителен и поэтому равен дифференциалу сопряженного потенциала. Интегрирование (13.70) по замкнутому контуру C (рис. 13.14) приводит к формулам Блазиуса

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz, \quad M_z + iN = -\frac{\rho}{2} \oint_C z \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz. \quad (13.71)$$

Согласно правилам комплексного интегрирования результаты не зависят от контура C , если $F(z)$ и производная от нее dF/dz являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости определения внешнего течения. В этом случае во внешнем течении особенности не встречаются, и контур интегрирования можно выбрать произвольно, как показано на рис. 13.14. В случаях течения вокруг тел с изолированными особенностями (см., например, вихревую

дорожку Кармана, раздел 13.4.4) контур интегрирования также может быть выбран произвольно при условии соответствующего вырезания этих особенностей.

При параллельном основном потоке вокруг неподвижного твердого тела (см. раздел 13.4.2) производную комплексного потенциала скоростей удобно разложить в ряд Лорана (предполагается, что во внешнем течении особенности отсутствуют)

$$\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 = v_\infty^2 + 2v_\infty \frac{\dot{m}/\rho - i\Gamma}{2\pi z} + \frac{1}{2\pi z^2} \left[-2\eta v_\infty + \frac{(\dot{m}/\rho - i\Gamma)^2}{2\pi} \right] + O(z^3), \quad (13.72)$$

где $\eta = \eta_x + i\eta_y$ – результирующий комплексный момент всех диполей; Γ – результирующая циркуляция. После подстановки этого выражения в (13.71) можно произвести интегрирование вдоль окружности достаточно большого радиуса R (чтобы тело оказалось внутри окружности). Начало координат располагается внутри цилиндра. Только полюсы первого порядка во внутренности дают вклад в интегралы, причем формулы оказываются точными несмотря на разложение в ряд (13.72)

$$F_x - iF_y = 2\pi i \frac{i\rho}{2} 2v_\infty \frac{\dot{m}/\rho - i\Gamma}{2\pi},$$

$$M_z + iN = -2\pi i \frac{\rho}{2} \frac{1}{2\pi} \left[-2\eta v_\infty + \frac{(\dot{m}/\rho - i\Gamma)^2}{2\pi} \right]. \quad (13.73a)$$

Сравнивая действительные и мнимые части, приходим к явным формулам для вычисления результирующих при параллельном основном потоке

$F_x = -\dot{m}v_\infty$ – движущая сила плоского точечного источника;

$F_y = \rho v_\infty \Gamma$ – поперечная (подъемная) сила потенциального вихря; (13.73b)

$M_z = -\rho \left(\eta_y v_\infty + \frac{\dot{m}\Gamma}{2\pi\rho} \right)$ – гидродинамический момент относительно центра O , учтены источник, диполь и циркуляция.

13.4.4. Вихревая дорожка Кармана, число Струхала

В следе за неподвижным цилиндром, который обтекается параллельным основным потоком, наблюдаются периодические процессы. Иницирование таких вихрей есть типично вязкий эффект. Они распространяются поочередно от верхнего и нижнего оснований цилиндра в параллельных рядах. Картину течения можно аппроксимировать путем прибавления к стационарному параллельному основному потоку невязкой жидкости двух рядов потенциальных вихревых

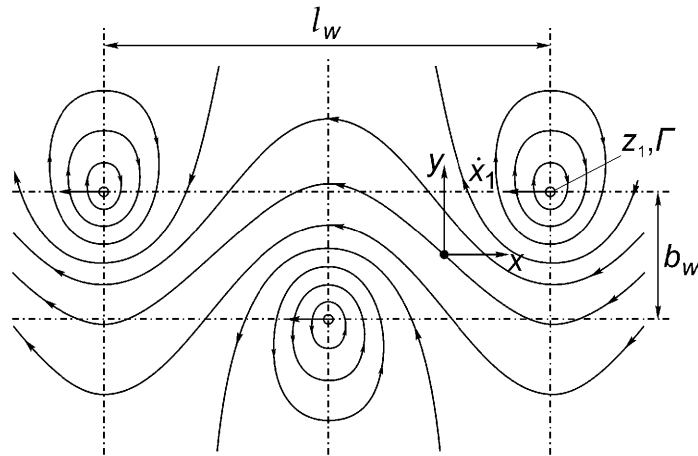


Рис. 13.15. Периодические потенциальные вихри. Скорости, индуцируемые в точках вихревых линий. Результирующие линии тока.

линий одинаковой мощности и с противоположно направленными циркуляциями. Здесь процесс диффузии циркуляции отдельных вихревых линий и вязкие эффекты не рассматриваются (см. пример А 13.4). Дорожка, ее ширина b_w и эквидистантное расстояние l_w схематически изображены на рис. 13.15. Система координат расположена так, чтобы “первая” вихревая линия располагалась в точке $z_1 = l_w/4 + ib_w/2$. Полный комплексный потенциал скоростей определяется путем суммирования отдельных вкладов (комплексный синус представляется в виде произведения бесконечного числа множителей)

$$\sin \pi z / l = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z/l)^2}{k^2} \right) \Rightarrow F_w(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\sin(z - z_1)\pi/l_w}{\sin(z + z_1)\pi/l_w}. \quad (13.74)$$

Скорость, вызванная бесконечной дорожкой в точке вихревой линии (скажем, первой), определяется как следующая производная

$$\dot{z}_1 = \left. \frac{dF_w}{dz} \right|_{z=z_1 \neq 1} = -\frac{\Gamma}{2l_w} \tanh \pi b_w / l_w = \dot{x}_1, \quad \dot{y}_1 = 0. \quad (13.75)$$

Дорожка движется с постоянной скоростью справа налево согласно соотношениям (13.75). Такая картина течения наблюдается при наличии следа позади обтекаемого цилиндрического тела, движущегося в вязкой жидкости с некоторой постоянной скоростью, которая больше, чем u_∞ . Если применить теорему об изменении количества движения к контрольному объему, который соответствующим образом прикреплен к движущемуся телу ($w_x = -u_\infty$, см. (7.13) и (7.14)), и рассмотреть достаточно большое число вихревых линий, то можно найти силу сопротивления. Она является следствием периодического образования новых вихревых линий из-за периодического отрыва пограничного слоя у поверхности тела. Течение становится сильно вихревым при рассмотрении вяз-

кой жидкости, тогда как аппроксимация потенциальными вихрями оставляет течение идеальной жидкости безвихревым. Сила сопротивления равна

$$F_D = \rho \Gamma (u_\infty - 2\dot{x}_1) b_w / l_w + \rho \Gamma^2 / 2\pi l_w. \quad (13.76)$$

Теоретические исследования, которые хорошо подтверждены экспериментально, показывают, что наименее нестабильная конфигурация дорожки по отношению к малым осцилляциям определяется соотношением $b_w / l_w = 0,281$. В этом случае циркуляцию можно не принимать во внимание, и теоретический коэффициент сопротивления есть квадратичная функция

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2 d} \approx \frac{l_w}{d} \left[1,59 \frac{|\dot{x}_1|}{u_\infty} - 0,63 \left(\frac{\dot{x}_1}{u_\infty} \right)^2 \right], \quad \dot{x}_1 = \Gamma / 2l_w \sqrt{2}. \quad (13.77)$$

Частота производства вихрей f и, следовательно, геометрия дорожки Кармана в значительной степени зависят от поперечной ширины цилиндра d и его формы. В дальнейшем тело полагается покоящимся. Для параллельного основного потока со скоростью u_∞ (в этом случае вихревая дорожка перемещается вправо) вводится безразмерный коэффициент (число Струхала), определяющий подобие,

$$St = \frac{f d}{u_\infty}, \quad f = \frac{u_\infty - |\dot{x}_1|}{l_w} \quad [\text{Гц}]. \quad (13.78)$$

В широком диапазоне чисел Рейнольдса безвихревого параллельного основного потока ($500 < Re = u_\infty d / \nu < 50000$) число Струхала ограничено в узких пределах. Так, для круглых цилиндров $0,18 \leq St \leq 0,20$, для пластин с углами атаки $\alpha > 30^\circ$ $0,15 \leq St \leq 0,18$. Однако число Струхала очень чувствительно, если в приближающемся основном потоке присутствует вращение. Так, $St = 0,1$ наблюдалось при обтекании ветром стальных колонн круглого сечения. Отметим, что шероховатость поверхности также оказывает влияние на значение числа Струхала.

Периодическая неуравновешенная сила ввиду периодического образования вихрей вызывает колебания, которые приводят к таким явлениям как феномен эоловой арфы, гудение телефонных проводов и, вообще, свист ветра. Когда частота распространения f соответствует основной собственной частоте структуры, имеет место резонанс, который, если длится достаточно долго, может вызвать сильные повреждения структуры. Тонкие трубы и висячие мосты с длинными пролетами подвергаются таким воздействиям, поэтому при их эксплуатации необходимы контрольные замеры. Комбинация изгибных и крутильных колебаний с дополнительным действием изменяющейся подъемной силы

чрезвычайно опасна, она может привести к таким серьезным разрушениям как, например, известный случай обвала Такомского моста в штате Вашингтон (см. также п. 9.6).

В суммарном коэффициенте сопротивления (рис. 13.8) доминирует сопротивление давления. Сопротивление трения уменьшается при увеличении числа Рейнольдса, тогда как сопротивление давления остается практически неизменным. Образование вихревой дорожки Кармана наблюдается для $Re > 40$. Резкое уменьшение сопротивления от значения около 1,2 до около 0,3 при критическом $Re = (2 \div 4) \times 10^5$ свидетельствует о внезапном изменении картины течения: ламинарный пограничный слой с точкой отрыва при $\varphi \approx 80^\circ$ изменяется на турбулентный слой перед тем, как происходит отрыв, который затем сдвигается до угла $\varphi \approx 105^\circ$. Несмотря на незначительное увеличение сопротивления трения, связанное с турбулентным пограничным слоем, уменьшение сопротивления давления доминирует. Ширина дорожки Кармана становится меньше, а диссипация упорядоченной кинетической энергии уменьшается.

13.4.5. Гидродинамическое давление на поверхности движущейся плотины

При горизонтальном движении грунта, например, при землетрясении, влажная поверхность плотины или плоской стенки контейнера движется по направлению к жидкости со свободной поверхностью. На рис. 13.16 изображена двумерная конфигурация длинной жесткой плотины. Жидкость предполагается несжимаемой и невязкой, поэтому течение безвихревое. Потенциал скоростей ищется в форме разделяющегося решения уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Phi = g(x)h(y). \quad (13.79)$$

После подстановки и разделения переменных получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

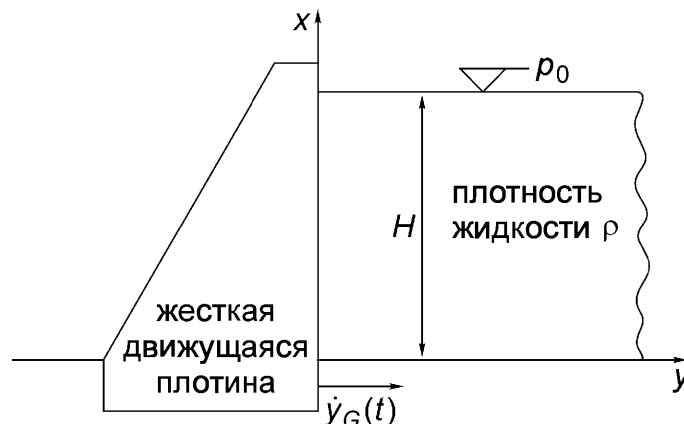


Рис. 13.16. Движущаяся граница. Потенциальное течение несжимаемой жидкости.

$$\frac{g''}{g} = -\frac{h''}{h} = -\lambda^2 = \text{const.} \quad (13.80)$$

С помощью суперпозиции базисных решений $g = \cos(\lambda x)$ и $h = e^{-\lambda y}$ (последнее стремится к нулю при $y \rightarrow \infty$, $\lambda > 0$) находится зависящий от времени потенциал в виде следующего ряда (он удовлетворяет (13.79) при любой функции $f(t)$)

$$\Phi(x, y; t) = f(t) \sum_n C_n e^{-\lambda_n y} \cos(\lambda_n x). \quad (13.81)$$

Граничные условия согласно рис. 13.16 (полоска жидкости полубесконечна) следующие

$$x = 0: \quad v_x = \text{grad } \Phi \cdot \mathbf{e}_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -f(t) \sum_n \lambda_n C_n e^{-\lambda_n y} \sin(\lambda_n x) \Big|_{x=0} = 0, \quad (13.82)$$

$$y = 0: \quad v_y = \text{grad } \Phi \cdot \mathbf{e}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \dot{y}_G \quad \Rightarrow \quad -f(t) \sum_n \lambda_n C_n e^{-\lambda_n y} \cos(\lambda_n x) \Big|_{y=0} = \dot{y}_G, \quad (13.83)$$

$$x = H: \quad p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{f}(t) \sum_n C_n e^{-\lambda_n y} \cos(\lambda_n x) \Big|_{x=H} = 0, \quad (13.84)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \Phi = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n > 0. \quad (13.85)$$

Изменение давления из-за поверхностных волн в соотношении (13.84) не учитывается. В противном случае при $x = H$ надо записать линеаризованное смешанное граничное условие, учитывающее влияние поверхностных волн (аппроксимация первого порядка). Это условие учитывает увеличение квазигидростатического давления под гребнем волны $x_S(y, t)$: $p = -\rho \partial \Phi / \partial t = \rho g(x_S - H)$ и получается после дифференцирования по времени и подстановки вертикальной компоненты скорости $g \partial \Phi / \partial x + \partial^2 \Phi / \partial t^2 \Big|_{x=H} = 0$, см. также (9.135). Упрощенное условие (13.84) означает, что характеристические числа можно найти следующим образом

$$\cos \lambda_n H = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n H = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.86)$$

Константы C_n определяются через условие (13.83)

$$\sum_n \lambda_n C_n \cos \lambda_n x = -1, \quad f(t) = \dot{y}_G. \quad (13.87)$$

Для этого постоянная правая часть записывается как сумма периодических слагаемых в виде ряда Фурье по косинусам: область определения есть $0 < x < H$ (рис. 13.16), следовательно, период равен $4H$. Смотрите:

- Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Москва, Наука, 1986.

$$-1 = -\frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{2H} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{2H} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{2H} \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,2,\dots} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \lambda_n x. \quad (13.88)$$

Приравнявая (13.87) и (13.88) и сравнивая коэффициенты, получим

$$C_n = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n-1} \frac{2H}{(2n-1)\pi} = \frac{(-1)^n 8H}{\pi^2 (2n-1)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.89)$$

Периодическое разложение (13.87) является ключевым шагом при решении подобных задач взаимодействия жидкости и твердого тела. Аналогичным образом может быть решена более сложная задача взаимодействия упругой стенки с линейно сжимаемой жидкостью, см. пример А 13.2. В результате можно определить гидродинамическое давление тоже в виде ряда. При $y = 0$ оно представляет собой динамическую нагрузку на плотину (в дополнении к гидростатическому давлению)

$$p(x, y; t) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 2\rho H \ddot{y}_G \sum_{n=1,2,\dots} \frac{(-1)^n}{\mu_n^2} e^{-\mu_n y/H} \cos \frac{\mu_n x}{H}, \quad (13.90)$$

где $\mu_n = (2n-1)\pi/2$.

Отметим, что динамическое давление пропорционально ускорению грунта. Выражение (13.90) можно обобщить на случай линейной сжимаемости жидкости. Функция влияния ядра получающегося интеграла представляет собой функцию Бесселя нулевого порядка. При низких частотах может наблюдаться резонанс.

13.4.6. Стационарное истечение газа из резервуара давления

При течении через малое сопло под действием атмосферного давления p_0 формируется свободная струя. Предполагается, что изменение давления от внутреннего давления p_1 подчиняется изэнтропическому условию

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{1/\kappa}, \quad \kappa = c_p / c_v, \quad (13.91)$$

где c_p и c_v – удельные теплоемкости идеального газа при постоянных давлении и плотности (удельном объеме), см. также (2.90). Уравнение Бернулли (8.31) при учете сжимаемости дает вдоль линии тока от точки из внутренности сосуда большой вместимости (где газ можно считать покоящимся) до точки в свободной струе (в поперечном сечении A_0)

$$\frac{v_0^2}{2} - 0 = - \int_{p_1}^{p_0} \frac{dp}{\rho} = - \frac{p_1}{\rho_1} \int_1^{p_0/p_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-1/\kappa} d\left(\frac{p}{p_1} \right) = - \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]. \quad (13.92)$$

Отметим, что здесь массовые силы не рассматриваются.

Расход массы определяется выражением

$$\dot{m} = \rho_0 v_0 A_0 = A_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{1/\kappa} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 \rho_1 \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right]}, \quad (13.93)$$

которое, как ожидалось, равно нулю, если $p_1 = p_0$; однако, это совершенно неестественно, если резервуар окружен вакуумом, то есть при $p_0 = 0$. Последний случай является нефизическим, поэтому выражение (13.93) можно считать справедливым только до тех пор, пока расход массы не станет максимальным при некотором критическом внешнем давлении $p_0 = p^*$. Критическое соотношение давлений при заданном p_1 определяется по формуле

$$\frac{p^*}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (13.94)$$

(например, для сухого воздуха $\kappa = 1,4$, поэтому $p^* / p_1 = 0,528$). Следовательно, максимальный расход массы равен

$$\max \dot{m} = A_0 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{1/(\kappa-1)} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} p_1 \rho_1}. \quad (13.95)$$

В этом случае скорость струи равна местной скорости звука в газе при критическом давлении

$$c = \sqrt{\left. \frac{dp}{\rho} \right|_{p^*}} = v_0^* = \sqrt{\frac{\kappa p_1}{\rho_1} \left(\frac{p^*}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa}} = c^*. \quad (13.96)$$

В терминах числа Маха $Ma = v/c$ критические условия достигаются, если в свободной струе локальное число Маха равно единице ($Ma^* = v_0/c = 1$). Соотношение (13.93) справедливо только для дозвуковых потоков (т.е. при $p_0 \geq p^*$). Уменьшение внешнего давления ниже p^* никак не будет сказываться

на явлении истечения, так как скорость течения уже достигла скорости звука. Отметим, что скорость течения не может превысить максимального значения из формулы (13.95). Для $p_0 < p^*$ скорость не зависит от давления p_0 . Плотность скорости потока $\rho^* v^*$ максимальна при критическом давлении p^* . Если давление в свободной струе $p^* > p_0$, то наблюдаются поперечные колебания, причем в зонах более широких поперечных сечений достигаются сверхзвуковые скорости. Обычно давление p_0 задается; для газа с $\kappa = 1,4$ давление в сосуде $p_1 = 1,89 p_0$ соответствует максимальной скорости потока. Любое дальнейшее увеличение внутреннего давления p_0 на скорость потока повлиять не может.

При сверхкритическом соотношении давлений желательно управлять расширением свободной струи. Сопло должно быть переконструировано путем добавления расширяющейся трубы позади наименьшего поперечного сечения A_0 первоначально суживающейся части. Такого рода сопла называют соплами Лавалля, в которых критическое давление p^* и локальное число Маха $Ma^* = 1$ достигаются в сечении A_0 . В противоположность обычно встречающимся дозвуковым потокам при сверхзвуковом течении через расширяющуюся часть сопла Лавалля давление уменьшается. Сверхзвуковой поток ускоряется, когда он входит в часть трубы с увеличивающимися поперечными сечениями. После прохождения через такое сопло Лавалля свободная струя, текущая в вакуум, имеет следующую максимальную скорость

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1}} = c_1 \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}}. \quad (13.97)$$

Расход массы по-прежнему вычисляется по формуле (13.95), так как в самом узком поперечном сечении A_0 критическое давление равно $p^* = p_0$.

Подробное изложение газовой динамики можно найти в книгах:

- Guderley K.G. Theorie schallnaher Strömungen. Berlin, Springer-Verlag, 1957.
- Oswatitsch K. Gasdynamik. Wien, Springer-Verlag, 1976.

13.5. Интегральный метод количества движения для анализа пограничного слоя

Этот метод, предложенный Карманом, применим для исследования как ламинарного, так и турбулентного пограничных слоев. В последнем случае должно быть сделано дополнительное предположение о сдвиговых напряжениях на стенке (следует учитывать ламинарный подслой). Считается, что сдвиговые напряжения пренебрежимо малы на краю пограничного слоя $y = \delta(x)$, см. (13.39),

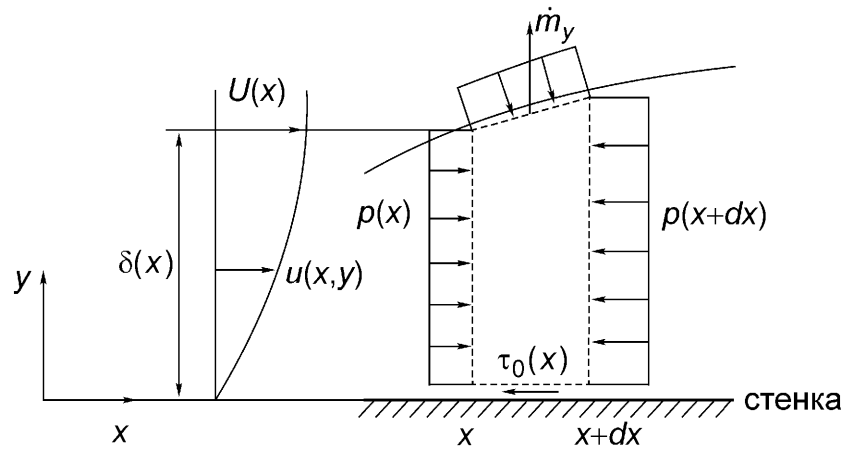


Рис. 13.17. Стационарное течение несжимаемой жидкости через контрольный объем пограничного слоя бесконечно малой длины dx . Скорость течения невязкой жидкости $U(x)$, вызванного градиентом давления.

где имеет место плавный переход к внешнему невязкому течению. Рассмотрим двумерное стационарное течение несжимаемой жидкости в пограничном слое, ограниченном элементом стенки dx и продолжающемся до края, где задана скорость $U = U(x)$. Запишем соотношение (7.13) для оси x – оси, параллельной стенке; скорости течения берутся на единицу длины. После разложения всех функций аргумента $(x + dx)$ в окрестности x , деления на dx и перехода к пределу $dx \rightarrow 0$ имеем (τ_0 – сдвиговые напряжения на стенке, см. рис. 13.17)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy + \dot{m}'_y U(x) = -\tau_0 - \delta(x) \frac{dp}{dx}, \quad \dot{m}'_y dx = -\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) dx. \quad (13.98a)$$

Отметим, что скорость течения через край должна равняться результирующему оттоку через сечения $\delta(x)$ и $\delta(x + dx)$ пограничного слоя. Градиент давления можно выразить через скорость с помощью стационарного уравнения Эйлера (8.30), записанного для внешнего невязкого течения при отсутствии массовых сил,

$$\rho U \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx}. \quad (13.98b)$$

После аналогичных преобразований относительно производной потока количества движения через край можно получить следующее выражение для вычисления сдвиговых напряжений

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \left[U^2 \int_0^{\delta(x)} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \right] + \rho U \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy. \quad (13.99)$$

Оставшиеся интегралы определяют толщину пограничного слоя относительно потока количества движения (толщину количества движения $\theta(x)$) и относительно скорости течения (толщину перемещения $\delta^*(x)$):

$$\theta(x) = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \delta^*(x) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (13.100)$$

Верхний предел интегрирования можно считать бесконечным, так как подынтегральные выражения равны нулю при $y > \delta(x)$. Соотношения (13.99) и (13.100) удобно использовать, если распределение скорости известно или предположен его вид. Для рассмотренного в разделе 13.3.2 случая течения вдоль плоской пластины (градиент давления отсутствует, $U = \text{const}$) с учетом (13.99) получим

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow c_f = \frac{\tau_0}{\rho U^2 / 2} = 2 \frac{d\theta}{dx}, \quad (13.101)$$

где c_f – локальный коэффициент трения. Простейшей аппроксимацией распределения скоростей при ламинарном движении является параболическая форма

$$u/U = 2y/\delta - (y/\delta)^2. \quad (13.102)$$

Такое распределение удовлетворяет условию отсутствия скольжения ($u = 0$ при $y = 0$) и условиям перехода через край ($u = U$ и $du/dy = 0$ при $y = \delta(x)$), см. раздел 13.3.2.

13.6. Упражнения А 13.1 – А 13.5 и решения

А 13.1: Вязкая жидкость вращается в расширяющемся цилиндрическом контейнере подобно затвердевшему твердому телу с угловой скоростью $\Omega = \text{const}$. Определить поверхности постоянного давления, в том числе форму границы жидкости с воздухом, если атмосферное давление равно p_0 (рис. А 13.1).

Решение: Вращение твердого тела не является безвихревым (см. соотношение (13.54) для безвихревого течения потенциального вихря). Вдоль вертикальной оси $r = 0$ гидростатическое давление распределено по закону $p(r = 0, h) = p_0 + \rho gh$, $h = -z$. Радиальная проекция векторного уравнения Навье-Стокса, ортогональная круговым линиям, имеет вид ($v_r = 0$, $v = r\Omega$)

$$\rho \frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \Omega^2,$$

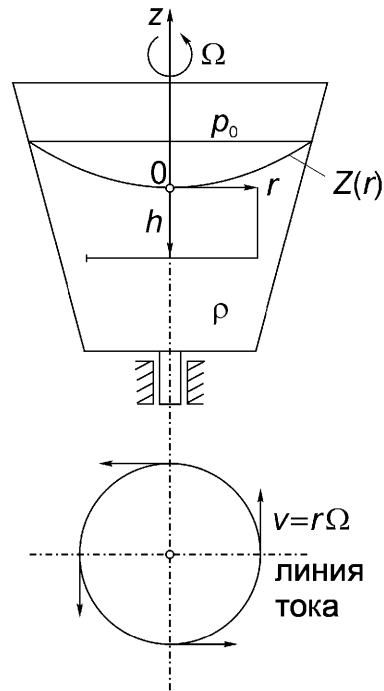


Рис. А 13.1.

или, проинтегрировав,

$$p(r, h) = p_0 + \rho gh + \rho \frac{r^2 \Omega^2}{2}.$$

Полученное соотношение можно проверить путем рассмотрения уравнения Бернулли (8.66), записанного во вращающейся системе координат при отсутствии относительного течения.

Поверхности постоянного давления представляют собой параболоиды вращения, аффинные свободной поверхности $Z(r)$, положение которой определяется из условия $p(r, h = -Z) = p_0$:

$$Z(r) = \frac{r^2 \Omega^2}{2g}.$$

А 13.2: Модифицируем формулу для определения распределения гидродинамического давления (13.90) с учетом течения, вызванного изгибом заземленной линейно упругой пластины (рис. А 13.2). Изгибная жесткость $K = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ предполагается постоянной. Среднее сечение деформируется в цилиндрическую поверхность, которая аппроксимируется конечным рядом согласно методу Ритца. Собственные функции $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$ выбираются из ортогональной системы функций в $[0, H]$. После подстановки K в уравнение (7.147) применяется метод Галеркина (11.11). Записать гидродина-

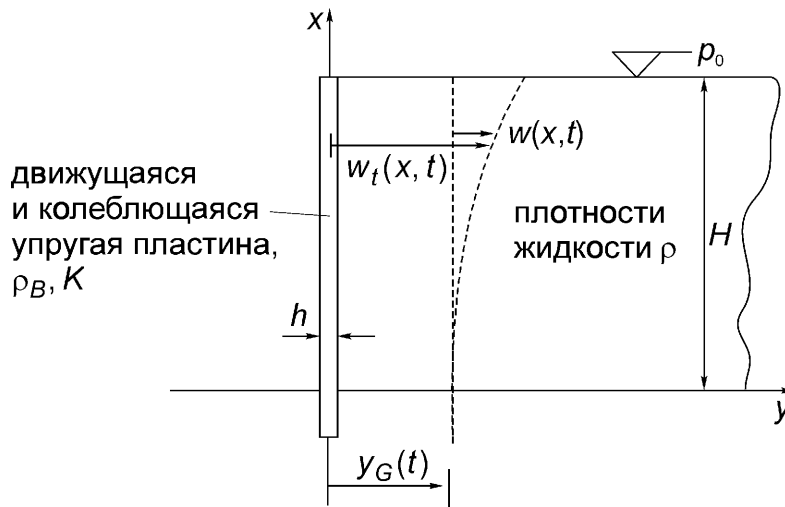


Рис. А 13.2.

мически связанные линейные уравнения движения для обобщенных координат $q_i(t)$.

Решение: Решение для линеаризованного течения несжимаемой жидкости есть суперпозиция потенциала скоростей (13.81), где C_n определяются согласно (13.89), и отражающего эффект деформации $w(x, t)$ пластины потенциала Φ_D , представляемого аналогичным рядом,

$$\Phi_D(x, y, t) = f(t) \sum_n D_n \cos \lambda_n x e^{-\lambda_n y}, \quad \lambda_n \text{ из (13.86)}.$$

Константы D_n определяются из оставшегося неоднородного граничного условия при $y = 0$:

$$\frac{\partial \Phi_D}{\partial y} = \dot{w}(x, t) = -f(t) \sum_n \lambda_n D_n \cos \lambda_n x = \sum_{i=1}^m \dot{q}_i(t) \varphi_i(x).$$

Аналогично соотношению (13.88) правая часть должна быть разложена в ряд Фурье по косинусам. Функции формы $\varphi_i(x)$ с периодом $4H$, симметричные относительно $x = 0$, имеют соответствующие коэффициенты Фурье. После сравнения коэффициентов получаем

$$C_{ni} = \frac{2}{H} \int_0^H \varphi_i(x) \cos \lambda_n x dx \Rightarrow -f(t) D_n = \lambda_n^{-1} \sum_{i=1}^m \dot{q}_i(t) C_{ni}.$$

Дополнительное гидродинамическое давление, возникающее из-за деформации пластины, выражается через двойной ряд

$$p_D(x, y, t) = -\rho \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \rho \ddot{q}_i(t) \sum_n \left(\lambda_n^{-1} C_{ni} e^{-\lambda_n y} \cos \lambda_n x \right).$$

Динамическая нагрузка на поверхности $y = 0$ с учетом суперпозиции имеет вид

$$\bar{p} = p(x, 0, t) + p_D(x, 0, t),$$

где p находится согласно (13.90).

Подстановка в (7.147) дает ошибку

$$\sum_{k=1}^m \left\{ K \frac{\partial^4 \varphi_k}{\partial x^4} q_k(t) + h \rho_B [\ddot{y}_G(t) + \ddot{q}_k(t) \varphi_k(x)] \right\} + \bar{p}(x, 0, t) = p^*.$$

Учитывая ортогональность функций формы, использование метода Галеркина приводит к соотношениям

$$\int_0^H \varphi_k(x) h \rho_B \varphi_j(x) dx = m_j^{(B)} \delta_{kj}, \quad \int_0^H \varphi_j(x) K \frac{\partial^4 \varphi_k}{\partial x^4} dx = k_j \delta_{kj},$$

$$h \rho_B \int_0^H \varphi_j(x) dx = L_j,$$

а гидродинамически связанная система m уравнений движения имеет вид (пренебрегая демпфированием)

$$m_j^{(B)} \ddot{q}_j + k_j q_j = -L_j \ddot{y}_G(t) - m_j \ddot{y}_G(t) - \sum_{i=1}^m m_{ji} \ddot{q}_i, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$m_j = \rho \sum_n \frac{(-1)^n}{\lambda_n^2} C_{nj}, \quad m_{ji} = \rho \frac{H}{2} \sum_n \frac{1}{\lambda_n} C_{ni} C_{nj}.$$

Естественные частоты колебаний пластины в вакууме приближенно равны $\sqrt{k_j / m_j^{(B)}}$. Решение уравнений движения довольно сложно из-за гидродинамической связи. Динамические напряжения в пластине вычисляются методами статики, если добавить силы инерции,

$$\hat{p}(x, t) = \bar{p}(x, t) - h \rho_B [\ddot{y}_G(t) + \ddot{w}^*(x, t)].$$

А 13.3: Показать, что плоское течение невязкой несжимаемой жидкости в однородном параллельном гравитационном поле ($v_x = u = \text{const}$, $v_y = -g x / u$, ось y направлена вверх) есть точное решение уравнения Эйлера, а также уравнения неразрывности. Более того, любую трубку тока можно изолировать, причем

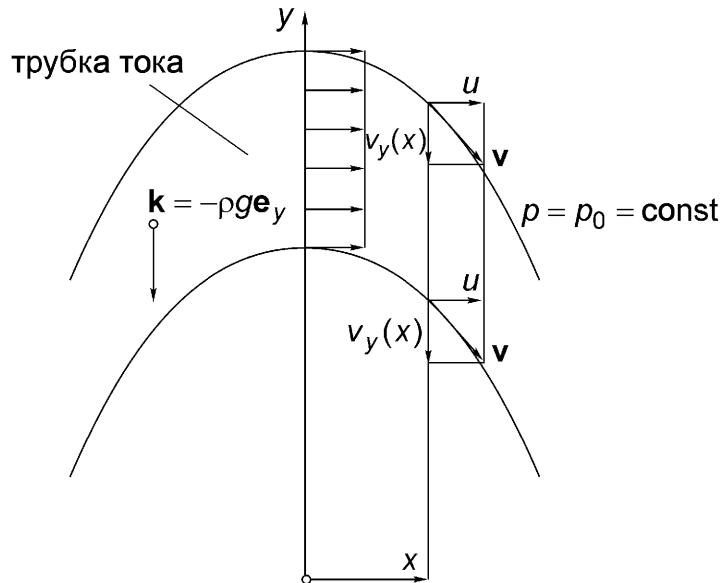


Рис. А 13.3. Гидравлическая арка.

получается “гидравлическая арка” с обеими свободными поверхностями постоянного давления. Смотрите статью

- Chia-Shun-Yih. The hydraulic arch. Quarterly Applied Mathematics, Vol. 31, 1973, pp. 377-378.

Решение: Запишем уравнения Эйлера (8.30) в компонентной форме

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -g,$$

из рассмотрения которых следует, что $p = \text{const}$ для всех точек плоскости (x, y) .

Течение не является безвихревым, так как $\text{rot } \mathbf{v} = (-g/u) \mathbf{e}_z \neq 0$. Функция тока такого течения имеет вид (см. (13.48a))

$$\psi(x, y) = uy + \frac{g}{2} \frac{x^2}{u}.$$

Линии тока представляют собой конгруэнтные параболы $\psi = \text{const}$, вдоль которых давление постоянно. Поэтому свободные поверхности действительно существуют, см. рис. А 13.3.

А 13.4: Рассмотрим пример использования уравнения Навье-Стокса на примере диффузии вихря в безграничной вязкой жидкости в двумерной области. Начальные условия задаются распределением скоростей потенциального вихря.

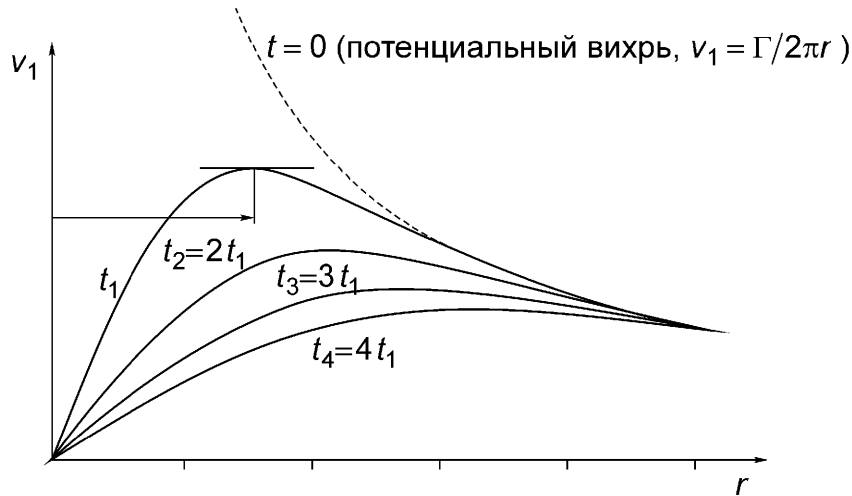


Рис. А 13.4. Диффузия вихря. Свободное течение без подвода энергии извне.

Решение: Пусть вертикальная ось z есть вихревая линия. Если положить, что в полярных координатах $v_\phi = v$, то условие на градиент давления, поперечный к круговым линиям тока, приводит к соотношению $\rho v^2 / r = \partial p / \partial r$ (ввиду $\partial v_r / \partial t = 0$, $v_r = 0$). Вторая компонента векторного уравнения Навье-Стокса приводит к соотношению $\partial v / \partial t = \nu (\Delta v - v / r^2)$. Вихрь имеет единственную компоненту $\omega_z = \omega = (1/2r) \partial(rv) / \partial r$. Исключая скорость v , приходим к уравнению диффузии [можно сравнить с уравнением (6.354) для нестационарного осесимметричного распределения температуры]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right).$$

Введем новую переменную $\zeta = r / 2\sqrt{\nu t}$, а также безразмерную угловую скорость $\Omega = \omega t$. Тогда можно получить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\Omega'' + \left(2\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \Omega' + 4\Omega = 0, \quad \Omega' \equiv \frac{d\Omega}{d\zeta}.$$

Х. Гертлер подробно изучил решения этого уравнения, умноженного на ζ . Функция Гаусса $\Omega_1 = C_1 \exp(-\zeta^2)$ представляет частное решение уравнения. Дополнительные решения могут быть найдены дифференцированием по времени t . Следовательно,

$$\omega_1 = \frac{C_1}{t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right), \quad v_1 = \frac{2C_1\nu}{r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right),$$

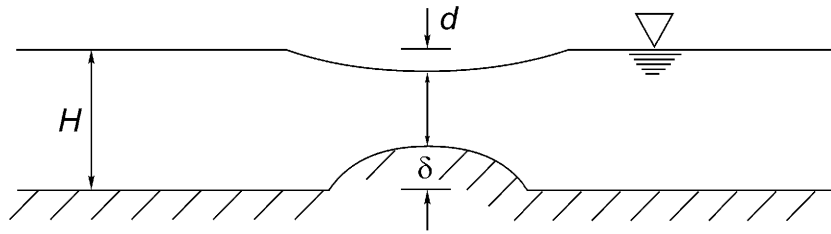


Рис. А 13.5.

так как в пределе $t \rightarrow 0$ эти формулы удовлетворяют заданному потенциальному вихрю [см. (13.54) и рис. А 13.4]:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega_1|_{r>0} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} v_1|_{r>0} = \frac{2C_1 v}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Свободное течение вязкой жидкости со временем затухает, и монотонно увеличивающаяся внутренняя часть жидкости вращается как твердое тело.

А 13.5: Жесткий выступ высотой δ помещен на дне канала постоянной ширины B . В результате свободная поверхность при стационарных условиях течения опустится на величину d . Высота канала вверх и вниз по течению равна H , как показано на рис. А 13.5. Пренебрегая влиянием трения, вычислить массовый расход несжимаемой жидкости (воды) в так называемой трубе Вентури.

Решение: Рассмотрим массовый расход жидкости

$$\dot{m} = \rho v_1 H B = \rho v_2 (H - d - \delta) B,$$

уравнение Бернулли вдоль линии тока

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2$$

и предположим, что распределение гидростатического давления в вертикальном направлении, пренебрегая эффектами кривизны линий тока в окрестности выступа, имеет вид

$$p_1(z) = \rho g(H - z), \quad p_2(z) = \rho g(H - d - z), \quad z \geq \delta.$$

После исключения давления и скорости получим

$$\dot{m} = \rho H B \left(\frac{H-d}{\delta} - 1 \right) \sqrt{\frac{2gd}{2(1+d/\delta)H/\delta - (1+d/\delta)^2}}.$$

14 Избранные задачи

На протяжении всей книги в каждой главе приводятся иллюстративные примеры, а также упражнения с полным решением, представленные в виде приложений к каждой из тринадцати глав. В этом разделе собраны задачи, необходимые для дальнейшего изучения тем, рассмотренных ранее. Задачи подобраны в порядке, соответствующем оглавлению. Рисунки последовательно не пронумерованы, а их номера соответствуют номерам задач. При решении задач можно воспользоваться следующей литературой*:

- Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М., Наука, 1969.
- Безухов Н.И., Лужин О.В. Применение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. М., Высшая школа, 1974.
- Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Демьянушко И.В., Дульнев Г.А., Сизова Р.И. Термопрочность деталей машин. М., Машиностроение, 1975.
- Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М., Мир, 1965.
- Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М., Мир, 1964.
- Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973.
- Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М., Машиностроение, 1988.
- Гейтвуд Б.Е. Температурные напряжения. М., ИЛ, 1959.
- Гинзбург И.П. Аэрогазодинамика. М., Высшая школа, 1966.
- Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975.
- Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М., издательство Московского университета, 1990.
- Ильюшин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959.
- Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М., Наука, 1974.
- Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М., Наука, 1969.
- Качанов Л.М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
- Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев, Вища школа, 1975.
- Кочин Н.Е., Кибель И.Я., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, тома I и II. М., Физматгиз, 1963.
- Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М., Мир, 1982.
- Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.
- Лодж А.С. Эластичные жидкости. М., Наука, 1969.

* Список литературы на русском языке составлен редактором перевода.

- Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1973.
- Лурье А.И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
- Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М., Наука, 1980.
- Лурье А.И. Теория упругости. М., Наука, 1970.
- Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л., ОНТИ, 1935.
- Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., Машиностроение, 1975.
- Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М., Мир, 1974.
- Механика сплошных сред в задачах (под редакцией М.Э. Эглит). М., Московский Лицей, 1996.
- Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966.
- Никитин Н.И. Курс теоретической механики. М., Высшая школа, 1990.
- Новацкий В. Динамика сооружений. М., Стройиздат, 1963.
- Новацкий В. Теория упругости. М., Мир, 1975.
- Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М., Мир, 1981.
- Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М., издательство Московского университета, 1984.
- Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения: теория и приложения. М., Наука, 1982.
- Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упруго-пластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М., Наука, 1986.
- Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.Н., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении, тома I, II, III. М., Машгиз, 1956 - 1959.
- Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М., ИЛ, 1963.
- Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М., Наука, 1979.
- Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966.
- Работнов Ю.Н. Соппротивление материалов. М., Физматгиз, 1962.
- Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., Наука, 1977.
- Разрушение (под редакцией Г. Либовица), тома I-VII. М., Мир, 1973-1976.
- Рауз Х. Механика жидкости. М., Стройиздат, 1967.
- Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М., Высшая школа, 1966.
- Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М., Высшая школа, 1982.
- Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. М., Высшая школа, 1973.
- Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М., Мир, 1979.

- Седов Л.И. Механика сплошной среды, тома I и II. М., Наука, 1993.
- Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Наука, 1966.
- Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., ИЛ, 1963.
- Снитко Н.К. Строительная механика. М., Высшая школа, 1966.
- Справочник по теории упругости (под редакцией П.М. Варнака и А.Ф. Рябова). Киев, Будівельник, 1971.
- Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., Мир, 1977.
- Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М., Наука, 1967.
- Тимошенко С.П. Соппротивление материалов, тома I и II. М., Наука, 1965.
- Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1966.
- Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. М., Мир, 1976.
- Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., Наука, 1979.
- Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М., Машиностроение, 1985.
- Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. М., Наука, 1970.
- Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела, тома I, II, III. М., Наука, 1975 - 1981.
- Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее приложения. М., Наука, 1988.
- Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Физматгиз, 1956.
- Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л., Машиностроение, 1986.
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974.

14.1. Кинематика

14.1.1. В плоскости движется точка, имея неоднородное поле ускорений постоянного направления $\mathbf{a} = -g_0(1+z/r_0)^{-2} \mathbf{e}_z$. Начальное положение задано координатами (X, Z) , вектор начальной скорости – своими компонентами (c_x, c_z) . Определить скорость точки и ее траекторию, а также годограф вектора скорости.

Указание: рассмотреть в общем виде задачу, представленную на рис. 1.2.

14.1.2. Пригородный поезд увеличивает скорость с ускорением $0,1g$ и тормозит с ускорением $0,15g$. Поезд проходит 50 км, имея 10 остановок. Расстояние между остановками таково, что поезд на каждом интервале между ними

развивает в течение некоторого времени максимальную скорость 100 км/час. Определить среднюю скорость поезда и общее время движения, учитывая, что продолжительность каждой остановки составляет полторы минуты.

14.1.3. Определить векторы скорости и ускорения точки, двигающейся с начальной скоростью v_0 по окружности радиуса r . Скорость точки равномерно увеличивается в два раза после каждого оборота. Вычислить угловую скорость вращения радиуса-вектора точки в зависимости от угла поворота и в зависимости от времени движения, если в начальный момент времени $v_0/r=1$ рад/с. Построить графики указанных зависимостей.

14.1.4. Спутник, рассматриваемый как материальная точка, движется по эллиптической орбите, имея неоднородное центральное поле ускорений, заданное зависимостью $a_r = -k/r^2$, где радиус-вектор имеет началом один из фокусов эллипса. Определить зависимость между параметром k , радиальным расстоянием r_0 и скоростью v_0 в перигелии. Существует ли предельная скорость в перигелии при заданном r_0 ? Каковы эти значения, если перигелий находится на расстоянии 200 км от поверхности Земли? Определить скорость движения по круговой орбите того же радиуса.

Указание: $k=4 \times 10^{14}$ м³/с² и для Земли ее радиус $R=6,37 \times 10^6$ м.

14.1.5. Точка A , находящаяся на жесткой пластине, движется с постоянной скоростью по окружности. Пластина вращается в своей плоскости с постоянной угловой скоростью. Определить поля скоростей и ускорений точки A , рассматривая движение как в инерциальной, так и в подвижной (связанной с телом) системах отсчета.

14.1.6. Жесткое колесо радиуса r катится по окружности радиуса R (см., например, дробильный ролик на рис. 1.3). Определить поля скоростей и ускорений при равномерном вращении.

14.1.7. Движение твердого недеформируемого тела стеснено универсальным кардановым шарниром так, что тело имеет две вращательные степени свободы. Рассмотреть задачу вращения двух тел, начальное положение которых показано на рис. 14.1.7, при произвольно больших поворотах на углы Кардана α и β . Определить поля перемещений, скоростей и ускорений. Использовать как подвижную систему отсчета, связанную с телом, так и

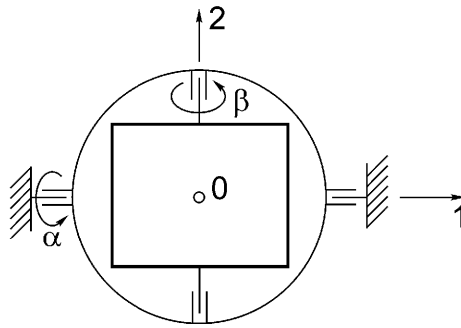


Рис. 14.1.7.

пространственную инерциальную систему координат для представления результатов.

Указание: обратить внимание на общую точку O обоих тел.

14.1.8. На рис. 14.1.8. показан в горизонтальной плоскости механизм, у которого кривошип OA вращается с угловой скоростью $\omega=1,5$ рад/с и $\dot{\omega}=0$. Управляющий стержень BC движется так, что $x=150$ мм, $\dot{x}=-100$ мм/с и $\ddot{x}=0$. В этих условиях определить скорость v и ускорение \dot{v} поршня P относительно гидравлического цилиндра H и вычислить угловое ускорение ε (рад/с²) оси цилиндра.

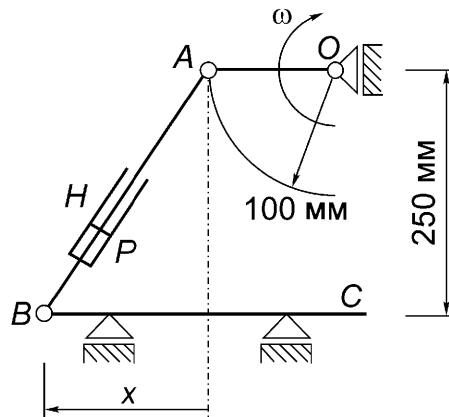


Рис. 14.1.8.

14.1.9. Два твердых недеформируемых колеса, соединенных жестким стержнем, катятся без проскальзывания по жесткому рельсу. Графически определить три мгновенных центра скоростей в текущем положении (см. рис. 14.1.9). Затем определить $\mathbf{v}_A(\varphi, \omega)$, найти условие совместности $\beta(\omega)$, а также скорости $\mathbf{v}_B(\varphi, \beta, \omega)$ и $\mathbf{v}_C(\varphi, \beta, \alpha, \omega)$. Полагая угловую скорость $\omega = \text{const}$, определить ускорения $\mathbf{a}_A(\varphi, \omega)$ и $\mathbf{a}_B(\varphi, \beta, \omega)$.

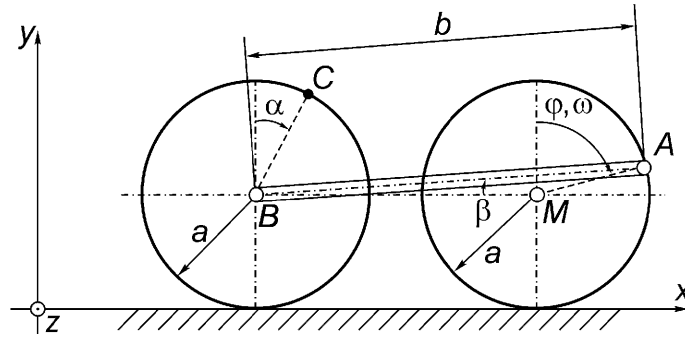


Рис. 14.1.9.

14.1.10. Три твердых недеформируемых тела, обозначенных на рис. 14.1.10 цифрами I, II и III, движутся в плоскости чертежа. Найти положения мгновенных центров скоростей в данном положении. Задав положительную скорость подвижного шарнира C, аналитически и графически определить скорости точек B и A. Определить угловые скорости и установить условие совместности $\dot{\alpha}(\alpha, \beta, \dot{\beta})$. Вычислить ускорения точек B и A при заданном значении a_C .

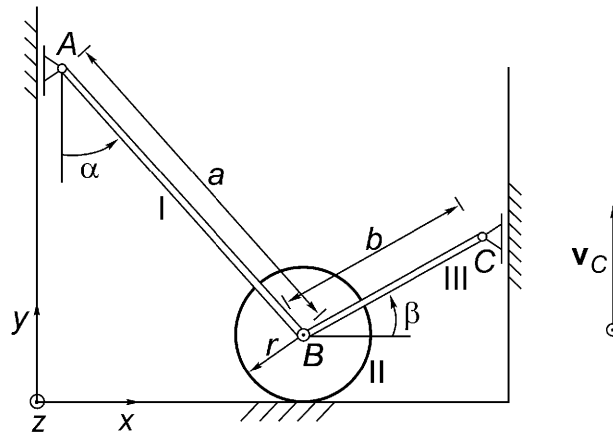


Рис. 14.1.10.

14.1.11. Получить разложение Вебера в декартовых координатах для конвективного ускорения, если общий вид такого разложения задан выражением (1.44). Вычислить члены такого разложения для безвихревого течения в цилиндрических координатах.

14.1.12. Поле скоростей стационарного двумерного течения в первом квадранте задано следующими выражениями: $v_x = 2ax$, $v_y = -2ay$, $a = \text{const}$, $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Получить уравнение линий тока и определить поле ускорений.

Указание: прежде чем вычислить конвективное ускорение, найти $\boldsymbol{\omega} = (1/2) \text{rot } \mathbf{v}$.

14.1.13. При течении вязкой жидкости потенциал вихря затухает согласно выражению

$$v(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp(-r^2/4\nu t) \right].$$

Считая, что заданная окружная скорость течения непостоянна, определить векторное поле ускорений, для чего разложить ускорение на локальную и конвективную составляющие, записав последнюю в форме Вебера.

Указание: записать в полярных координатах единичный вектор $\mathbf{e}_\varphi(t)$.

14.1.14. В круглой трубе на ее коническом участке течет несжимаемая жидкость с постоянным секундным расходом массы. Диаметр трубы на этом участке длины L уменьшается по линейному закону, причем площади поперечных сечений изменяются от A_1 до A_2 . Определить поля средних скоростей и ускорений как в эйлеровом, так и в лагранжевом представлениях движения.

14.1.15. При чистом сдвиге перемещения в поперечном сечении распределены по линейному закону, причем $u = \alpha y$, $v = \beta x$. Используя линеаризованные геометрические соотношения, найти тензор деформаций и построить круг Мора для деформаций. Объяснить полученные результаты и найти компоненты дивергента деформаций.

14.1.16. При поперечном изгибе балки прямоугольного поперечного сечения площадью $A = bh$ компоненты тензора деформаций имеют вид $\varepsilon_{xx} = (M/B)z$ и $\varepsilon_{xz} = (-3Q/4GA) \left[1 - (2z/h)^2 \right]$, причем x – фиксированная координата на оси

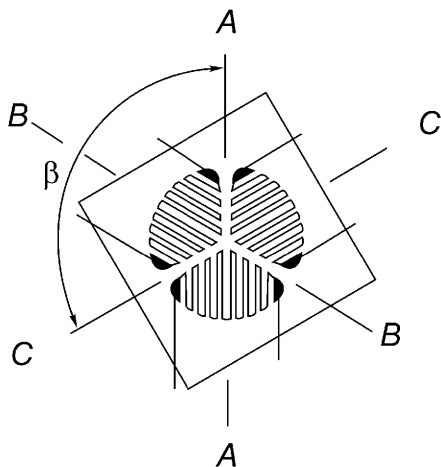


Рис. 14.1.17.

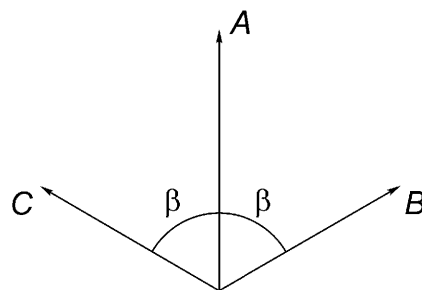


Рис. 14.1.18.

балки. Построить круги Мора в центре тяжести поперечного сечения ($z=0$) и для внешних материальных волокон при $z=\pm h/2$. Кроме того, найти зависимость $\alpha(z)$, которая задает ориентацию главных осей тензора деформаций. Коэффициенты в скобках и ν считать постоянными. Обратит внимание на соотношение $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx}$.

14.1.17. С помощью розетки тензодатчиков, соединенных правильной звездой (A , B и C соединены в одной плоскости под углами $\beta=120^\circ$), измерены нормальные деформации $\varepsilon_A=0,5\times 10^{-3}$, $\varepsilon_B=-0,1\times 10^{-3}$ и $\varepsilon_C=0,4\times 10^{-3}$ (см. рис. 14.1.17). Определить тензор плоской деформации и построить круг Мора.

14.1.18. В технике используется розетка из трех тензодатчиков, два из которых симметрично отклонены на углы $\pm\beta$ от третьего, расположенного в заданном направлении A (см. рис. 14.1.18). В результате измерений получены значения нормальных деформаций ε_A , ε_B и ε_C . Определить расположение главных осей тензора деформаций по отношению к направлению A и значения главных деформаций в общем виде.

14.1.19. Показания розетки тензодатчиков, расположенных под углом 45° , составляют при одном нагружении $\varepsilon_A=0,1\times 10^{-3}$, $\varepsilon_B=0,2\times 10^{-3}$ и $\varepsilon_C=0,9\times 10^{-3}$, а при другом — $\varepsilon_A=1,2\times 10^{-3}$, $\varepsilon_B=0,4\times 10^{-3}$ и $\varepsilon_C=0,06\times 10^{-3}$. Найти величину главных деформаций в плоскости розетки в обоих случаях нагружения.

14.1.20. При плоском деформированном состоянии в плоскости с координатами (x, y) компоненты тензора деформаций равны $\varepsilon_x=0,8\times 10^{-3}$, $\varepsilon_y=0,1\times 10^{-3}$ и $\varepsilon_{xy}=-0,4\times 10^{-3}$. Определить максимальные деформации сдвига, величины главных деформаций и ориентацию главных осей тензора деформаций.

14.1.21. В одной из точек тела главные деформации таковы, что $\varepsilon_1=0,7\times 10^{-3}$, $\varepsilon_2=0,3\times 10^{-3}$ и $\varepsilon_3=-0,3\times 10^{-3}$. Какая из сдвиговых компонент тензора деформаций имеет максимальную величину? При какой ориентации осей наблюдаются максимальные сдвиговые деформации?

14.1.22. Вблизи поверхности Луны ускорение свободного падения примерно равно $g = 1,59 \text{ м/с}^2$. 2 июня 1966 года аппарат Сервейер I приблизился к Луне и стал осуществлять операцию мягкой посадки. На высотах от 12 м до 3,9 м от поверхности скорость аппарата была постоянна и составляла 1,5 м/с, после чего двигатели отключились, и аппарат двигался свободно. За какое время аппарат прошел путь 12 м и опустился на Луну?

14.1.23. Ракета после старта движется вертикально вверх по прямолинейной траектории с постоянным ускорением $2g$ на отрезке времени в 40 с. Какова скорость ракеты и ее высота над стартовой площадкой к концу этого периода?

14.1.24. Нерастяжимый гибкий шланг разматывается с барабана так, что его прямолинейная часть направлена по касательной к барабану. Радиус-вектор точки контакта шланга и барабана имеет постоянную величину R и вращается с постоянной угловой скоростью ω . Определить траекторию, скорость и ускорение крайней точки шланга в полярных координатах, если ее начальное положение определено значениями $r = R$ и $\varphi = 0$, причем $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

14.1.25. Радарный луч отслеживает летательный аппарат. Что необходимо измерять в сферических координатах для определения вектора скорости аппарата?

14.1.26. Движение точки задано в безразмерном виде уравнениями $x/L = t/T$, $y/L = t/T$ и $z/L = 2(t/T)^2$, где L и T – характеристические постоянные. Найти тангенциальную и нормальную компоненты вектора ускорений, определить кривизну траектории точки. Найти асимптоту траектории.

14.1.27. Точка движется по прямой вдоль оси x по закону $x(t)/L = 1/4 - (t/T) + (t/T)^2$, где $0 \leq t \leq T$. Построить траекторию движения в фазовом пространстве $\dot{x} = f(x)$.

14.2. Статика

14.2.1. Жесткая открытая рама ABC установлена над квадратной жесткой однородной платформой веса G . В крайних точках верхней части рамы приложены силы $F_1 = F_1 \mathbf{e}_x$ и $F_2 = F_2 \mathbf{e}_y$. Шесть шарнирно закрепленных стержней передают нагрузку на три неподвижные опоры (см. рис. 14.2.1).

а) Привести заданные силы к центру A .

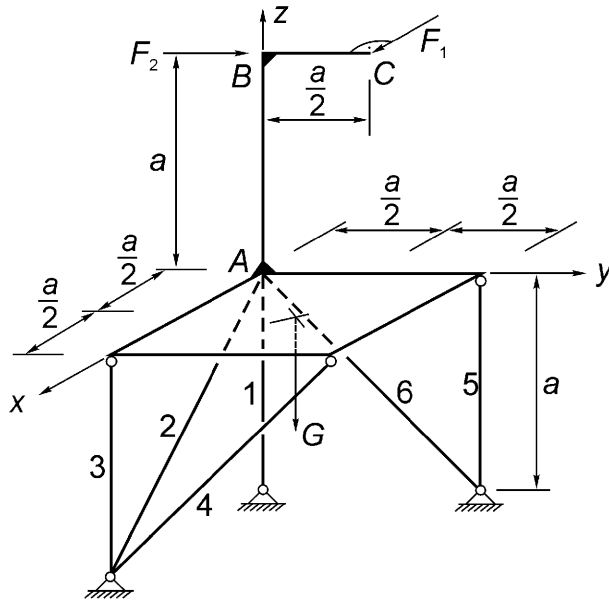


Рис. 14.2.1.

- b) Найти динамический винт для заданных сил.
- c) Определить усилия в соединительных стержнях.
- d) Определить результирующие внутренних силовых факторов в раме ABC.

14.2.2. Жесткая пространственная конструкция, подобная представленной в задаче 14.2.1, показана на рис. 14.2.2.

- a) Привести три заданные силы к центру O.
- b) Определить усилия в шести шарнирно закрепленных стержнях.
- c) Найти результирующие силовые факторы в открытой раме, нагруженной силой F_1 .

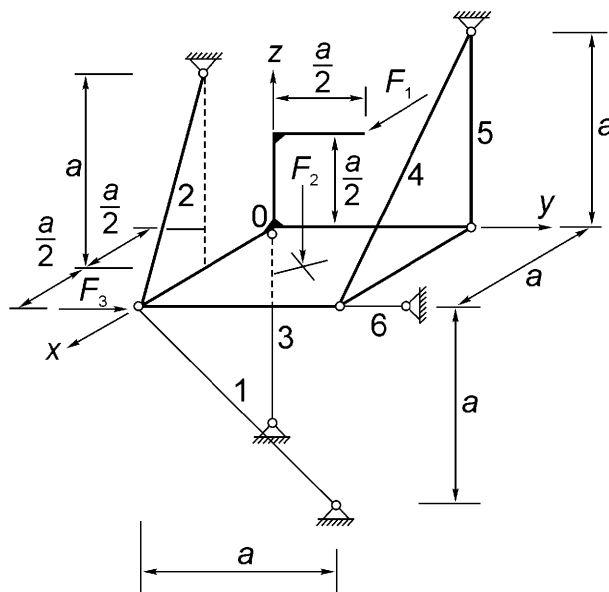


Рис. 14.2.2.

14.2.3. Жесткая квадратная платформа, нагруженная двумя силами, опирается на шесть шарнирно закрепленных стержнях (см. рис. 14.2.3). Привести заданные силы к центру O и определить усилия в стержнях.

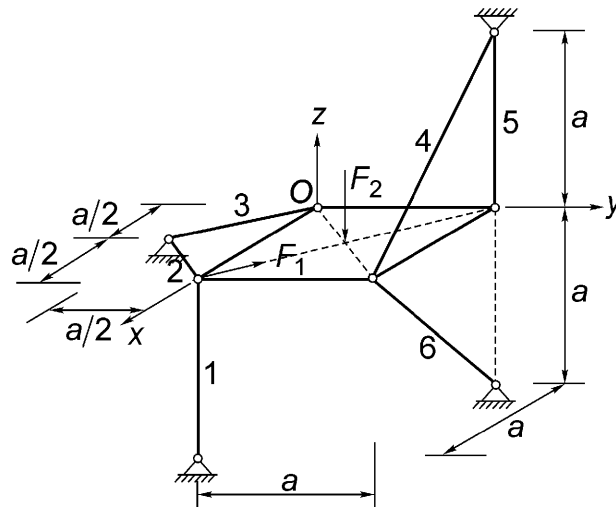


Рис. 14.2.3.

14.2.4. Жесткая квадратная пластина веса G нагружена двумя силами и удерживается в равновесии шестью стержнями, закрепленными шарнирами (рис. 14.2.4). Привести три заданные силы к центру O и найти соответствующий динамический винт, если $F_1 = F_2 = F_3 = G$. Определить усилия в стержнях, поддерживающих пластину.

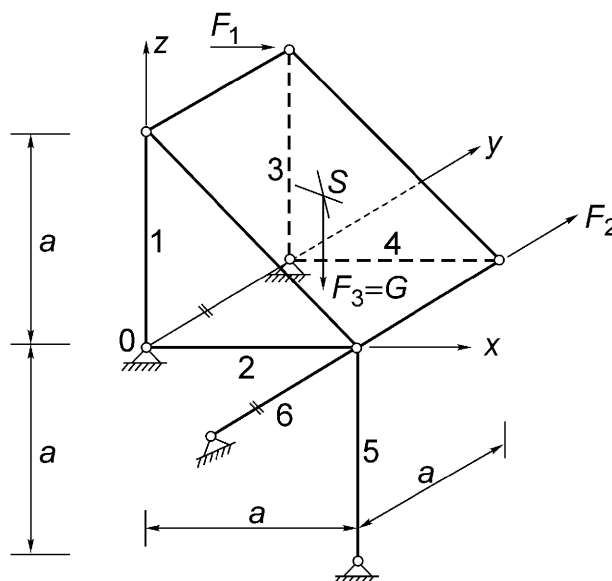


Рис. 14.2.4.

14.2.5. Жесткая однородная треугольная плита веса G нагружена силами F_1 и F_2 и соединена с основанием шестью шарнирно закрепленными стержнями. После приведения трех заданных сил к центру A определить усилия в стержнях.

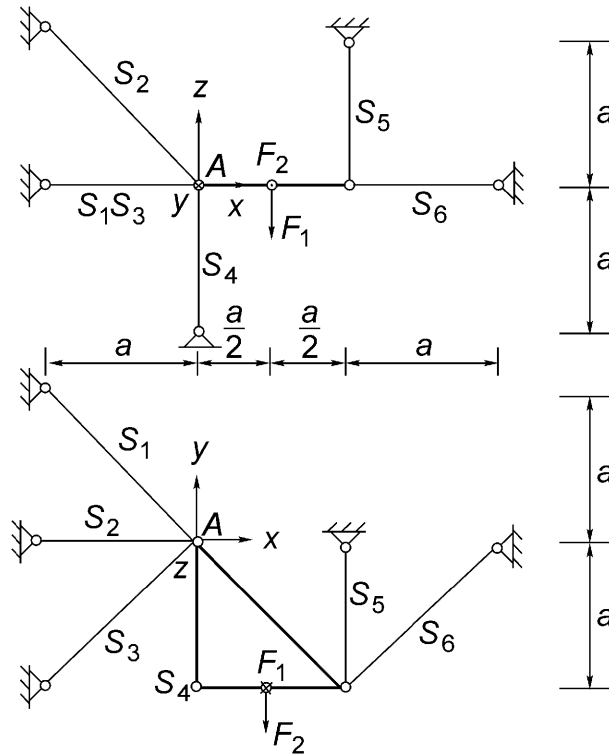


Рис. 14.2.5.

14.2.6. Боковая стенка водяного резервуара, изготовленная из завальцованных пластин, шарнирно закреплена в точках A и C (см. рис. 14.2.6). Круглая смотровая дверца расположена ниже уровня воды. Найти результирующую сил давления воды на прямоугольные площадки AB и BC , определить реакции опор A и C и, наконец, общее давление воды на круглую дверцу. Плотность воды ρ известна, $a=b=2$ м. Построить график распределения давления.

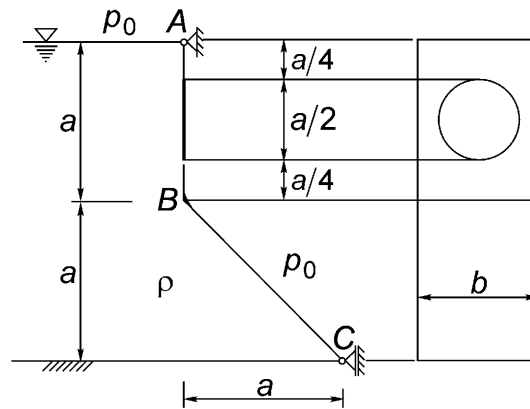


Рис. 14.2.6.

14.2.7. Удерживающая стенка, стоящая на наклонном вбок грунте, подвергается давлению воды по всей своей площади, имеющей вид трапеции. Найти равнодействующую сил давления, точку ее приложения и величину опрокидывающего момента.

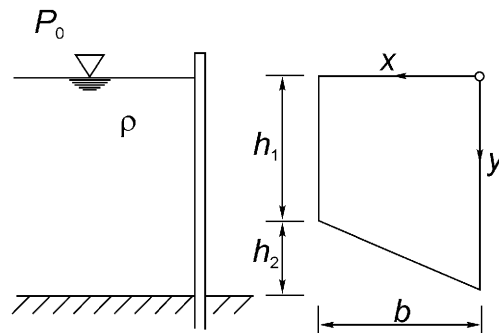


Рис. 14.2.7.

14.2.8. Конструкция $ABCD$, состоящая из трех шарнирно опирающихся пластин, не позволяет воде проникнуть в контрольную камеру, находящуюся под атмосферным давлением. Считая, что текущий уровень воды проходит через точку A , вычислить результирующие сил давления воды на пластины AB , BC (прямоугольной формы) и CD (треугольной формы). Определить графически силы давления на шарниры A , C и D (см. рис. 14.2.8, принять $a=2,5$ м и $b=3$ м). Учтеь, что $J_x = bH^3/36$.

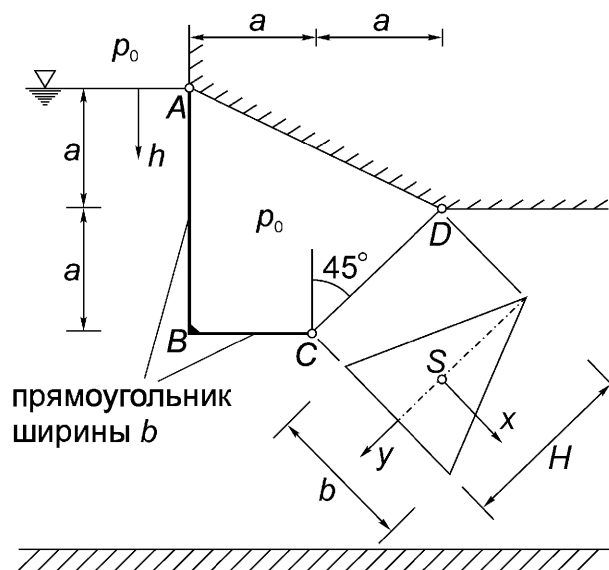


Рис. 14.2.8.

14.2.9. Найти результирующие силовые факторы абсолютного давления воды на цилиндрическую часть стенки AB кругового сечения и на прямоугольное перекрытие CD (на единицу ширины) (см. рис. 14.2.9). Тяжелая крышка BC шарнирно закреплена в точке C . Определить ее вес G , если в равновесии крышка расположена под углом 45° , а внешняя часть крышки находится под атмосферным давлением. Построить эскиз распределения сил давления воды вдоль стенок, показанных на рисунке.

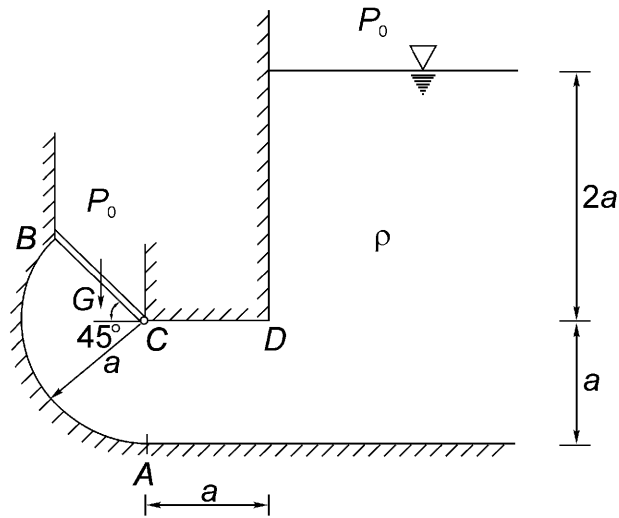


Рис. 14.2.9.

14.2.10. Туннель кругового поперечного сечения, заполненный водой, закрыт шарнирно опертой крышкой, отделяющей туннель от контрольной камеры, заполненной газом, находящимся под давлением. Уровень воды, над которой находится атмосфера под нормальным давлением, показан на рис. 14.2.10, $a=2$ м. Определить результирующие силовые факторы давления воды на стенку I, $b=1,5 a$, цилиндрическую стенку II и крышку III. Найти также минимальное давление газа, обеспечивающее нахождение крышки в закрытом положении.

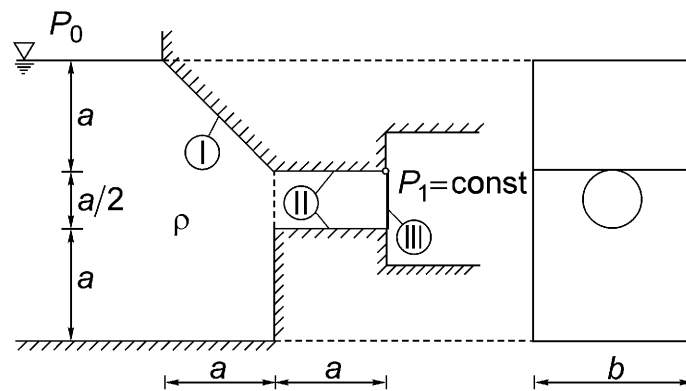


Рис. 14.2.10.

14.2.11. Оболочка полуцилиндрической формы радиуса $a=1$ м и длины $b=5$ м нагружена собственным весом (масса на единицу площади поверхности составляет 80 кг/м^2) и соединена с массивным кубом, у которого $d=0,5$ м и плотность равна 2000 кг/м^3 . Учитывая воздействие давления воды, находящейся на уровне A и однородно распределенного давления газа (см. рис. 14.2.11), определить результирующие силы и реакции опор в шарнирах A и B . Найти результирующие силовые факторы внутренних сил в оболочке на единицу ее длины, если $p_1 = 1,1 p_0$.

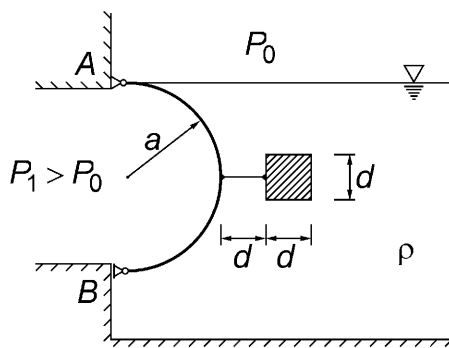


Рис. 14.2.11.

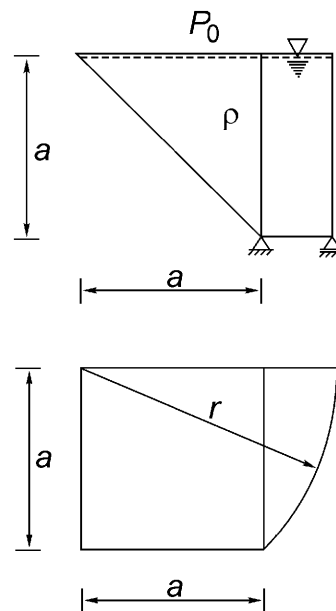


Рис. 14.2.12.

14.2.12. Открытый контейнер с плоскими и цилиндрическими стенками и наклонным днищем (см. рис. 14.2.12) имеет размер $a=3$ м. Считая контейнер заполненным водой, определить результирующие силовые факторы давления воды на соответствующие площади, разделяя их на части удобные для вычислений. Вычислить опрокидывающий момент.

14.2.13. Толстый слой нефти ($\rho_1=820 \text{ кг/м}^3$) плавает на слое воды ($\rho_2=1000 \text{ кг/м}^3$) в контейнере (см. рис. 14.2.13). Определить поле давлений жидкостей и парциальные результирующие силы давлений на единицу ширины, действующие на площади AB , BC , CD , DE и EF . Каково растягивающее усилие в пружине AF ? Определить реакции опор C и D , если $a=2$ м.

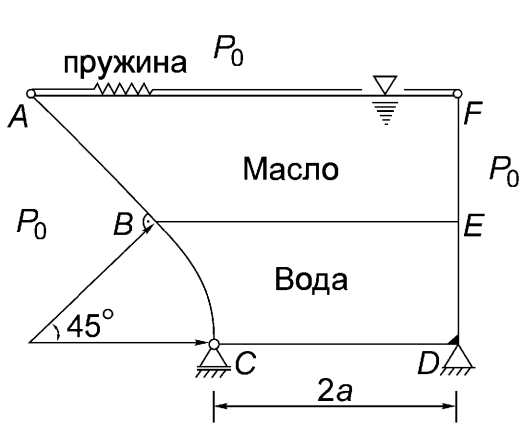


Рис. 14.2.13.

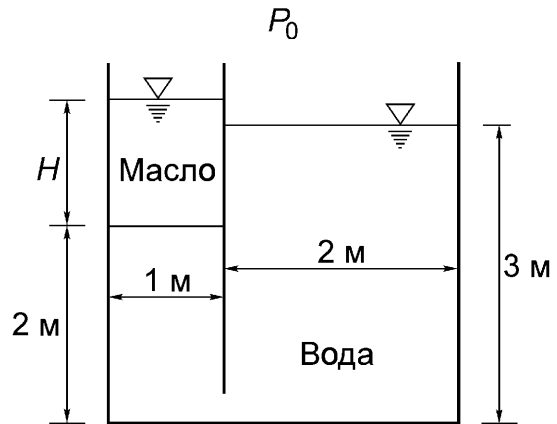


Рис. 14.2.14.

14.2.14. Прямоугольный резервуар ширины 6 м разделен на две части (рис. 14.2.14), заполненные нефтью ($\rho = 820 \text{ кг/м}^3$) и водой. Чему равна величина H для указанных уровней? Если на всей поверхности нефти плавает крышка весом 10 кН, определить высоту подъема свободной поверхности воды, контактирующей с воздушной атмосферой.

14.2.15. Цилиндрическая водосливная плотина показана на рис. 14.2.15. Ее длина в два раза больше диаметра. Определить величину и направление результирующей силы давления воды, действующей на плотину. Каков должен быть минимальный вес плотины, гарантирующий отсутствие ее всплытия?

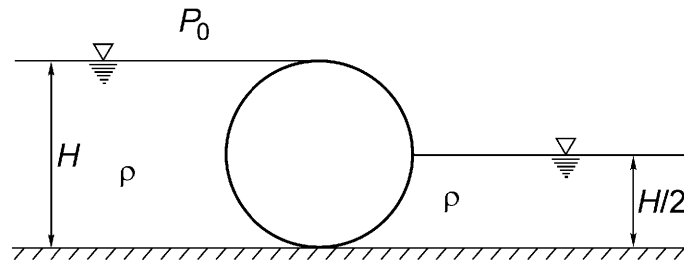


Рис. 14.2.15.

14.2.16. Вертикальная удерживающая стенка сконструирована в виде гофрированной пластины (рис. 14.2.16) и нагружена давлением воды.

- Чему равны горизонтальная и вертикальная результирующие силы давления воды на единицу ширины стенки, если число гофров равно n и каждый из них представляет из себя полуокружность?
- Как изменится результат, если стенка гофрирована по закону синуса с теми же периодом и амплитудой?

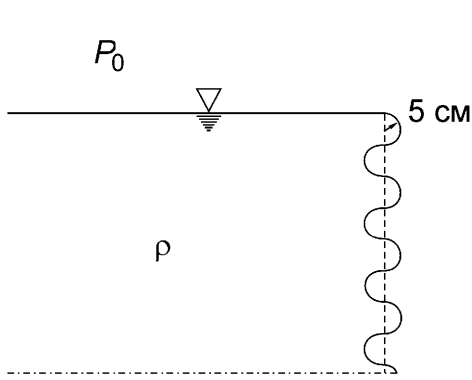


Рис. 14.2.16.

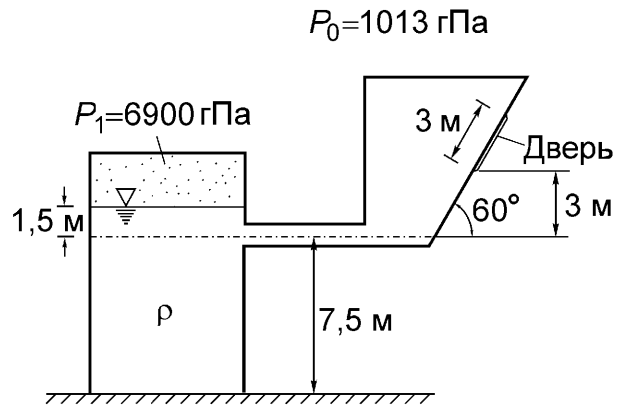


Рис. 14.2.17.

14.2.17. Прямоугольная дверца $2,5 \times 3$ м выдерживает как давление воды, так и атмосферное давление (1013 гПа). Найти результирующую силу давлений в ситуации, представленной на рис. 14.2.17.

14.2.18. Наклонная пластина разделяет объем воды на две части с различными уровнями (см. рис. 14.2.18). Пластина удерживается в равновесии тяжелой однородной стойкой AB , опирающейся на цилиндрические шарниры. Плотность стойки $\rho_k = 8\rho_0$, площадь поперечного сечения равна A . Определить распределение давления воды и результирующие силовые факторы этого давления на пластину, а также найти реакции в шарнирах A , B и C , принимая во внимание гидростатическую выталкивающую силу, действующую на частично погруженный в воду стержень AB . Вычислить результирующие силовые факторы внутренних усилий в пластине на единицу ширины в виде функции x , принимая, что $a=1$ м.

14.2.19. Простая баржа представляет из себя прямоугольный параллелепипед с размерами $26,7 \times 10 \times 3$ м (рис. 14.2.19). Она нагружена собственным весом $G=4450$ кН, и центр тяжести расположен на высоте 4 м над дном.

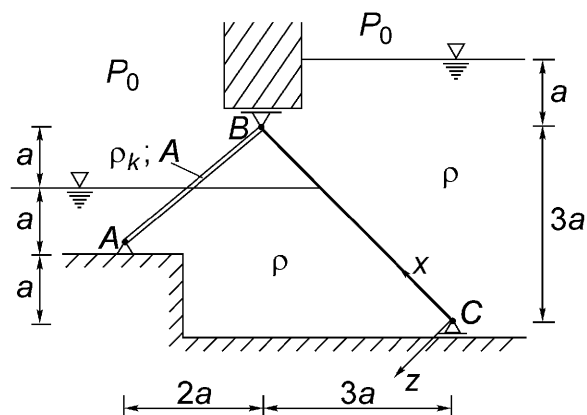


Рис. 14.2.18.

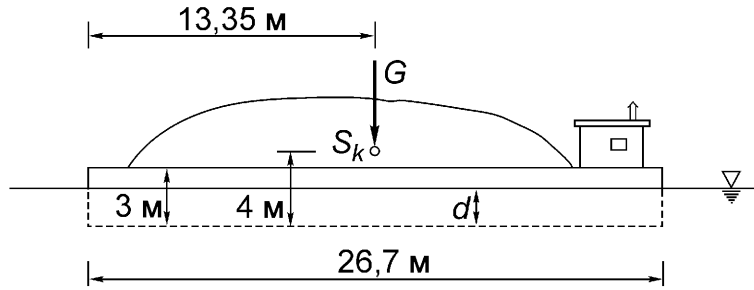


Рис. 14.2.19.

- a) Найти метацентрическую высоту и рассмотреть вопрос устойчивости.
- b) Определить восстанавливающий момент, если угол крена составляет $0,15$ рад.

14.2.20. Деревянный параллелепипед плотности 700 кг/м^3 с размерами $0,6 \times 0,2 \times 0,1 \text{ м}$ служит основанием для консольной стойки пренебрежимо малой массы. На стойке закреплен цилиндр А массы 2 кг. Определить критическую высоту H , обеспечивающую вертикальную устойчивость на воде (рис. 14.2.20).

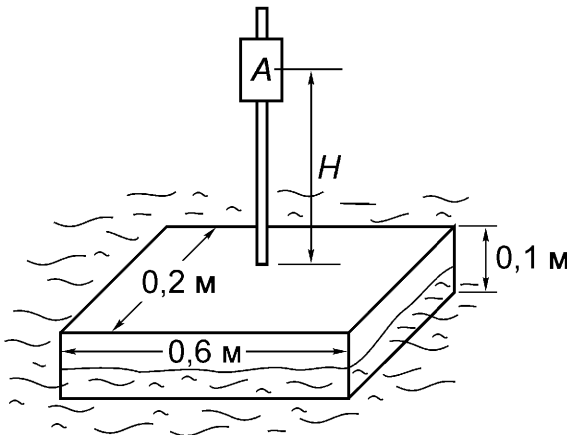


Рис. 14.2. 20.

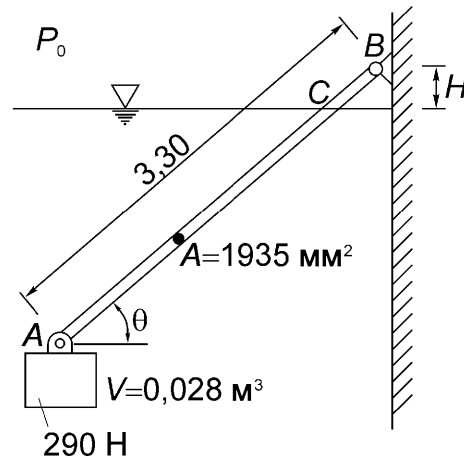


Рис. 14.2.21.

14.2.21. Двойной маятник, частично погруженный в воду, имеет вид, представленный на рис. 14.2.21. Считая, что шарнирно закрепленный однородный стержень имеет вес 13 Н , а однородный куб весом 290 Н имеет объем $0,028 \text{ м}^3$, найти соотношение между углом θ и расстоянием H до поверхности воды при равновесии маятника. Трением в шарнирах пренебречь.

14.2.22. На секториальный водослив действует давление воды по обеим поверхностям (см. рис. 14.2.22). Определить крутящий момент, создаваемый давлением воды, и найти значение «момента» G_s при равновесии, считая, что

заданы r_0 и $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, а угол изменяется в следующих пределах:
 $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

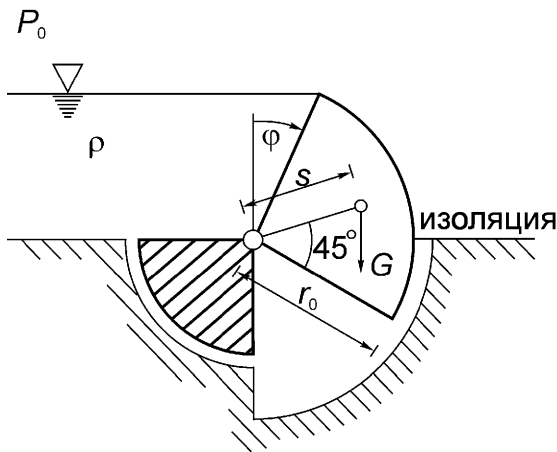


Рис. 14.2.22.

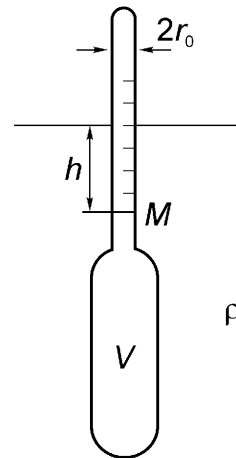


Рис. 14.2.23.

14.2.23. Ареометр (гидрометр) общего веса G калиброван так, что в дистиллированной воде метка M находится на ее поверхности. Измеряя перемещение объема V в другой жидкости, можно вычислить ее плотность. При заданном радиусе r_0 ножки определить расстояние h от метки M до свободной поверхности жидкости с плотностью $\rho \neq \rho_{H_2O}$ (см. рис. 14.2.23).

14.2.24. Полусферический купол, представляющий тонкую оболочку радиуса R , неподвижно закреплен на основании в вертикальном положении. На купол действует атмосферное давление окружающего воздуха. В начальный момент времени уровень воды начинает подниматься, достигает нижней кромки купола, и с этого момента подъем воды осуществляется с различной скоростью вне и внутри оболочки.

а) Принимая, что сжатие воздуха внутри купола происходит изотермически, вычислить отношение двух различных уровней воды.

б) Чему равна результирующая сила давления на основание купола? Толщина оболочки $t = 1 \text{ см}$, радиус $R = 1 \text{ м}$, плотность купола в четыре раза выше плотности воды.

14.2.25. Жесткая плавающая крышка, имеющая форму квадратной пластины толщины H , находится в состоянии покоя на поверхности нефти, плотность которой $\rho = 820 \text{ кг/м}^3$. Верхняя часть крышки покрыта тонким слоем воды. Считая глубину погружения крышки без учета слоя воды равной $t = H/2$,

определить, как влияет увеличение высоты уровня воды на крышке на устойчивость плавучести последней.

14.2.26 В данной точке при плосконапряженном состоянии компоненты тензора напряжений имеют значения $\sigma_{xx}=120 \text{ Н/мм}^2$, $\sigma_{yy}=-40 \text{ Н/мм}^2$ и $\sigma_{xy}=60 \text{ Н/мм}^2$. Построить круг Мора для напряжений, определить направления главных осей тензора напряжений и экстремальные значения нормальных и сдвиговых напряжений.

14.2.27. Пластина находится в плосконапряженном состоянии, которое в полярных координатах для $r \geq R$ задано выражениями (6.252). Определить круги Мора для напряжений в точках оси $\varphi=0$ и прямой $\varphi=\pi/4$. Обязательно проделать построение для точек $r=R$.

14.2.28. Поперечное сечение двутавровой балки с дополнительным фланцевым слоем показано на рис. 14.2.28. Все размеры приведены в миллиметрах. Определить центр тяжести поперечного сечения, вычислить тензор инерции в главных осях и затем, повернув оси координат на угол α , найти общий вид тензора инерции.

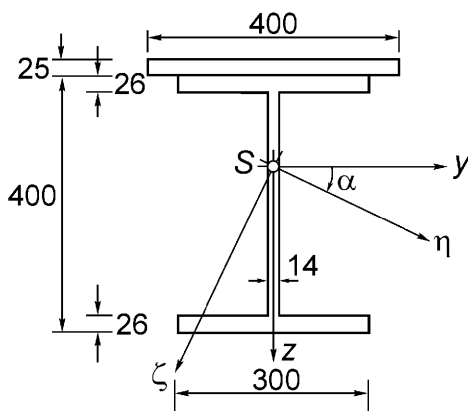


Рис. 14.2.28.

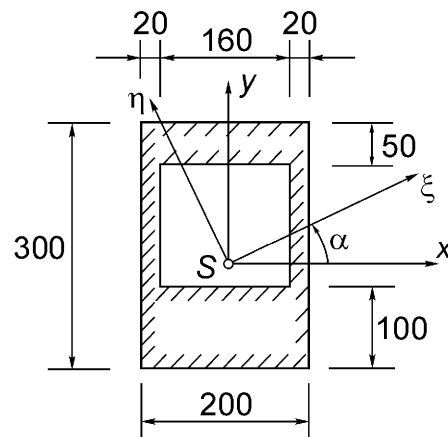


Рис. 14.2.29.

14.2.29. Найти центр тяжести площади, заштрихованной на рис. 14.2.29. Вычислить главные моменты инерции и построить круг Мора. Нарисовать график функции $r = i_1 i_2 / i_\xi$, если аргументом является угол α .

14.2.30. Двухпролетная балка с шарниром Гербера нагружена как показано на рис. 14.2.30, причем $a=6$ м, $l=1$ м, $q=0,5$ кН/м, $F=3$ кН.

- а) Определить реакции опор, перерезывающую силу в шарнире D , а также главный вектор и главный момент напряжений при поперечном изгибе балки.
 б) С помощью силового и веревочного многоугольников проверить результаты вычислений в предыдущем пункте. Использовать следующие масштабы: $\mu_L=1$ м/см, $\mu_F=1$ кН/см и $H=3$ см.

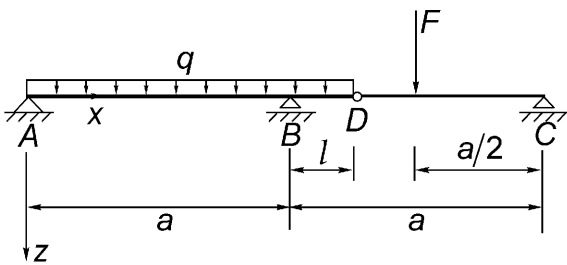


Рис. 14.2.30.

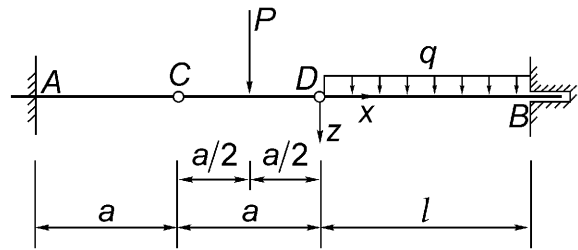


Рис. 14.2.31.

14.2.31. Балка с двумя промежуточными шарнирами опирается на две заделки. Нагрузка на балку показана на рис. 14.2.31, причем $P=ql=5$ кН, $a=1,5$ м, $l=2,5$ м.

- а) Определить реакции опор, силы сдвига в шарнирах, главный вектор и главный момент напряжений при поперечном изгибе балки.
 б) Используя многоугольник сил и веревочный многоугольник, проверить результаты расчетов в пункте а). Масштабы – $\mu_L=1$ м/см, $\mu_F=2$ кН/см.

14.2.32. Для балки с прямолинейной осью установить локальное соотношение между перерезывающей силой, изгибающим моментом и заданным на единицу длины балки внешним распределенным по ее длине моментом $m_y(x)$.

Рассмотреть равновесие элементарного элемента балки в плоскости (x, z) .

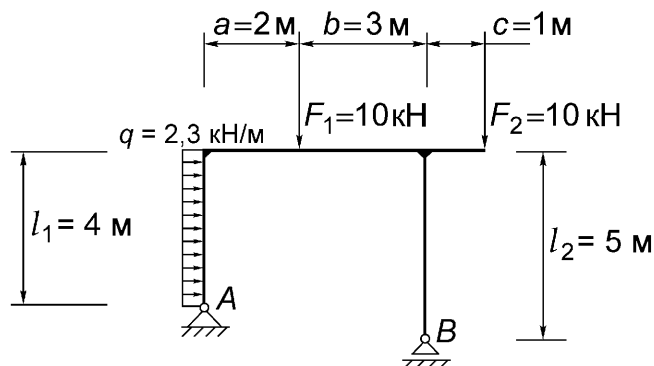


Рис. 14.2.33.

14.2.33. Портальная рама нагружена в соответствии с рис. 14.2.33. Все размеры заданы в метрах. Вычислить реакции шарниров и определить главный вектор и главный момент напряжений при поперечном изгибе нормальными силами. Проверить результат графически, рассматривая равновесие рамы в целом. Как изменится результат, если опору в точке B заменить неподвижным шарниром?

14.2.34. Открытая рама нагружена собственным весом и силой F . Площадь поперечного сечения линейно увеличивается от A_0 на оконечности рамы до A_1 и затем вниз по консоли до величины A_2 при $x=0$ (рис. 14.2.34). Плотность $\rho = \text{const}$. Определить реакции опоры и найти главный вектор и главный момент напряжений при поперечном изгибе нормальной силой. Нарисовать распределение изгибающего момента.

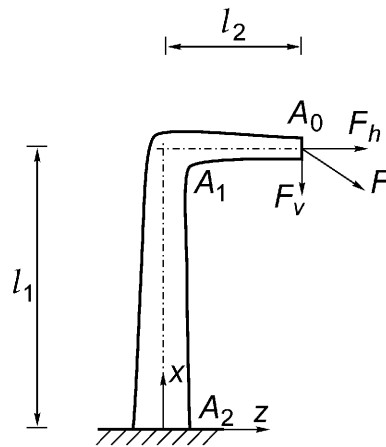


Рис. 14.2.34.

14.2.35. Определить форму стойки длины l , если нормальное напряжение σ остается приблизительно постоянным при действии на стойку ее собственного веса. На конце стойки приложена сила σA_0 .

14.2.36. Плоская консольная ферма нагружена двумя силами согласно рис. 14.2.36. Общий пролет фермы составляет 8 м, опоры находятся на расстоянии

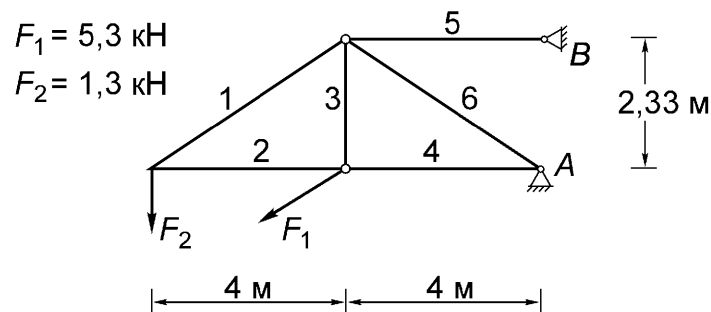


Рис. 14.2.36.

2,33 м. Используя силовой многоугольник и диаграмму Кремоны рассмотреть равновесие фермы в целом и также локальное равновесие в узлах фермы. Использовать масштаб длины 0,5 м/см и масштаб сил 1 кН/см.

14.2.37. Ферма, показанная на рис. 14.2.37, нагружена силой, приложенной к внутреннему узлу. Определить графически реакции опор и усилия в стержнях. Длины заданы в метрах. Использовать масштабы длины 1 м/см и силы 10 кН/см.

Указание: перенести заданную силу вдоль линии ее действия к фиктивному узлу, расположенному на нижнем пролете, чтобы стержень №11 был разделен на две части, а сила была направлена наружу фермы. Начните с сечения Кульмана.

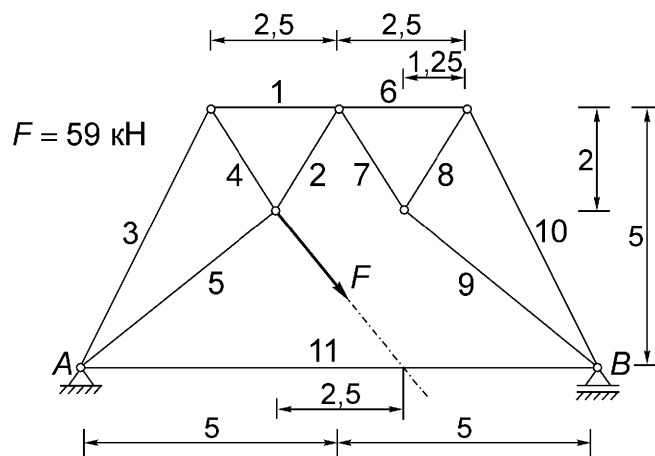


Рис. 14.2.37.

14.2.38. Кабель пренебрежимо малой массы натянут между двумя опорами A и B, расстояние между которыми по горизонтали $b=60$ м. Опора B опущена вниз по отношению к опоре A на 5 м. Кабель несет две «мертвые» нагрузки: $F_1=10$ кН в точке C, расположенной на расстоянии 25 м от A, и $F_2=12,5$ кН в точке D, расстояние которой от точки A составляет 40 м. Стрела прогиба от прямой AB равна $f_C=0,30$ м. Определить силы натяжения кабеля и реакции опор. Определить стрелу прогиба f_D в точке D.

14.2.39. Кабель, вес которого на единицу длины составляет $q=10$ Н/м, перекинут через блок. На конце кабеля находится груз веса $G=100$ Н (см. рис. 14.2.39). Определить, чему равно горизонтальное расстояние $2b$ между опорами, если в неподвижной точке $x=0$ угол β составляет 45° .

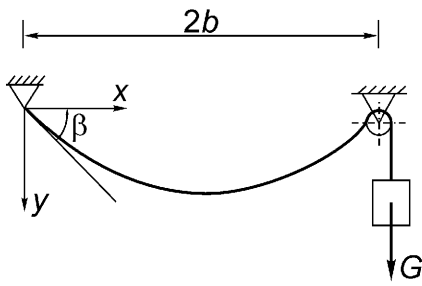


Рис. 14.2.39.

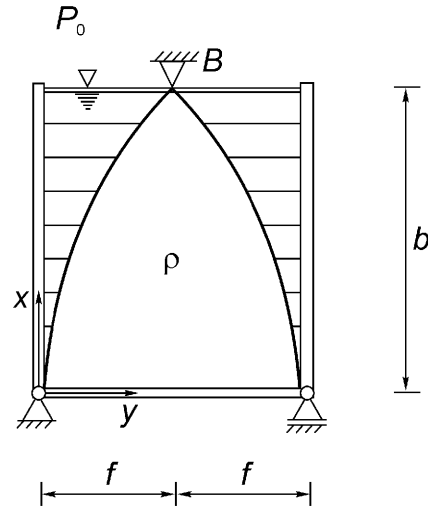


Рис. 14.2.41.

14.2.40. Кабель с массой на единицу длины равной 12 кг/м подвешен между двумя точками, находящимися на одной горизонтали, и расстояние между ними равно $2b=300 \text{ м}$. Стрела прогиба должна составлять $f=60 \text{ м}$. Подобрать кабель подходящей длины, найти горизонтальную составляющую силы натяжения и максимальную силу натяжения.

14.2.41. Боковые стенки контейнера, до краев заполненного водой, шарнирно опираются на днище контейнера и удерживаются в равновесии тросами (см. рис. 14.2.41). Массой стрингеров и тросов, а также их плавучестью, пренебречь. Найти кривую, форму которой принимает трос, и максимальное натяжение троса. Определить графически направление реакции опоры B .

14.2.42. С помощью построения статической линии влияния изгибающего момента для шарнирно опертой балки определить максимальный момент, появляющийся в балке из-за действия двух сосредоточенных сил, расстояние между которыми постоянно. Две силы медленно перемещаются на пролете длиной $l=50 \text{ м}$. Таким простейшим образом можно моделировать воздействие грузовика с нагрузками на переднюю и заднюю оси равными $F_1=70 \text{ кН}$ и $F_2=240 \text{ кН}$, соответственно. Расстояние между осями $a=4 \text{ м}$.

а) В случае шарнирно сочлененного автопоезда типа «тягач-прицеп» этот способ приводит к более сложному рассмотрению. В этом случае необходимо исследовать движение трех сил $F_1=70 \text{ кН}$, $F_2=120 \text{ кН}$ и $F_3=240 \text{ кН}$ с расстояниями между ними $a_1=3,70 \text{ м}$ и $a_2=14,2 \text{ м}$.

б) Разработайте процедуру, позволяющую рассматривать движение двухосного грузовика с прицепом, каждый из которых нагружен двумя силами величиной

100 кН. Расстояние между силами $a_1 = 4$ м и $a_2 = 6$ м (последнее значение – расстояние между осями прицепа). Нарисовать распределение момента в наихудших условиях.

14.2.43. Лицевая сторона плотины нагружена давлением воды. Тензор напряжений в точке A (см. рис. 14.2.43) задан компонентами: $\sigma_{xx} = -760$ кН/м², $\sigma_{yy} = -1514$ кН/м², $\sigma_{zz} = -455$ кН/м², $\sigma_{xy} = -137$ кН/м², $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$. Найти давление воды и глубину h . Определить главные напряжения и направления главных осей тензора напряжений.

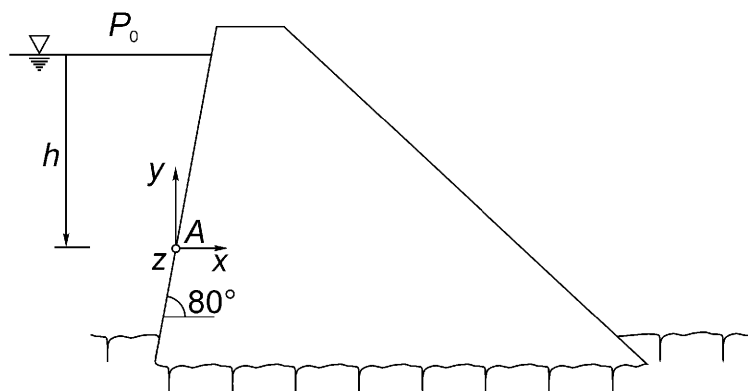


Рис. 14.2.43.

14.2.44. Газозаполненный воздушный шар может быть представлен в виде баллонов и летательного аппарата. На рис. 14.2.44 показан баллон, у которого открыт заполняющий вентиль. При этом объем баллона остается постоянным при переменном атмосферном давлении (в натянутом состоянии баллон полностью заполнен газом).

а) Определить поле статического давления на поверхность баллона в зависимости от средних плотностей заполняющего газа и атмосферного воздуха.

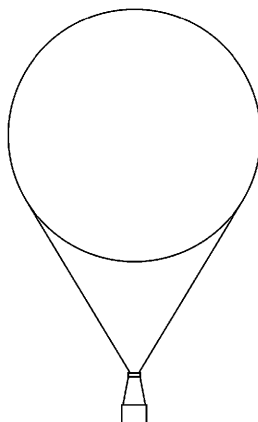


Рис. 14.2.44.

б) Определить результирующую подъемную силу (подтвердив закон Архимеда) и затем представить результат в зависимости от отношений плотностей $\sigma = \rho_{\text{газ}} / \rho_{\text{возд}}$, температур $\theta = T_{\text{возд}} / T_{\text{газ}}$ и веса вытесненного воздуха.

с) Задавая постоянным вес баллона G_1 (вместе с корзиной и такелажем) и считая переменным вес балласта G_2 , определить условия равновесия. Рассмотреть вопрос устойчивости натянутого состояния оболочки баллона в адиабатических условиях.

Указание: вычислить изменение результирующей силы в зависимости от высоты при постоянном объеме.

14.2.45. Определить перерезывающую силу и изгибающий момент статически определимой балки (шарнирно опирающаяся однопролетная балка и консольная балка, соответственно), находящейся под действием различной распределенной нагрузки (см. рис. 14.2.45). Использовать, например, метод Мора (глава 6).

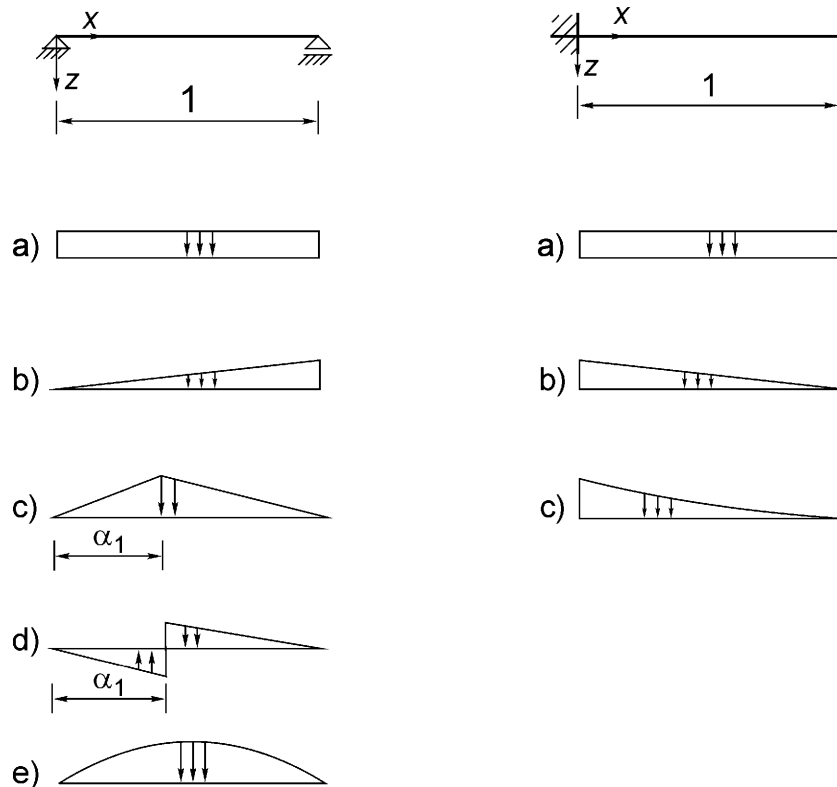


Рис. 14.2.45.

14.2.46. Два одинаковых однородных цилиндра, вес каждого из которых составляет 0,9 кН, помещены в жесткий ящик (см. рис. 14.2.46). Пренебрегая трением между цилиндрами и между цилиндрами и ящиком, определить реакции в точках А, В и С.

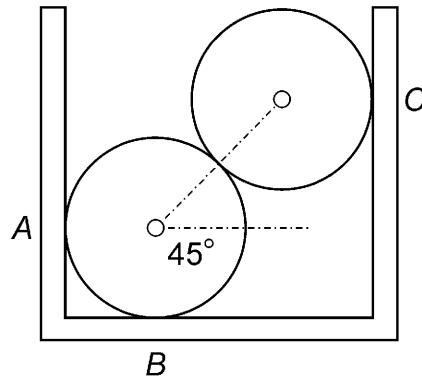


Рис. 14.2.46.

14.2.47. Сравнить силы F , необходимые для того, чтобы газонный каток веса $0,9 \text{ кН}$ начал перекаатываться через уступ высотой 75 мм , если а) каток толкают; и б) каток тянут.

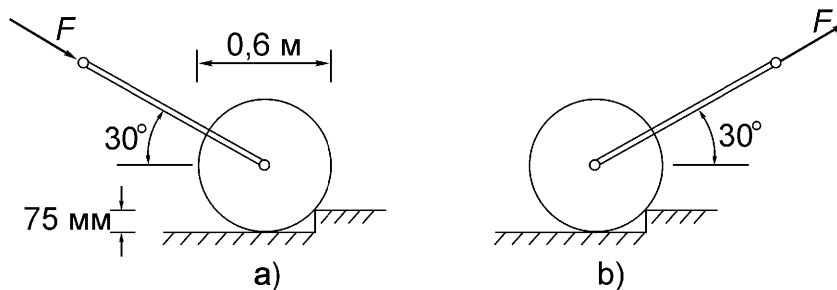


Рис. 14.2.47.

14.2.48. На рис. 14.2.48 показана гондола двигателя, которая подвешена к крылу на пилоне AG . Пропеллер вращается вокруг оси x в положительном направлении. Сила тяжести двигателя составляет 11 кН и приложена в точке G . Двигатель создает осевую силу $17,5 \text{ кН}$ и крутящий момент 20 кНм . Найти силу и момент, передаваемые на крыло в точке A .

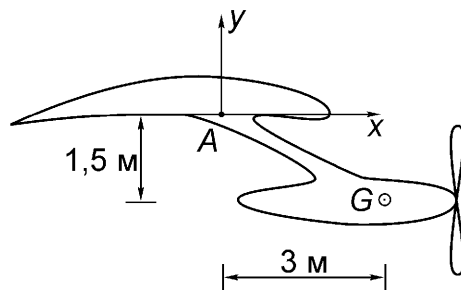


Рис. 14.2.48.

14.2.49. Свободно вращающийся однородный стержень длины l и массы на единицу длины ρA прижат к вращающемуся колесу. Зная коэффициент сухого трения μ , вычислить силу трения F . В одном из двух относительных располо-

жений стержня и колеса возникает эффект самозаклинивания. В каком случае это произойдет и почему?

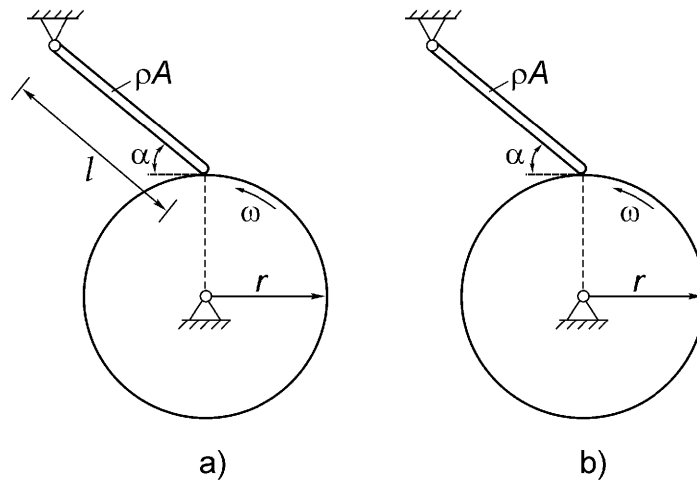


Рис. 14.2.49.

14.2.50. Небольшой автомобиль массой 1000 кг с двигателем мощностью 70 кВт имеет привод на задние колеса. Колесная база составляет $L=2,5$ м. На горизонтальном участке пути нагрузка на ведущие колеса составляет 60% веса автомобиля. Считая, что диаметр колес равен 30 дюймам и центр тяжести приподнят над землей на высоту $h_G=0,6$ м, определить максимальный угол наклона α , при котором возможен подъем автомобиля. Коэффициент сухого трения между колесами и дорогой равен $\mu=0,7$.

14.2.51. Жесткий однородный брусок веса G находится в покое на наклонной плоскости, показанной в масштабе на рис. 14.2.51. К бруску прикладывается горизонтальная сила P параллельно оси x , причем величина P возрастает от нуля. При достижении P величины $0,4G$ брусок начинает скользить. Определить коэффициент сухого трения.

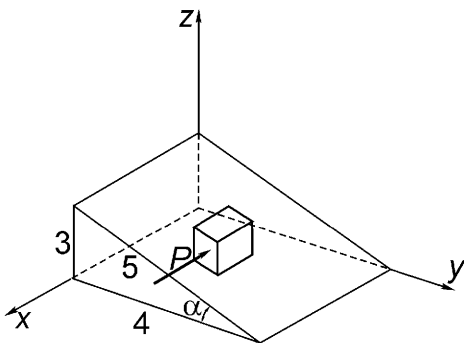


Рис. 14.2.51.

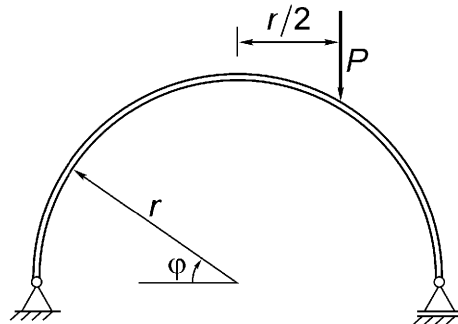


Рис. 14.2.52.

14.2.52. Стержень согнут по полуокружности и опирается на цилиндрические шарниры. К стержню приложена сосредоточенная сила P (см. рис. 14.2.52). Определить внутренние силовые факторы. Результат проверить с помощью уравнений (2.145) – (2.147).

14.2.53. Шарнирно опертая статически определимая балка с пролетом L нагружена сосредоточенной силой F посередине пролета и затем нагружается сосредоточенным моментом $M_0 = PL/4$ на расстоянии $L/4$ от правой опоры. Аналитически рассчитать и графически построить эпюры перерезывающей силы и изгибающего момента.

14.2.54. Металлический стержень согнут по окружности радиуса R и занимает $3/4$ ее длины. Один конец стержня жестко закреплен во избежание перемещений в горизонтальной плоскости. Вычислить изгибающий и крутящий моменты, если сила тяжести G прикладывается, во-первых, – на четверти расстояния от опоры, во-вторых, – в диаметрально противоположной точке, в-третьих, – к свободному концу стержня. Определить максимальные моменты и координаты точек, в которых они возникают.

14.2.55. Получить локальные условия равновесия в цилиндрических координатах.

Указание: рассмотреть равновесие элементарного объема со сторонами $r d\theta$, dr и dz . Учесть симметрию тензора напряжений.

14.2.56. В плоском напряженном состоянии (рис. 14.2.56) нормальное напряжение σ_{xx} неизвестно, но известно, что минимальное главное напряжение равно $\sigma_2 = -7 \text{ Н/мм}^2$. Найти величину нормального напряжения σ_{xx} и направления главных осей тензора напряжений.

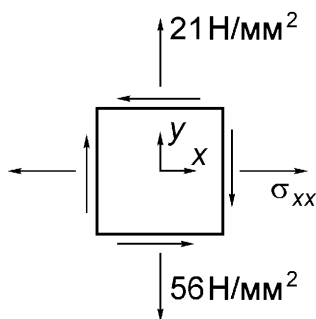


Рис. 14.2.56.

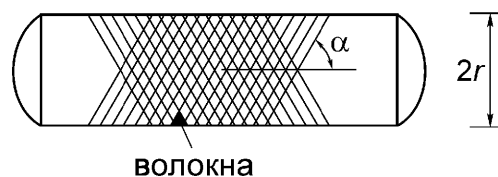


Рис. 14.2.58.

14.2.57. Тонкостенную цилиндрическую оболочку заданных размеров растягивают силой F . Оболочка нагружена внутренним давлением p , действующим по ее радиусу.

а) Определить главные напряжения.

б) Найти соотношение между F и p , учитывая размеры оболочки и то обстоятельство, что максимум касательных напряжений в стенке оболочки составляет половину от величины максимальной нормальной компоненты тензора напряжений.

14.2.58. Замкнутый легкий тонкостенный цилиндрический сосуд высокого давления изготовлен из стекловолокон, сопротивляющихся растяжению, и эпоксидного связующего (рис. 14.2.58). Найти угол α намотки волокон, измеряемый от оси сосуда, считая растягивающие усилия в волокнах равными друг другу.

14.2.59. Рассмотрим резервуар объема V , находящийся в покое на шарнирно закрепленной балке (рис. 14.2.59). Когда резервуар пуст, реакции равны $A=B=5$ кН. Определить реакции опор в следующих случаях:

а) Резервуар полностью заполнен водой объемом $V_0=0,5$ м³.

б) В резервуар, частично заполненный водой, дополнительно опущено свободно плавающее тело водоизмещением $V_D=0,2$ м³ (пренебречь плавучестью за счет воздуха, содержащегося в теле).

с) Тело объемом $V_K=2V_D$ полностью затоплено и удерживается в этом состоянии невесомым тросом, закрепленным на дне резервуара.

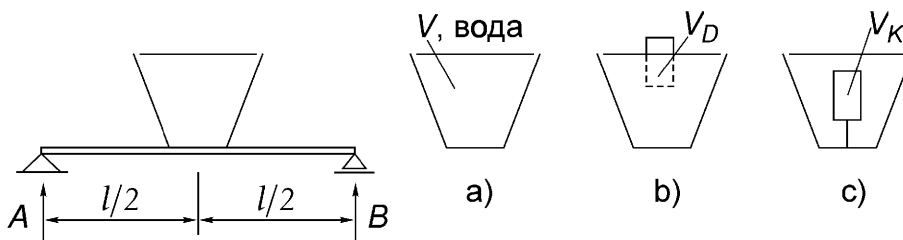


Рис. 14.2.59.

14.2.60. Корабль веса G_K и водоизмещением $V_D=G_K/\rho g$ медленно движется по каналу шириной B ($\rho=1000$ кг/м³). Корабль проплывает над шарнирно закрепленным мостом, пролет которого равен L . Мост позволяет поездам проходить под каналом (рис. 14.2.60). Пренебрегая всеми динамическими эффектами, определить реакции опор моста, возникающие при прохождении судна.

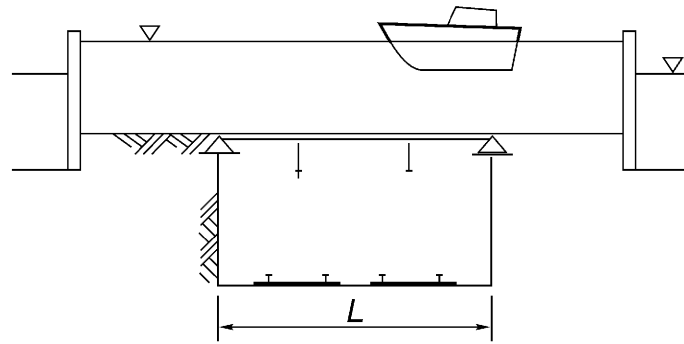


Рис. 14.2.60.

14.3. Работа

14.3.1. Стационарное плоское поле сил задано вектор-функцией

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{\sqrt{5}} \left[\left(2 \frac{xy}{l^2} - 1 \right) \mathbf{e}_x + \left[\left(\frac{x}{l} \right)^2 + 1 \right] \mathbf{e}_y \right].$$

- Вычислить работу сил поля, если материальная точка движется по полуокружности из точки с координатами $x=l, y=0$ в точку с координатами $x=-l, y=0$.
- Вычислить работу, если траектория точки, во-первых, – прямая $y=x+l$, соединяющая точки с координатами $(0;l)$ и $(2l;3l)$, во-вторых – парабола $y=(x^2/2l)+l$, соединяющая те же точки.
- Зависит ли работа от вида траектории? Если нет, то почему?

14.3.2. Центральное силовое поле задано в виде полиномиальной функции степени n от безразмерного расстояния $r=R/a$: $\mathbf{F} = F_0 (p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_n r^n) \mathbf{e}_R$. Показать, что совершенная работа не зависит от вида траектории, соединяющей две точки. Чему равна совершаемая работа?

14.3.3. Определить прогиб при нагрузке $F=5$ кН крайней точки консольной фермы, показанной на рис. 14.3.3. Стержни фермы представляют собой линейно упругие тела постоянной жесткости EA (эту величину рассматривать как параметр в окончательном результате), причем жесткость каждого стержня зависит только от его длины.

Указание: использовать выражения изгибающего момента и перерезывающей силы для эквивалентной консольной балки, а также способ вырезания узлов Риттера для определения усилий в стержнях.

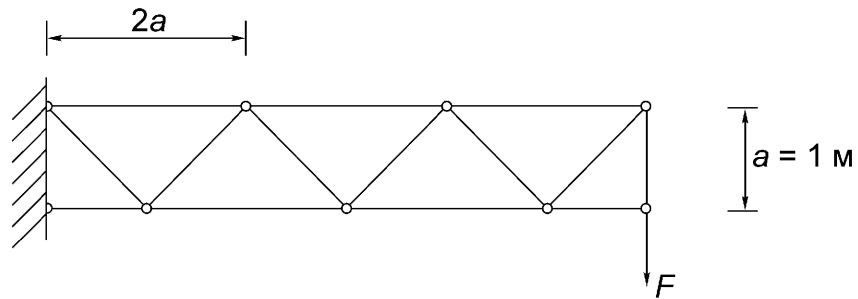


Рис. 14.3.3.

14.3.4. Вычислить перемещение узла D однопролетной фермы, показанной на рис. 2.52. Результат выразить в зависимости от величины EA , считая стержни фермы линейно упругими. Считать, что $a=1$ м и $F_1=F_3=5$ кН, $F_2=2,5$ кН.

14.3.5. Считая, что упругие свойства стержней заданы в виде EA_i ($i=1, 2, 3$), определить в общем виде перемещение узла D простой пространственной фермы, показанной на рис. А 2.2.

14.3.6. Пространственная ферма, показанная на рис. 14.3.6, представляет собой часть с высотой $(2/3)h$ пирамиды высоты $h=12$ м с квадратным основанием 5×5 м. Стержни, образующие ферму, являются линейно упругими телами с одинаковой жесткостью EA . Вычислить упругую потенциальную энергию, запасенную фермой при нагружении сосредоточенной вертикальной силой $F=10$ кН.

Указание: учесть, что, если при равновесии четырех сходящихся сил три из них расположены в одной плоскости, то четвертая сила должна равняться нулю.

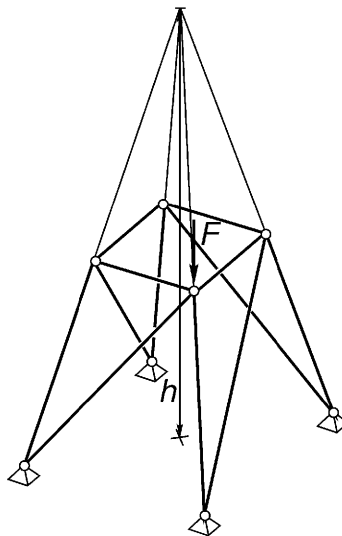


Рис. 14.3.6.

14.3.7. Полагая, что упругие свойства шести шарнирно закрепленных опорных стержней заданы в виде EA_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), определить вертикальные перемещения четырех угловых точек жесткой платформы, показанной на рис. А 2.3. Считать, что $l = 2$ м, $F_1 = F_2 = F_3 = 1000$ Н и $EA_i = EA$ рассматривать как неопределенный параметр.

Указание: в точке O следует приложить фиктивную силу $F_4 = -F_4 e_z$, которую принять равной нулю в окончательном результате.

14.3.8. Определить эффективную жесткость системы линейных пружин, выразив ее через собственные жесткости каждой из них (рис. 14.3.8).

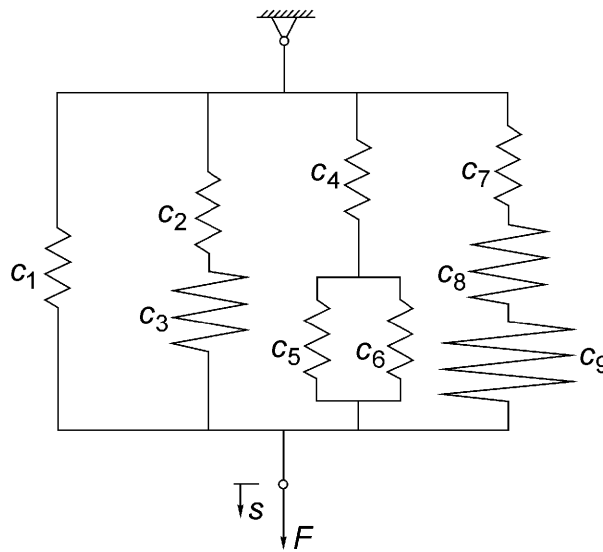


Рис. 14.3.8.

14.3.9. Тяжелый жесткий фундамент, показанный на рис. 14.3.9, имеет постоянную массу на единицу длины ρA . Фундамент соединен промежуточным шарниром в точке C и находится в покое на нелинейно упругом основании, для которого $q = k'(s + \eta s^2)$, и затем нагружается сосредоточенной силой F .

а) Найти такое распределение напряжений в основании (зависящее от δ_s), ко-

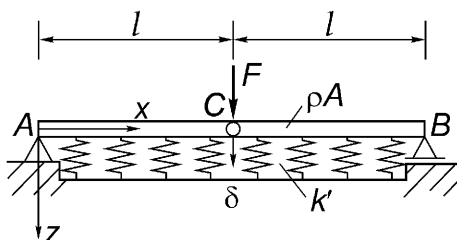


Рис. 14.3.9.

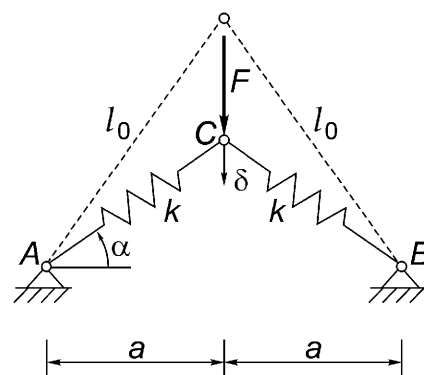


Рис. 14.3.10.

торое обеспечивает отсутствие прогибов фундамента под действием собственного веса.

б) При этих условиях определить связь между силой F и прогибом δ (измеренным от горизонтальной линии) в шарнире C . Чему равна начальная жесткость (для малых прогибов δ)?

14.3.10. Небольшая конструкция в форме трехшарнирной арки состоит из двух линейно упругих пружин жесткости k (рис. 14.3.10). Шарнир C перемещают вниз с постоянной скоростью v . Определить упругий потенциал и силу F в виде функций перемещения δ при прощелкивании арки. Длина недеформированной пружины равна l_0 .

14.3.11. Однородный цилиндр единичной длины радиуса R и плотности ρ катится по наклонной плоскости с угловой скоростью ω (рис. 14.3.11). Вычислить мощность параллельного гравитационного поля в Ваттах.

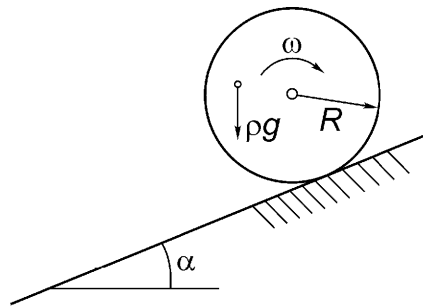


Рис. 14.3.11.

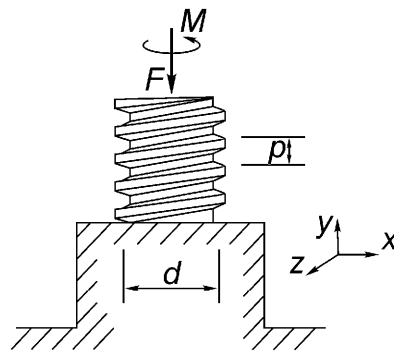


Рис. 14.3.12.

14.3.12. Подъем или опускание грузов может осуществляться винтовым домкратом (рис. 14.3.12). Задавая шаг резьбы p , средний диаметр d (угол наклона резьбы γ определяется выражением $\operatorname{tg} \gamma = p/\pi d$) и коэффициент сухого трения $\mu = \operatorname{tg} \alpha$, найти соотношение между моментом M , необходимым для подъема или опускания винта, и весом F . Затем а) найти условия самозаклинивания; б) определить коэффициент полезного действия η как отношение полезной работы (т.е. работы, затраченной на подъем груза веса F) ко всей произведенной работе, необходимой для вращения винта; в) в условиях самозаклинивания определить максимальный коэффициент полезного действия.

14.3.13. Жесткий невесомый брус подвешен на трех линейных пружинах различной жесткости (рис. 14.3.13).

а) Найти перемещение точки приложения силы P в виде функции λ .

б) Найти соответствующее удлинение пружины A .

с) Показать, что перемещение в точке A при приложении нагрузки в точке $x = \lambda a$ (см. б)) равно перемещению в точке $x = \lambda a$, когда та же сила приложена в точке A .

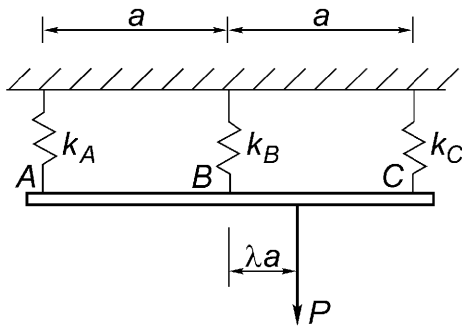


Рис. 14.3.13.

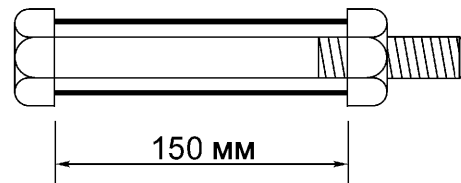


Рис. 14.3.14.

14.3.14. Трубчатая втулка, имеющая недеформированную длину 150 мм и площадь поперечного сечения 400 мм^2 , сжата дополнительным поворотом гайки на четверть ее оборота после контакта последней с втулкой (рис. 14.3.14). У болта, имеющего площадь поперечного сечения 1,0 квадратных дюймов, нарезано 16 ниток резьбы на дюйм. Найти растягивающее усилие в теле болта, если он изготовлен из стали с $E = 206 \text{ кН/мм}^2$.

14.3.15. Вал AD шарнирно опирается в точках A и D и несет шкивы в точках B (диаметр 8 дюймов) и C (диаметр 12 дюймов), $L=0,5 \text{ м}$ (см. рис. 14.3.15). Приводные ремни установлены так, что их силы натяжения находятся в соотношении $T_1/T_2 = T_3/T_4 = 3$. Максимальная мощность, передаваемая валом, составляет 18 кВт при 1750 об/мин. Вычислить и построить эпюры перерезывающей силы, изгибающего и крутящего моментов.

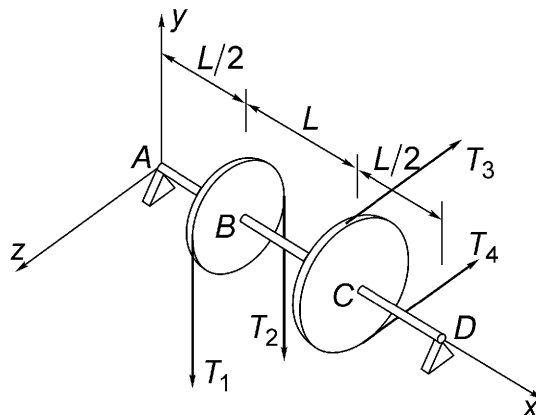


Рис. 14.3.15.

14.4. Определяющие соотношения

14.4.1. Линейно упругий однородный изотропный куб сжат по боковой поверхности (модуль сдвига G , коэффициент Пуассона ν заданы). Нормальные перемещения являются линейными функциями, так что $X_k = \lambda_k x_k$, $k=1, 2, 3$. X_k – начальные материальные координаты.

- Вычислить компоненты вектора перемещений.
- При нелинейных геометрических соотношениях найти главные компоненты тензора деформаций.
- Из закона Гука определить главные напряжения, выразив их через относительные удлинения.
- Записать результат в частном случае гидростатического напряженного состояния, считая величину λ заданной.
- Вычислить λ_1 и $\lambda_2 = \lambda_3$ для состояния одноосного растяжения.
- Положить $\nu = 1/2$ и показать, что это значение свидетельствует о несжимаемости материала.
- Для сталей отношение допускаемых напряжений к упругому модулю E имеет порядок 10^{-3} . Определить объемную сжимаемость в этом случае.

14.4.2. Деформации на ненагруженной поверхности анизотропной (деревянной) пластины заданы в виде: $\varepsilon_x = 0,0030$, $\varepsilon_y = -0,0004$ и $\varepsilon_\xi = 0,0033$, где ξ – направление под углом 45° . Известно, что главное направление анизотропии (направление волокон дерева) повернуто относительно оси x на 120° . Обобщенный закон Гука, записанный в ортогональных главных осях анизотропии для дерева в плоском напряженном состоянии (напряжения выражены в кН/мм^2), имеет следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_a \\ \varepsilon_b \\ \gamma_{ab} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,29 & 0 \\ -0,29 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \\ \sigma_{ab} \end{Bmatrix}$$

- Определить главные деформации и направления главных осей (построить круг Мора для деформаций).
- С помощью поворота осей тензора деформаций вычислить напряжения по обобщенному закону Гука.
- В направлениях, ортогональных волокнам, не должно быть растягивающих напряжений. Как проверить это требование в данном случае?
- Установить положение главных осей тензора напряжений.
- Описать напряженное состояние в координатах x и y .

14.4.3. Определить комплексный модуль сдвига для трехпараметрического одномерного вязко-упругого тела, состоящего из по крайней мере одной пружины Гука и одного демпфера (ньютоновская жидкость). Рассмотреть два расположения стандартных и вязких тел для каждого случая.

14.4.4. Четырехпараметрическая вязко-упругая жидкость (тело Кельвина-Фойгта, последовательно соединенное с «жидким» телом Максвелла) и вязко-упругое твердое тело (два последовательно соединенных тела Кельвина-Фойгта) имеют одну и ту же податливость $1/2G^*$. Используя метод частичного разделения, определить полиномиальные коэффициенты через параметры простых модельных тел каждой из фаз с учетом их соединений. Заданы следующие условия для положительных материальных параметров:

а) Жидкость, $1/2G^*(s) = P_2(s)/Q_2(s)$, $q_0 = 0$.

б) Твердое тело, $1/2G^*(s) = P_1(s)/Q_2(s)$.

14.4.5. Найти остаточную осевую деформацию стержня, находящегося в начальный момент в естественном состоянии, для однократного цикла нагружения $\pm 1,2 F_Y$. Стержень изготовлен из упруго-пластического материала с линейным упрочнением (отношение касательных модулей составляет $\alpha = 0,5$, сила, соответствующая пределу текучести равна F_Y). Начальную упругую жесткость k считать известным параметром. Удлиняется ли стержень или имеет остаточное укорочение к концу цикла? Вычислить энергию, рассеиваемую за этот цикл нагружения, и описать одномерную модель поведения стержня под нагрузкой.

14.4.6. Стержень изготовлен из трилинейного упруго-пластического материала с начальной упругой жесткостью k и силой, соответствующей нижнему пределу текучести, F_{Y_1} (см. рис. А 4.3). Отношение первого касательного модуля к k составляет $\alpha = 0,5$, отношение второго – к k равно $\beta = 0,3$. Сила, соответствующая верхнему пределу текучести, равна $F_{Y_2} = 1,5 F_{Y_1}$. Определить остаточную деформацию, остающуюся неизменной, если цикл нагружения имеет вид: $\pm 1,8 F_{Y_1}$. Чему равна величина энергии диссипации?

14.4.7. Цилиндрический стержень, имеющий круглое основание и изготовленный из композиционного материала (рис. 14.4.7), растягивается силой F , приложенной через жесткую пластину, расположенную на краю стержня. Сердце-

вина стержня (идеально-упруго-пластическая) изготовлена из стали и имеет площадь поперечного сечения $A_S = 45 \text{ мм}^2$, модуль упругости $E_S = 200 \text{ кН/мм}^2$, предел текучести $\sigma_S = 0,2 \text{ кН/мм}^2$. Сердцевина стержня покрыта оболочкой из латуни (идеально-пластический материал), имеющей площадь 60 мм^2 , модуль Юнга $E_M = 100 \text{ кН/мм}^2$ и предел текучести $\sigma_M = 0,12 \text{ кН/мм}^2$. Общая длина стержня составляет $l = 0,8 \text{ м}$.

а) Построить графики зависимостей сила – перемещение для сердцевины, оболочки и стержня в целом.

б) Нагрузка возрастает от нуля до $19,5 \text{ кН}$ и затем снижается до нуля. Вычислить максимальное удлинение и остаточное перемещение после разгрузки, после чего определить остаточные напряжения.

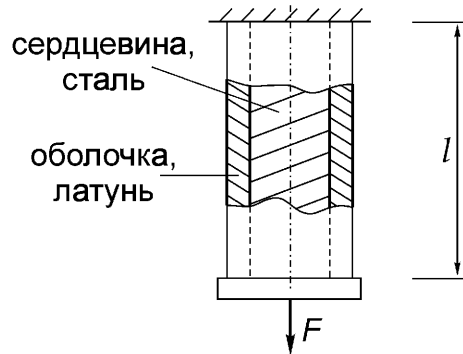


Рис. 14.4.7.

14.4.8. Композиционный тонкий стержень (рис. 14.4.8) изготовлен из двух сортов стали: две внешние части, изготовленные из St 360 С с пределом текучести $\sigma_Y = 0,235 \text{ кН/мм}^2$, симметрично приварены к внутренней части из St 510 С с $\sigma_Y = 0,355 \text{ кН/мм}^2$. Модуль Юнга $E = 206 \text{ кН/мм}^2$ и площадь поперечного сечения $A = 100 \text{ мм}^2$ одинаковы для каждой части. Считая заданной длину $l = 2 \text{ м}$, вычислить перемещения (каждая из частей – идеально-упруго-пластический материал):

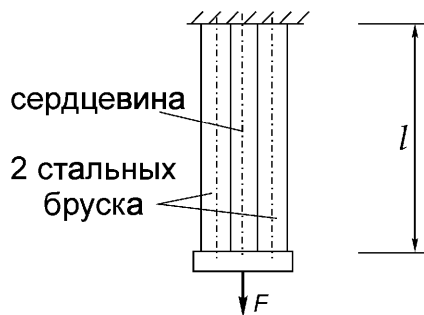


Рис. 14.4.8.

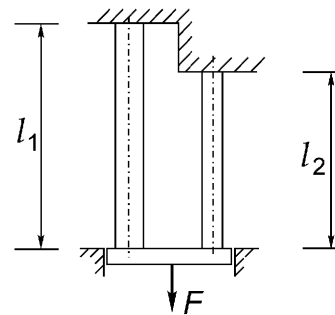


Рис. 14.4.9.

- а) в случае, когда более «мягкий» материал достигает предела текучести,
 б) в случае, когда сила достигает величины 75 кН,
 с) в случае разгрузки, $F = 0$.

14.4.9. Два идеально-упруго-пластических стержня различной длины $l_1 = 1$ м и $l_2 = 0,8$ м изготовлены из различных сталей с пределами текучести $\sigma_1 = 0,23$ кН/мм² и $\sigma_2 = 0,36$ кН/мм². Модуль упругости, составляющий 210 кН/мм², одинаков для каждого стержня. Под действием нагрузки в 258 кН, действующей одновременно на оба стержня, перемещение составляет 1,2 мм. Площадь поперечного сечения стержня 1 равна $A_1 = 300$ мм² (рис. 14.4.9).

- а) Определить площадь A_2 .
 б) Вычислить перемещение, соответствующее началу текучести.
 с) Чему равна максимальная несущая способность конструкции (предельная нагрузка)?
 д) После разгрузки от действия максимальной силы $F = 258$ кН определить остаточные перемещения и напряжения.

14.4.10. Три идеально-упруго-пластических стержня различной длины несут нагрузку F (рис. 14.4.10). Стержни изготовлены из двух различных материалов: два из них длины 1 м – из стали, с модулем упругости $E = 210$ кН/мм², пределом текучести $\sigma_Y = 0,378$ кН/мм². Третий (короткий) стержень имеет модуль $E = 100$ кН/мм², предел текучести 0,12 кН/мм², длину $l_2 = 0,75$ м. Отношение площадей поперечных сечений стержней задано выражением $2A_1/A_2 = 1,5$. Сила, при которой составная конструкция достигает предела текучести, равна 332,8 кН.

- а) Определить площади поперечных сечений A_k , $k = 1, 2$.

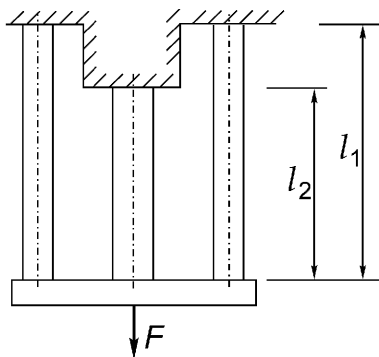


Рис. 14.4.10.

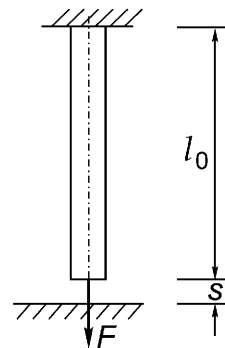


Рис. 14.4.11.

- b) Вычислить максимальное упругое удлинение.
 c) Чему равна максимальная несущая способность (предельная нагрузка)?

14.4.11. Линейно вязко-упругий стержень из материала Максвелла приходит в состояние ползучести при постоянной внезапно приложенной силе $F=1700$ кН (рис. 14.4.11). Длина стержня в ненагруженном состоянии равна 0,9 м, площадь поперечного сечения $A=1000$ мм², модуль $E=206$ кН/мм², коэффициент вязкости $\eta=1,3 \times 10^6$ кН·час/мм².

- a) Вычислить мгновенное упругое удлинение.
 b) Определить время t_1 , за которое стержень достигнет нижнего жесткого ограничителя, если зазор имеет ширину $s=10$ мм;
 c) Найти момент времени $t_2 > t_1$, в который процесс релаксации напряжений, происходящий в течение контакта стержня с границей, приведет напряжения к значению, равному половине начальных напряжений в нулевой момент времени.

14.4.12. Напряжения в точке деревянной конструкции, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, показаны на рис. 14.4.12. На рисунке также показаны главные направления анизотропии, причем известно, что величины допускаемых нормальных напряжений, направленных параллельно и перпендикулярно волокнам равны $\sigma_{\parallel}=10$ Н/мм², $\sigma_{\perp}=2$ Н/мм², соответственно. Напряжения сдвига ограничены величиной $\tau_{\parallel}=1$ Н/мм².

- a) Показать, что действующие напряжения меньше допустимых напряжений.
 b) Вычислить главные нормальные напряжения.
 c) Определить главные напряжения сдвига.
 d) Получить решения a), b) и c) с помощью круга Мора.

14.4.13. Напряжения в точке линейно упругой стальной плоской пластины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, равны

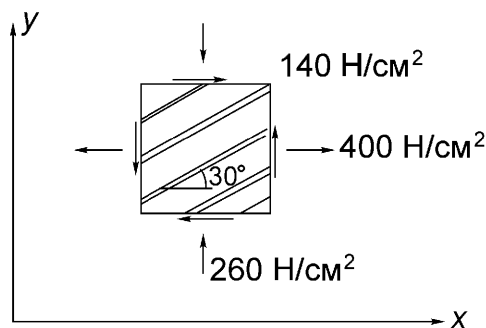


Рис. 14.4.12.

$\sigma_{xx} = 130 \text{ Н/мм}^2$, $\sigma_{yy} = -70 \text{ Н/мм}^2$ и $\sigma_{xy} = 80 \text{ Н/мм}^2$. Найти величину и направления главных деформаций в плоскости пластины и на площадке, перпендикулярной пластине. Считать, что модуль упругости равен $E = 200 \text{ кН/мм}^2$ и $\nu = 0,3$.

14.4.14. Длинный тонкостенный замкнутый цилиндрический стальной резервуар имеет радиус $r = 1,2 \text{ м}$ и толщину стенки $t = 12 \text{ мм}$. Тензодатчик, установленный на внешней поверхности параллельно оси резервуара, измеряет деформации. Чему равно давление p в резервуаре, если текущая деформация равна $\epsilon_{xx} = 0,1 \times 10^{-3}$?

14.5. Возможная работа

14.5.1. Консольная ферма, опирающаяся на шарниры, несет нагрузку (рис. 14.5.1). Найти силы в диагональных стержнях фермы с помощью принципа возможных перемещений, предполагая, что раскосы находятся в состоянии статического равновесия. Размеры фермы заданы длиной $l = 1,5 \text{ м}$. Нагрузка имеет вид: $F = 5 \text{ кН}$, $q = 2 \text{ кН/м}$.

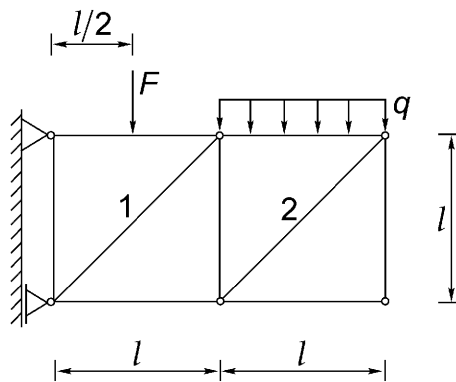


Рис. 14.5.1.

14.5.2. Проверить результат решения задачи для фермы, показанной на рис. 14.2.36, с помощью принципа возможных перемещений, рассматривая селективные варианты свободного твердого тела с отброшенными связями.

14.5.3. Рис. 2.52 иллюстрирует метод сечений Риттера для шарнирной решетчатой балки. Найти величину тех же трех сил с помощью принципа возможных перемещений, рассматривая селективные варианты свободного твердого тела с отброшенными связями.

14.5.4. Определить усилие в пролете 1 фермы, показанной на рис. А 2.7, с помощью принципа возможных перемещений.

14.5.5. С помощью принципа возможных перемещений проверить значения величин сил в стержнях 11 и 13 (рис. А 2.8), вычисленные построением диаграммы Кремоны.

14.5.6. Вычислить усилие в нижнем пролете $u=11$ идеализированной фермы, показанной на рис. 14.2.37, используя принцип возможных перемещений.

14.5.7. Вычислить усилие в опорном стержне 4 пространственной конструкции, показанной на рис. А 2.3, рассматривая свободное твердое тело с отброшенными связями. Применить принцип возможных перемещений.

14.5.8. Вычислить изгибающий момент в точке B двухпролетной балки, показанной на рис. 14.2.30. Применить принцип возможных перемещений.

14.5.9. Применяя принцип возможных перемещений, определить моменты заделок у балки, показанной на рис. 14.2.31.

14.5.10. Вычислить поле моментов в балке рамы, рассмотренной в задаче 14.2.33. Использовать переменное расстояние x , селективно рассматривая свободное твердое тело с отброшенными связями. Применить принцип возможных перемещений.

14.5.11. Статически определимая балка, имеющая свес, показана на рис. 14.5.11. Определить статические линии влияния для реакций опор, для левого и правого пределов поперечной силы в опоре A . Также найти статические линии влияния для изгибающего момента в точке A и для поперечной силы и изгибающего момента в точке C . Для решения использовать кинематический метод построения линий влияния.

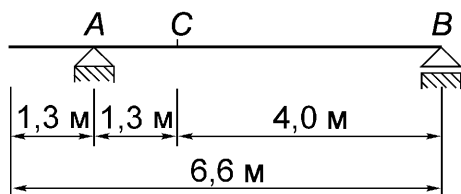


Рис. 14.5.11.

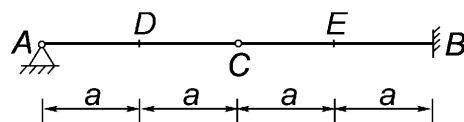


Рис. 14.5.12.

ций опор, поперечной силы, действующей на шарнир C , и для результирующей напряжений поперечного изгиба в точках D и E .

14.5.13. Цилиндрический канал, имеющий форму полуокружности радиуса R , заполнен до краев водой, находящейся в покое (рис. 14.5.13). С помощью принципа возможных перемещений определить положения равновесия жесткого однородного стержня с площадью поперечного сечения A , плотностью $\rho_K > \rho_f$ (ρ_f – плотность жидкости) в зависимости от его длины L . Предполагается, что трение между стержнем и цилиндрическим каналом, а также его берегом, отсутствует. Результат проверить с помощью статической теоремы о трех силах, уравновешенных в плоскости.

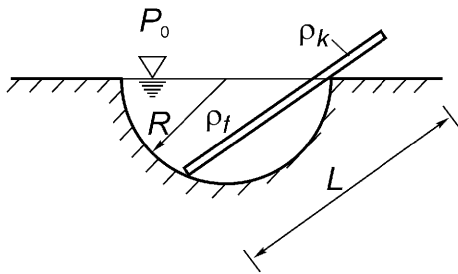


Рис. 14.5.13.

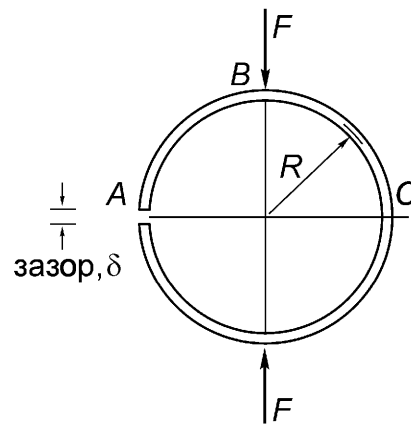


Рис. 14.5.14.

14.5.14. На рис. 14.5.14 показана тонкая стальная полоса с изгибной жесткостью $B=EI$. Полоса имеет форму слабо изогнутого кругового кольца радиуса R и нагружена по диаметру двумя противоположно направленными силами. Два конца полосы разведены на малое расстояние, величина которого без нагрузки равна δ . Чему равна величина сил F , необходимых для закрытия зазора? Применить теорему Кастильяно и использовать фиктивную вспомогательную нагрузку.

а) Используя симметрию конструкции, приложить фиктивную вспомогательную силу к свободному концу полосы в зазоре.

б) Четверть кольца AB не нагружена. Рассмотреть четверть кольца BC , прикладывая фиктивный вспомогательный момент в точке B для вычисления прогиба и наклона в этой точке.

Указание : использовать кинематическое соотношение между деформацией в точке B и раскрытием зазора.

14.5.15. Стержень DE в шарнирной раме был сжат при сборке на $2,5$ мм (рис. 14.5.15). Определить усилие в этом стержне, возникающее из-за начального несовпадения размеров и приложения силы $F=30$ кН в узле C . Все элементы рамы имеют одинаковые площади поперечного сечения $A=775$ мм² и модули упругости $E=200$ кН/мм².

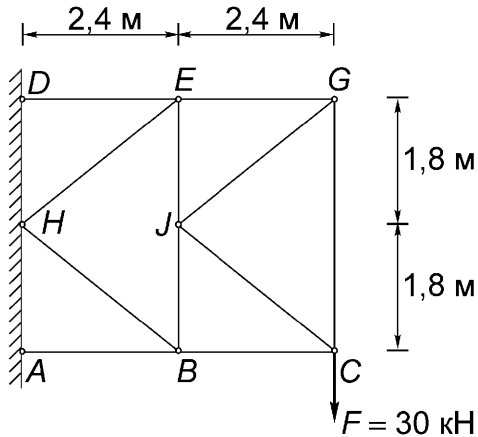


Рис. 14.5.15.

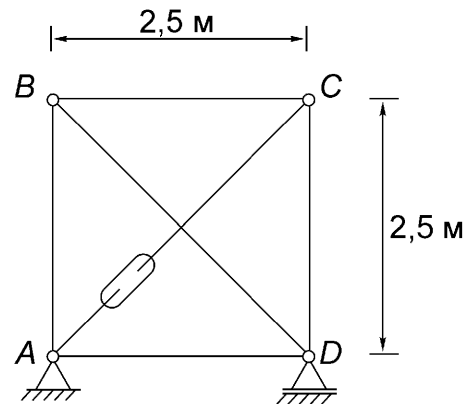


Рис. 14.5.16.

14.5.16. Элементы фермы, показанной на рис. 14.5.16, имеют равные площади поперечного сечения $A=500$ мм² и модули Юнга $E=50$ кН/мм². Винтовая стяжная муфта в стержне AC затянута так, что концы стержня сблизилась в ней на 5 мм. Определить усилие, возникающее в стержне AC в результате этой операции предварительного натяга.

14.5.17. Рассмотреть решетчатую шарнирно опертую балку, показанную на рис. 14.5.17. Балка имеет прямоугольную площадь поперечного сечения 25×300 мм, пролет $8,0$ м и несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности $q=50$ кН/м. Площадь поперечного сечения подпорки, имеющей длину $1,0$ м, равна 30 см², а у каждого из двух раскосов – 25 см². Модуль Юнга $E=200$ кН/мм² одинаков для каждого элемента конструкции.

Указание: вычислить статически неопределимую силу X в распорке по теореме Менабреа.

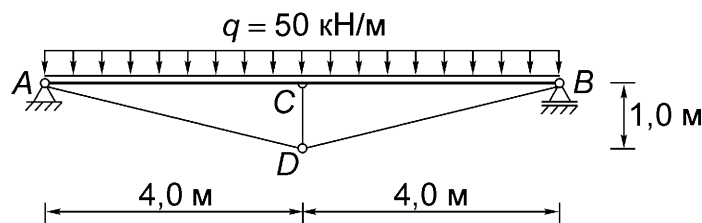


Рис. 14.5.17.

14.5.18. Рассмотреть шарнирно опертую трехпролетную однородную линейно упругую балку с поперечным сечением 3×4 м (рис. 14.5.18). Балка нагружена собственной силой тяжести интенсивности 1 кН/м . Использовать теорему Бетти. Определить изгибающие моменты в точках над промежуточными опорами, а также прогибы в серединах пролетов. Поперечное сечение балки – тонкостенный прямоугольник (коробчатый тип), имеющий размеры $200 \times 400 \times 12$ мм.

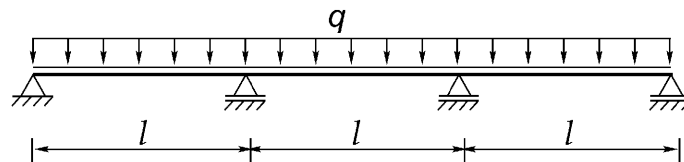


Рис. 14.5.18.

14.5.19. Кинематические соотношения между угловыми скоростями валов, соединенных универсальным шарниром Кардана, представлены в разделе 1.4.3 и выражены через угол $\varphi(t)$. При вращении вала с угловой скоростью ω определить из условий равновесия соотношение между вращающими моментами M (вход) и M_1 (выход) в зависимости от угла поворота вала φ . Необходимые сведения можно почерпнуть в разделе 1.4.3 и из рис. 1.11.

14.6. Статическая теория упругости

14.6.1. Шарнирно опертая стальная балка ($E = 206 \text{ кН/мм}^2$) с пролетом $l = 6$ м нагружена силами $F_1 = 5 \text{ кН}$ и $F_2 = 10 \text{ кН}$ (рис. 14.16.1). В точках приложения сил измерены прогибы $w_1 = 3 \text{ мм}$ и $w_2 = 8 \text{ мм}$. Известно, что изгибная (главная) жесткость балки постоянна до середины пролета и испытывает скачок при $x = l/2$.

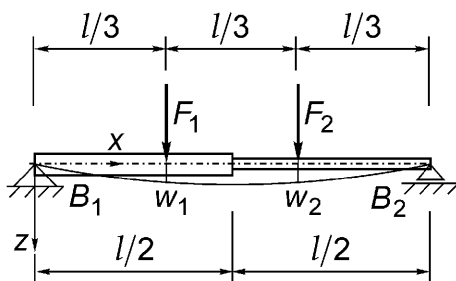


Рис. 14.6.1.

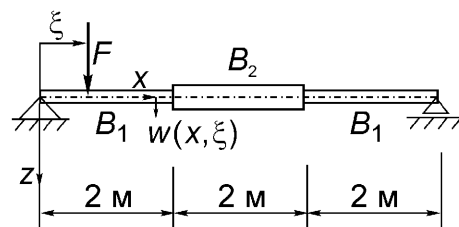


Рис. 14.6.2.

- а) Определить элементы матрицы 2×2 податливости в зависимости от пока неизвестных изгибных жесткостей $B_i = EJ_i$, $i = 1, 2$. Применить метод Мора.
- б) Используя теорему взаимности Максвелла, решить полученные два уравнения относительно неизвестных J_i .
- в) Найти прогибы при новой нагрузке, если $F'_1 = 8$ кН и $F'_2 = 7$ кН.

14.6.2. Шарнирно опертая стальная балка ($E = 206$ кН/мм²), имеющая пролет 6 м, изготовлена симметрично с кусочно-постоянной изгибной жесткостью B_i , $i=1, 2$ как показано на рис. 14.6.2. Построить линию влияния прогиба с помощью метода Мора для сопряженной балки.

14.6.3. Консольная балка длины $l = 4$ м, жестко заделанная одним концом и имеющая постоянную изгибную жесткость $B = EJ$, нагружена равномерно распределенной нагрузкой $q = 5$ кН/м (рис. 14.6.3). Определить жесткость пружины k в зависимости от B , если пружина служит упругой опорой для крайней точки консоли, причем в этом случае максимальный прогиб равен половине перемещения конца балки, если последний считать свободным.

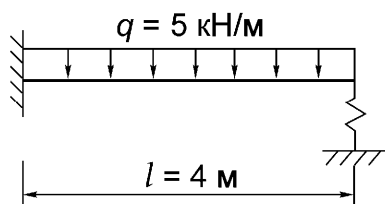


Рис. 14.6.3.

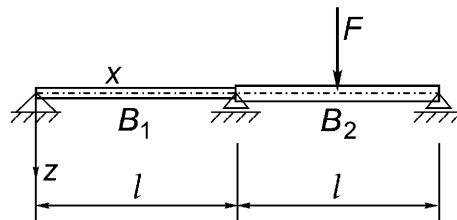


Рис. 14.6.4.

14.6.4. Двухпролетная стальная балка двутаврового сечения ($E = 206$ кН/мм²) изготовлена так, что она имеет постоянные жесткости на изгиб B_1 и B_2 в каждом пролете длиной $l = 5$ м. Экстремальные нормальные напряжения равны 160 Н/мм² при нагружении сосредоточенной силой $F = 50$ кН. Балка имеет различную высоту и ширину $b = 20$ см на фланцах (рис. 14.6.4). Найти реакции, изгибающий момент в месте расположения срединной опоры и экстремальные значения изгибных и сдвиговых напряжений при нагружении балки собственным весом и сосредоточенной силой (толщина стальной стенки балки равна 25 мм).

14.6.5. Пространственная рама (рис. 14.6.5) равномерно нагружена собственным весом. Стальная труба ($l=2$ м) диаметра $2r=75$ см и толщины стенки $t=20$ мм жестко закреплена на одном конце, причем прогиб на другом конце, подкрепленном подвижным шарниром, равен нулю. Пренебрегая концентрацией силы тяжести в сгибе рамы, определить моменты и вертикальное (по отношению к плоскости рамы) перемещение в угловой точке.

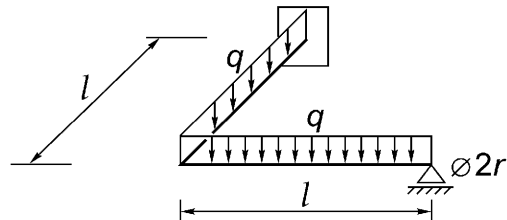


Рис. 14.6.5.

14.6.6. Определить эффективную жесткость линейно упругой пружины (рис. 14.6.6) при нагружении осевой силой и изгибающим моментом. Пружина изготовлена из стальной полосы длиной $L=(2n+1)(l+\pi r)$.

Указание: Число S-образных частей равно $(n+1/2)$.

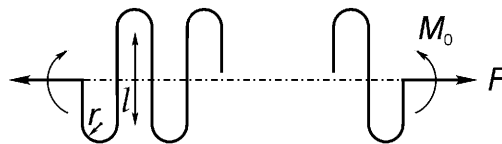
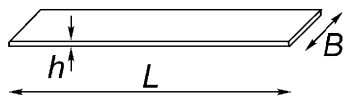


Рис. 14.6.6.

14.6.7. В условиях чистого кручения (кручения по Сен-Венану) перемещения в поперечных сечениях являются линейными функциями: $v=-\vartheta xz$, $w=\vartheta xy$, где x – фиксированная осевая координата, ϑ – константа. При некоторых формах поперечного сечения осевое перемещение равно нулю.

а) Используя линеаризованные геометрические соотношения, построить круги Мора для деформаций. Описать свойства ассоциированного тензора деформаций и его девиатора.

б) Применяя закон Гука, вычислить главные напряжения. Сравнить результат с напряжениями при чистом сдвиге.

14.6.8. Тонкостенный стержень, поперечное сечение которого показано на рис. 14.6.8, подвергается кручению. Зная крутящий момент $M_T=1$ кН·м и модуль сдвига $G=80$ кН/мм², определить поток касательных напряжений и угол закру-

чивания. Сравнить результат с кручением в тех же условиях одиночной ячейки (рис. 14.6.8).

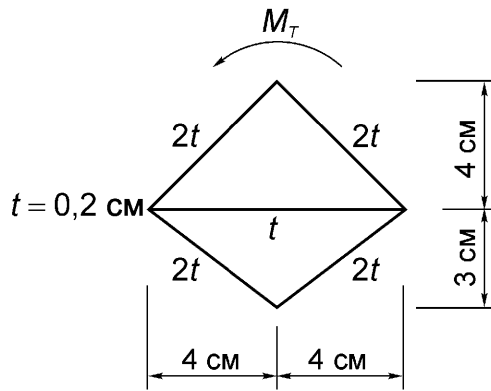


Рис. 14.6.8.

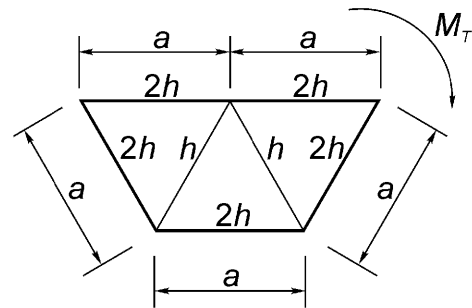


Рис. 14.6.9.

14.6.9. Тонкостенный стержень с поперечным сечением, показанным на рис. 14.6.9, подвергается кручению с моментом 60 кН·м. Толщина стенки пропорциональна величине $h=5$ мм и $a=0,2$ м. При заданном модуле сдвига $G=80$ кН/мм² определить сдвиговые напряжения и угол закручивания.

14.6.10. Три поперечных сечения (рис. 14.6.10) имеют радиус R . Считая заданными допускаемые сдвиговые напряжения и модуль сдвига, определить а) допускаемые моменты кручения; б) отношения углов закручивания при одном и том же моменте кручения.

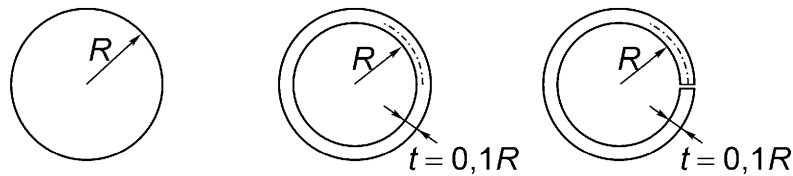


Рис. 14.6.10.

14.6.11. Поперечные сечения (рис. 14.6.11) эллиптической формы имеют совершенно различные жесткости на кручение. При заданных модуле сдвига и допускаемых при кручении сдвиговых напряжениях определить а) допустимые моменты кручения; б) отношения углов закручивания при одном и том же моменте кручения.

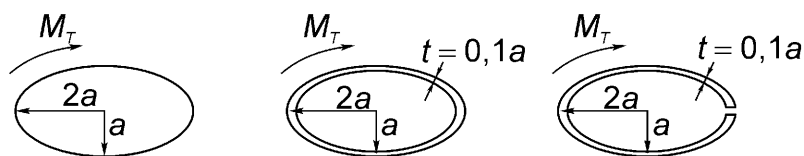


Рис. 14.6.11.

14.6.12. Равномерно распределенная вертикальная нагрузка приложена к балке, имеющей свес (рис. 14.6.12). Балка является элементом конструкции крыши. Двутавровое поперечное сечение балки повернуто от вертикали на угол 20° . В условиях косоугольного изгиба определить максимальное изгибающее напряжение, максимальное напряжение сдвига, а также местоположение этих максимумов. Решить задачу, используя модель слоистого тела, и сравнить результаты.

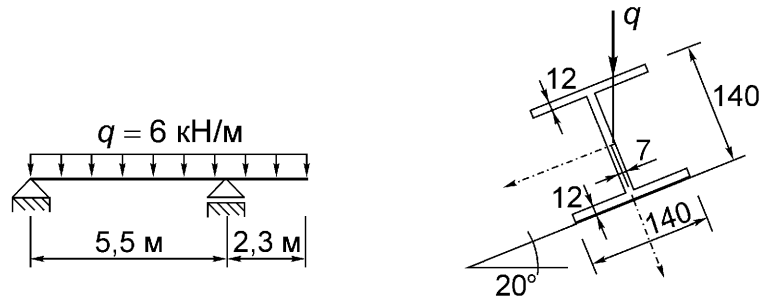


Рис. 14.6.12.

14.6.13. Проанализировать одновременное воздействие нагружения сдвига, изгиба и кручения на стесненную деформацию несимметричного сечения (рис. 14.6.13) консольной балки длиной $l=1 \text{ м}$, если модули упругости и плотность материала балки заданы (все размеры сечений заданы в мм).

- Определить функцию деформации.
- Найти изгибное, сдвиговое напряжения, а также напряжение чистого кручения.
- Найти жесткость деформации и напряжения деформации.
- Определить момент кручения, расщепив его соответствующим образом.
- Найти максимальное осевое перемещение.

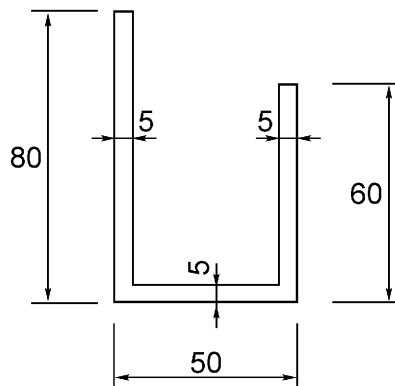


Рис. 14.6.13.

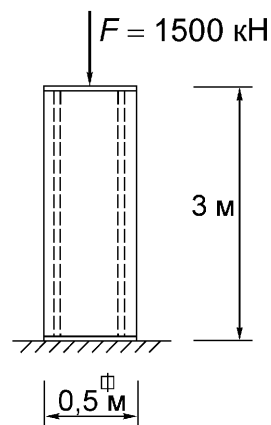


Рис. 14.6.14.

14.6.14. Железобетонная колонна длины $l=3$ м имеет квадратное поперечное сечение $0,5 \times 0,5$ м. Концы колонны накрыты жесткими пластинами. Колонна нагружена силой $F=1500$ Н. При разработке конструкции колонны восемь стальных стержней диаметром 30 мм расположили симметрично относительно вертикальной оси колонны (рис. 14.6.14). Модули упругости стали и бетона равны $E_{ст}=200$ кН/мм² и $E_б=25$ кН/мм², соответственно.

- Вычислить нормальные напряжения в бетоне и арматуре.
- Определить упругое укорочение.

14.6.15. Одноярусная стальная рама, имеющая пролет $l=7$ м и высоту $h=4$ м, нагружена в горизонтальном направлении линейно распределенной силой на единицу длины с максимумом $q_0=15$ кН/м. Балка рамы нагрета так, что ее температура стала выше на постоянную величину $T_m=10^\circ\text{C}$ (рис. 14.6.15). Считая заданными коэффициент линейного температурного расширения $\alpha=1,0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$, характеристики поперечных сечений стоек $J_1=5700$ см⁴, $A_1=69$ см² и балки $J_2=8090$ см⁴, $A_2=78$ см², найти распределение изгибающего момента и нормальной силы (получить аналитически и сделать эскиз). Принять во внимание влияние нормальных деформаций.

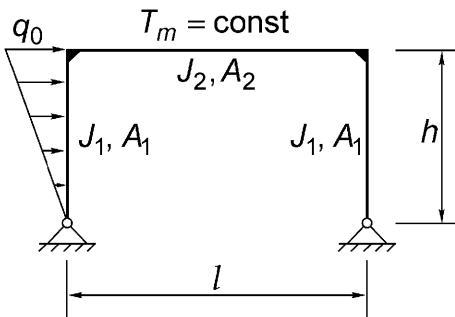


Рис. 14.6.15.

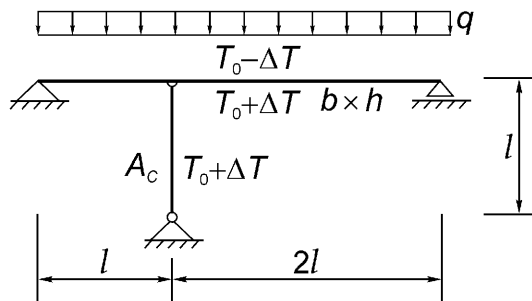


Рис. 14.6.16.

14.6.16. Балка с пролетом $3l$ согласно рис. 14.6.16 имеет прямоугольное поперечное сечение $b \times h$ и нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q на единицу длины. Также создается нагружение за счет охлаждения нагруженной поверхности балки на $-\Delta T$ и нагрева внутренних поверхностей на ΔT . На такую же величину нагревается шарнирно закрепленная стойка с поперечным сечением A_c . Считая, что упругий модуль и линейный коэффициент линейного температурного расширения одинаковы во всей конструкции, найти реакции опор и результирующие силовые факторы в балке. Как

изменится результат, если знак у ΔT изменить на противоположный? T_0 – отсчетная температура.

14.6.17. Плоская ферма с шарнирными опорами (рис. 14.6.17) нагружена как сосредоточенной силой $F=50$ кН, так и температурной нагрузкой за счет охлаждения горизонтального элемента на 20°C по отношению к общей отсчетной температуре. Все стальные элементы фермы имеют одинаковые модули упругости 206 кН/мм² и площади поперечного сечения $A=500$ мм². Видимая длина $l=4$ м, коэффициент линейного температурного расширения составляет $1,0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$. Определить усилия в элементах фермы и перемещение узла С. Как изменится результат при изменении знака у ΔT на противоположный (нагрев)?

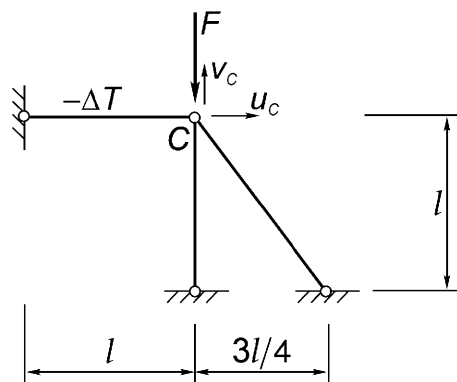


Рис. 14.6.17.

14.6.18. Квадратная рама размерами $l \times l$ изготовлена из четырех равных линейно упругих брусов. Один из брусков нагревается, а противоположный ему охлаждается на величину ΔT . В условиях свободного перемещения углов рамы определить результирующие силовые факторы.

14.6.19. Двухпролетная балка подвешена на тросах (рис. 14.6.19). Температурная нагрузка такова, что температурный момент постоянен: $m_\theta = \text{const}$. Считая, что заданы постоянная изгибная жесткость B , модуль упругости E_B , площадь

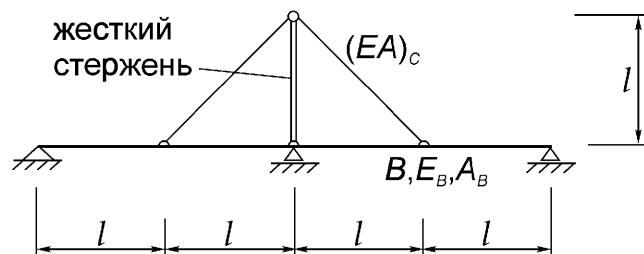


Рис. 14.6.19.

поперечного сечения A_B балки и жесткость $(EA)_C$ троса, определить результирующие силовые факторы и усилие растяжения троса. Стойку считать жесткой.

14.6.20. Пространственная рама состоит из брусов одинакового кругового поперечного сечения, но каждый из брусов имеет различную длину (рис. 14.6.20). Рама нагревается до одной и той же температуры. Определить в условиях линейной упругости результирующие силовые факторы и перемещения угловых точек.

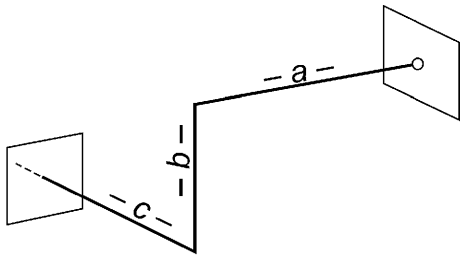


Рис. 14.6.20.

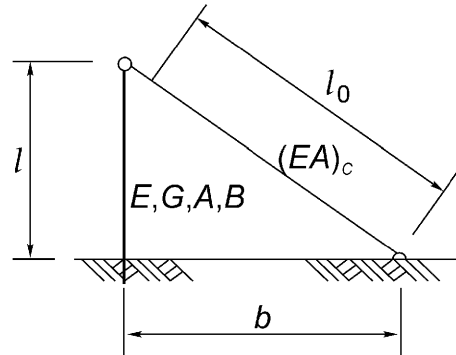


Рис. 14.6.21.

14.6.21. Упругая консольная балка имеет длину l , упругие модули E и G , площадь кругового поперечного сечения A и постоянную изгибную жесткость B . Балка предварительно растягивается упругим тросом (рис. 14.6.21), имеющим жесткость $(EA)_C$ и длину в нерастянутом состоянии $l_0 < (l^2 + b^2)^{1/2}$. Определить реакции опоры, результирующие силовые факторы и перемещения крайней точки балки, учитывая воздействие нагрузок изгиба, сдвига и нормальной силы. *Указание:* использовать фиктивную температуру, нагрев до которой приводит к удлинению троса на необходимую длину, затем соединить трос с балкой и рассмотреть охлаждение троса до исходной температуры.

14.6.22. Рассмотреть шарнирно опертую статически определимую трехпролетную однородную упругую балку пролета l в условиях температурного нагружения. Вычислить реакции опор, максимальный изгибающий момент и максимальный прогиб, если а) приложен постоянный температурный момент; б) температурный момент линейно возрастает от нуля в точках опирания балки до постоянной величины в середине пролета.

14.6.23. Рама, используемая в качестве промежуточной опоры, имеет соединительную балку, подвергаемую температурному нагружению. Средняя температура балки возрастает на постоянную величину вместе с равномерно распределенным температурным моментом. Все элементы фермы имеют одинаковые

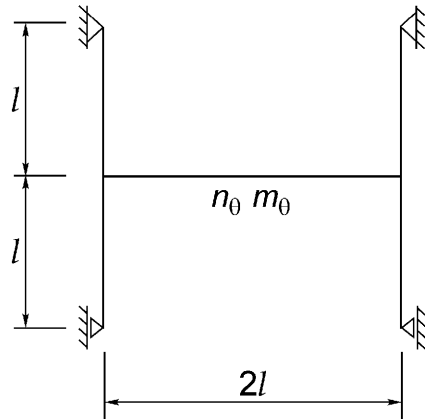


Рис. 14.6.23.

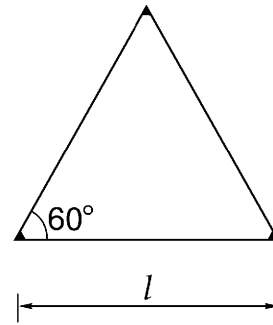


Рис. 14.6.25.

модули упругости и длины (рис. 14.6.23). При каких условиях температурное нагружение приведет к тому, что экстремальные значения изгибающих моментов будут иметь одну и ту же величину?

14.6.24. Рассмотреть ферму, представленную на рис. 14.5.17. Шарнирно опертая балка имеет прямоугольное поперечное сечение размерами 25×300 мм и пролет 8,0 м. К ней приложена равномерно распределенная температурная нагрузка путем нагрева верхней поверхности на $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ и охлаждения нижней на ту же величину. Поперечное сечение подпорки равно 30 см^2 , длина – 1,0 м, оба раскоса имеют площадь поперечного сечения 25 см^2 каждый. Модуль Юнга $E = 200 \text{ кН/мм}^2$ одинаков во всей конструкции. Коэффициент линейного температурного расширения составляет $\alpha = 1,0 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. Вычислить максимальный изгибающий момент и усилия в подпорке.

14.6.25. Внешняя поверхность треугольной рамы равномерно нагревается так, что температура увеличивается на ΔT (рис. 14.6.25). Найти изгибающий момент в трех упругих балочных элементах с одинаковыми механическими свойствами, если площадь прямоугольного сечения каждого равна $b \times h$.

14.6.26. Круговое упругое кольцо с круглым поперечным сечением нагревается до средней температуры $T_m = T_0 (1 + \cos\varphi)$. Найти нормальную силу и изгибающий момент. Определить овализацию в зависимости от наибольшего радиального прогиба.

14.6.27. Найти напряжения в пустотелом диске, вращающемся с угловой скоростью 10000 об/мин. Диск изготовлен из высоколегированной стали, имеет переменную толщину $h=10(R_i/r)^{1/2}$ мм, причем $R_i=10$ мм и $R_e=50$ мм.

14.6.28. Определить температурные напряжения в диске, описанном в задаче 14.6.27, если его средняя температура возрастает на 500°C во внешней части диска, в которой $35 < r < 50$ мм.

14.6.29. Круглый составной диск имеет постоянную толщину и в начальный момент времени не имеет напряжений. Диск равномерно нагревают на 50°C . Задавая упругие свойства (для стали): $E_1=206$ кН/мм², $\alpha_1=1,0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ при $0 \leq r \leq 50$ мм, а также для алюминиевого сплава: $E_2=71$ кН/мм², $\alpha_2=2,5 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ при $50 < r \leq 120$ мм, найти результирующие силовые факторы.

14.6.30. К круглой пластине приложена равномерно распределенная по ее поверхности поперечная нагрузка. Пластина прижата на внутренней границе к жесткой колонне радиуса R_i , внешний край пластины радиуса R_e свободен. Задавая постоянную изгибную жесткость K , определить поверхность прогиба и вычислить результирующие силовые факторы.

14.6.31. Жесткий шар радиуса $R=0,25$ м и веса $G=8$ кН сварен по экватору с гибкой круглой пластиной, шарнирно опираемой по внешнему краю радиуса $R_e=0,50$ м. Считая заданными модуль упругости $E=206$ кН/мм² и $\nu=0,3$, найти постоянную толщину пластины h , если максимальный прогиб составляет 5 мм.

14.6.32. Жестко защемленная по внешнему краю пластина с отверстием в ее центральной части (граница отверстия свободна от силового воздействия) нагружена равномерно распределенным температурным моментом. Найти изгибающие моменты и поверхность прогиба.

14.6.33. Круглая пластина шарнирно оперта по внешнему краю и имеет дополнительную точку опоры в своем центре. Определить реакции опор при температурном нагружении моментом $m_\theta = \text{const}$, если пластина имеет постоянную изгибную жесткость.

14.6.34. Жестко заземленная круглая пластина толщины h и радиуса R поддерживается в своем центре упругой стойкой, имеющей длину l и площадь A (рис. 14.6.34). Упругие свойства у пластины и стойки одинаковы. Конструкция равномерно нагрета до одной и той же температуры. Определить эквивалентные напряжения Мизеса в точках A , B и C .

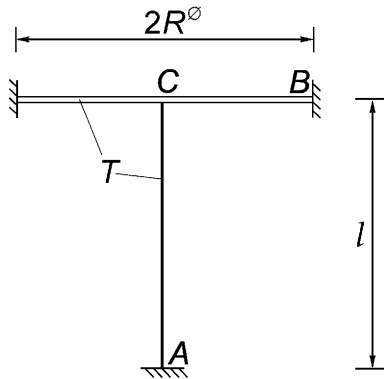


Рис. 14.6.34.

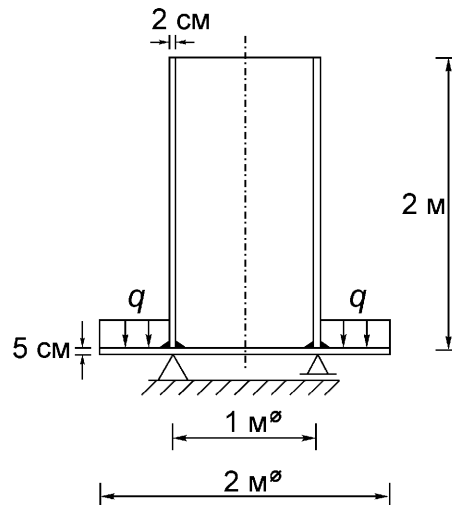


Рис. 14.6.36.

14.6.35. Квадратная пластина шарнирно оперта по внешнему краю и нагружена в своем центре с помощью точечного нагрева. Определить прогиб.

14.6.36. Круглая плита, нагруженная равномерно распределенной силой, приварена к цилиндрической оболочке (рис. 14.6.36). Конструкция изготовлена из низкоуглеродистой стали и имеет один и тот же модуль упругости. Определить интенсивность равномерной нагрузки q , если максимальный прогиб равен 5 мм. Все размеры указаны на рисунке. Найти напряжения.

14.6.37. Круглая пластина радиуса 0,5 м и толщины 20 мм приклеена к цилиндрической оболочке, опирающейся на шарниры. Оболочка имеет ту же толщину,

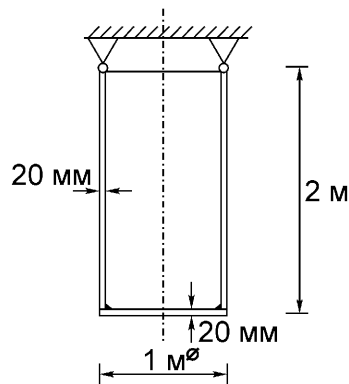


Рис. 14.6.37.

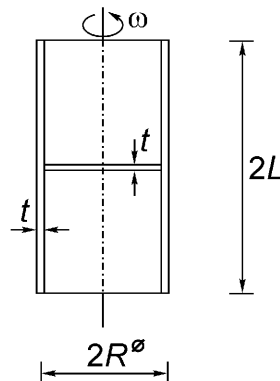


Рис. 14.6.38.

а длину – 2 м (рис. 14.6.37). Конструкция изготовлена из алюминиевого сплава. В условиях нагружения конструкции собственным весом определить результирующие силовые факторы и осевое перемещение центра пластины.

14.6.38. Цилиндрическая оболочка с диафрагмой, изготовленная из высоколегированной стали, имеет диаметр 500 мм и толщину $t=10$ мм. Оболочка вращается с угловой скоростью 1000 об/мин (рис. 14.6.38). Вычислить напряжения в оболочке и дисковой диафрагме.

14.6.39. Тонкостенная полусферическая оболочка закрыта снизу тонкой пластиной с отверстием (рис. 14.6.39). Оболочка вращается с постоянной угловой скоростью. Общая толщина стенок равна t , плотность и упругие свойства постоянны во всей конструкции. Определить напряжения, если пластина приварена к кромке оболочки.

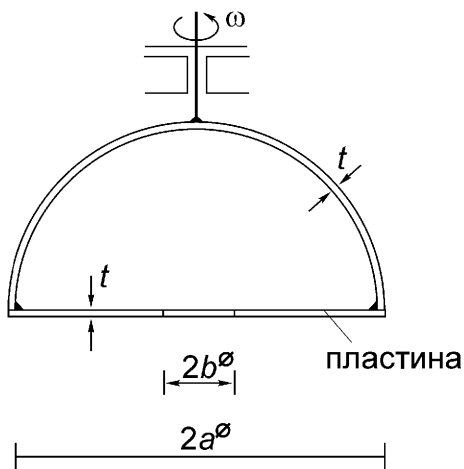


Рис. 14.6.39.

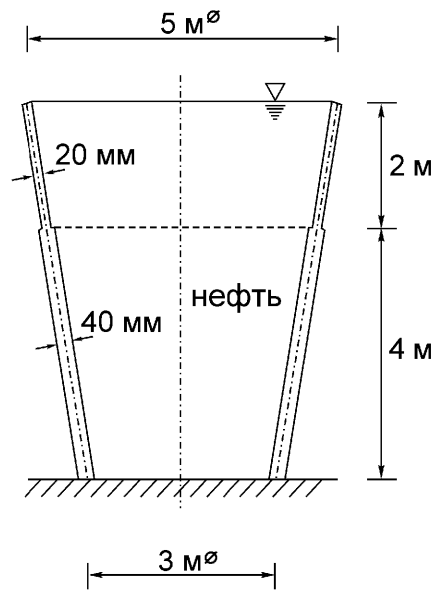


Рис. 14.6.40.

14.6.40. Стальной резервуар изготовлен из двух конических частей постоянной толщины каждая. Резервуар до краев наполнен нефтью (рис. 14.6.40). Найти мембранные напряжения, если нагружение осуществляется за счет давления нефти и веса оболочки (плотность нефти составляет 860 кг/м^3 , стали – 7820 кг/м^3).

14.6.41. Тонкостенная сферическая стальная оболочка с углом раствора поверхности 90° приварена к жесткой плите, служащей основанием. Оболочка до краев заполнена водой (рис. 14.6.41). Определить напряжения, вызванные од-

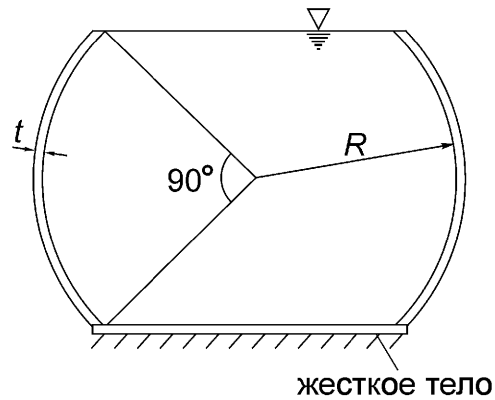


Рис. 14.6.41.

новременным действием давления воды и веса оболочки. Радиус равен $R=1$ м, толщина стенки – $t=10$ мм.

14.6.42. Тонкостенная цилиндрическая оболочка закрыта на торцах полусферическими чашками, имеющим радиус R (рис. 14.6.42). Определить мембранные напряжения и изгибные возмущения при действии постоянного внутреннего давления газа. Вычислить радиальные перемещения в случае, если вся оболочка радиуса $R=1$ м изготовлена из стали постоянной толщины $t=10$ мм. Давление – $p=5,0 \times 10^5$ Па.

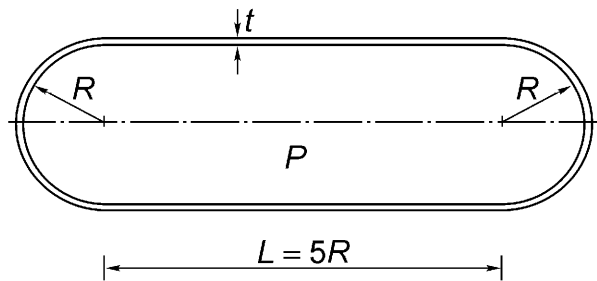


Рис. 14.6.42.

14.6.43. Бесконечно длинная цилиндрическая оболочка радиуса $R=350$ мм и толщины стенки $t=12$ мм, изготовленная из низкоуглеродистой стали, подвергается внутреннему давлению газа p , рассматриваемому как параметр. Определить напряженное состояние в окрестности кольцевого ребра жесткости, изготовленного из того же материала, если ребро плотно связано с оболочкой и имеет ширину 60 мм и высоту 50 мм.

14.6.44. Горизонтальная однородная консольная балка длины 1 м нагружена собственным весом. Определить прогиб балки в условиях линейно упругого поведения балки, учитывая влияние сдвига. Результат вычислить для низкоуглеродистой стали, зная, что площадь поперечного сечения равна 40×120 мм. Ка-

ким должен быть цилиндрический брус с круглым поперечным сечением, если он имеет такую же изгибную жесткость? Применить принцип аналогии теории упругости и вязко-упругости в обоих случаях, использовать модель среды Максвелла с некоторым неопределенным временем релаксации.

а) Вычислить прогиб, зависящий от времени, в состоянии ползучести.

б) Возможно ли в этом случае перераспределение напряжений?

14.6.45. Балка, описанная в задаче 14.6.44, имеет дополнительную шарнирную опору (см. рис. 6.12). Выполнить то же задание в этом статически неопределенном случае. Ответить на вопросы а) и б) предыдущего задания.

14.6.46. Консольная балка (рис. 14.6.46) с пролетом $l=1\text{ м}$ изготовлена из стальной трубы треугольного поперечного сечения. Толщина стенки трубы равна $t=5\text{ мм}$. Определить такой размер a , чтобы перемещение в направлении заданной силы $F=5\text{ кН}$, приложенной к крайней точке, равнялось $\delta=1\text{ мм}$. Затем, используя модель среды Максвелла с заданным некоторым временем релаксации, вычислить деформацию ползучести в точке приложения нагрузки.

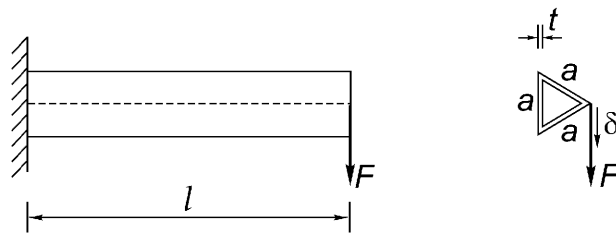


Рис. 14.6.46.

14.6.47. Пространственная рама, изготовленная из стальной трубы диаметра 200 мм и толщины стенки 6 мм, нагружена сосредоточенной силой F . Необходимые размеры приведены на рис. 14.6.47. Найти распределение моментов и вычислить перемещение точки приложения силы. Используя модель среды Максвелла, найти деформацию ползучести в этой точке.

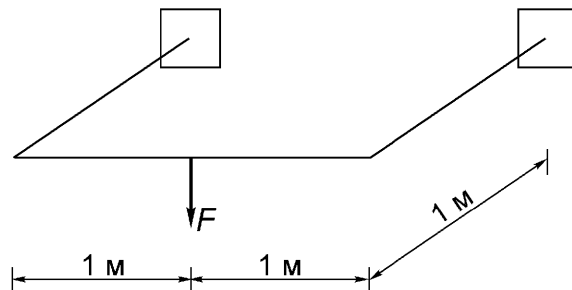


Рис. 14.6.47.

14.6.48. Толстостенный сферический сосуд высокого давления заданных размеров нагружен внутренним давлением газа p . Используя модель среды Максвелла, определить релаксацию напряжений и радиальную деформацию ползучести, зависящую от времени. Решение в условиях упругости может быть получено способом, рассмотренным в разделе 6.1, формулы (6.10) – (6.18).

14.6.49. Тонкостенный алюминиевый сферический сосуд высокого давления разделен по экватору жесткой диафрагмой. Диаметр сосуда равен 2 м, толщина стенки – 10 мм (рис. 14.6.49). Определить напряжения в оболочке сосуда в зависимости от заданного внутреннего давления газа p , найти максимальное радиальное перемещение. Используя модель среды Максвелла, исследовать ползучесть оболочки.

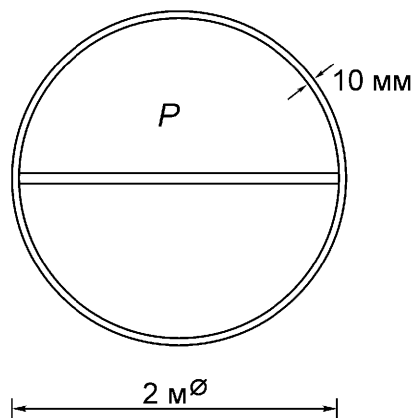


Рис. 14.6.49.

14.6.50. Найти ядро поперечного сечения колонны и объяснить важность этого понятия в трех случаях:

- для квадратного поперечного сечения;
- для произвольного треугольного поперечного сечения (вычисления проделать для правильного треугольника);
- для шестиугольного поперечного сечения.

14.6.51. На рис. 14.6.51 показана конструкция билинейно упругой пружины, состоящей из латунного цилиндра диаметра 150 мм с толщиной стенки 6,25 мм и алюминиевого цилиндра диаметра 250 мм с той же толщиной стенки. При сжатии такой составной конструкции сначала нагружается латунный цилиндр, а после закрытия зазора – алюминиевый. Модули упругости соответственно равны 103 кН/мм^2 и 69 кН/мм^2 . Определить соотношение сила – перемещение при сжатии.

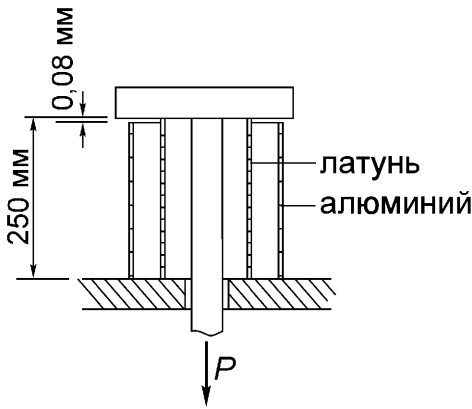


Рис. 14.6.51.

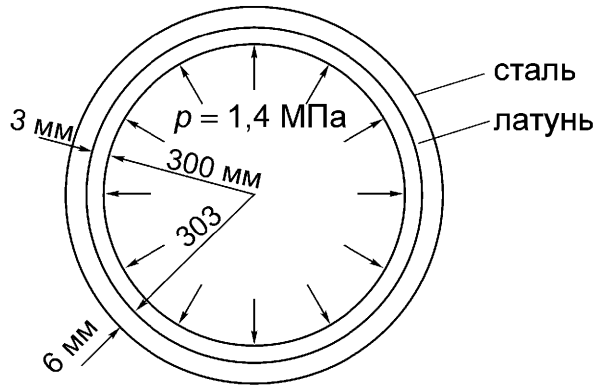


Рис. 14.6.52.

14.6.52. Композиционное кольцо ширины 9 мм состоит из внутреннего латунного кольца и наружной стальной облицовки (рис. 14.6.52). При радиальном давлении $p = 1,4$ МПа найти

- а) окружные напряжения,
- б) радиальное расширение латунного цилиндра.

Указание: модуль упругости для латуни приведен в задаче 14.6.51, а для стали – составляет $E_{ст} = 206$ кН/мм².

14.6.53. Медная труба с внутренним радиусом 22 мм и толщиной стенки 2,5 мм ($E_{меди} = 140$ кН/мм²) плотно обмотана одним слоем нержавеющей стальной проволоки, имеющей размеры квадратного поперечного сечения $1,25 \times 1,25$ мм ($E_{ст} = 205$ кН/мм²). Сила натяжения при наматывании равна $S = 0,5$ кН (рис. 14.6.53). Пренебрегая осевыми силами в трубе определить:

- а) Какова усадка трубы при наматывании проволоки?
- б) Чему должно быть равно внутреннее давление в трубе, которое приведет к достижению напряжениями максимального допустимого значения либо в трубе (210 кН/мм²), либо в проволоке (1 кН/мм²)?
- с) Чему равен коэффициент увеличения внутреннего давления для несущей способности конструкции по сравнению с аналогичной трубой без намотки?

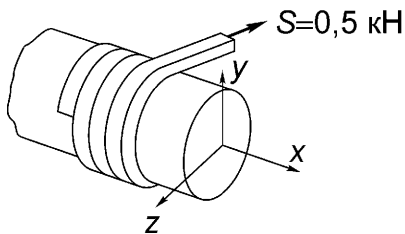


Рис. 14.6.53.

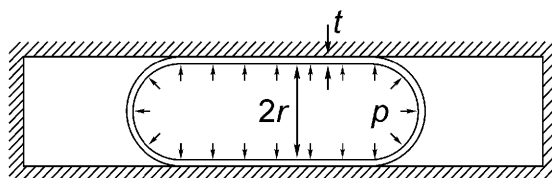


Рис. 14.6.56.

14.6.54. Рассмотрим спиральную пружину из упражнения А 6.11.

а) Заменяя силу F на поперечную силу Q , найти жесткость k и напряжения в проволоке.

б) Заменяя силу F на момент M_0 , приложенный к концу пружины, определить жесткость при кручении k^* и определить локальную поперечную силу в проволоке, а также изгибающий момент и момент закручивания в ней.

14.6.55. Длинный замкнутый тонкостенный резервуар длины L , работающий в пределах линейной упругости, в отсутствие гидростатического давления в нем плотно зажат между двумя жесткими стенками. Оценить осевую силу, действующую на стенки со стороны плоских днищ резервуара, если давление в последнем возрастает до величины p .

14.6.56. Длинный тонкостенный цилиндрический резервуар со сферическими днищами не имеет внутреннего давления и плотно вставлен в жесткую цилиндрическую полость (рис. 14.6.56). Резервуар изготовлен из линейно упругого материала. Оценить окружные напряжения, если давление в резервуаре поднялось до величины p .

14.6.57. На сколько может быть нагрета композиционная конструкция в отсутствии пластического течения, если она изготовлена из стальной пластины, покрытой с двух сторон тонким слоем мягкого алюминия, плотно сцепленного с основаниями? Считать, что для стали $\nu=1/3$, $E=200 \text{ кН/мм}^2$, $\sigma_Y=250 \text{ Н/мм}^2$, $\alpha=1,0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$, а в слоях алюминия – $E=68 \text{ кН/мм}^2$, $\sigma_Y=30 \text{ Н/мм}^2$, $\alpha=2,0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$.

14.6.58. Композиционное кольцо (рис. 14.6.52) в начальный момент времени не имеет внутреннего давления и затем начинает равномерно нагреваться до температуры на 80°C больше отсчетной комнатной. Найти напряжения в латунном и алюминиевом кольцах ($\alpha_{\text{латуни}}$ близко к значению $\alpha_{\text{алюм}}$).

14.6.59. Стержневой образец из алюминиевого сплава 2024-T4 при одноосном растяжении переходит в состояние текучести при напряжении $\sigma_Y=330 \text{ Н/мм}^2$. Если этот материал находится в заданном напряженном состоянии $\sigma_{xx}=138 \text{ Н/мм}^2$, $\sigma_{yy}=-69 \text{ Н/мм}^2$, $\sigma_{zz}=0$, $\sigma_{xy}=138 \text{ Н/мм}^2$ и $\sigma_{zy}=\sigma_{zx}=0$, будет ли он находится в состоянии пластичности

а) по критерию Мизеса;

б) по критерию Треска?

14.6.60. Полый стальной вал имеет внешний и внутренний диаметры, равные 450 мм и 30 мм, соответственно. На вал плотно посажена стальная труба с толщиной стенки 75 мм. Внутренний диаметр трубы на 1,25 мм меньше внешнего диаметра вала при одинаковой отсчетной температуре. Вычислить напряжения в трубе и в полом вале.

14.6.61. 100-миллиметровая алюминиевая муфта (внешний диаметр равен 3/4 дюйма) находится в контакте со стальным болтом, имеющим диаметр 1/2 дюйма. Конструкция сжата путем закручивания гайки на четверть оборота при температуре 18°C (болт имеет 16 ниток резьбы на один дюйм). Температура затем поднялась до 36°C. Определить напряжения у болта и у муфты.

14.6.62. Вал диаметра 25 мм, изготовленный из алюминиевого сплава 2024–0 и имеющий длину $L = 2,4$ м (рис. 14.6.62), жестко заделан концами A и C. В точке B, находящейся на расстоянии 0,6 м от левой опоры, приложен крутящий момент величины 70 Н·м, модуль сдвига $G = 26$ кН/мм².

а) Вычислить моменты пар сил M_A и M_C .

б) Найти распределение угла закручивания вала.

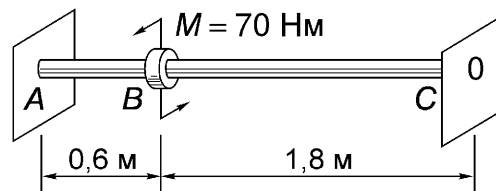


Рис. 14.6.62.

14.6.63. Линейно упругая консольная балка длины L имеет Z-образное тонкостенное сечение постоянной толщины t , высоту перемычки $2a$ и одинаковую ширину a на верхнем и нижнем фланцах (рис. 14.6.63). Балка нагружена сосредоточенной силой F на своем конце, причем линия действия силы проходит через перемычку в направлении z . Если нижний фланец расположен в направлении y , то тензор моментов инерции поперечного сечения имеет компоненты:

$$J_{yy} = (8/3) ta^3, \quad J_{zz} = (2/3) ta^3 \quad \text{и} \quad J_{yz} = -ta^3.$$

а) Найти тензор моментов инерции в главных осях.

б) Определить максимальное напряжение изгиба.

с) Вычислить напряжения сдвига.

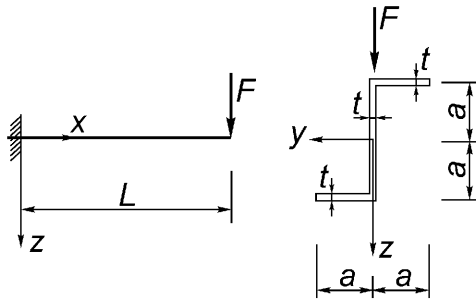


Рис. 14.6.63.

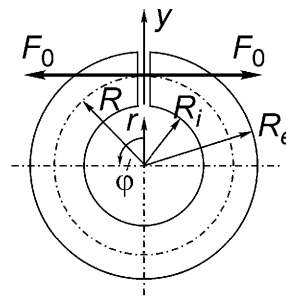


Рис. 14.6.66.

d) Найти перемещения концевой точки балки.

e) Проверить результат пункта d) путем интегрирования уравнения (a) раздела А 11.6.

14.6.64. Диск, изготовленный из алюминиевого сплава и имеющий радиус $R_e = 300$ мм, плотно насажен на стальной жесткий вал диаметра 200 мм. В ненапряженном состоянии внутренний радиус диска равен $R_i^* = 100 - 0,1$ мм. Модуль упругости диска $E = 70$ кН/мм², $\nu = 0,3$ и плотность $\rho = 2700$ кг/м³. Вычислить мембранные напряжения.

Указание: изменить уравнение (6.15) для плоского напряженного состояния, чтобы определить радиальное давление на внутренней поверхности. Уравнения (6.14) и (6.16) преобразовать аналогичным образом.

14.6.65. Вычислить напряжения во вращающемся диске, представленном в задаче 14.6.64, при угловой скорости 3000 об/мин. Определить критическую угловую скорость, при которой теряется плотность посадки.

Указание: использовать равенство (6.244).

14.6.66. Давление с результирующей силой F_0 приложено к шлицу толстостенного кольца, находящегося в плоском напряженном состоянии (рис. 14.6.66). Задана функция напряжений

$$F(r, \varphi) = A_1 + A_2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 r^2 \ln r + (B_1 r + B_2/r + B_3 r^3 + B_4 r \ln r) \cos \varphi$$

и напряжения, определяемые с ее помощью: $\sigma_{rr} = (1/r) F_{,r} + (1/r)^2 F_{,\varphi\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi} = F_{,rr}$, $\sigma_{r\varphi} = (-1/r) F_{,r\varphi} + (1/r)^2 F_{,\varphi}$. Используя граничные условия, определить постоянные интегрирования. Вычислить напряжения в точках, положение которых задано значениями: $\varphi = 0, \pi$ и $\pi/2$ при отношении $R_e/R_i = 2$. Сравнить полученный результат с напряжениями, получаемыми в теории слабо изогнутых балок.

Указание: проверить, что напряжения не зависят от постоянных A_1 и B_1 .

14.6.67. Высокая балка с круглым отверстием нагружена по краям моментами так, что напряжение $\sigma_{xx} = (M/J)z$ ($J = bh^3/12$) распределено по линейному закону при $x = \pm L$ (рис. 14.6.67). В условиях, когда отверстие расположено достаточно далеко от свободной поверхности балки, функция напряжений представляется в виде $F = F_1 + F_2$, где $F_1 = (M/6J)z^3$ и $z - z_v = r \sin \varphi$. В полярных координатах приближенно можно принять (см. рис. 14.6.67):

$$F_2 = C_1 \ln r + (C_3/r^2) \cos 2\varphi + C_4 \cos 2\varphi + D_1 r \sin \varphi + (D_2/r) \sin \varphi + (D_3/r) \sin 3\varphi + (D_4/r^3) \sin 3\varphi.$$

Напряжения оказываются не зависящими от D_1 . Получить приближенное распределение напряжений в общем виде и вычислить их для $a/h = 1/20$ и $z_v/h = 1/4$. Обратит внимание на неверный характер распределения напряжений при $z = h/2$.

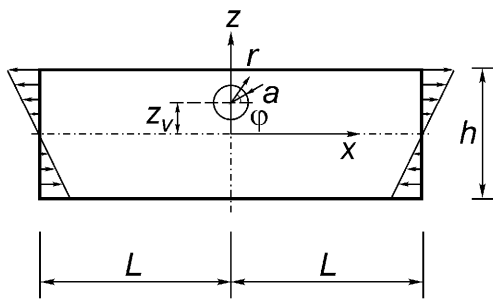


Рис. 14.6.67.

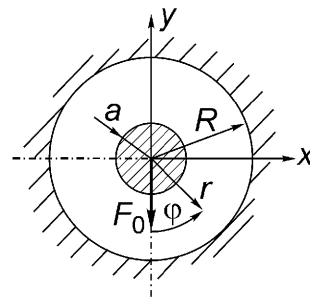


Рис. 14.6.68.

14.6.68. Жесткий болт радиуса a , плотно связанный с линейно упругим диском, передает последнему усилие F_0 . Диск радиуса R жестко защемлен по внешнему краю (рис. 14.6.68). Определить перемещения в полярных координатах из решения уравнений Навье

$$u = (A_1 + A_2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 r^{-2}) \cos \varphi,$$

$$v = \left[-A_1 - A_2 \left(\frac{1+\nu}{3-\nu} + \ln r \right) + A_3 \frac{5+\nu}{1-3\nu} r^2 + A_4 r^{-2} \right] \sin \varphi$$

(нужно подставить $u = f(r) \cos \varphi$, $v = g(r) \sin \varphi$ и решить задачу о собственных значениях). Считать, что болт имеет жесткое перемещение $v_y = -v_0$. Используя обращенные уравнения (4.22) в полярных координатах, найти распределение напряжений и, рассмотрев равновесие, получить соотношение между F_0 и v_0 . Определить максимальные напряжения в точках $r = a$.

14.6.69. На рис. 14.6.69 показан круглый диск, рассмотренный в предыдущей задаче в мембранном состоянии. В данной ситуации необходимо рассмотреть нагружение диска парой с моментом $M_0 = c F_0$, которое приводит к тому, что функция прогиба имеет вид: $w(r, \varphi) = [A + B/r + Cr^3 + Dr \ln(r/R)] \sin \varphi$. На внешнем краю жестко заземленного диска заданы однородные граничные условия, а на внутренней границе поворот болта на угол α_0 приводит к неоднородным граничным условиям, например, $w(a, \varphi) = a \alpha_0 \sin \varphi$ и $\partial w / \partial r = \alpha_0 \sin \varphi$. Равенство (6.273а) следует использовать, задавая условие на момент $M_0 = \int_0^{2\pi} (m_r - r \bar{q}_r) \sin \varphi r d\varphi$. Определить моменты и получить результат при $a \ll R$.

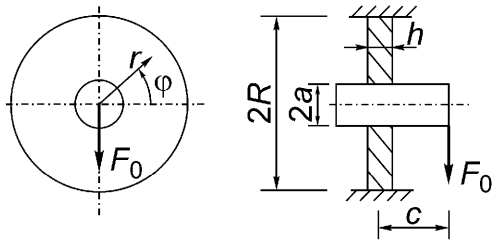


Рис. 14.6.69.

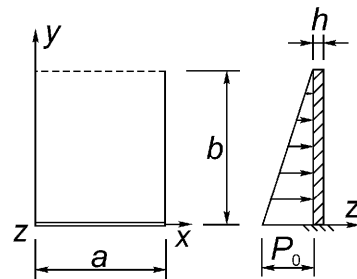


Рис. 14.6.70.

14.6.70. Вертикальная стенка открытого контейнера изготовлена из тонкой прямоугольной пластины, имеющей размеры $a \times b$ и толщину h . Вертикальные края пластины опираются на шарниры, а нижний горизонтальный край жестко соединяется с основанием (рис. 14.6.70). Верхний край пластины свободен. Найти прогиб пластины, раскладывая гидростатическое давление жидкости плотности ρ по горизонтальной координате x в синус-ряд Фурье с периодом $2a$ (для достижения заданной точности необходимо три члена ряда). Подходящее решение однородного бигармонического уравнения дает ряд с четырьмя членами, в котором $\sin(\lambda_n x)$ умножается на $\left. \begin{matrix} A_n \\ C_n \end{matrix} \right\} e^{\pm \lambda_n y} + \left. \begin{matrix} B_n \\ D_n \end{matrix} \right\} \lambda_n y e^{\pm \lambda_n y}$, где $\lambda_n = n\pi/a$. Частное решение можно найти суммированием членов вида $(1 - y/b) \sin \lambda_n x$ и последующим сравнением коэффициентов. Найти также момент заделки $m_y(x, y=0)$.

14.6.71. Тонкая прямоугольная пластина, имеющая размеры $a \times b$, жестко закреплена по внешнему краю. Пластина, не имевшая напряжений, нагревается,

и температурное поле в ней имеет вид: $\theta(x, y, z) = \theta_1(x, y) f(z)$, причем $\Delta \theta_1(x, y) = 0$. Показать, что пластина не будет иметь прогибов, то есть $w = 0$, и определить температурные напряжения. Затем, считая, что $\theta_1 = \theta_0 = \text{const}$ и $f(z) = [z/(h/2)]^3$, определить температурные напряжения в этом случае и найти моменты.

14.6.72. Тонкая прямоугольная стальная пластина размерами $a \times b$ свободно деформируется под действием температурного поля $\theta(z) = \theta_0 f(z)$.

- Найти температурные напряжения.
- Определить прогиб, если центр пластины покоится на основании.
- Считая, что $f(z) = z/(h/2)$, показать, что температурные напряжения обращаются в нуль.
- Вычислить свободный температурный прогиб для квадратной пластины при следующих данных: $a = b = 500$ мм, $h = 20$ мм, $\alpha = 12 \times 10^{-6}/\text{K}$. Построить график перемещения края пластины в зависимости от θ_0 .

14.6.73. Длинная полоса, изготовленная из тонкой стальной пластины ($a \gg b$), опирается на шарниры и нагружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой интенсивности p_0 по поверхности, а также нагрузкой интенсивности n_0 на единицу длины в направлении оси y (рис. 14.6.73). Если перемещения в направлении оси x равны нулю, закон Гука приводит к соотношениям $n_x = \nu n_y = \nu n_0$. Остальные уравнения теории упругости второго порядка сводятся к уравнению $w_{,yyyy} - \lambda^2 w_{,yy} = \frac{p_0}{K}$, где $\lambda^2 = \frac{n_0}{K}$.

- Найти прогиб w и его максимум.
- Вычислить напряжения изгиба.
- Определить максимум напряжений: $\max \sigma_{yy}$.
- Построить графики $\max w/h$ и $\max \sigma_{yy}$ при $b = 300$ мм, $h = 3$ мм, $\nu = 0,3$, $E = 210$ кН/мм² и $p_0 = 100$ кН/м², если аргумент изменяется в интервале $0 \leq n_0/h \leq 200$ Н/мм².

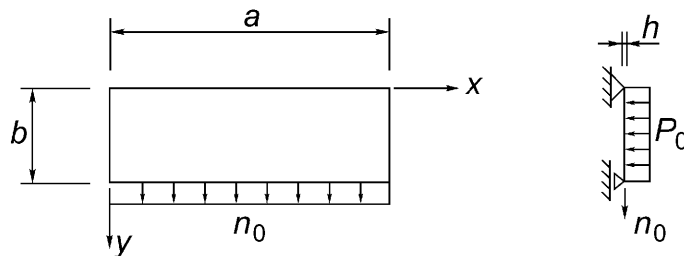


Рис. 14.6.73.

е) Чему равна минимальная интенсивность n_0 , если нижний предел текучести равен $\sigma_Y = 250 \text{ Н/мм}^2$?

ф) Показать, что значение $n_0 = 259,2 \text{ Н/мм}$ приводит к наибольшему коэффициенту запаса надежности по отношению к достижению предела текучести.

14.6.74. Цилиндрический резервуар высокого давления, имеющий радиус a и толщину стенки $h_1 \ll a$, закрыт оболочкой вращения с эллиптическим меридиональным поперечным сечением, причем $a/b = m$ и толщина оболочки равна h (рис. 14.6.74). Давление газа p внутри резервуара задано.

а) Найти мембранные напряжения в эллиптической чаше в зависимости от m (провести расчеты при $m=1$).

б) Определить мембранные напряжения в цилиндрической оболочке круглого поперечного сечения.

с) Полагая $h=h_1$, определить область значений m , в которой мембранные напряжения остаются положительными.

д) Определить отношение радиальных перемещений в месте соединения двух оболочек. Показать, что для $m^2 < (2-\nu)$ это отношение равно единице при соответствующем выборе величины h/h_1 .

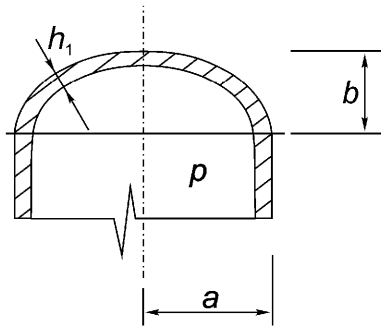


Рис. 14.6.74.

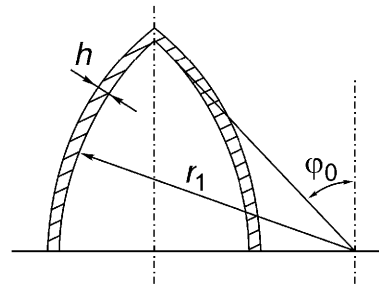


Рис. 14.6.75.

14.6.75. Стрельчатый купол с вертикальной осью вращения представлен на рис. 14.6.75, где $r_1 = a$. Купол, имеющий толщину стенки $h = \text{const}$ и плотность ρ , нагружен собственным весом.

а) Вычислить мембранные напряжения и показать, что $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} n_\varphi = n_\vartheta = 0$.

б) Что произойдет, если предел φ_0 равен нулю?

14.6.76. Тонкостенная стальная труба имеет заданные радиус $a = 200 \text{ мм}$, толщину стенки $h = 10 \text{ мм}$ и длину $l = 1 \text{ м}$ (рис. 14.6.76). Один конец трубы жестко

заделан, другой – свободен. Труба равномерно нагревается на $\theta_0 = 100^\circ\text{C}$ выше отсчетной температуры.

а) Вычислить деформации $w(x)$ и изгибающий момент $m_x(x)$.

б) Найти максимальное эквивалентное напряжение.

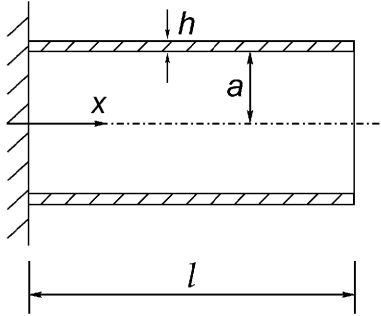


Рис. 14.6.76.

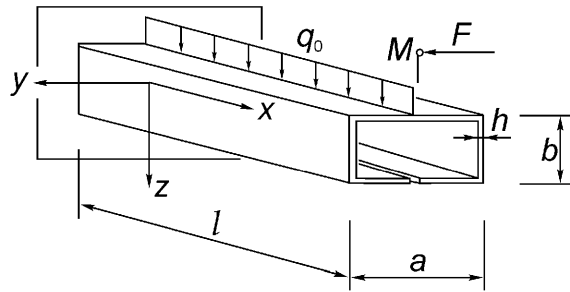


Рис. 14.6.77.

14.6.77. Консольная тонкостенная балка имеет открытое поперечное сечение (рис. 14.6.77). Балка нагружена равномерно распределенной силой интенсивности q_0 в направлении оси z и сосредоточенной силой F , приложенной в центре сдвига, в направлении оси y . Размеры конструкции указаны на рисунке.

а) Найти расстояние z_M до центра сдвига.

б) Вычислить напряжения в защемленном поперечном сечении при $a=2b$, $h=0,1b$, $l=20b$ и $F=40bq_0$.

с) Определить максимальное эквивалентное напряжение.

14.6.78. Тонкая пластина произвольной формы жестко закреплена по своему периметру. Поверхностная поперечная нагрузка $p(x, y) = p_0 \varphi(x, y)$ приводит в условиях линейно упругого поведения пластины к прогибу

$$w(x, y) = (p_0/K) f(x, y),$$

где $f(x, y)$ не зависит от параметров упругости. Применить принцип аналогии упругости и вязко-упругости к линейно вязко-упругой пластине, если нагрузка прикладывается в момент времени равный нулю. Функция сдвиговой ползучести задана в виде

$$K_G(t) = G_0^{-1} + G_1^{-1} (1 - e^{-t/\vartheta}),$$

где $G_0 = 377 \text{ Н/мм}^2$, $G_1 = 449 \text{ Н/мм}^2$ и $\vartheta = 15,183 \text{ час}$. Модуль объемной деформации равен $K_0 = 817 \text{ Н/мм}^2$.

а) Вычислить упругий изгибающий момент m_x и напряжение σ_{xx} .

- b) Определить параметры преобразования Лапласа.
 c) Найти преобразованные по Лапласу прогибы, изгибающий момент и напряжение в пластине в условиях ползучести.
 d) Рассмотреть квадратную плиту, имеющую размеры $a=100$ мм и $h=5$ мм, при равномерной ступенчатой нагрузке $p=p_0=62,5$ Н/мм². Вычислить перемещение в центре пластины.
 Указание: девиаторные компоненты определяются соотношениями

$$e_{ij}(t) = (1/2) \int_0^t K_G(t-\tau) \frac{\partial s_{ij}}{\partial \tau} d\tau, \quad e(t) = (1/3K) s(t),$$

$$s_{ij}(t) = 2 \int_0^t R_G(t-\tau) \frac{\partial e_{ij}}{\partial \tau} d\tau \Rightarrow 1 = \frac{d}{dt} \int_0^t K_G(t-\tau) R_G(\tau) d\tau.$$

14.6.79. Композиционная балка изготовлена из идеально сцепленных друг с другом двух разнородных материалов с различными упругими свойствами. На рис. 14.6.79 показано поперечное сечение этой балки, находящейся в условиях чистого изгиба.

- a) Найти расположение нейтральной оси y (расстояние h_N).
 b) Определить соотношение момент – кривизна, то есть вычислить эффективную изгибную жесткость.
 c) Найти зависимость изгибных напряжений от координаты z .

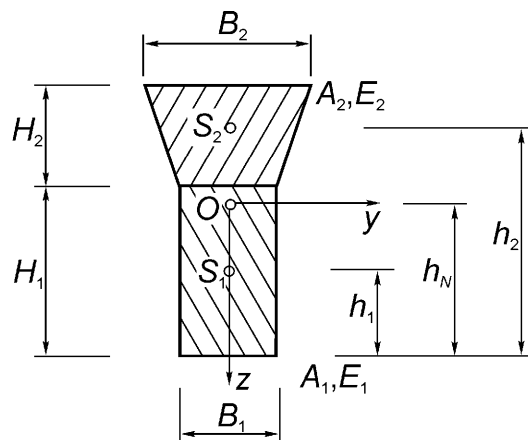


Рис. 14.6.79.

14.6.80. Композиционный вал длины $L=2,0$ м изготовлен из внутреннего цилиндра диаметром 50 мм (нержавеющая сталь), идеально связанного с внешним круговым цилиндром (алюминиевый сплав) в виде кольца диаметром 100 мм. Модули сдвига равны $G_1=73,1$ кН/мм² и $G_2=27$ кН/мм², соответст-

венно. Предел текучести покрывающего материала, установленный в опытах на растяжение, равен $\sigma_Y = 112 \text{ Н/мм}^2$. Крутящий момент $M_T = 1,3 \text{ кНм}$.

- Вывести формулу для определения угла закручивания χ , то есть найти эффективную жесткость на кручение.
- Каково распределение сдвиговых напряжений? Определить их максимум как в стальном ядре вала, так и в покрывающем слое.
- Будут ли сдвиговые напряжения меньше на достаточную величину предела текучести на сдвиг?

14.6.81. Функция напряжений Эри для двумерной задачи Буссинеска находится в полярных координатах для полуплоскости, нагруженной по нормали к границе (задача Фламана), путем интегрирования уравнения (6.237), а также из уравнения (6.241) при касательной нагрузке к границе. При этом $\phi(r, \varphi) = Cr\varphi \cos \varphi$ для нагрузки, направленной по нормали, а для касательной нагрузки $\phi_t(r, \varphi) = Dr\varphi \sin \varphi$. Использовать эти решения бигармонического уравнения для рассмотрения важной задачи о режущих инструментах, в которой клин, имеющий угол раствора 2α , внедряется своей вершиной в материал в направлении оси симметрии с силой $F < 0$ и с силой, направленной параллельно поверхности тела, равной F_t (см. рис. 6.31, где y считать осью симметрии).

14.6.82. Определить напряженное состояние полубесконечной пластины в полярных координатах (см. рис. 6.30) при нагружении на границе сосредоточенным моментом $M = \lim_{e \rightarrow 0, F \rightarrow \infty} eF$. Функция напряжений Эри при сосредоточенной нормальной (растягивающей) силе, приложенной в начале координат, имеет вид: $\phi(r, \varphi) = \frac{-F}{\pi} r\varphi \cos \varphi$ (проинтегрировать уравнение (6.237) и проверить результат), а в декартовых координатах вид функции изменяется: $\phi(x, y) = \frac{-F}{\pi} x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Потенциал внецентренной силы F находится путем сдвига координат, то есть подстановкой выражения $(x + e)$ вместо x . Обратит внимание на следующее обстоятельство: момент пары сил должен быть положительным.

Указание: при сложении двух потенциалов удобно использовать угол θ , а при малых значениях e – соотношение $r\theta = e \sin \varphi$. Тогда приближенно в смешанном представлении можно записать соотношение

$$\phi = \frac{F}{\pi} [x\varphi - (x + e)(\varphi - \theta)], \quad e \rightarrow 0.$$

14.6.83. Линейно упругое полупространство $z > 0$ нагружено на своей поверхности сосредоточенной силой F (трехмерная задача Буссинеска). В этом осесимметричном случае потенциальные функции Нейбера-Папковича приводят к выполнению соотношений, имеющих вид $\phi_3 = \frac{B}{R}$, $\phi_0 = A \ln(R+z)$, в которых $R^2 = r^2 + z^2$ и $r^2 = x^2 + y^2$. Перемещения определяются выражениями

$$u_r = -\frac{1}{2G} \frac{\partial N}{\partial r}, \quad u_z = \frac{1}{2G} \left[4(1-\nu)\phi_3 - \frac{\partial N}{\partial z} \right], \quad N = \phi_0 + z\phi_3.$$

Найти компоненты тензора напряжений в декартовых координатах.

Указание: проконтролировать выражения для констант A и B , как это проделано в упражнении А 6.23.

14.7. Динамика

14.7.1. Жесткая однородная лестница длины l и массы m прислонена к стенке (рис. 14.7.1, в начальный момент $\sin \varphi_0 = 4/5$) и начинает скользить без трения под действием силы тяжести.

- Определить реакции в точках касания лестницы со стенкой как функции угла $\varphi(t)$.
- Вычислить критическую высоту, при которой теряется контакт лестницы со стенкой.
- Получить уравнения, описывающие дальнейшее движение лестницы.

14.7.2. Жесткая рама ABD поддерживается в точке O торсионной пружиной жесткости k , не имеющей массы. Рама совершает свободные колебания в отсутствие сил сопротивления (рис. 14.7.2). Получить уравнение движения, его

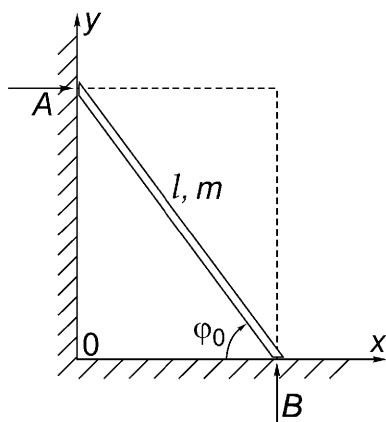


Рис. 14.7.1.

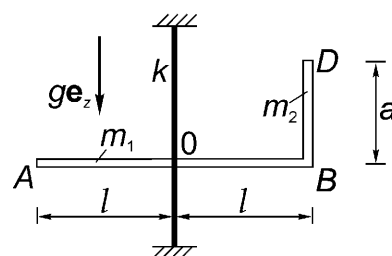


Рис. 14.7.2.

первый интеграл, а также вычислить инерционную нагрузку в раме в виде функции угла поворота. Вычислить результирующие силовые факторы в раме.

14.7.3. Осциллятор с одной степенью свободы вмонтирован в диск, который вращается с постоянной угловой скоростью Ω (рис. 14.7.3). Пружина не напряжена, если масса m располагается на радиусе, находящемся в положении перпендикулярном прорези. Получить уравнения движения в зависимости от относительного перемещения массы и исследовать поведение решения при изменении параметров m , жесткости k и $\Omega = \text{const}$.

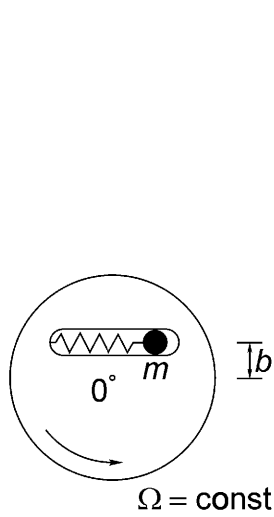


Рис. 14.7.3.

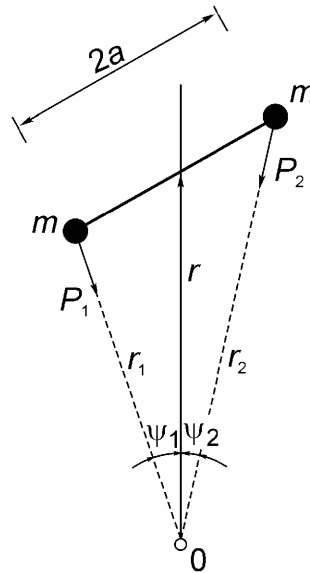


Рис. 14.7.4.

14.7.4. Жесткий спутник состоит из двух точечных масс m , которые удерживаются на постоянном расстоянии $2a$ с помощью жесткого стержня, не имеющего массы. Спутник находится на круговой орбите радиуса r (рис. 14.7.4). Вывести уравнения движения, которые получаются после малого возмущения в радиальном и тангенциальном направлениях по отношению к стационарному положению. Считать, что $a \ll r$ в выражении, описывающем неоднородное поле тяготения. Вычислить период одного из возмущенных движений для орбиты, находящейся на высоте 200 км над поверхностью Земли.

14.7.5. Исследовать движение системы двух тел (рис. 14.7.5), которое начинается из состояния покоя под действием сил тяжести. В состоянии покоя линейная пружина не напряжена. При движении колесо не проскальзывает по поверхности. Применить законы изменения количества движения и момента количества движения к каждому жесткому телу: колесу массы m_1 , радиуса r ,

имеющему момент инерции $I = mi^2$; однородному стержню массы m_2 и длины l . Жесткость пружины равна k . Определить частоту свободных колебаний, силы, действующие в точке контакта на колесо, а также силы, приложенные к концу стержня,двигающегося по направляющей. Определить амплитуду свободных колебаний.

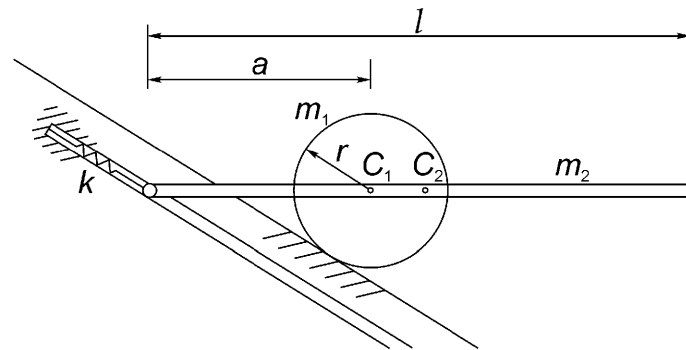


Рис. 14.7.5.

14.7.6. Одномоторный винтовой самолет движется по круговой траектории радиуса $r=200$ м в вертикальной плоскости с постоянной скоростью центра масс равной $v=600$ км/час (рис. 14.7.6). Симметричный пропеллер имеет постоянную скорость вращения $n=1500$ об/мин и момент инерции $I_1=100$ кгм². Вычислить его гироскопический момент.

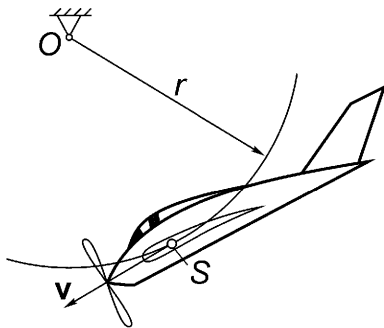


Рис. 14.7.6.

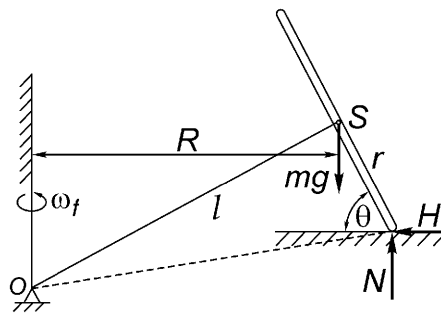


Рис. 14.7.7.

14.7.7. Однородный круглый диск радиуса r отклонен от вертикальной плоскости, и его центр масс S движется по горизонтальной окружности радиуса R (рис. 14.7.7). Принимая условия отсутствия проскальзывания на контакте диска с поверхностью, определить отношение H/N контактных сил в виде функции угла наклона θ , то есть минимальную величину статического коэффициента сухого трения.

14.7.8. При открытии двери на угол 90° , которая установлена с угловой ошибкой θ относительно вертикали, происходит движение под действием силы тяжести (рис. 14.7.8). Определить угловую скорость в момент закрытия двери. За какое время дверь закроется? Заданы масса m , ширина $2a=0,9$ м, угловая ошибка в виде $-\sin\theta=0,01$.

Указание: см. уравнение (7.123).

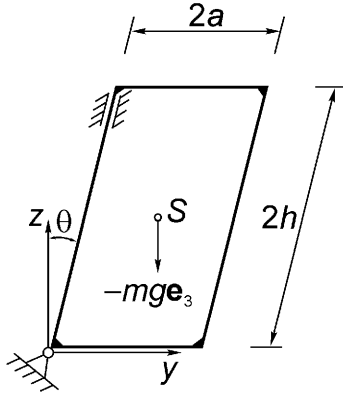


Рис. 14.7.8.

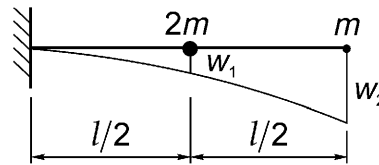


Рис. 14.7.9.

14.7.9. Линейно упругая консоль длины l и жесткости на изгиб B несет две сосредоточенные массы: m на конце консоли и $2m$ на середине пролета (рис. 14.7.9). Пренебрегая распределенной массой, найти уравнения движения, вычислить частоты свободных колебаний и формы мод изгибных колебаний. Вторая мода связана с прогибом статически неопределимой балки. Где расположена дополнительная шарнирная опора такой балки? Положение этой опоры определяет положение узла колебаний.

14.7.10. К концу нерастяжимой идеальной нити приложена постоянная сила F . Нить перекинута через блок и соединена с демпфером, характеризуемым параметром r (рис. 14.7.10). Блок, имеющий радиус R , массу m и момент инерции $I=mi^2$, удерживается линейной пружиной жесткости k .

- Получить уравнение движения, если центр тяжести S блока движется по вертикали.
- Вычислить ускорение точки S , если система в начальный момент времени покоилась.
- Каково будет движение в асимптотическом пределе?

14.7.11. Рассмотреть линейно упругую пластину без учета сил инерции (задача 14.6.31) и вычислить период малых свободных колебаний.

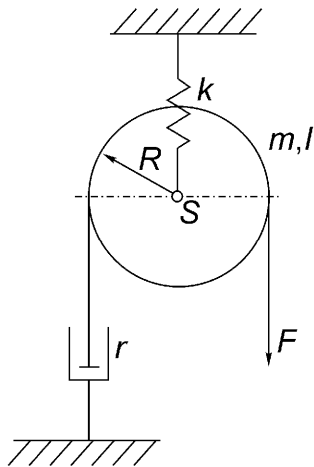


Рис. 14.7.10.

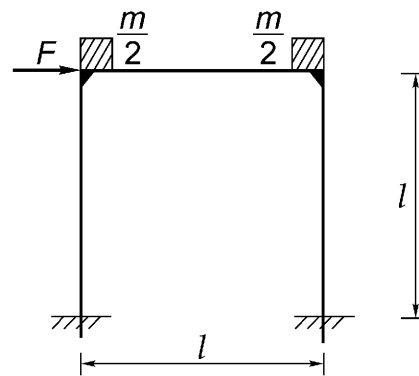


Рис. 14.7.12.

14.7.12. Одноярусная рама имеет период свободных колебаний $T_0=1$ с (рис. 14.7.12). Рама нагружена гармонически изменяющейся со временем силой $F=F_0 \sin \omega t$, у которой частота равна $\omega=1,5\omega_0$. Масса $m=1000$ кг расположена симметрично в углах рамы. Определить жесткость рамы и изгибную жесткость B , считая что они одинаковы как для заземленных стоек, так и для пролетной балки. Балка и стойки имеют одинаковую длину $l=4$ м.

- Вычислить амплитуду вынужденных колебаний.
- Считать вязкое сопротивление малым ($\zeta=0,1$), определить амплитуду и фазу вынужденных колебаний.

14.7.13. Балка на шарнирных опорах, имеющая пролет $l=4$ м, постоянную изгибную жесткость $B=(4/3)\times 10^3$ кНм² и точечную массу $m=1000$ кг в середине пролета, импульсно нагружается сосредоточенной силой в своем центре. Определить и изобразить графически фазовый портрет, представляющий собой зависимость величины скорости от прогиба в середине пролета. Фазовый портрет построить для следующих заданных историй нагружения, если время приложения нагрузки составляет $t_L=0,1$ с:

- при импульсе коробочного типа $S=F_0 t_L=1$ кНс;
- при импульсе пилообразного типа, в котором S и t_L постоянны;
- при импульсе, имеющим вид полуволны синуса с условиями пункта b);
- при импульсе N -образной формы с “отрицательным хвостом” $F(t_L)=-0,1F(t=0)$, иные условия аналогичны условиям пункта b).

14.7.14. Найти формы мод свободных колебаний тонкой консольной балки, имеющей постоянную изгибную жесткость B и длину l , для чего применить

теорию Эйлера-Бернулли. Определить координаты узлов для первых четырех высших мод.

14.7.15. Исследовать свободные колебания двухпролетной балки постоянной изгибной жесткости B и длинами пролетов l_1 и l_2 . Балка опирается на шарнирные опоры.

а) Исследовать изгибающий момент в точке над внутренней опорой для нахождения геометрических условий для “простых” форм колебаний.

б) Получить уравнение частот в общем случае.

14.7.16. Получить уравнения движения при колебаниях малой амплитуды натянутой струны в плоскости xz (см. рис. 14.7.16, на котором показан бесконечно малый элемент струны), считая силу натяжения T постоянной и геометрические соотношения линейными. Масса на единицу длины постоянна и равна ρA .

а) Найти решения линеаризованных уравнений движения в виде гармонических функций времени и выделить в решении стоячие и распространяющиеся волны.

б) С помощью преобразования Фурье определить решение для полубесконечной струны при нестационарном перемещении $z(0,t)=g(t)$, считая, что волна, идущая из бесконечности, отсутствует (использовать условие Зоммерфельда). В обратном преобразовании Фурье интеграл следует записывать в специальном виде, который необходимо установить.

с) Найти функцию Грина для струны длиной l с закрепленными концами.

д) Полубесконечная струна с закрепленным концом находится в состоянии покоя, располагаясь на неотрицательной полуоси x . В момент $t=0$ из точки $x=0$ по струне начинает двигаться со скоростью v сосредоточенная постоянная сила F . Найти перемещения $z(x,t)$ струны.

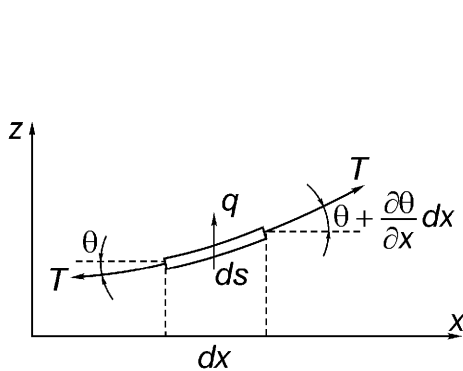


Рис. 14.7.16.

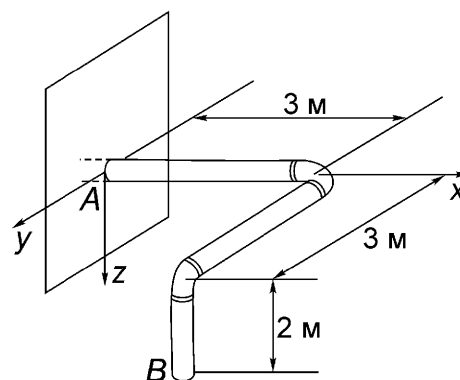


Рис. 14.7.17.

14.7.17. Через коленчатую трубу, имеющую прямые углы (рис. 14.7.17), течет вода с постоянным секундным расходом $0,01 \text{ м}^3/\text{с}$. Площадь поперечного сечения трубы равна 2580 мм^2 , вес ее погонного метра – 300 Н/м . Чему равна результирующая системы сил в точке A ? Гидродинамические силы отделить от сил тяжести.

14.7.18. Труба, имеющая площадь поперечного сечения A_1 , заканчивается соплом с площадью $A_2 < A_1$ (рис. 14.7.18). Поршень,двигающийся с постоянной скоростью u , опустошает трубу. Пренебрегая силами трения, вычислить силу, действующую на поршень, и определить осевые реакции $F_A = F_B$ в симметрично расположенных опорах, если в трубе течет нефть плотности $\rho = 820 \text{ кг/м}^3$, а вытекающая струя находится под действием атмосферного давления.

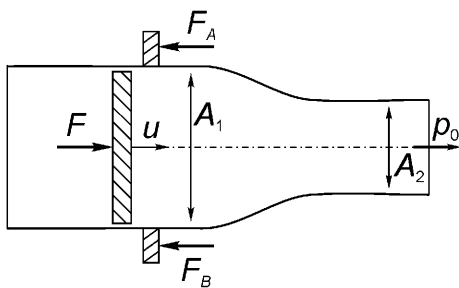


Рис. 14.7.18.

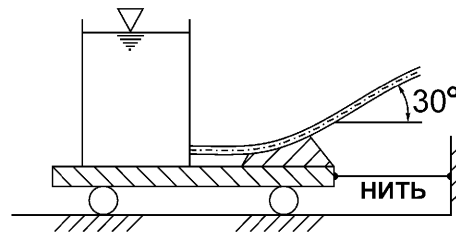


Рис. 14.7.20.

14.7.19. Пожарный самолет, находящийся в полете, принимает на борт воду, зачерпывая ее из озера. Водозаборник имеет ширину 1 м и зачерпывает слой воды толщины 25 мм . Сколько воды в секунду принимает на борт самолет, если он движется со скоростью 160 км/час , и чему равна сила сопротивления среды во время этой операции?

14.7.20. Вода вытекает из большого резервуара через сопло площади поперечного сечения 1300 мм^2 со скоростью 3 м/с относительно тележки, к которой прикреплен резервуар. При вытекании струя меняет свое направление: поворачивается на 30° (рис. 14.7.20). Считая течение установившимся, определить реактивную силу, действующую на тележку, и натяжение удерживающей ее нити.

14.7.21. Вертикальная струя прямоугольного поперечного сечения течет со скоростью v_1 по клину и разделена им на две симметричные части (рис. 14.7.21). Если плотность однородного клина равна ρ_k , определить скорость v_1 , при которой струя удерживает вес клина. Весом воды пренебречь, то есть для числа Фруда выполняется соотношение: $Fr = v_1 / \sqrt{gl} \gg 1$.

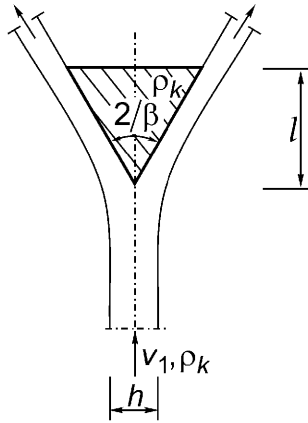


Рис. 14.7.21.

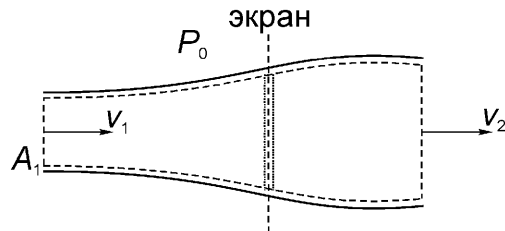


Рис. 14.7.22.

14.7.22. Струя, имеющая площадь поперечного сечения A_1 и скорость v_1 , течет через сетчатый экран, после чего ее скорость становится равной $v_2 < v_1$. Определить силу, действующую на экран (рис. 14.7.22).

14.7.23. Закрытая цистерна с водой находится на салазках (рис. 14.7.23). В цистерне с помощью компрессора поддерживается высокое давление p^* , поэтому вода вытекает из резервуара через отверстие (площадь поперечного сечения равна $A = 320 \text{ мм}^2$) с постоянной скоростью 10 м/с относительно резервуара. Считая, что масса конструкции без воды равна $m = 25 \text{ кг}$ и начальная масса воды равна 70 кг , а трение отсутствует,

- определить максимальное ускорение в момент начала движения из состояния покоя;
- найти зависимости скорости конструкции от времени и пройденного расстояния;
- вычислить расстояние, пройденное салазками к моменту опустошения резервуара.

14.7.24. Решить задачу 14.7.23, считая что салазки находятся на льду и коэффициент трения равен $0,1$.

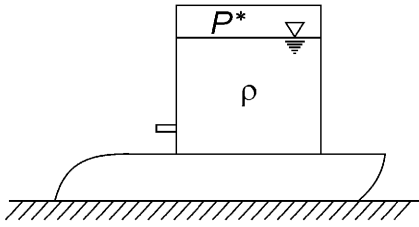


Рис. 14.7.23.

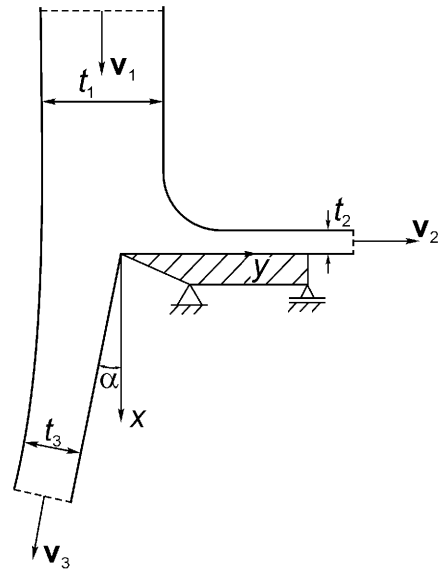


Рис. 14.7.25.

14.7.25. Жесткий делитель разделяет свободный поток воды прямоугольного поперечного сечения ширины b на две части так, что в горизонтальной плоскости $t_1/t_2=5/1$ (рис. 14.7.25). Скорость при плоскопараллельном течении в струях сохраняется постоянной и равной скорости входящей струи, то есть $v_1=v$. Найти угол α и определить силу, действующую на делитель.

14.7.26. Жесткий стержень, имеющий длину $2L$ и массу m соединен с вращающимся валом универсальным шарниром (рис. 14.7.26), причем угловая скорость вала постоянна, то есть $\omega=\text{const}$.

- Получить уравнения движения в пренебрежении силами трения.
- Определить период линейных колебаний малой амплитуды.
- Определить вращающий момент, необходимый для поддержания постоянной угловой скорости.

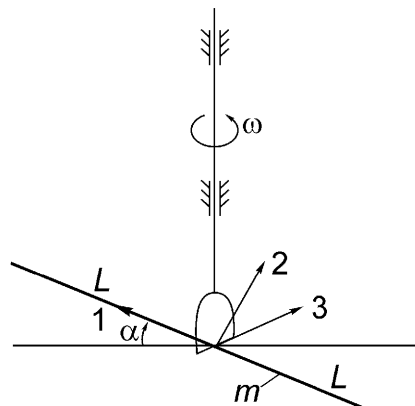


Рис. 14.7.26.

14.7.27. При открывании шлюзовых ворот входящий параллельный поток воды с глубиной $H_1=3,0$ м и скоростью $v_1=2$ м/с ускоряется так, что выходящий, расположенный ниже параллельный поток имеет глубину $H_2=1,0$ м. В параллельных потоках поддерживается гидростатическое давление. Пренебрегая трением, определить силу, действующую на ворота, на единицу их ширины (рис. 14.7.27).

Указание: использовать прямоугольный контрольный объем с разрезом вдоль лицевых поверхностей ворот и учесть действие атмосферного давления.

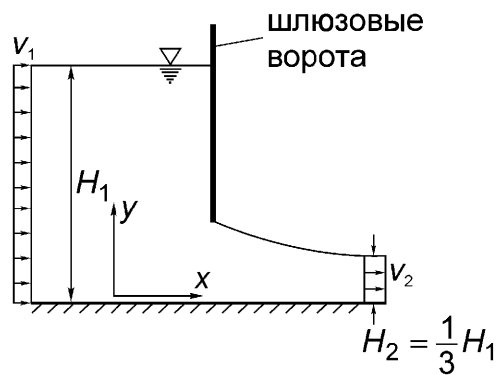


Рис. 14.7.27.

14.7.28. Самолет-истребитель, находящийся в стационарном полете (рис. 14.7.28), перезаправляется керосином плотности $\rho=700$ кг/м³ с массовым расходом $0,6$ м³/мин. Диаметр заправочного гибкого шланга равен 5 дюймам. Гидростатическое давление горючего на входе в бак равно 28 кПа. Пренебрегая силами, действующими со стороны самого гибкого шланга на самолет, определить дополнительную силу тяги, необходимую для поддержания постоянной скорости полета самолета, которую он имел сразу перед началом операции подключения шланга.

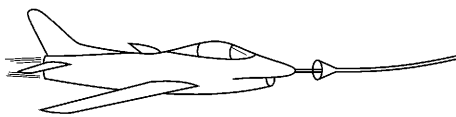


Рис. 14.7.28.

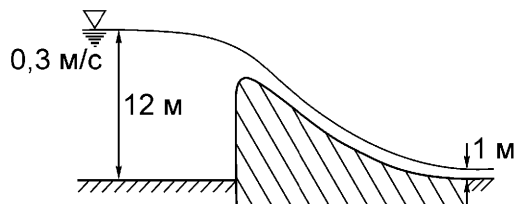


Рис. 14.7.30.

14.7.29. Ракета движется за счет сгорания ракетного топлива, скорость массового расхода которого составляет $11,4$ кг/с. Площадь выходного сечения конического сопла с углом полураствора $\alpha=20^\circ$ равна $A=0,0335$ м². Скорость

газов относительно ракеты на выходе из сопла равняется 2000 м/с , причем векторы скоростей частиц газа направлены в радиальных направлениях. Давление в струе равно $101,4 \text{ кПа}$. Вычислить силу тяги двигателя ракеты на испытательном стенде, если испытания проводятся на уровне моря.

14.7.30. Вода плавно без завихрений обтекает поверхность плотины (рис. 14.7.30). В верхнем параллельном течении скорость равна $0,3 \text{ м/с}$, а уровень воды поднят на 12 м . В нижнем течении параллельный поток имеет постоянную глубину 1 м . Найти горизонтальную составляющую результирующей силы, действующей на плотину, если ширина последней равна 10 м .

14.7.31. Вода втекает в трубу диаметром 40 мм и имеет скорость объемного расхода $0,06 \text{ м}^3/\text{с}$ (рис. 14.7.31). Вода, образуя плоскую пленку, радиально вытекает из горизонтально расположенной трубы постоянной толщины 6 мм и длины $2,4 \text{ м}$. Скорость воды линейно распределена по длине щели. Вычислить гидродинамические силы, действующие на трубу, приведенные к точке O .

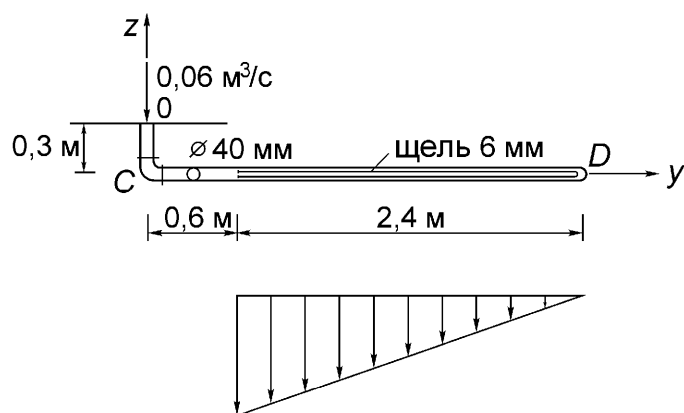


Рис. 14.7.31.

14.7.32. Куб веса 1 кН покоится на горизонтальной плоскости и прикреплен к горизонтально расположенной линейной пружине жесткости $k = 40 \text{ кН/м}$. В начальный момент пружина не напряжена. Горизонтально расположенная внешняя сила, линия действия которой проходит через центр масс куба, возрастает как линейная пилообразная функция времени в течение 4 с до своей конечной величины $0,8 \text{ кН}$. Определить движение блока, начиная от состояния покоя до того момента, когда пружина впервые растянется до максимальной величины, если коэффициент трения равен $\mu = 0,6$.

14.7.33. Человек массы 85 кг прыгает вниз с высоты 0,5 м в вертикальном жестко фиксированном положении. Чему равна максимальная сила, действующая на его подошвы, если контактная сила возрастает по линейному закону и за 0,07 с достигает максимума, а затем за 0,08 с линейно уменьшается до величины, равной весу человека?

14.7.34. Две точечные массы m_1 и m_2 двигаются в пространстве под действием силы взаимного притяжения. Получить в векторном виде уравнение движения точки m_1 в зависимости от радиуса-вектора \mathbf{r} , начинающегося в точке m_2 . Изменить полученное уравнение так, чтобы сила притяжения присутствовала в нем в явном виде и истолковать инерционный член уравнения.
Указание: дважды использовать закон сохранения количества движения и исключить абсолютное ускорение.

14.7.35. Самолет движется в крейсерском режиме со скоростью 1000 км/час. Самолет приводится в движение тремя прямоточными воздушно-реактивными двигателями, имеющими одинаковую тягу и сжигающими 3 кг/с керосина. Общая площадь воздухозаборников равна $A=3 \text{ м}^2$. Для заданной относительной скорости горячей реактивной струи 500 м/с вычислить силу тяги, развиваемой тремя двигателями (принять $\rho_{\text{возд}}=1,25 \text{ кг/м}^3$). Так как воздухозаборник среднего двигателя расположен на 3 м выше выходного отверстия горячих газов, появляется момент, стремящийся приподнять нос самолета. Чему равен этот момент?

14.7.36. Жесткая однородная балка массы m находится в равновесии (см. рис. 14.7.36). В некоторый момент времени струна перерезается, и балка начинает двигаться с ускорением. Чему равна в этот момент реакция опоры? $a < l/2$.

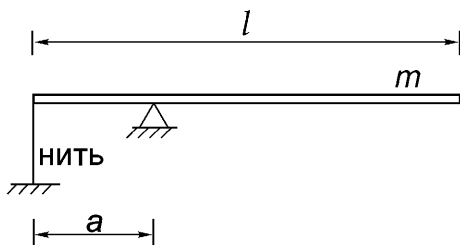


Рис. 14.7.36.

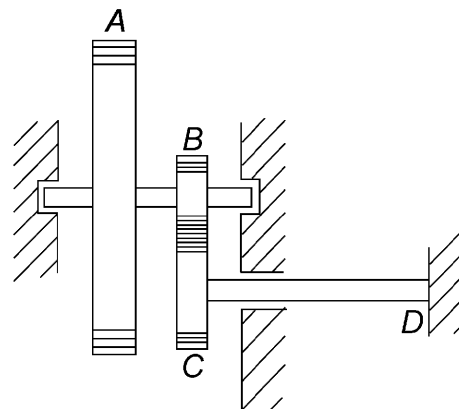


Рис. 14.7.37.

14.7.37. Маховик A представляет собой круглое стальное кольцо радиуса $R=200$ мм и площадью поперечного сечения 40×25 мм, насаженное на жесткий вал (рис. 14.7.37) с помощью тонкого диска пренебрежимой массы. Шестерни B и C , не имеющие массы, связывают маховик с гибким стальным валом длины $CD=l=1$ м и диаметра 50 мм. Пренебрегая массой жесткого вала и считая, что гибкий вал жестко заделан в точке D , определить основную частоту свободных колебаний в Герцах в виде функции передаточного числа шестерен B и C ($\rho_{\text{стали}}=8000$ кг/м³, $E_{\text{стали}}=210$ кН/мм², $\nu=0,3$).

14.7.38. Тонкий однородный стержень массы m жестко соединен в точке O с валом, опирающимся на шарниры (рис. 14.7.38). Система вращается с постоянной угловой скоростью σ . Найти реакции опор A и B и результирующие силовые факторы в консольной части стержня при $0 < x < c+l/2$.

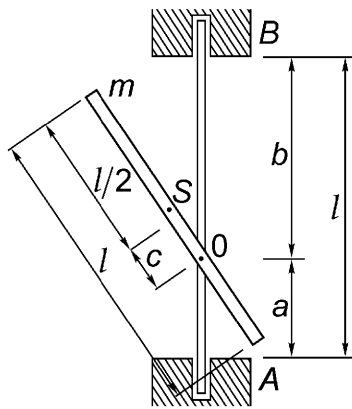


Рис. 14.7.38.

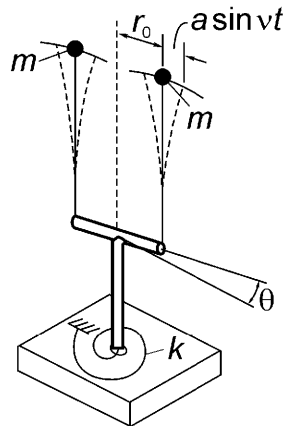


Рис. 14.7.39.

14.7.39. Точечные массы m , находящиеся на концах легких переключин (см. рис. 14.7.39), подвергаются действию электромагнитных сил, которые приводят массы в состояние колебаний в плоскости с задаваемой частотой ν . Система установлена на транспортном средстве с помощью подшипника вращения и пружин кручения жесткости k . Такое устройство служит для измерения величины и направления вектора угловой скорости при поворотах транспортного средства (см. рис. 14.7.39). Полагая малой амплитуду вынужденных колебаний ($a \ll r_0$), получить уравнение движения в форме приближенного соотношения между углом поворота θ плоскости вынужденных колебаний и угловой скоростью транспортного средства Ω .

Указание: использовать декартовы координаты, связанные с поворачивающимся транспортным средством. См. также раздел 8.5.10.

14.7.40. Современные корабли приводятся в движение паровыми или газовыми турбинами. Горизонтальный турбинный вал, находящийся в плоскости миделя корабля, имеет момент инерции I_1 ($I_2 = I_3$) и вращается с постоянной угловой скоростью σ . Корабль имеет постоянную крейсерскую скорость v и совершает поворот по окружности радиуса R . Вычислить динамические реакции в двух шарнирных опорах, отстоящих друг от друга на расстоянии L . Центр тяжести вала расположен посередине между опорами, то есть в точке $L/2$. Обратить особое внимание на вертикальные составляющие реакций опор.

14.7.41. Самолет-истребитель массы $m = 8900$ кг катапультирован с корабля-носителя, причем самолет имеет скорость 50 м/с перед тем как его покинуть. Корабль совершает поворот с угловой скоростью, соответствующей $1/16$ об/мин. Вычислить боковую (поперечную) направляющую силу.

14.7.42. Трехлопастный пропеллер, имеющий массу $m = 55$ кг и радиус инерции $i_1 = 0,5$ м, вращается со скоростью, соответствующей 1000 об/мин (по часовой стрелке, если смотреть со стороны летчика). Одномоторный самолет имеет крейсерскую скорость 250 км/час и совершает горизонтальный поворот в левую сторону по окружности радиусом 800 м. Вычислить гироскопические моменты.

14.8. Первые интегралы

14.8.1. Шарнирно опертая балка имеет постоянную изгибную жесткость B (рассматривать как параметр) и точечную массу m в середине пролета. Балка импульсно нагружается в своем центре сосредоточенной силой. Коэффициент динамического усиления представляет собой отношение максимального прогиба к прогибу в статическом случае (ударный спектр). Вычислить и изобразить графически зависимость этого коэффициента от периода T колебаний балки (нагрузка прикладывается в течение времени t_L) для следующих историй нагружения:

а) при импульсе коробчатого типа $S = F_0 t_L$;

б) при импульсе пилообразного типа, при котором S и t_L постоянны;

с) при импульсе, имеющем вид полуволны синуса с условиями пункта б);

д) при импульсе N -образной формы с "отрицательным хвостом" $F(t_L) = -0,1 F$ ($t = 0$) при условиях пункта б).

14.8.2. Точка массы m движется по наклонной плоскости (коэффициент трения μ) (рис. 14.8.2). Угол наклонной плоскости с горизонтом равен α .

- Вычислить минимальную скорость v_1 , необходимую для достижения края наклонной плоскости, находящегося на расстоянии s .
- Для значений v_1 , превышающих скорость, найденную в пункте а), определить скорость в точке E и максимальную высоту траектории при движении в однородном параллельном поле сил тяжести.
- При заданной величине b найти расстояние x_2 до точки приземления и вектор скорости v_2 в этой точке.
- Какое время затрачивается на движение, описанное в пункте с) ?
- Проанализировать чувствительность результатов в пунктах а) – д) по отношению к малым изменениям угла α (положить угол равным $\alpha + \delta\alpha$).

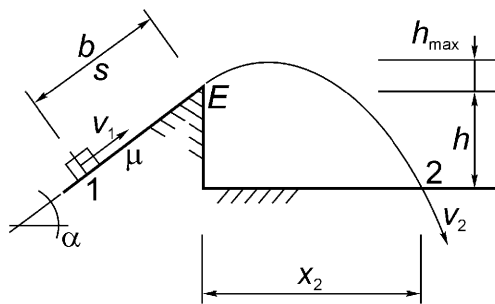


Рис. 14.8.2.

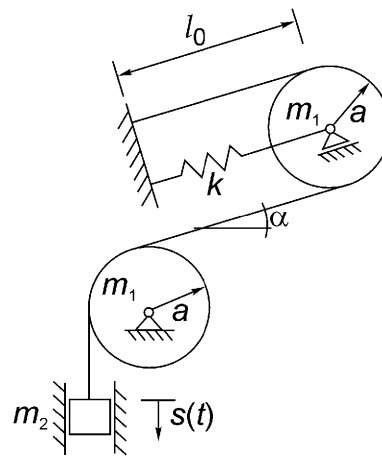


Рис. 14.8.3.

14.8.3. Идеальная нить, натягиваемая силой тяжести $G = m_2g$, перекинута через однородные блоки радиуса a и массой m_1 каждый (рис. 14.8.3). Нить по блокам не проскальзывает. Пружина имеет жесткость k и длину в ненапряженном состоянии l_0 . Трение отсутствует.

- Получить дифференциальное уравнение первого порядка, являющееся уравнением движения относительно переменной $s(t)$.
- Определить положение равновесия системы и вычислить частоту свободных малых колебаний системы около положения равновесия.

14.8.4. Определить фазовую траекторию, если плоский жесткий маятник начинает вращаться в однородном параллельном поле сил тяжести ($\omega = 2\pi$ при начальном вертикальном положении маятника). Момент сопротивления

пропорционален угловой скорости вращения ($\zeta=0,1$). В конце концов, движение маятника будет соответствовать случаю колебаний с сопротивлением.

14.8.5. При вытекании воды из выходного отверстия большого контейнера с площадью поперечного сечения A образуются свободные струи. Струи вытекают вертикально вниз или, в другом случае, сначала движутся в горизонтальном направлении. Оба случая показаны на рис. 14.8.5. Считая, что скорость вытекания из отверстия одинакова в обоих вариантах, определить силы, действующие на горизонтальные пластины, отстоящие от отверстия на расстоянии L по вертикали. Струи находятся в однородном параллельном поле силы тяжести при своем свободном падении.

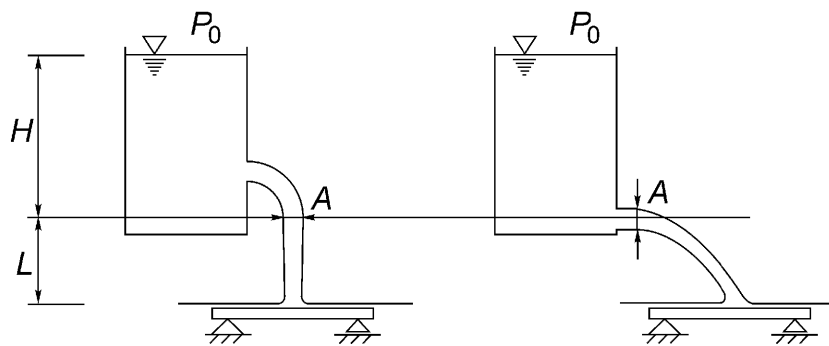


Рис. 14.8.5.

14.8.6. Определить скорость свободной струи с площадью поперечного сечения A_2 , если струя, покидая трубопровод, попадает на турбинное колесо Пелтона (рис. 14.8.6). В том случае, когда H и H_1 имеют величину порядка 1000 м, необходимо учитывать перепад атмосферного давления при адиабатических условиях. Вычислить давление в точке 1 (площадь поперечного сечения A_1) и определить перепад уровней воды δ , считая, что они поддерживаются при приблизительно одинаковом атмосферном давлении. Полагая объемы резервуаров большими, использовать условия стационарности течения.

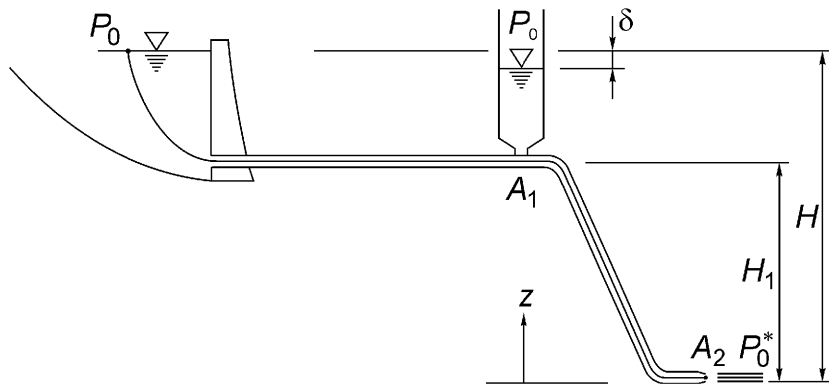


Рис. 14.8.6.

14.8.7. В большом резервуаре, в котором поддерживается давление, находится вода, имеющая постоянный уровень H (рис. 14.8.7). Вертикальная труба направляет стационарный поток к турбине, развивающей постоянную мощность P . Консольная труба представляет собой двухколенную конструкцию переменной площади поперечного сечения, соединенной с турбиной, причем течение воды на выходе из трубы происходит в форме движения свободной струи при атмосферном давлении. Используя данные рисунка,

а) найти уравнение для определения v_3 ;

б) определить v_1 и ρ_1 на входном отверстии турбины и v_2 , ρ_2 на выходе из нее;

с) вычислить гидродинамические силы, действующие на трубу (точки 2 и 3) после выхода воды из турбины, относя их к опоре в точке 2.

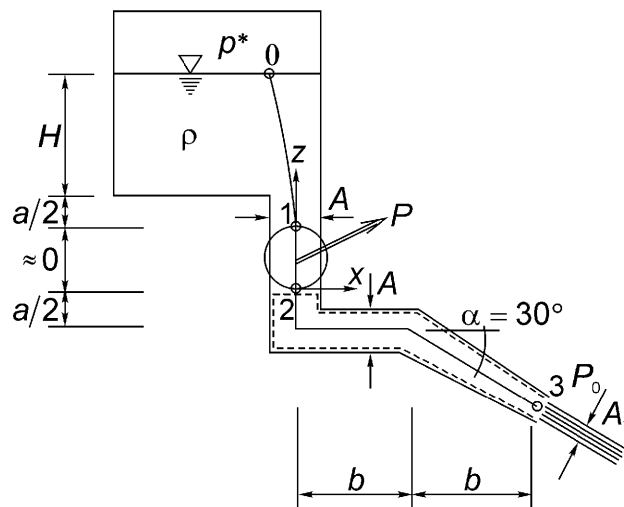


Рис. 14.8.7.

14.8.8. На свободную поверхность воды, находящуюся в большом закрытом резервуаре, действует постоянное давление $p^* = 35$ кПа. Вода прокачивается через одноколенную трубу (рис. 14.8.8) и вытекает из сопла, образуя свободную струю, текущую в однородном параллельном поле силы тяжести.

а) Определить мощность насоса, если данные задачи приведены на рисунке.

б) Чему равна скорость массового расхода воды?

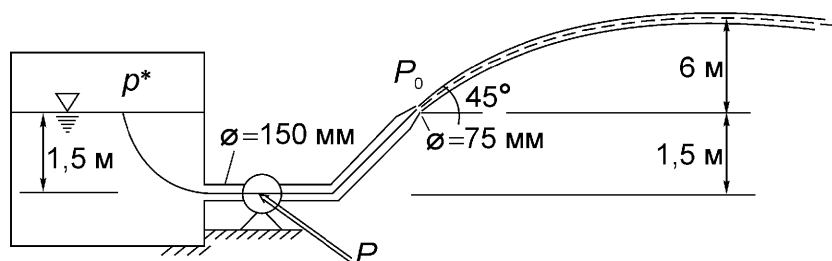


Рис. 14.8.8.

14.8.9. Насос откачивает воду из открытого резервуара (рис. 14.8.9), развивая мощность $P=7$ кВт при условии несжимаемости воды.

- а) Определить скорость массового расхода воды.
- б) Найти результирующие гидродинамические силы, приведя их к точке D .

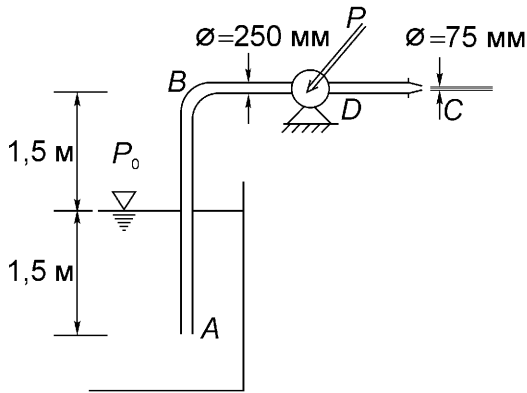


Рис. 14.8.9.

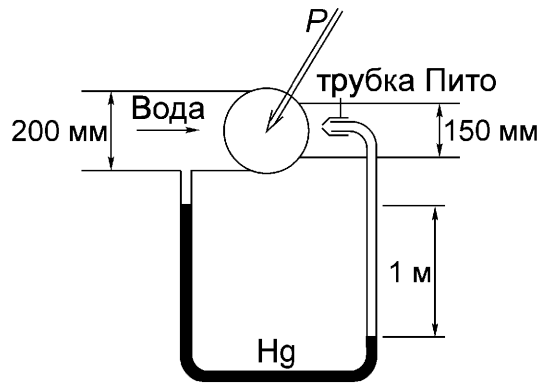


Рис. 14.8.10.

14.8.10. Ртутный манометр измеряет разность давлений в двух точках: одна точка находится у трубки Пито, установленной позади насоса, другая точка находится у стенки трубы впереди насоса (рис. 14.8.10). Насос развивает мощность 3,75 кВт при течении воды. Считая течение несжимаемой воды установившимся, определить расход жидкости.

14.8.11. При установившемся течении вода поднимается вверх по вертикальной трубе и попадает в кольцевую часть, образованную двумя круглыми пластинами, находящимися на одном и том же расстоянии друг от друга (рис. 14.8.11). Вода вытекает из зазора в радиальном направлении, образуя плоскую свободную водяную пленку. Пренебрегая силами трения и считая, что давление в точке A равно $p_A = 69$ кПа,

- а) определить секундный массовый расход воды;
- б) вычислить динамическую реакцию в опоре A .

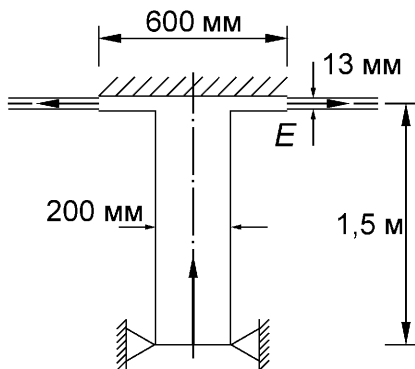


Рис. 14.8.11.

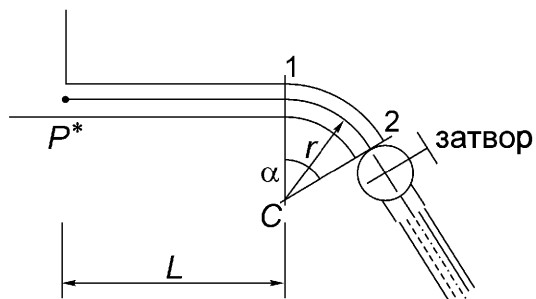


Рис. 14.8.12.

14.8.12. Колено радиуса $r=2$ м с углом раствора α соединяет прямолинейную часть сливной трубы длины $L=1000$ м, присоединенной к большой цистерне с нефтью (давление на входе в трубу $p^*=82$ кПа, плотность нефти $\rho=820$ кг/м³), с наклонной прямолинейной трубой. Считать составную трубу жесткой с постоянной площадью поперечного сечения, а течение – вязким несжимаемым. В начальный момент достаточно медленно начинает работать затвор (рис. 14.8.12).

а) Определить давление $p_2(t)$, когда скорость стационарного течения уменьшается по линейному закону (время закрывания задвижки равно $t_s=1$ с) от $v_0=10$ м/с до нуля.

б) Какие гидродинамические силы, приведенные к точке С, действуют на колено трубы, если ее диаметр равен 350 мм?

14.8.13. Поршень массы m_1 и площади поперечного сечения A_1 находится в покое на поверхности несжимаемой жидкости плотностью ρ . Вторая труба площади поперечного сечения A_3 служит направляющей для другого поршня массы m_3 . Линейная пружина жесткостью k не напряжена в состоянии равновесия системы, показанном на рис. 14.8.13. Соединительная труба имеет длину a и площадь поперечного сечения A_2 . Учесть малое сопротивление с коэффициентом r .

а) Определить отношение масс поршней m_1/m_3 , когда в состоянии равновесия уровни воды имеют одинаковую высоту b .

б) Найти уравнения движения комбинированной системы в зависимости от $x(t)$ при действии силы $F(t)$, пренебрегая внутренним трением.

в) Вычислить статическое изменение уровня жидкости x_S , вызванное медленным изменением силы F .

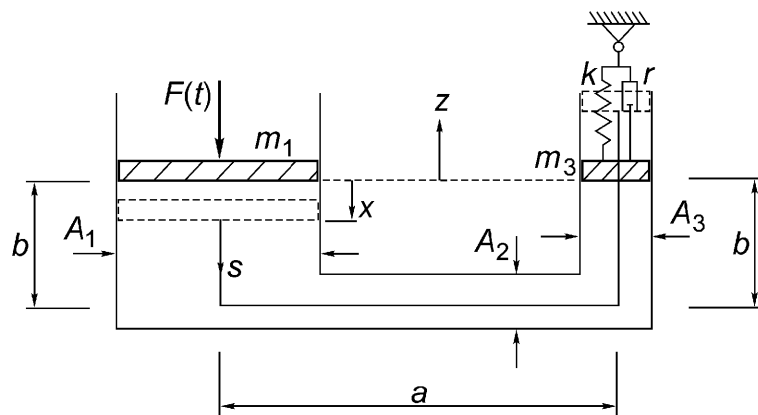


Рис. 14.8.13.

14.8.14. Две вертикальные трубки длины 150 мм с внутренним диаметром 10 мм соединены с небольшим замкнутым резервуаром, полностью заполненным жидкостью (рис. 14.8.14). В статических условиях высота уровня жидкости плотности ρ равна $h_0 = 100$ мм. Аппарат установлен на центрифуге, вращающейся с постоянной скоростью ω . Расстояния от трубок до оси вращения равны $r_1 = 25$ мм и $r_2 = 100$ мм, соответственно (расстояние между трубками, таким образом, составляет 75 мм). Найти критическую угловую скорость, при которой жидкость начнет выливаться из трубок.

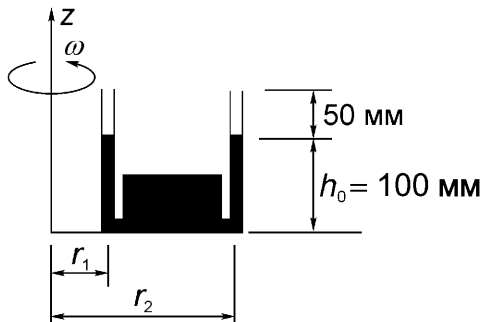


Рис. 14.8.14.

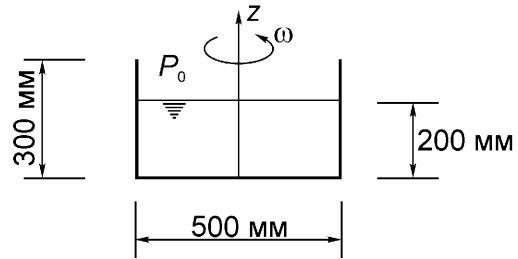


Рис. 14.8.15.

14.8.15. Жесткий цилиндрический открытый резервуар диаметра 500 мм и высоты 300 мм наполнен водой до уровня 200 мм (рис. 14.8.15).

- Определить, при какой угловой скорости вращения вода начнет переливаться через край, предварительно достигнув стационарного состояния по отношению к вращающемуся резервуару.
- Вычислить распределение давления на днище резервуара, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

14.8.16. Рассмотреть уравнительный резервуар, установленный как показано на рис. 14.8.16. Начальное стационарное течение воды в напорном трубопроводе внезапно прерывается при закрывании управляемой задвижки, установленной позади уравнительного резервуара. Найти максимальное превышение уровня воды S в устройстве и время, за которое установится этот уровень. Пренебречь гидравлическими потерями в напорном трубопроводе длины $L = 1000$ м, также сначала пренебречь скоростным напором в нем. Далее

учесть, что вода несжимаема, а стенки трубы жесткие. $\frac{dm_0}{dt} = 25000 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$, $D = 3$ м,

$H_0 = 150$ м, $A = 31,4$ м².

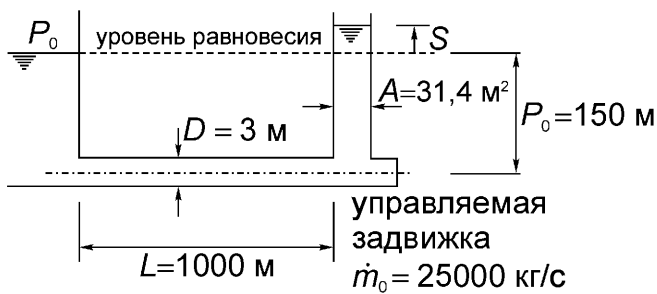


Рис. 14.8.16.

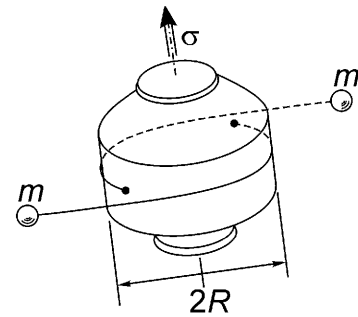


Рис. 14.8.18.

14.8.17. Трубопровод, показанный на рис. 7.8, имеет следующие характеристики: $L=750$ м, гидростатическое давление $p_1=450$ кПа и диаметр $D=6$ дюймов. Чему равно максимальное давление в управляемой задвижке, если начальное стационарное течение воды со скоростью потока $2 \text{ м}^3/\text{мин}$ равномерно прерывается за 10 секунд? Определить запас прочности, если труба может выдержать пиковое давление 3000 кПа.

14.8.18. Стабилизированный собственным вращением космический аппарат Пионер III несет на себе простое устройство, состоящее из нерастяжимых гибких нитей пренебрежимо малой массы, на концах которых расположены точечные массы m (рис. 14.8.18). Когда массы освобождаются в открытом пространстве от вращающегося космического аппарата, они натягивают нити, которые разматываются, пока собственное вращение космического корабля не остановится. В этот момент все устройство сбрасывается с корабля. Найти длину нитей L , необходимую для остановки собственного вращения со скоростью σ . Момент инерции Пионера III равен I_1 и диаметр $2R$. Решение, как оказывается, не зависит от поля тяготения и L не зависит от σ .

Указание: проверить, что $\mathbf{H}_M = \text{const}$ и $T_{rot} = \text{const}$. Заметить, что радиальное расстояние от m до центра масс M равно $R\sqrt{1+\varphi^2}$, где φ – угол, стягивавший размотанную дугу нити (угловая скорость Ω , начальное значение σ), а угловая скорость относительно вращающегося корабля прямолинейного участка длины $R\varphi$ равна $\dot{\varphi}$. Определить две составляющие вектора скорости точки m , затем вычислить момент количества движения с помощью суперпозиции и прибавить его к моменту количества движения космического корабля. Также использовать формулу квадрата суммы двух векторов для нахождения кинетической энергии точечной массы m .

14.9. Устойчивость

14.9.1. Шарнирно опираемая система, состоящая из двух стержней, имеет длину $2l$ и подпружиненный шарнир посередине. Конструкция нагружена осевой силой F (см. рис. 14.9.1). При заданной жесткости линейно упругих пружин найти критическую силу и проанализировать поведение конструкции вблизи конфигурации, соответствующей потере устойчивости.

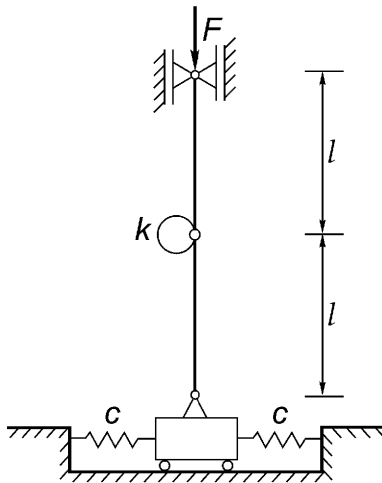


Рис. 14.9.1.

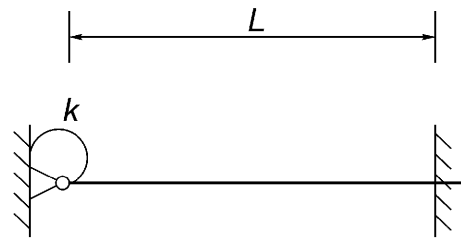


Рис. 14.9.2.

14.9.2. Определить критический подъем температуры в линейно упругом однородном стержне длиной $L=1$ м с жестко и линейно упруго защемленными краями (рис. 14.9.2). Его гибкость по отношению к упругому изгибу (см. (9.56)) равна 125, модуль Юнга $E=206$ кН/мм² и линейный коэффициент температурного расширения равен $\alpha=1,0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$. Жесткость пружины кручения рассматривать в качестве параметра.

14.9.3. Вычислить критическую силу для двухпролетной балки с постоянной изгибной жесткостью B (рис. 14.9.3).

14.9.4. Вычислить критическую нагрузку при растяжении балки длины l , если она имеет жесткую часть, присоединенную как показано на рис. 14.9.4. Изгибная жесткость задана постоянной.

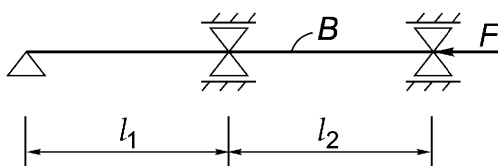


Рис. 14.9.3.

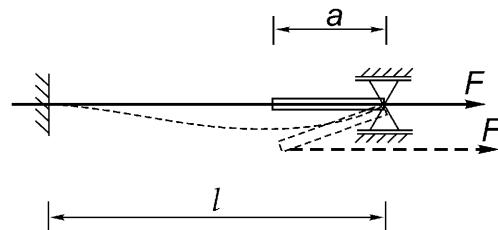


Рис. 14.9.4.

14.9.5. Однородная линейно упругая стойка поддерживается в боковом направлении линейно упругой пружиной жесткости k (рис. 14.9.5). Найти характеристическое уравнение для критической нагрузки в зависимости от отношений длин $a=l_1/l_2$ и жесткостей $EJ/(kl^3)$.

а) Положить $a=1$ и решить полученное уравнение в предельных случаях $k=0$ и $k \rightarrow \infty$.

б) Найти критическую нагрузку непосредственно в предельных случаях пункта а) и сравнить результаты (результаты должны совпадать).

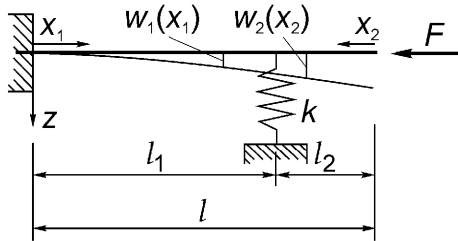


Рис. 14.9.5.

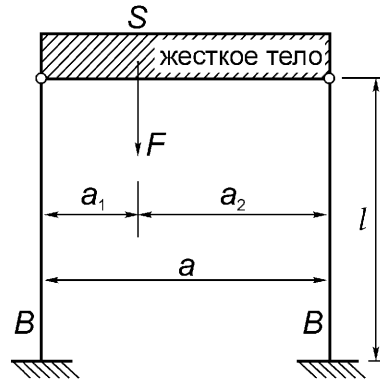


Рис. 14.9.6.

14.9.6. Жесткая балка с эксцентрично расположенным центром тяжести шарнирно соединена с двумя упругими стойками с одинаковыми постоянной изгибной жесткостью B и длиной L . Стойки жестко заделаны в основание (рис. 14.9.6). Найти характеристическое уравнение для критической силы.

а) Решить уравнение для симметрично расположенной нагрузки.

б) Рассмотреть случай $a_1=0$, то есть определить жесткость k в преобразованном уравнении, полученном в задаче 14.9.5 (а). Приближенно найти корень уравнения.

с) Показать, что критическая сила слабо зависит от эксцентриситета (включая предельный случай б)) и изменяется менее чем на 2%. Использовать параметры $f=l\sqrt{F/B}$ и $e=\sqrt{a_2/a_1}$.

14.9.7. Если композиционную пластину из задачи 14.6.57 нагреть на 50°C выше, чем температура, при которой начинается пластическое течение, а затем охладить, какое напряженно-деформированное состояние будет в пластине? Считать исходное состояние пластины свободным от напряжений.

14.9.8. Давление газа в длинном замкнутом тонкостенном стальном сосуде возрастает до такого значения, что достигается достаточная величина пластического течения, при котором можно пренебречь упругими составляющими де-

формаций. Найти отношение осевой и касательной деформаций в этом предельном случае.

14.9.9. Два одинаковых идеально-упруго-пластических стержня длины L шарнирно соединены с жестким рычагом длины $3c$. Расстояние между стержнями равно $2c$. Шарнир O позволяет рычагу вращаться под действием возрастающей боковой нагрузки $F=P$, которая приложена на расстоянии $2c$ от шарнира O (рис. 14.9.9). Считать заданными модуль упругости и предел текучести. Определить остаточные напряжения в двух стержнях и угол поворота рычага, если нагрузка снимается после того, как оба стержня перейдут в состояние пластичности в этом полцикле нагружения

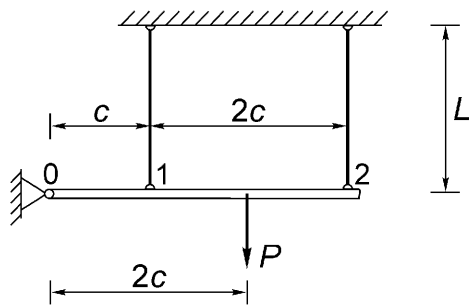


Рис. 14.9.9.

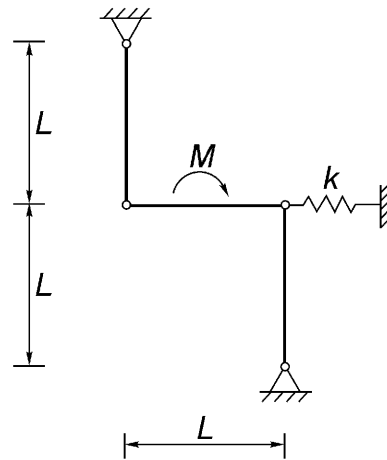


Рис. 14.9.11.

14.9.10. Напряжения в толстостенном цилиндре, нагруженном давлением, в упругом случае заданы равенствами (6.14) и (6.17). Считая материал идеально-упруго-пластическим, вычислить критическое внутреннее давление (предельная нагрузка) в условиях плоского деформированного состояния и, в другом случае, в условиях плоского напряженного состояния. Нужно следовать образу действий раздела 9.4.

14.9.11. Шарнирная трехстержневая система удерживается в равновесии линейной пружиной жесткости k (см. рис. 14.9.11). Найти критические моменты M и $-M$.

14.9.12. Жесткая стойка длины L , имеющая ось вращения, удерживается в равновесии парой линейных пружин жесткости k каждая, которые расположены под углом θ к вертикали (рис. 14.9.12). Найти критическую силу P . Чувствительна ли данная система к искажениям конфигурации?

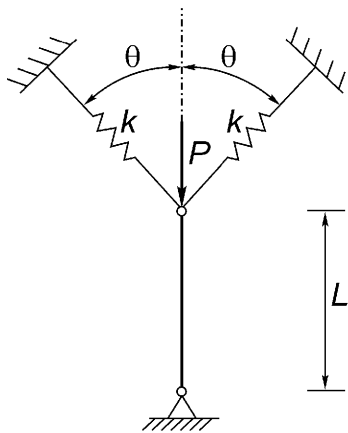


Рис. 14.9.12.

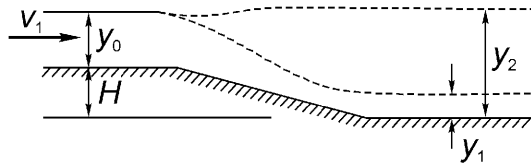


Рис. 14.9.15.

14.9.13. Линейно упругая однородная консольная балка длины L нагружена поперечной силой F , приложенной к краю консоли, и сжимающей осевой силой P . Найти прогиб δ крайней точки балки в главной форме изгиба и построить график зависимости δ от P при постоянной силе F .

14.9.14. Провести предельный анализ статически неопределенного вращательного элемента конструкции, представленного в задаче 14.6.62. Предел текучести, найденный в опытах на растяжение, составляет 100 Н/мм^2 .

а) Найти величину крутящего момента M_Y , приложенного в B , который первым приводит к появлению пластического течения.

б) Найти критический крутящийся момент M_L круглого вала и рассмотреть равновесие в точке B для нахождения критической нагрузки. Заметить, что в этом случае существует один возможный механизм, приводящий к большим углам закручивания.

14.9.15. Вода течет в прямоугольном канале (рис. 14.9.15). Дно канала имеет перепад высот H . Пренебрегая трением, исследовать течение жидкости. В верхней и нижней частях потока течение считать одномерным. Найти две величины для глубины $y_{1,2}$, которые имеют физический смысл.

14.9.16. В прямоугольном канале вода приближается с высокой скоростью к наклонной части дна канала, высота подъема которого равна H (рис. 14.9.16). Пренебрегая трением, рассмотреть течение воды, считая его вверх и вниз по потоку одномерным. Найти возможные глубины $y_{1,2}$ ниже по течению от наклонной части дна канала.

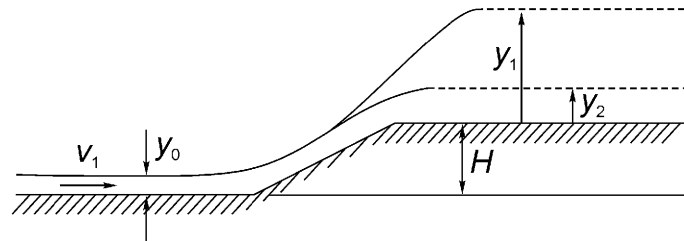


Рис. 14.9.16.

14.9.17. Прямолинейный податливый стальной вал, имеющий диаметр d и длину L , опирается на одном конце на шаровую опору, а на другом – на подпятник. В опорах приложены моменты закручивания M_T . Найти критический момент, соответствующий началу потери устойчивости при кручении. Форма потери устойчивости – цилиндрическая спираль диаметра $2a$ с $\operatorname{tg} \alpha = 2\pi a/L$ с главной кривизной $k = (\sin^2 \alpha)/a$ (проверить!). Использовать естественные координаты спирали для нахождения момента кручения, а также изгибающего момента в деформированной конфигурации вала (нарисовать эскиз).

Указание: так как горизонтальная компонента вектора момента равна нулю, можно найти такой аргумент, что горизонтальная нормаль будет главной нормалью спирали. Считать, что $a \ll L$.

14.9.18. Найти критическую силу P для дважды защемленной рамы, показанной на рис. 14.9.18. Стойка рамы имеет постоянную главную изгибную жесткость $B_1 = EJ_1$, балка рамы – $B_2 = EJ_2$.

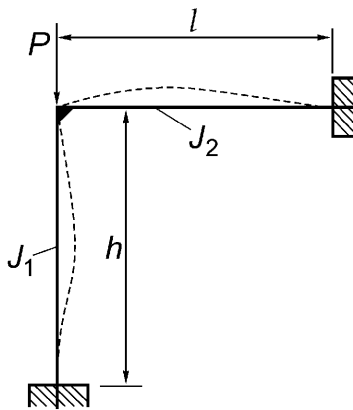


Рис. 14.9.18.

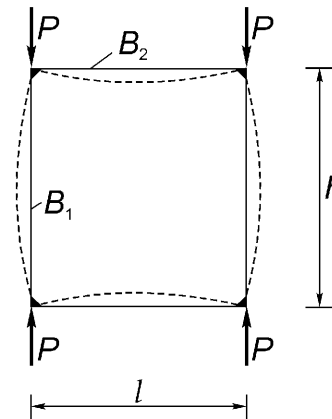


Рис. 14.9.19.

14.9.19. Прямоугольная замкнутая рама нагружена двумя системами двойных сил P , не создающими момент (рис. 14.9.19). Стойки имеют изгибную жесткость B_1 , балки – B_2 . Найти критическую нагрузку, вызывающую симметричную форму потери устойчивости.

14.9.20. Круглая линейно упругая тонкая пластина, защемленная по краям, имеет постоянную толщину h и радиус R . Пластина сжимается равномерным давлением, действующим по внешнему периметру пластины в радиальном направлении. Найти критическую величину давления, вызывающую потерю устойчивости.

Указание: наименьший корень функции Бесселя $J_1(z)=0$ равен $z=3,8317$.

14.10. Уравнения Лагранжа

14.10.1. Найти уравнения плоского движения двойного физического маятника, показанного на рис. 14.10.1, находящегося под действием параллельного поля силы тяжести и заданных внешних моментов M_1 и M_2 . Заданы расстояния s_1 и s_2 , массы m_1 и m_2 , а также центральные радиусы инерции i_1 и i_2 . В качестве обобщенных координат выбрать углы поворота тела 1 и тела 2. Использовать уравнения Лагранжа, чтобы получить искомые уравнения. Затем, записав разность этих уравнений и заменив ею первое уравнение, представить результат в матричном виде. Для проверки выделить инерционные и гравитационные коэффициенты влияния как элементы симметричных матриц.

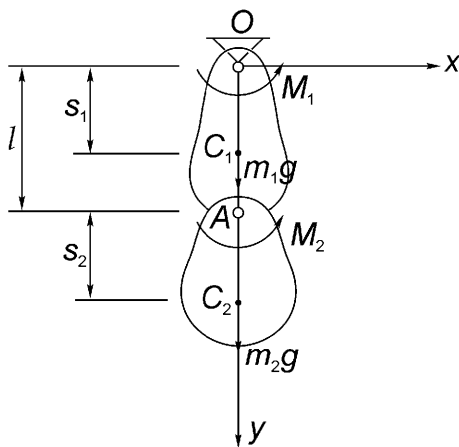


Рис. 14.10.1.

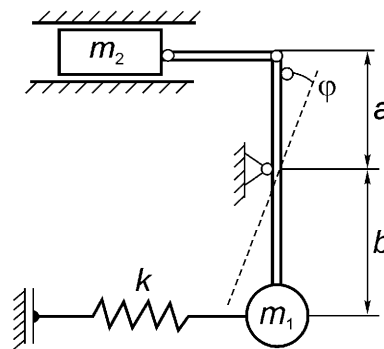


Рис. 14.10.2.

14.10.2. Для системы с одной степенью свободы, показанной на рис. 14.10.2, получить уравнение движения Лагранжа. Считать, что жесткие стержни не имеют массы, а пружина линейно упруга с коэффициентом жесткости k . Для малых углов φ вычислить частоту свободных колебаний в вертикальном параллельном поле постоянной силы тяжести.

14.10.3. Найти лагранжево уравнение движения для системы, показанной на рис. 14.10.3 с ненапряженной пружиной. Жесткие однородные колеса катятся

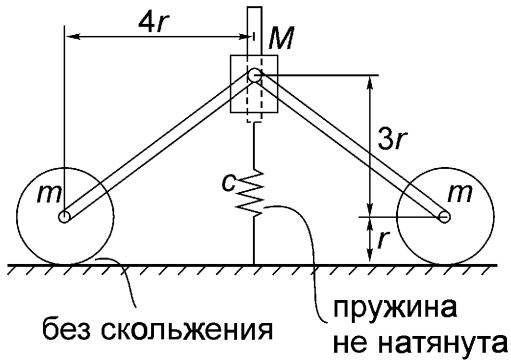


Рис. 14.10.3.

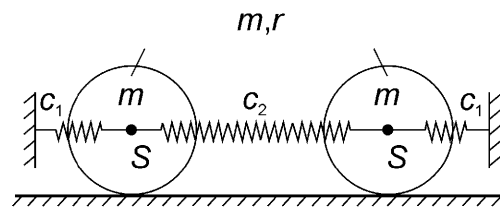


Рис. 14.10.4.

по поверхности без проскальзывания, соединительные стержни не имеют массы, а пружина – линейно упруга. Вычислить частоту малых свободных колебаний около положения равновесия.

14.10.4. Два жестких колеса симметрично поддерживаются линейными пружинами (рис. 14.10.4). Найти лагранжевы уравнения движения при отсутствии проскальзывания, определить формы свободных колебаний и их периоды.

14.10.5. Жесткий однородный стержень массы m и длины l поддерживается тремя линейными пружинами одинаковой жесткости c (рис. 14.10.5). Определить периоды и формы свободных колебаний в плоскости.

14.10.6. К концу плоского физического маятника, имеющего вид жесткого однородного стержня массы m и длины l , присоединен математический маятник с теми же массой m и длиной l (рис. 14.10.6). Найти лагранжевы уравнения движения для малых колебаний около вертикального положения равновесия, если расстояние между опорами l_0 равно длине ненапряженной пружины. Определить периоды этих колебаний.

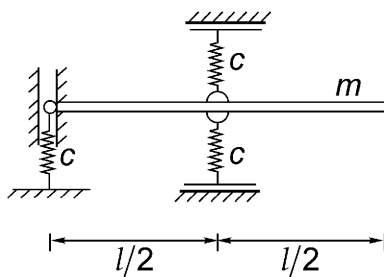


Рис. 14.10.5.

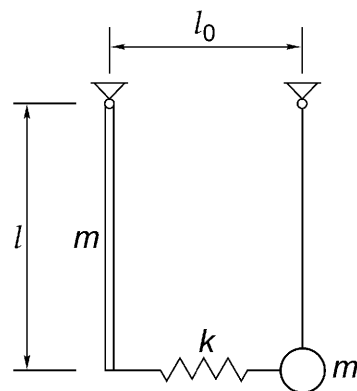


Рис. 14.10.6.

14.10.7. Линейно упругая консоль с постоянной изгибной жесткостью B несет на своем конце массу m_1 (рис. 14.10.7). Концы консоли с помощью пружин и массы m_2 , расположенной между ними, соединен с землей, так что образован замкнутый контур. Найти линейные лагранжевы уравнения движения и определить как периоды, так и формы свободных колебаний.

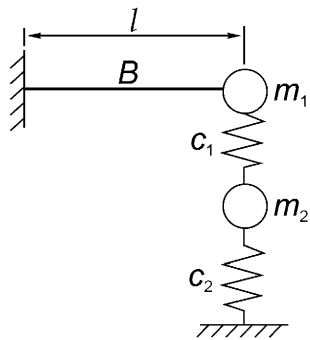


Рис. 14.10.7.

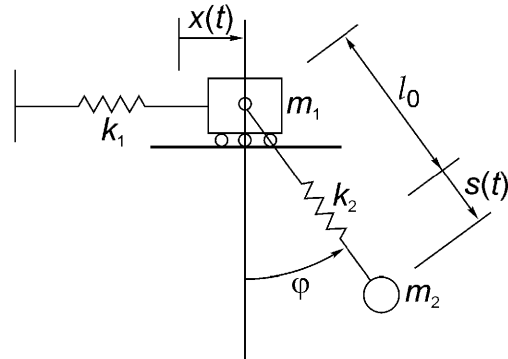


Рис. 14.10.8.

14.10.8. Считая большими углы φ и перемещения, применить уравнения Лагранжа и получить уравнения движения для системы с линейными пружинами, показанной на рис. 14.10.8. Какой вид имеют линеаризованные уравнения движения для колебаний малой амплитуды?

14.10.9. Точечная масса m_3 соединена с тележкой с помощью линейной пружины жесткости k и длины в ненапряженном состоянии l_0 (рис. 14.10.9). Найти лагранжевы уравнения движения и их линеаризованный вариант, описывающий колебания малой амплитуды. Пренебречь трением и считать проскальзывание отсутствующим.

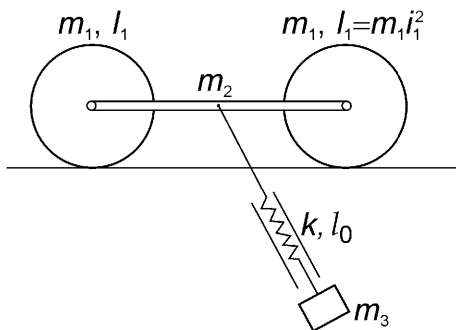


Рис. 14.10.9.

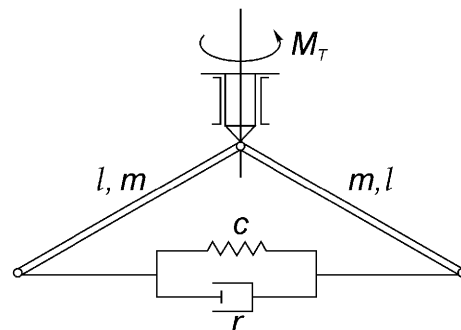


Рис. 14.10.10.

14.10.10. Два жестких стержня длины l и массы m шарнирно соединены с вертикальным валом, к которому приложен внешний вращающий момент $M_T = \text{const}$ (рис. 14.10.10). При действии сил на внешние концы стержней, возникающих при деформации пружины и линейного демпфера, стержни двигают-

ся в плоскости. Найти уравнение движения симметричной системы в параллельном поле силы тяжести и получить стационарное решение при $M_T = 0$.

14.10.11. Несбалансированный ротор, прикрепленный болтами к основанию, имеет постоянную угловую скорость $\dot{\phi} = \text{const}$ (рис. 14.10.11). Последнее соединено с неподвижной стенкой с помощью тела Кельвина-Фойгта. При $x_M = 0$ пружина не напряжена.

а) Найти лагранжево уравнение вынужденного движения.

б) Вычислить амплитуду стационарных колебаний.

с) Рассматривая свободное тело, освобожденное от связей, получить уравнения для определения реакций опор A и B .

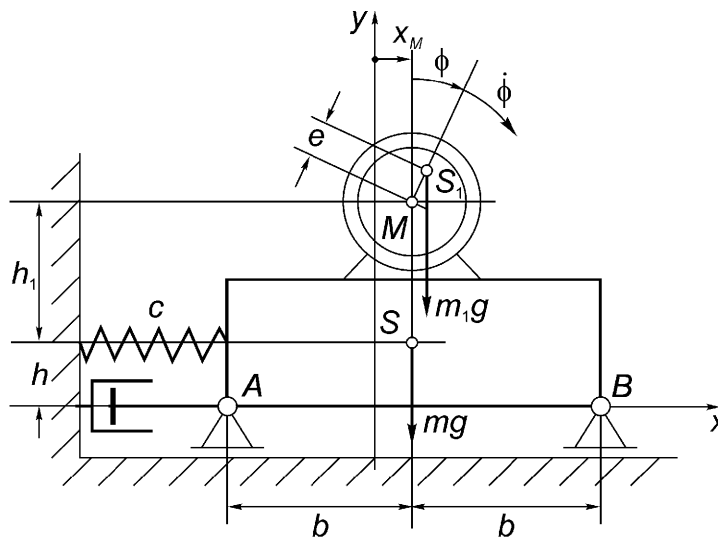


Рис. 14.10.11.

14.10.12. Жесткий физический маятник с равномерно распределенной массой m_2 соединен шарниром с центром однородного колеса радиуса R и массы m_1 . Колесо может совершать чистое качение по наклонной плоскости (рис. 14.10.12). При заданных параметрах тела Кельвина-Фойгта (длина ненапряженной пружины равна l_0) найти лагранжевы уравнения и, для проверки, определить положение равновесия. Линеаризовать полученные уравнения и рассмотреть свободные колебания малой амплитуды и их формы (влиянием малого линейного сопротивления на формы мод и на периоды колебаний пренебречь).

14.10.13. Жесткая пластина подвешена к системе параллельно соединенных пружины и демпфера. При малых отклонениях β от прямого угла вращательная степень свободы пластины активизирует действие нелинейного (полином

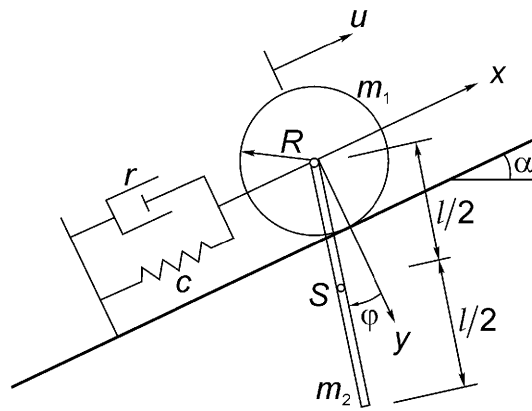


Рис. 14.10.12.

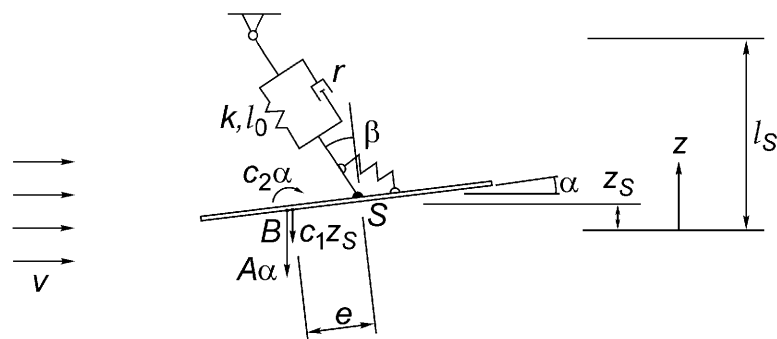


Рис. 14.10.13.

третьей степени) возвращающего момента $[k\beta(1+\varepsilon\beta^2)]$. На пластину действует однородный параллельный поток воздуха, имеющий скорость v . При начале колебаний возникает подъемная сила $A\alpha(t)$, приложенная к точке B и направленная перпендикулярно горизонтальному движущемуся параллельному потоку воздуха (то есть направлена вертикально вниз, как показано на рис. 14.10.13). Лобовым сопротивлением пренебречь. Окружающий пластину воздух действует на нее подобно основанию Винклера, то есть возникают линейная возвращающая сила $c_1 z_S(t)$ (в точке B) и возвращающий момент $c_2 \alpha(t)$. При заданной длине ненапряженной пружины l_0 найти лагранжевы уравнения движения для колебаний малой амплитуды.

14.10.14. В разделе 10.3 было рассмотрено колебательное движение точечных масс соединенных натянутой нитью, представленное как движение механической системы с тремя степенями свободы. Считая, что стальная нить диаметра 4 мм, длины $L=1$ м имеет предварительное натяжение 300 Н/мм^2 , найти уравнение движения, формы мод и частоты свободных линейных колебаний при различных расположениях точечных масс ($m=0,8$ кг).

а) Одиночная масса в точке на расстоянии $a=L/2$ и в другом случае на расстоянии $a=L/4$.

- b) Две массы, находящиеся на расстоянии $a=L/3$, и в другом случае в точках $a=L/4$ и $a=L/2$.
- c) Три массы, расположенные как на рис. 10.5.
- d) Четыре эквидистантные массы при $a=L/2$.

14.10.15. На конце стальной консольной балки ($E=206 \text{ кН/мм}^2$), имеющей длину $L=1 \text{ м}$ и момент инерции поперечного сечения $J=20 \text{ см}^4$, расположена точечная масса $m=100 \text{ кг}$. Найти уравнения свободных колебаний, если другая точечная масса $M=m/2$ располагается в интервале $0 \leq \xi \leq L$. Вычислить частоты свободных колебаний и нарисовать формы мод колебаний (последнее для значений $\xi=L/3, L/2, 2L/3, L$). Распределенной массой балки пренебречь.

14.10.16. Механизм, показанный на рис. 14.10.16, состоит жесткой рамы, вращающейся с постоянной угловой скоростью (рассмотреть только однородную балку массы m_1), и вращающегося диска ($\sigma=\text{const}$) на ее конце. Плоскость диска отклонена от вертикали на угол β . Определить момент защемления в жесткой опоре O .

Указание: заменить опору в точке O шарниром и добавить вклад момента заделки в выражение возможной работы при нахождении обобщенных сил, входящих в уравнения Лагранжа.

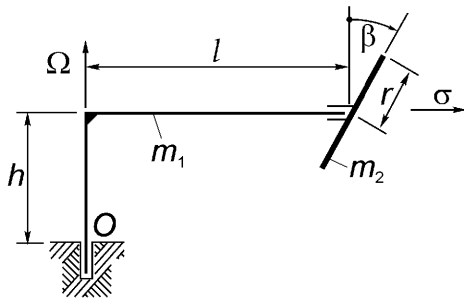


Рис. 14.10.16.

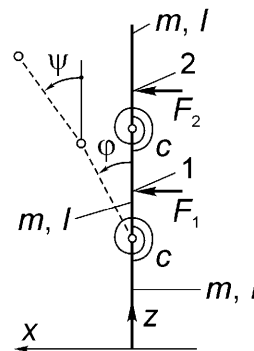


Рис. 14.10.17.

14.10.17. Гибкая башня пятидесятиметровой высоты может быть представлена как трехстержневая система с пружинами кручения в промежуточных шарнирах, которая жестко заделана в фундамент (рис. 14.10.17). Масса $3m=15000 \text{ кг}$ равномерно распределена. Жесткость пружин с рассматривать как параметр, который будет определен позже. Получить уравнения движения Лагранжа, если сила ветра, действующего на башню, гармонически зависит от времени (приближенно учесть силы тяжести). Результирующие этих внешних сил, как пред-

полагается, приложены в серединах двух верхних частей башни, причем $F_{1,2} = F_{1,2}^{(0)} \sin \nu t$.

- а) Для свободных колебаний малой амплитуды решить задачу о собственных значениях. Вычислить жесткость c , если основная частота настроена на частоту $f_1 = 1$ Гц.
- б) Определить амплитуды сил ветра при заданной частоте $\nu = 1,1(2\pi f_1)$ рад/с, если первая мода амплитуды угла поворота равна $\varphi_0 = 5\pi/180$ рад.

14.11. Приближенные методы

14.11.1. Однородная линейно упругая консольная балка 1 с изгибной жесткостью B и массой на единицу длины ρA поддерживает тяжелую жесткую рамную верхнюю часть, соединенную шарнирами (рис. 14.11.1). Линейная пружина кручения жесткости k в угловой точке C добавляет дополнительную жесткость раме. Механическое устройство, которое может быть представлено в виде линейного демпфированного осциллятора, установлено на перекрытии. Использовать одночленное приближение Ритца для прогиба балки, представляющее кубическую функцию: $\varphi(x) = (x/l)^3$. Описать мгновенную конфигурацию и найти лагранжевы уравнения движения дискретизированной системы. Система возбуждается за счет ускорения основания. Определить частоты свободных колебаний связанной системы и пренебречь малым вязким затуханием. Какие дальнейшие приближения могут быть получены, если массу m_4 считать малой?

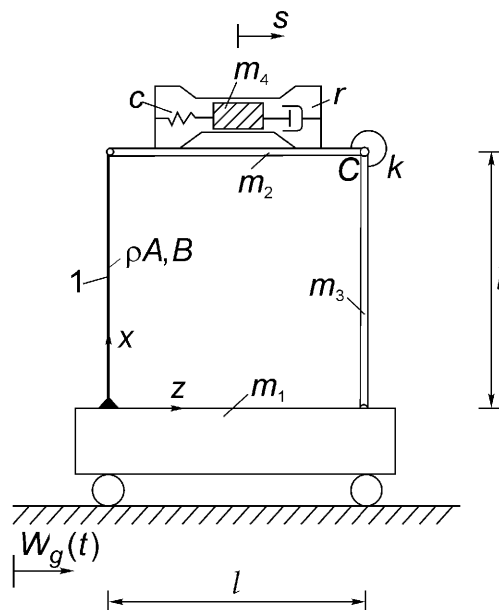


Рис. 14.11.1.

14.11.2. Двухпролетная балка с постоянной изгибной жесткостью B и массой на единицу длины ρA в точке, соответствующей промежуточной опоре, жестко связана с жесткой трехстержневой системой с массой каждого элемента, равной m (рис. 14.11.2). Использовать одночленную аппроксимацию Ритца с $\varphi(x) = \sin(\pi x/l)$ для дискретизации балки.

- Найти уравнение движения Лагранжа дискретизированной системы в линеаризованном виде (учесть влияние силы тяжести трехстержневой системы).
- Вычислить период свободных колебаний дискретизированной системы.

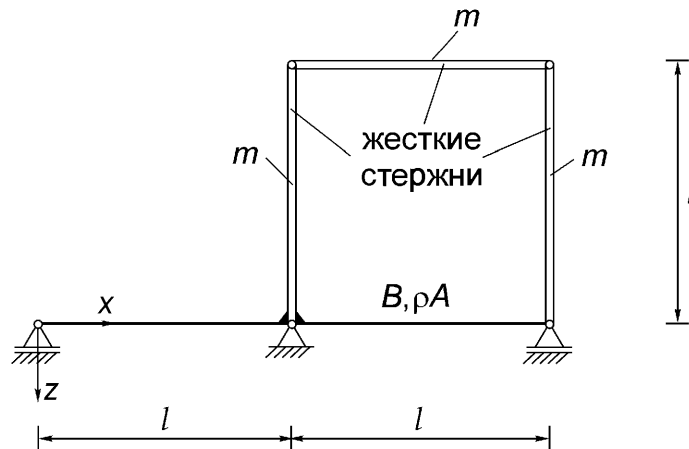


Рис. 14.11.2.

14.11.3. Концы двухпролетной балки, обладающей жесткостью на изгиб B и массой на единицу длины ρA , соединены с линейными пружинами жесткости c жесткими консолями, которые имеют длину a и равномерно распределенную общую массу M . На концах консолей расположены массы m (рис. 14.11.3). Поле тяготения перпендикулярно горизонтальной плоскости колебаний. Использовать одночленное приближение Ритца с $\varphi(x) = \sin(\pi x/l)$ для дискретизации балки.

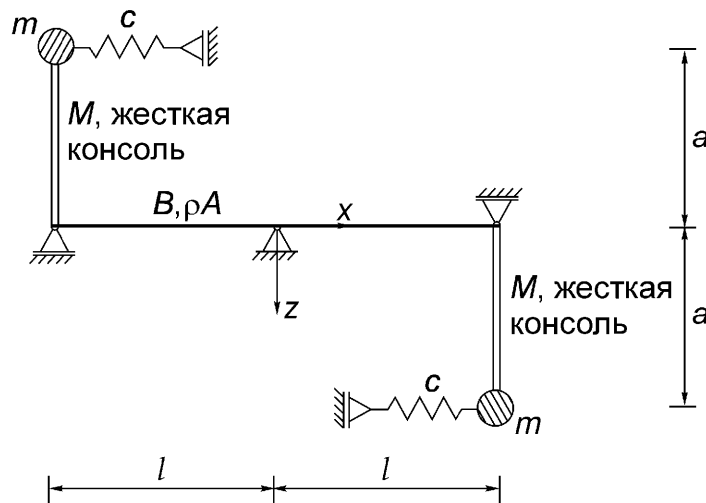


Рис. 14.11.3.

- а) Найти лагранжево уравнение движения дискретизированной системы.
 б) Определить частоту линейных колебаний.

14.11.4. Простая двухстержневая система соединена с однопролетной балкой, имеющей изгибную жесткость B и массу единицы длины ρA (рис. 14.11.4). Линейная пружина кручения соединяет стержень с опорой C , а линейный демпфер – с точкой D . Использовать одночленную аппроксимацию Ритца с $\varphi(x) = \sin(\pi x/l)$, найти лагранжево уравнение движения дискретизированной системы при активации ее пружиной и найти линейный период колебаний малой амплитуды без вязкого сопротивления.

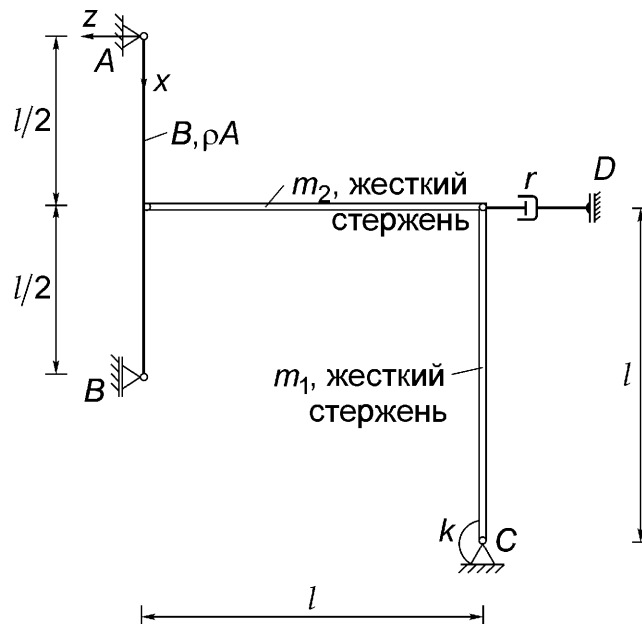


Рис. 14.11.4.

14.11.5. Две линейно упругие колонны изгибной жесткости B каждая и массы на единицу длины ρA несут тяжелый жесткий брус массы m , опирающийся на шарниры (рис. 14.11.5). Эта одноярусная рама жестко связана с основанием, а в своей вершине соединяется с последним через вязко-упругое тело. Основание движется по закону $w_g(t)$. Использовать функцию $(x/l)^3$ в одночленном приближении Ритца.

- а) Найти лагранжево уравнение движения для нагруженной и дискретизированной системы, принимая во внимание предварительное напряженное состояние в колоннах.
 б) Вычислить период линейных свободных колебаний без вязкого сопротивления.

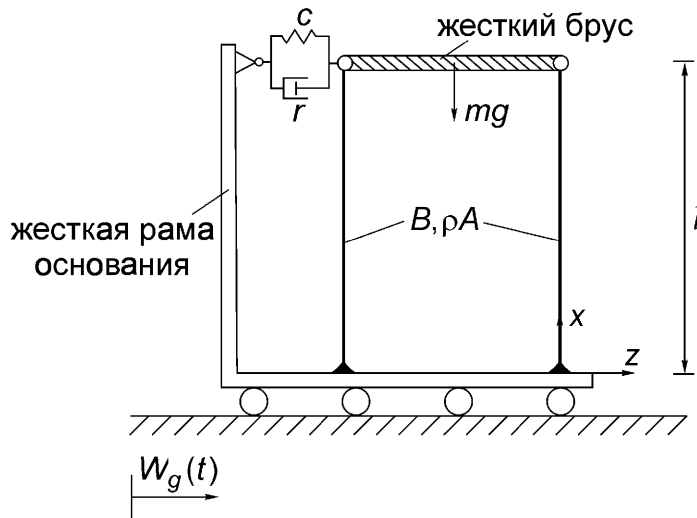


Рис. 14.11.5.

14.11.6. Двухпролетная балка с изгибной жесткостью B и массой на единицу длины ρA жестко связана с рычагами массы m и длины a . Концы рычагов соединены линейными пружинами, имеющими жесткость c каждая (рис. 14.11.6). Используя одночленное приближение Ритца $\varphi(x) = \sin(\pi x/l)$, дискретизировать систему, найти лагранжево уравнение ее свободных колебаний в горизонтальной плоскости и вычислить период этих колебаний.

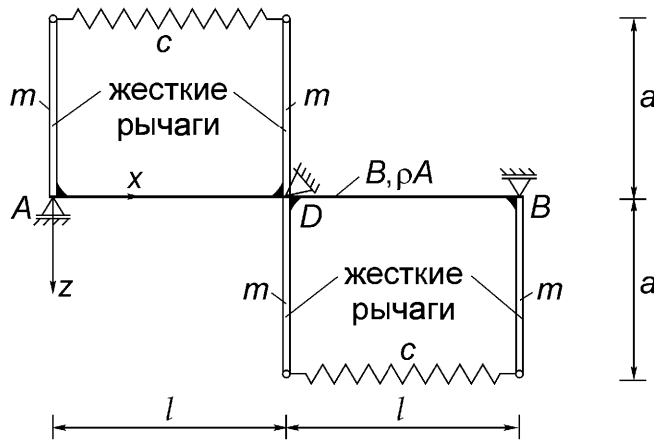


Рис. 14.11.6.

14.11.7. Консоль с изгибной жесткостью B и массой на единицу длины ρA несет тяжелый жесткий брус на вершине. Масса бруса равномерно распределена и равна m (рис. 14.11.7). Учесть постоянное начальное напряженное состояние при дискретизации консоли. При аппроксимации Ритца функция имеет вид $(x/l)^3$. Получить лагранжево уравнение движения дискретизированной системы.

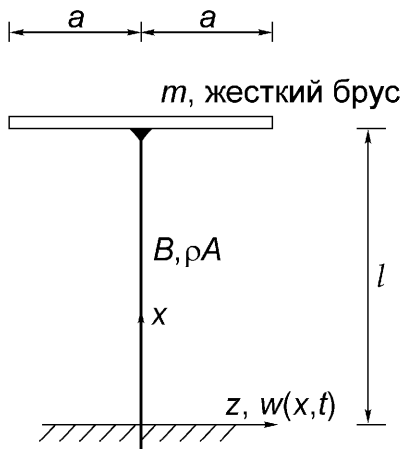


Рис. 14.11.7.

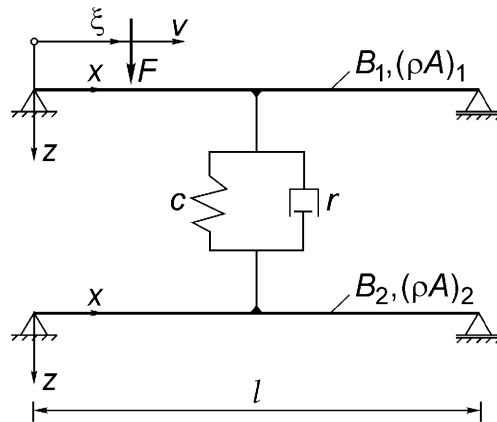


Рис. 14.11.8.

14.11.8. Две линейно упругих однородных балки с шарнирными опорами слабо связаны между собой системой пружина – демпфер (рис. 14.11.8). Поперечная сила F постоянной величины движется с неизменной скоростью v и динамически нагружает первую балку. Используя функцию $\sin(\pi x/l)$ в приближении Ритца, получить лагранжевы уравнения движения.

а) Полагая $r=0$, решить частотное уравнение.

б) Найти вынужденные колебания дискретизированной системы, если сила начинает действовать на балку, находящуюся в состоянии покоя (вязким сопротивлением пренебречь).

14.11.9. Балка, опирающаяся на шарнирные опоры и имеющая постоянные изгибную жесткость и массу на единицу длины, покоится на основании Винклера жесткостью k' на единицу длины и несет динамическую нагрузку $F(t)$ в середине пролета. Балка на концах жестко связана с недеформируемыми тяжелыми стержнями (рис. 14.11.9). Замкнутая форма рамы образована телом, моделируемым системой пружина – демпфер. Используя двучленное приближение Ритца в виде тригонометрических функций нужной периодичности для симметричных колебаний балки малой амплитуды, получить лагранжевы уравнения движения для линеаризованной и дискретизированной системы.

14.11.10. На конце консольной балки, имеющей постоянные изгибную жесткость и массу на единицу длины, расположено тело большой массы m (рис. 14.11.10). Двухстержневая шарнирно связанная жесткая система прикреплена шарниром к середине пролета балки. С помощью двучленного приближения Ритца с функциями $\varphi_1(x) = (x/l)^2$ и $\varphi_2(x) = (x/l)^2 [(x/l) - (1/2)]$

а) получить лагранжевы уравнения движения дискретизированной системы;

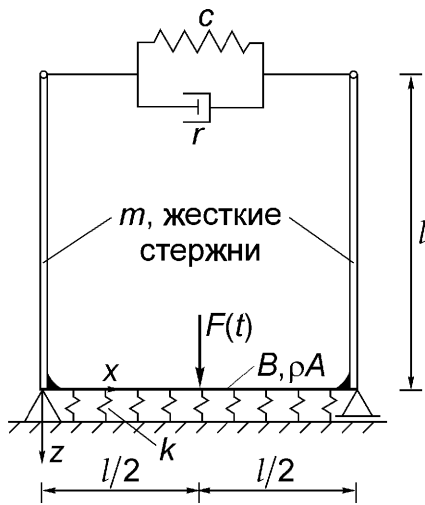


Рис. 14.11.9.



Рис. 14.11.10.

б) вычислить периоды свободных колебаний, приближенно учитывая вес тела, находящегося на конце балки.

14.11.11. Два жестких рычага, имеющих одинаковую длину a , но разные равномерно распределенные массы m_1 и m_2 , связаны с гибкой балкой линейными пружинами кручения (жесткости пружин равны $k_{1,2}$). Балка имеет изгибную жесткость $B = \text{const}$, массу на единицу длины $\rho A = \text{const}$ (рис. 14.11.11). Движение происходит в горизонтальной плоскости. Дискретизировать систему с помощью двучленной аппроксимации Ритца, используя две подходящие тригонометрические функции.

а) Найти четыре лагранжевых уравнения движения.

б) Получить частотное уравнение и проверить порядок полученного полинома.

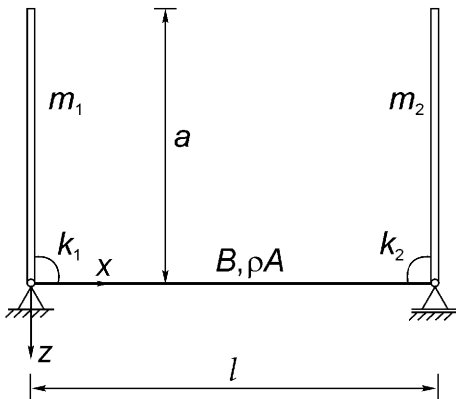


Рис. 14.11.11.

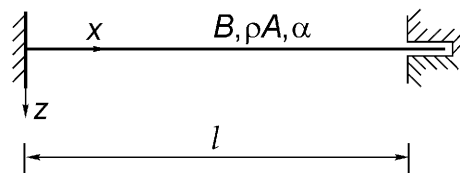


Рис. 14.11.12.

14.11.12. Дважды защемленная балка показана на рис. 14.11.12. Балка подвергается температурному удару с температурным моментом $m_\theta(x, t)$. В полученном далее решении следует разделить квазистатическую и динамическую части. Используя первые две моды свободных колебаний балки и метод Галеркина для дискретизации системы, найти уравнения, описывающие динамическую часть решения.

14.11.13. Крестообразная рама, состоящая из балок одинаковой постоянной изгибной жесткости $B=EI$ и массы на единицу длины ρA , совершает свободные колебания в плоскости (рис. 14.11.13). С помощью приближения Ритца найти основную частоту свободных колебаний малой амплитуды. Изобразить графически форму колебаний.

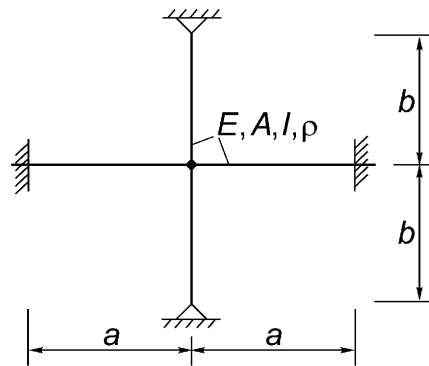


Рис. 14.11.13.

14.11.14. Квадратная пластина с постоянной изгибной жесткостью шарнирно оперта по краям (рис. 14.11.14). Пластина имеет равномерно распределенную массу, а в центре – точечную массу m . Используя подходящее одночленное приближение Ритца, вычислить основную частоту свободных колебаний.

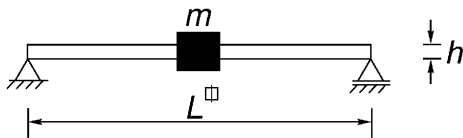


Рис. 14.11.14. Квадратная пластина, опирающаяся на шарниры.

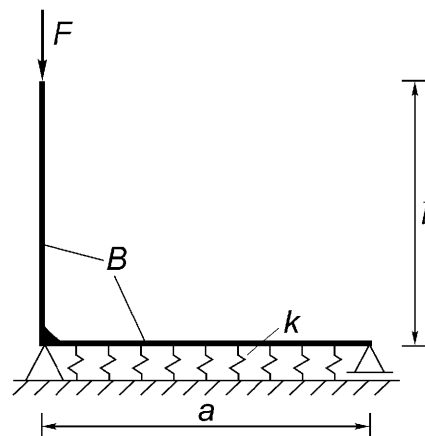


Рис. 14.11.15.

14.11.15. Найти критическую силу, приводящую к потере устойчивости для простой рамы, показанной на рис. 14.11.15, если горизонтальная часть рамы расположена на основании Винклера, имеющего жесткость k' на единицу длины. Используя по меньшей мере двучленную аппроксимацию Ритца, найти область значений отношения жесткостей и, возможно, скачок моды.

14.11.16. С помощью метода Галеркина приближенно вычислить жесткость на кручение упругого стержня, поперечное сечение которого представляет собой правильный треугольник (рис. 14.11.16).

Указание: использовать декартовы ортогональные координаты с началом в центре тяжести поперечного сечения с осями, направленными как показано на рисунке. Функция, используемая в приближении Ритца, представляет собой произведение неявных уравнений трех сторон треугольника. Аналогичное выражение задает прогиб равномерно растянутой мембраны под действием равномерно распределенной нагрузки.

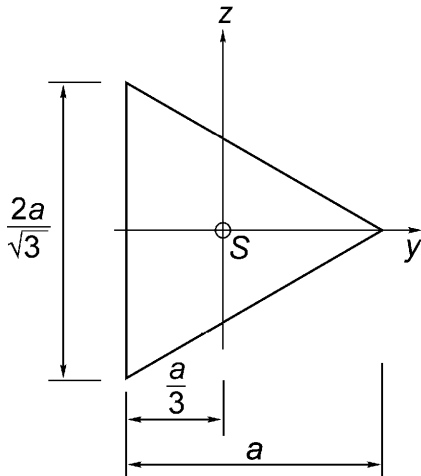


Рис. 14.11.16.

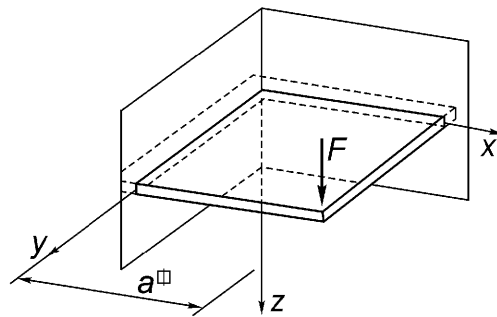


Рис. 14.11.17.

14.11.17. Тонкая квадратная пластина с двумя смежными защемленными сторонами нагружается сосредоточенной силой F , причем остальные стороны свободны (рис. 14.11.17). Применяя аппроксимацию Ритца, приближенно определить жесткость пластины $k = F/w_0$.

Указание:

- использовать альтернативно функцию $(x/a)^2(y/a)^2$ или $(x/a)^3(y/a)^3$;
- использовать произведение прогибов консольной балки.

14.11.18. Квадратная пластина, показанная в задаче 14.11.17, имеет равномерно распределенную массу ρh на единицу площади и точечную массы m в свободном углу (на рисунке не показана). Пластина нагружается силой $F(t)$, при-

водящей к колебаниям конструкции. Используя подходящее одночленное приближение Ритца, найти неоднородное лагранжево уравнение движения для эквивалентной механической системы с одной степенью свободы.

14.12. Удар

14.12.1. Жесткий физический маятник, имеющий равномерно распределенную массу m , падает вниз из вертикального положения и ударяется о систему, состоящую из трех покоящихся элементов, в момент достижения горизонтального положения, общего для всех тел (рис. 14.12.1). Трехэлементная система имеет следующие характеристики: одинаковую массу на единицу длины ρA для двух стержней длины l , массу m жесткого пространственного квадратного блока шириной b с толстыми стенками. Блок соединяет элементы в единую систему. Рассмотреть случай упругого и неупругого ударов.

- Вычислить угловую скорость маятника непосредственно перед ударом.
- Определить поле скоростей сразу после удара в обоих идеализированных случаях удара.
- Найти максимальную деформацию линейной упругой пружины с жесткостью k , являющуюся результатом движения после удара в двух случаях.

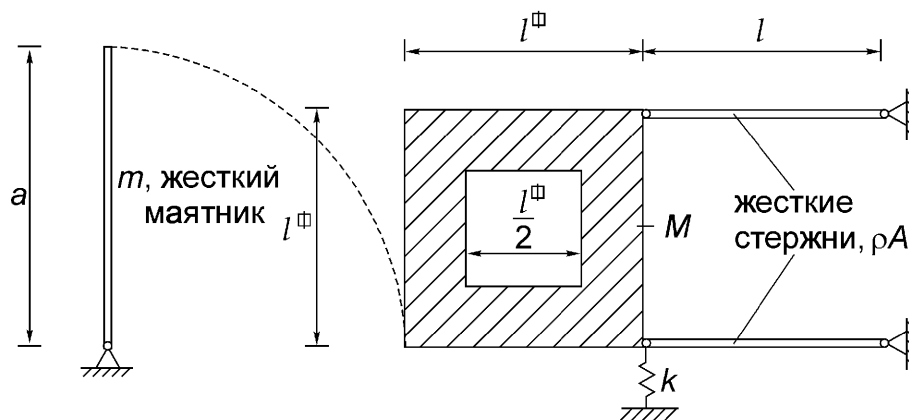


Рис. 14.12.1.

14.12.2. Тонкая сферическая оболочка радиуса R и массы m катится вниз по трем ступенькам с размерами $t \leq R$ без подскока (рис. 14.12.2). При заданной начальной угловой скорости ω , найти конечную угловую скорость.

14.12.3. Два однородных блока равных размеров, но разной массы m_1, m_2 , показаны на рис. 14.12.3 в момент столкновения. Определить распределение скоростей блоков сразу после удара: упругого и неупругого. Трением пренебречь. Результаты записать для частного случая при начальном угле $\pi/4$.

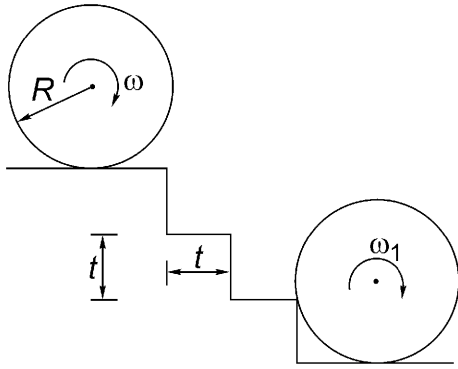


Рис. 14.12.2.

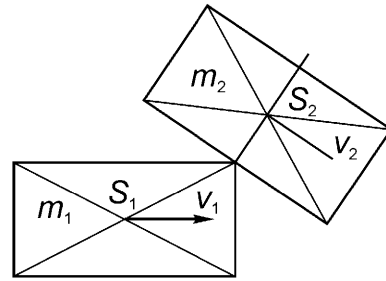


Рис. 14.12.3. Вид в плоскости.

14.12.4. Жесткая пластина равномерно распределенной массы m имеет шарнирные опоры в точках A и B . Пластина падает вниз из вертикального положения под действием собственного веса и в горизонтальном положении неупруго ударяется о точечную опору C (рис. 14.12.4). Определить в общем виде импульсы ударных реакций и записать результат в частном случае, если $m=100$ кг, $h=1$ м, $b=1,5 h$.

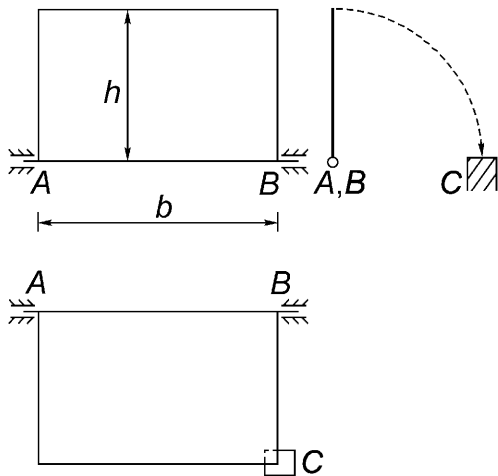


Рис. 14.12.4.

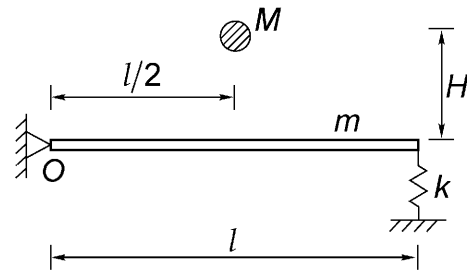


Рис. 14.12.5.

14.12.5. Масса M ударяется о жесткую балку, имеющую равномерно распределенную массу m и длину l . Масса падает с высоты H (рис. 14.12.5). Балка опирается одним концом на шарнирную опору, а на другом – на покоящуюся пружину.

- Считая удар абсолютно упругим, определить высоту h , которую достигнет масса M после удара.
- Найти максимальное сжатие пружины после одного соударения.
- Чему равно отношение масс, если считать, что $h=0$?

14.12.6. Конструкция, показанная на рис. 14.12.6, получает кинетическую энергию после соударения с массой M , имеющей скорость v . Перед ударом трех-

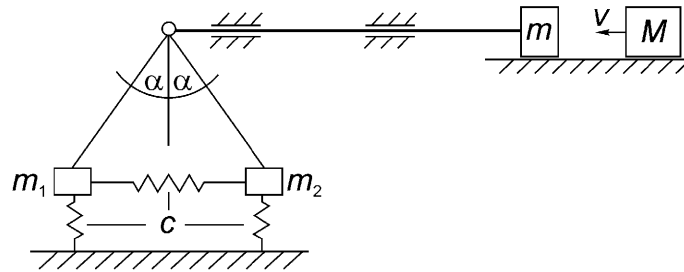


Рис. 14.12.6.

стержневая система с точечными массами m , m_1 и m_2 находилась в покое. Рассматривая оба идеализированных случая упругого и неупругого ударов, вычислить скорости и импульсы. Найти потерянную энергию при неупругом ударе.

14.12.7. Два шарнирно соединенных жестких стержня (длина l , равномерно распределенная масса m) падают с высоты H и неупруго ударяются о два жестких угловых выступа (рис. 14.12.7). Определить начальные условия свободного падения, которое произойдет после удара.

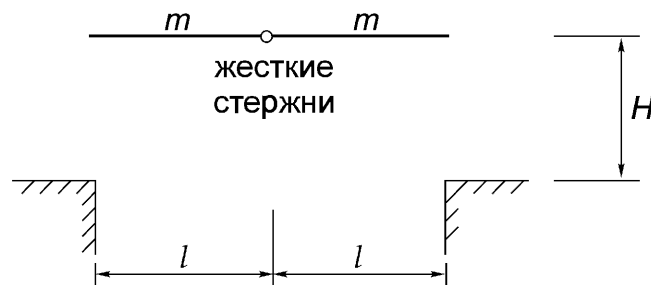


Рис. 14.12.7.

14.12.8. Жесткая однородная сфера массы m_1 катится с заданной скоростью по направлению к жесткому кубу с равномерно распределенной массой m_2 (рис. 14.12.8). Принимая условия упругого удара в отсутствии трения на контакте,

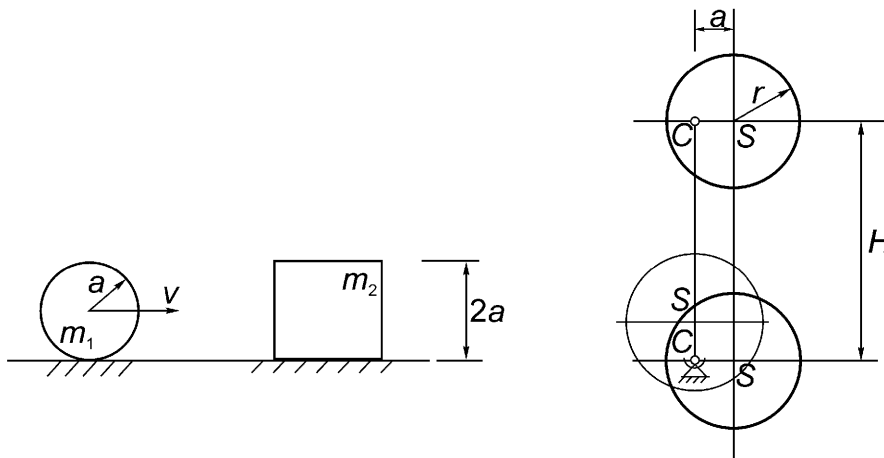


Рис. 14.12.8.

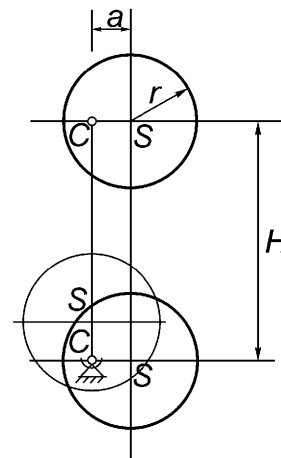


Рис. 14.12.9.

найти отношение масс, при котором сфера придет в состояние покоя в результате последующего за ударом движения с проскальзыванием (коэффициент трения μ).

14.12.9. Однородный диск массы m и радиуса r падает с высоты H (рис. 14.12.9). Его угловая скорость равна нулю. Найти H , чтобы после внезапного закрепления оси, проходящей через точку C на расстоянии a от центра тяжести S , последний достигал положения точно над точкой C в последующем вращательном движении в параллельном поле силы тяжести.

14.12.10. Жесткий однородный цилиндр массы m и радиуса r скатывается вниз по наклонной плоскости с высоты H (рис. 14.12.10). Считая, что проскальзывание отсутствует, найти высоту H_1 , на которую закатится цилиндр при качении по зеркально расположенной наклонной плоскости (обе плоскости образуют V-образную поверхность).

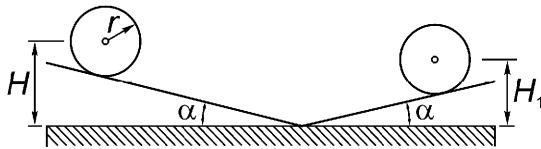


Рис. 14.12.10.

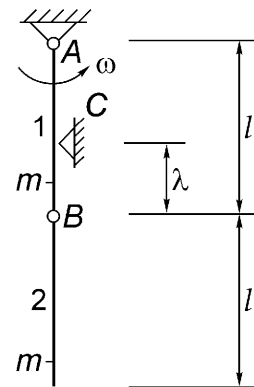


Рис. 14.12.11.

14.12.11. Два сцепленных жестких стержня одинаковой массы m и длины l имеют угловую скорость ω в прямолинейном положении сразу перед тем, как стержень 1 неупруго ударяется об опору C (рис. 14.12.11).

- Найти угловую скорость ω' стержня 2 сразу после удара.
- Вычислить ударный импульс в шарнире A и затем определить такое положение точки C (расстояние λ), при котором шарнир A окажется свободен от любых ударных нагрузок.
- Чему равна потеря энергии при ударе?

14.12.12. Двойной физический маятник имеет начальную прямолинейную конфигурацию, показанную на рис. 14.12.12. Длинный стержень 1, имеющий длину $2L$ и равномерно распределенную массу $2m$, удерживает короткий стержень 2 длины L и массы m . Стержень 2 соединен со стержнем 1 шарниром. Определить расстояние a , при котором начальная прямолинейная конфигурация будет

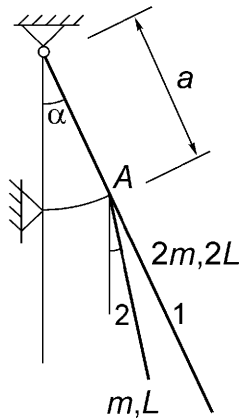


Рис. 14.12.12.

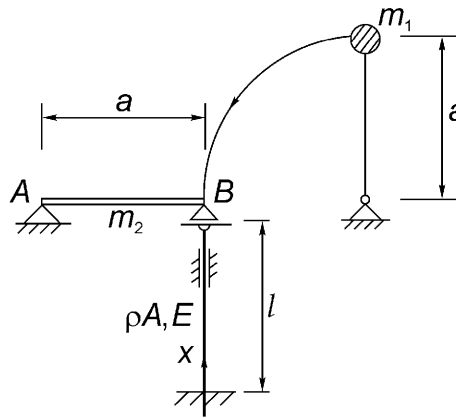


Рис. 14.12.13.

сохраняться во время движения в параллельном поле силы тяжести. В вертикальном положении точка A мгновенно фиксируется в пространстве.

- Вычислить угловую скорость сразу после удара.
- Найти начальный угол наклона α , при котором стержень 2 во время движения может достигнуть вертикального положения.

14.12.13. Математический маятник длины a и массы m_1 ударяет по концу жесткого стержня, имеющего равномерно распределенную массу m_2 и длину a . Стержень опирается одним концом на шарнир A и шарнирно соединен с вершиной линейно упругой однородной стойки (масса на единицу длины ρA , модуль упругости E , длина l) (см. рис. 14.12.13). Используя линейную функцию для осевых скоростей точек стойки, применить уравнения Лагранжа в теории удара для рамы, имеющей одну степень свободы.

- Определить угловую скорость маятника перед ударом.
- Построить эквивалентную систему для дискретизированной рамы.
- Найти скорости сразу после упругого и неупругого ударов.
- Вычислить максимальную деформацию стойки в движении, следующим за ударом, а также связанный с движением динамический коэффициент усиления (масса m_1 не участвует в этой фазе движения).

14.12.14. Жесткая рама шарнирно оперта в точке C и удерживается линейно упругим однородным стержнем как показано на рис. 14.12.14. Масса m_1 скользит вниз по наклонной плоскости и ударно воздействует на систему в точке B . Коэффициент статического трения μ задан.

- Найти скорость движения точечной массы перед ударом.
- Построить эквивалентную систему для упругой стойки, используя линейную функцию формы.
- Найти скорости сразу после идеализированного упругого удара.

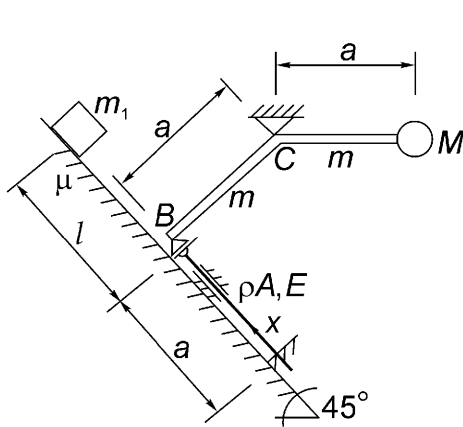


Рис. 14.12.14.

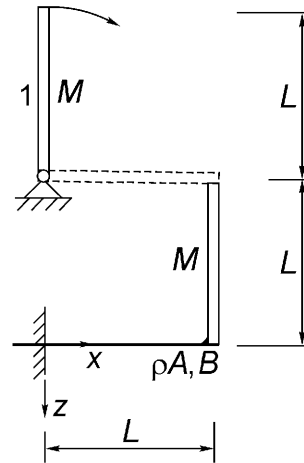


Рис. 14.12.15.

d) Вычислить максимальную сжимающую силу в поддерживающей стойке, появляющуюся в ней после однократного ударного воздействия.

14.12.15. Линейно упругая консольная балка с постоянной изгибной жесткостью B и массой на единицу длины $\rho A = \text{const}$ несет на себе жесткий стержень массы M , имеющий такую же как у балки длину L (рис. 14.12.15). Жесткий маятник 1 той же массы M и длины L падает вниз из вертикального положения и ударяется в горизонтальном положении своим концом о край этой открытой рамы. Распределение скоростей в консоли приближенно может быть описано с помощью функции $\varphi(x) = [1 - \cos(\pi x/L)]$.

- a) Найти распределения скоростей сразу после упругого и неупругого ударов.
- b) Вычислить максимальный прогиб на конце консоли при движении, следующим за ударом.

14.12.16. Точечная масса m ударяет со скоростью v по боковой стороне линейно упругой шарнирно опертой двухпролетной балки, имеющей постоянную изгибную жесткость B , плотность на единицу длины ρA и длину $2l$. Масса ударяет покоящуюся балку в точке, находящейся на расстоянии ξ от левой опоры (см. рис. 14.12.16). Использовать тригонометрические функции в трехчленном приближении распределения скоростей балки и аппроксимации Ритца последующего колебательного движения.

- a) Применить уравнения Лагранжа в теории удара и записать их как в случае упругого, так и неупругого ударов для нахождения распределения скоростей.
- b) Исследовать вклад высших мод колебаний при $\xi = l/2$ и $\xi = l/4$ в уравнение максимальных прогибов при следующих за ударом движениях.

с) Применяя одночленное приближение и считая, что $\xi = l/2$, вычислить в явном виде динамический коэффициент усиления. Чему равна максимальная величина изгибающего момента в точке над промежуточной опорой?

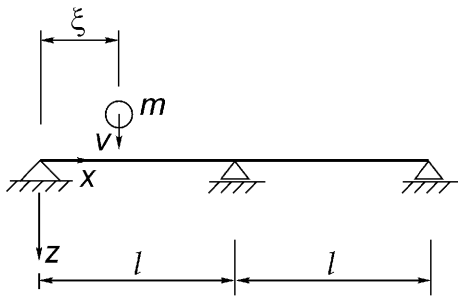


Рис. 14.12.16.

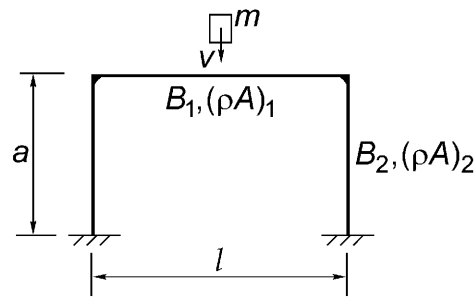


Рис. 14.12.17.

14.12.17. Одноярусная рама с пролетом l и высотой a состоит из однородной балки (изгибная жесткость B_1 , плотность на единицу длины $(\rho A)_1$) и однородных стоек (B_2 и $(\rho A)_2$). В середину пролета балки неупруго ударяет со скоростью v точечная масса m (рис. 14.12.17). Использовать статический прогиб для построения приближенных функций, описывающих распределение скоростей сразу после удара, и одночленное приближение Ритца для описания следующего за ударом колебательного движения, учитывая постоянно присоединенную массу m ,

- найти распределение скоростей;
- вычислить коэффициент динамического усиления;
- определить потерю энергии.

14.12.18. Скорость волн гидравлического удара контролируется измерением положения экстремального давления при течении жидкости, которое возникает при перемещении задвижки. Задано отношение диаметра трубы к толщине стенки $2a/s = 160$ и известно, что концы трубы не перемещаются в ее продольном направлении.

- Вычислить скорость звука в стальной трубе с $E = 200 \text{ кН/мм}^2$.
- Аналогично для чугунной трубы с $E = 92 \text{ кН/мм}^2$.
- Аналогично для асбоцементной трубы с $E = 23 \text{ кН/мм}^2$.
- Считая трубу жесткой, найти скорость звука и сравнить с предыдущими результатами ($K_F = 2 \times 10^6 \text{ кН/м}^2$).
- Вычислить скорость волн гидравлического удара в железобетонной трубе, имеющей диаметр 1,25 м и толщину стенок 15 см, причем арматурные стержни диаметром 20 мм расположены через 12,5 см и направлены из центра в центр.

Отношение модулей упругости бетона (в момент его растрескивания) и стали составляет $1/20$.

Указание: толщина стенок железобетонной трубы заменяется эквивалентной толщиной для стальной трубы умножением на отношение модулей. Добавить «размазанную» площадь поперечного сечения стальных стержней.

14.12.19. Определить скорость волн давления воды в круглом туннеле, который используется как трубопровод давления. Изменения в формуле следуют из вывода, приведенного в разделе 12.8. Найти предел выражения (6.15). Использовать формулу для вычислений, если модуль сдвига изменяется в интервале $4,5 \times 10^6 \leq G \leq 45 \times 10^6 \text{ кН/м}^2$ для некоторого материала, окружающего туннель.

Замечание: при контакте стальной обшивки, имеющей толщину стенки s , с каменным или железобетонным туннелем диаметра D применяется аналогичная схема, если вместо $1/G$ подставлено эффективное значение $1/G^* = 1/(G + s E_{\text{стали}}/D)$.

14.12.20. Рассмотреть трубопровод переменной площади поперечного сечения, показанный на рис. 14.12.20. При внезапном закрытии управляемого затвора движется волна давления согласно уравнению (12.80), имеющая скорость звука c_1 и движущаяся от этого элемента трубы до стыка C . Здесь волна частично отражается и частично распространяется вверх по потоку со скоростью звука c_2 . Использовать уравнение (12.77) в месте стыка совместно с уравнением неразрывности для нахождения коэффициентов отражения и передачи. Эти величины зависят от площадей поперечных сечений и скоростей волны в обеих частях трубы. Проверить, что даже для постоянного поперечного сечения рефракция волны имеет место как при изменении толщины стенок трубы, так и при изменении свойств материала, из которого она изготовлена.

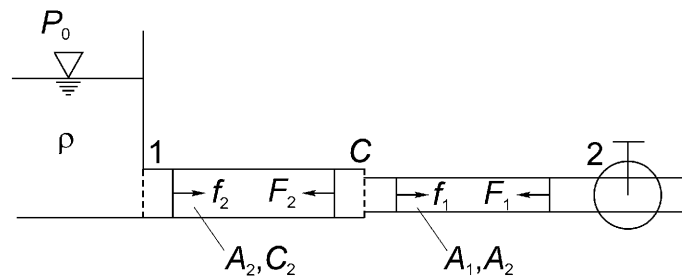


Рис. 14.12.20.

14.12.21. Получить подобным способом, как в задаче 14.12.20, коэффициенты передачи и отражения в стыке трех различных труб, показанного на рис. 14.12.21. Показать, используя этот результат, что всплески давления, переда-

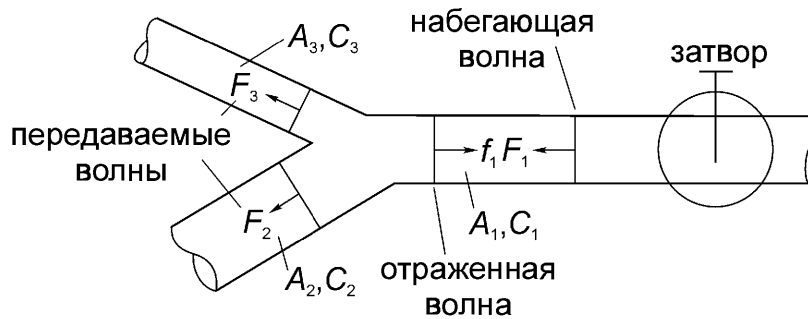


Рис. 14.12.21.

ваемые вверх по потоку в его разветвляющиеся части, равны независимо от площади их поперечного сечения.

14.12.22. Трубопроводная система, показанная на рис. 14.12.22, имеет в стыке С уравнильный бассейн. Труба С-3 закрыта, а оставшаяся часть стационарного потока, текущего по системе 1-С-2, внезапно перекрывается мгновенным перемещением управляемой задвижки, расположенной в положении 2. В результате чего появляется волна положительного давления $0,8 \times 10^5$ Па, движущаяся к точке С. Часть 1-С имеет диаметр 3,5 м и скорость звука в ней равна $c_1 = 1200$ м/с. Параллельные трубы одинаковы (диаметр 1,5 м, скорость звука $c_2 = 1050$ м/с). Шестиметровый цилиндрический уравнильный бассейн имеет эффективную скорость звука 750 м/с.

- Определить амплитуду волны давления, отражающуюся от стыка С назад к закрытой регулируемой задвижке 2.
- Найти амплитуды волн, распространяющихся в частях трубопровода С-3, С-1 и С-4.
- Рассмотреть отражение в 1 (давление задано).
- Рассмотреть отражение волны на свободной поверхности уравнильного бассейна 4 (давление задано).
- Рассмотреть отражение волны в закрытых задвижках 2 и 3.

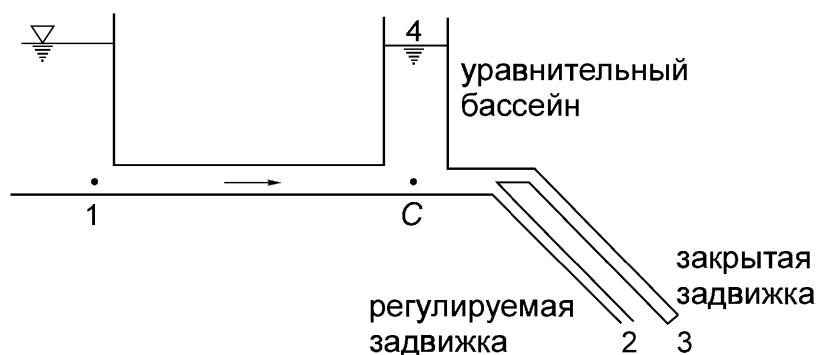


Рис. 14.12.22.

14.12.23. По длинному 1200 –метровому трубопроводу протекает стационарный поток воды со скоростью 1,4 м/с. Скорость волны гидравлического удара равна 900 м/с.

а) Определить подъем давления в приемнике давления, расположенного в управляемой задвижке, если течение воды перекрывается последней за 0,6 с.

б) Где расположена самая отдаленная точка трубы от управляемой задвижки, в которой достигается максимум давления?

14.12.24. Нефтепровод представляет собой стальную трубу с диаметром 300 мм и толщиной стенки 3,2 мм. Один конец трубы закреплен, второй – свободен. Вычислить подъем давления на каждом метре в секунду, если скорость потока внезапно падает до нуля от своего стационарного течения. Плотность равна 800 кг/м^3 , модуль объемной деформации $K_F = 1,4 \times 10^6 \text{ кН/м}^2$.

14.12.25. Стальной столб, имеющий массу 20 килограммов, вбивается в мягкий грунт на 0,05 м неупругим однократным ударом молота массой 50 кг. Сила удара эквивалентна падению молота в поле сил тяжести с высоты 2,5 м. Рассмотреть контактное усилие на грунт, остающееся конечным, при совместном движении столба и молота.

а) Какое количество энергии потеряно при неупругом ударе?

б) Как велико постоянное среднее значение сопротивления грунта?

14.12.26. Замкнутая и дважды симметричная система из четырех шарнирно соединенных стержней (каждый стержень имеет равномерно распределенную массу m и длину L) покоится на гладкой горизонтальной плоскости. К системе внезапно прикладывается импульс напряженностью S , действующий на один угол в направлении короткой диагонали ромба. Определить угловые скорости четырех стержней и скорость центра масс системы. Для получения уравнений Лагранжа использовать угол отклонения одного из стержней от диагонали и систему декартовых ортогональных координат в центре масс.

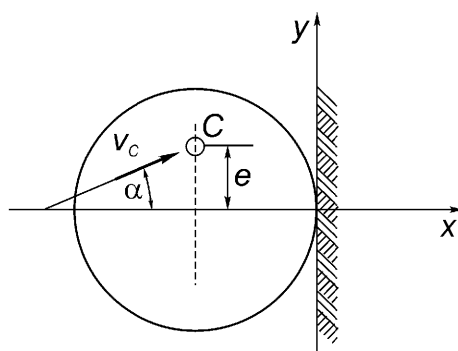


Рис. 14.12.27.

14.12.27. Жесткая неоднородная сфера радиуса R и массы m , центр масс C которой смещен в боковом направлении на расстояние e от геометрического центра, движется плоскопараллельно, причем $\mathbf{v}_C = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y$ и $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$. Сфера ударяется о гладкую жесткую стенку, расположенную при $x=0$ (рис. 14.12.27). Пренебрегая трением, определить поля скоростей сразу после упругого и неупругого ударов.

14.13. Динамика жидкости

14.13.1. Полный вертикальный потенциальный вихрь в несжимаемой жидкости совмещен со свободной поверхностью при постоянном давлении (рис. 14.13.1). Внутренность вихря заполнена воздухом или, на Ваше усмотрение, парами жидкости. Течение по круговым линиям тока является безвихревым. Используя универсальную постоянную Бернулли, определить форму свободной поверхности и получить уравнение изобарических поверхностей в цилиндрических координатах.

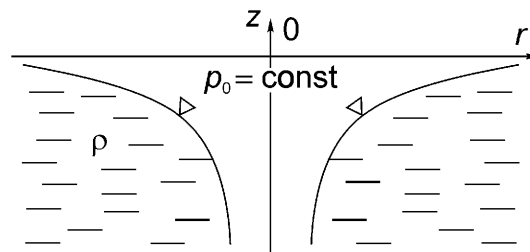


Рис. 14.13.1.

14.13.2. Потенциальный вихрь с вертикальной осью совмещается с жестким вращением ядра жидкости с радиусом $r \leq r_0$ и угловой скоростью ω_0 .

- Определить распределение скоростей.
- Вычислить давление в виде функции радиального расстояния.
- Найти круговые траектории частиц после поворота жесткого ядра на половину оборота, если в начальный момент частицы находились на горизонтальной линии.

14.13.3. Найти линии тока несжимаемого течения с помощью суперпозиции линейного источника (или стока) и потенциального (параллельного) вихря. Как называются в математике полученные кривые?

14.13.4. Определить результирующее несжимаемое стационарное течение с помощью суперпозиции параллельного потока в направлении оси x и потенци-

ального вихря, закрученного по часовой стрелке. Найти уравнение линии тока при стагнации и сравнить результат с представленным на рис. 13.13(b). Объяснить разницу в результатах в терминах циркуляции.

14.13.5. Вычислить подъемную силу течения, определенного в 14.13.4. Эффект обнаруживается при поступательном движении вращающихся цилиндров (эффект Магнуса) и используется для приведения в движение судов (ротор Флетнера).

14.13.6. Ньютоновская несжимаемая жидкость стационарным образом течет между двумя концентрическими круглыми трубами. Решить краевую задачу для уравнения Навье-Стокса для определения распределения скоростей и рассчитать потери, выраженные через гидростатический напор.

14.13.7. Вода течет через трубу, имея массовый расход 5 кг/с . При измеренных гидростатических давлениях $p_1 = 12 \text{ кПа}$, $p_2 = 11,5 \text{ кПа}$ и $p_3 = 10,3 \text{ кПа}$ определить потери напора между точками 1 и 2, а также между 1 и 3 (рис. 14.13.7). Будет течение ламинарным или турбулентным? Кинематическая вязкость равна $0,113 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

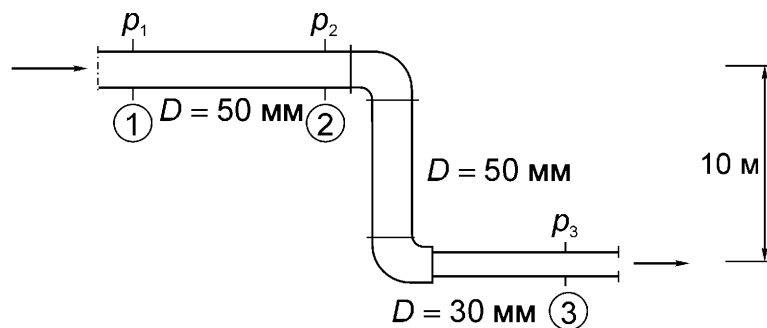


Рис. 14.13.7.

14.13.8. Рассмотреть ламинарное течение между двумя бесконечными параллельными плоскостями, как это было сделано в разделе 4.2.1. В данной задаче, однако, верхняя пластина движется вправо с постоянной скоростью U . Какими формулами описывается профиль скорости и потеря напора?

Указание: совместить ось x с дном канала и взять необходимые сведения из раздела 4.2.1.

14.13.9. Использовать уравнение Навье-Стокса для определения толщины пленки жидкости,двигающейся с постоянной скоростью при постоянной толщине вниз по бесконечной наклонной плоскости, в зависимости от скорости массового расхода на единицу ширины (рис. 14.13.9).

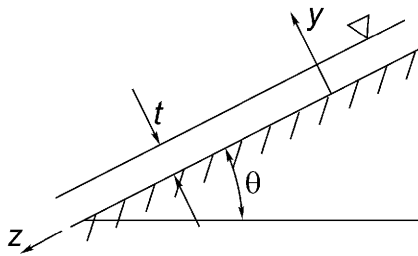


Рис. 14.13.9.

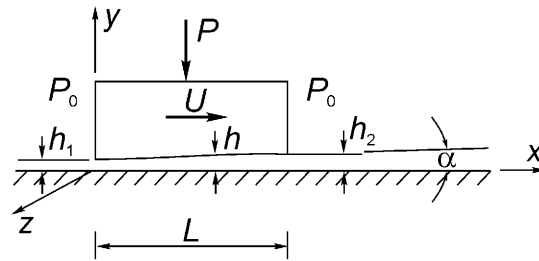


Рис. 14.13.11.

Указание: напряжения сдвига равны нулю на свободной поверхности.

14.13.10. Решить краевую задачу для уравнений Навье-Стокса, рассматривая вращательное течение между двумя бесконечными концентрическими цилиндрами, когда меньший цилиндр имеет угловую скорость ω_1 , а внешний – ω_2 . Объемными силами тяжести пренебречь.

14.13.11. Упрощающие предположения могут быть сделаны в гидродинамической теории смазки. Рассмотрим скользящий блок,двигающийся с постоянной скоростью над горизонтальной плоскостью (рис. 14.13.11). При $h_1 \leq h \leq h_2 \ll L$ пленка масла может считаться очень тонкой, поэтому применимо уравнение (13.18), если член $(-1/\rho) dp/dx$ добавить в правую часть. Пока $v \ll u$ и градиенты скорости имеют тот же порядок, второй член этого уравнения пренебрежимо мал. Рассмотреть полученное уравнение в безразмерной форме, так что $u^* = u/U$, $x^* = x/L$ и $y^* = y/h$, чтобы показать, что левая часть этого уравнения приблизительно равна нулю (обычно $Re = UL/v \leq 2,5 \times 10^4$ и $h/L < 0,001$).

а) Используя подвижную систему координат, найти как распределение скоростей $u(y)$ путем интегрирования полученного уравнения, так и скорость массового расхода.

б) Исключить градиент давления и определить скорость массового расхода.

в) Вычислить давление в виде функции $h(x)$.

г) Определить подъемную силу F_Q , действующую на скользящий блок на единицу его ширины.

14.13.12. Упорный подшипник с шестью зафиксированными опорными башмаками представлен на рис. 14.13.12, где показан только один башмак. При вращении вала со скоростью 6000 об/мин приближенно определить, какую максимальную нагрузку безопасно может нести данный подшипник. Утечкой смазки можно пренебречь, поэтому ее течение приближенно описывается результата-

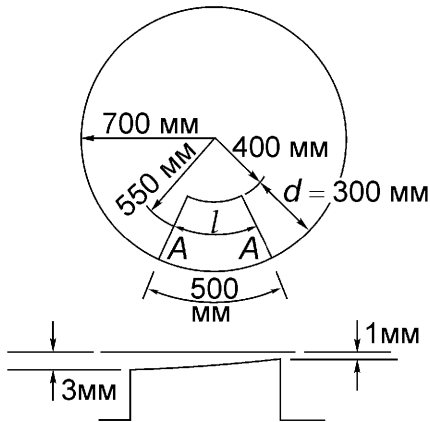


Рис. 14.13.12.

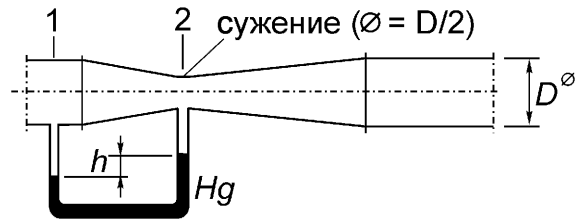


Рис. 14.13.14.

ми предыдущей задачи 14.13.11. Динамическая вязкость смазочного масла равна $0,1 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$.

14.13.13. Во время испытаний четырехлопастный главный винт вертолета вращается со скоростью 100 об/мин, причем лопасти расположены параллельно плоскости вращения. Каждая лопасть имеет длину 3,5 м и среднюю ширину 200 мм. Переход в условия обтекания, когда может рассматриваться пограничный слой, определяется числом Рейнольдса равным 10^6 , а воздух при 20°C имеет кинематическую вязкость $\nu = 1,70 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. Рассматривая только поверхностное сопротивление в приближении плоского пограничного слоя, определить мощность, необходимую для поддержания заданного вращения ротора.

14.13.14. Измеритель Вентури показан на рис. 14.13.14 как часть трубопровода, направляющего стационарный поток воды. U-образная трубка манометра дает показания в h мм ртутного столба. При заданных диаметре D трубопровода и диаметре горла $D/2$ получить формулу, связывающую скорость массового расхода несжимаемой жидкости с показаниями манометра.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица А

Некоторые средние значения механических параметров материалов

(Эти данные можно использовать для численных вычислений в иллюстративных примерах в тексте)

	Плотность, $\rho \times 10^{-3}$ кг / м ³	Модуль Юнга, $E \times 10^{-3}$ Н / мм ²	Коэффициент Пуассона, ν	Предел текучести, σ_y Н / мм ²	Линейный ко- эффициент температурно- го расширения, $\alpha \times 10^6$ м / м x К	Коэффици- ент темпера- туропровод- ности, $a = k / \rho c$ мм ² / с
Высоколе- гирован- ная сталь	7,85	210	0,3	240-750 (до 1650)	10-12	12,8
Сплав алюминия	2,8	71	0.35	30-270	25	60
Никель	8,8	197	0,3	140-750	13,3	15
Дерево ¹	0,3-0,7	11-15 ⊥ 0,4-1,1	0,3-0,45		5,4 ⊥ 34	0,1-0,4
Стекло	2,5	50-90	0,2-0,28	переход из вязкого состояния в хрупкое	3-10	0,3-0,5
Бетон	2,0	21 (для оценки)	0,16		10-12	0,3-0,5
Горная порода	2,5	35-90	0,15-0,30		8-12	0,8-1,5
Вода	≈1				-28 (0° С) 69 (20° С)	0,135 0,143
Нефть (20° С)	0,89-0,96				230	0,09
Воздух ²	$1,29 \times 10^{-3}$				(1/3Т) ≈1200	22

¹ Типичный анизотропный материал: || в направлении волокон, ⊥ - перпендикулярно волокнам

² Состояние при нормальных атмосферных условиях

Таблица Б

**Основные единицы измерения в США
и их эквиваленты в системе СИ**

Длина	in (дюйм)	25,40 мм
	ft (фут)	0,3048 м
	mi (миля)	1,609 км
Масса	lb (фунт)	0,4536 кг
	slug (слаг)	14,59 кг
	ton (малая тонна)	907,2 кг
Сила	kip (1000 фунтов силы)	4,448 кН
	lb force (фунт силы)	4,448 Н
Напряжения	psi (фунтов на квадратный дюйм)	6,895 кПа 1 Па = 1 Н / м ²
Энергия, мощность	hp (лошадиная сила)	745,7 ватт 1 ватт-с = 1 джоуль = 1 Нм

Приставки в системе СИ

Степени от 10	Название	Сокращенное обозначение
9	Giga (Гига)	G (Г)
6	Mega (Мега)	M (М)
3	Kilo (Кило)	k (к)
2	Hecto (Гекто)	h (г)
1	Deca (Дека)	da (да)
-1	Deci (Деци)	d (д)
-2	Centi (Сант)	c (с)
-3	Milli (Милли)	m (м)
-6	Micro (Микро)	μ (мк)
-9	Nano (Нано)	n (н)

Пример: $10^{-2} \text{ м} = 1 \text{ см}$ ($10^{-2} \text{ м} = 1 \text{ см}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

Журналы

Applied Mechanics Reviews (AMR), ASME, New York.
Journal Applied Mechanics, ASME Quarterly Transactions, New York.
ZAMM, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin.
Ingenieur-Archiv, Springer-Verlag, Berlin.
Acta Mechanica, Springer-Verlag, Wien.
International Journal of Solids and Structures, Pergamon Press, Oxford.
Journal of Fluid Mechanics, University Press, Cambridge.

Монографии и обзоры

Advances in Applied Mechanics, Academic Press, New York.
Mechanics Today, Pergamon Press, Oxford.
Progress in Solid Mechanics, North-Holland, Amsterdam.
Szabo I. Geschichte der mechanischen Prinzipien. Basel, Birkhäuser, 1979.
Todhunter I. and Pearson K. A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials. Reprint. New York, Dover, 1960.
Timoshenko S.P. History of Strength of Materials. Reprint. New York, Dover, 1983. Перевод: Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М., Гостехиздат, 1957.
Benvenuto E. An Introduction to the History of Structural Mechanics (Volumes I and II). New York, Springer-Verlag, 1991.
Morse P.M. and Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. New York, McGraw-Hill, 1953. Перевод: Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики (тома I и II). М., ИЛ, 1960.
Flügge S. (Ed.) Handbook of Physics. Volumes III / 1, 3; VIa / 1, 2, 3, 4; VIII / 1, 2; IX. Berlin, Springer-Verlag.
Flügge W. (Ed.) Handbook of Engineering Mechanics. New York, McGraw-Hill, 1962.
Streeter V.L. (Ed.) Handbook of Fluid Dynamics. New York, McGraw-Hill, 1961.
Harris O.M. and Crede C.E. (Eds.) Shock and Vibration Handbook. New York, McGraw-Hill, 1988.
Achenbach J. (General Ed.) Mechanics and Mathematical Methods. A Series of Handbooks. Amsterdam, North-Holland (since 1983).
Proceedings of the IUTAM-Congresses and Symposia.
Proceedings of the US-National Congresses on Applied Mechanics.
CISM-Courses and Lectures. Wien, Springer-Verlag.

* Работы на русском языке, рекомендованные редактором перевода, приведены на с. 734-736.

- Newmark N.M. and Rosenblueth E. Fundamentals of Earthquake Engineering. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1971. Перевод: Ньюмарк Н.М., Розенблюэт Э. Основы сейсмостойкого строительства. М., Стройиздат, 1980.
- Brebbia C.A. (Ed.) Finite Element Systems. A Handbook. New York, Springer-Verlag, 1982. См. также: Коннор Дж., Бреббия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л., Судостроение, 1979.
- Schielen W. (Ed.) Multibody Systems Handbook. Berlin, Springer-Verlag, 1990.
- Blevins R.D. Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. New York, Van Nostrand Reinhold, 1979.
- Leissa A.W. Vibration of Plates, SP-160 (1969). Vibration of Shells, SP-288 (1973). Washington, NASA.
- Young W.C. ROARK's Formulas for Stress and Strain. New York, McGraw-Hill, 6th ed., 1989.
- Hütte. Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften. Czichos H. (Ed.), Berlin, Springer-Verlag, 29. Auflage, 1989. См. также: Хютте. Справочная книга для инженеров, архитекторов, механиков и студентов. Тома I - II. Издание 11 (перевод с 25 немецкого издания). М.-Л., Гостехиздат, 1931.
- Dubbels Taschenbuch für den Maschinenbau. Beitz W. und Küttner K.H. (Red.), Berlin, Springer-Verlag, 17. Auflage, 1990.
- Beton-Kalender. Ernst & Sohn, Berlin.
- Moon P. and Spencer D.E. Field Theory Handbook. Berlin, Springer-Verlag, 1971.
- Abramowitz M. and Stegun I.A. (Eds.) Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover, 1965. Перевод: Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., Мир, 1979.
- Bronstein I.N. und Semendjajew K.A. Taschenbuch der Mathematik. 2 Bände, Frankfurt/M, 1980. Оригинал: Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., Наука, 1986.
- Doetsch G. Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. München, Oldenbourg, 1961. Перевод: Дойч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., Наука, 1965.

Рекомендуемые работы

- Etkin B. Dynamics of Flight. New York, Wiley, 1959.
- Fraeijs de Veubeke B.M. A Course in Elasticity. New York, Springer-Verlag, 1979.
- Fung Y.C. Foundations of Solid Mechanics. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1965.
- Guderley K.G. Theorie schallnaher Strömungen. Berlin, Springer-Verlag, 1957. Перевод: Гудерлей К.Г. Теория околосзвуковых течений. М., ИЛ, 1960.
- Hoff N.J. The Analysis of Structures. New York, Wiley, 1956. См. также: Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. М., ИЛ, 1955.
- Malvern L.E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1969.
- Moon F.C. Chaotic Vibrations. New York, Wiley, 1987. Перевод: Мун Ф. Хаотические колебания. М., Мир, 1990.
- Oswatitsch K. Grundlagen der Gasdynamik. Wien, Springer-Verlag, 1976. См. также: Осватич К., Шварцербергер Р. Сборник задач и упражнений по газовой динамике. М., Мир, 1967.
- Oswatitsch K. Spezialgebiete der Gasdynamik. Wien, Springer-Verlag, 1977.
- Panton P.L. Incompressible Flow. New York, Wiley, 1984.
- Rolfe S.T. and Barson U.M. Fracture and Fatigue Control in Structures. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1977.

Rouse H. Fluid Mechanics of Hydraulic Engineers. Reprint. New York, Dover, 1961. Перевод: Рауз Х. Механика жидкостей для инженеров-гидротехников. М.-Л., Госэнергоиздат, 1958. См. также: Рауз Х. Механика жидкостей. М., Стройиздат, 1967.

Schlichting H. Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe, Braun, 1965. Перевод: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974.

Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. New York, Academic Press, 1964.

Глава 1

Beyer R. Technische Raumkinematik. Berlin, Springer-Verlag, 1963. См. также: Бейер Р. Кинематический анализ механизмов. Киев-М., Машгиз, 1959.

Rauh K. Praktische Getriebelehre. Bände I und II. Berlin, Springer-Verlag, 1951 und 1954.

Wunderlich W. Ebene Kinematik. Bände 447/447a. Mannheim, Bibliographisches Institut, 1970.

Eringen A.C. Nonlinear Theory of Continuous Media. New York, McGraw-Hill, 1962.

Prager W. Introduction to Mechanics of Continua. Reprint. New York, Dover, 1973. Перевод: Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М., ИЛ, 1963.

Глава 2

Pflüger A. Statik der Stabwerke. Berlin, Springer-Verlag, 1978.

Sattler K. Lehrbuch der Statik. Bände I/A - II/B. Berlin, Springer-Verlag, 1969.

Stüssi F. Vorlesungen über Baustatik. Band 1. Basel, Birkhäuser, 1962.

Girkmann K. und Königshofer J. Die Hochspannungs-Freileitungen. Wien, Springer-Verlag, 1952.

Czitary E. Seilschwebbahnen. Wien, Springer-Verlag, 1951.

Глава 4

Bland D.R. The Theory of Linear Viscoelasticity. Oxford, Pergamon Press, 1960. Перевод: Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М., Мир, 1965.

Desai C.S. et al. (Eds.) Constitutive Laws for Engineering Materials. Theory and Applications. Vol. 1 (1982), Vol. 2 (1987). New York, Elsevier.

Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, Clarendon Press, 1956; Oxford, University Press, 1983. Перевод: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956; М., Физматгиз, 1965.

Hull J. Creep in Engineering Structures. Waltham, Mass., Blaisdell, 1966.

Lekhnitskii S.G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. San Francisco, Holden-Day, 1963. Оригинал: Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.

Lippmann H. Mechanik des Plastischen Fließens. Berlin, Springer-Verlag, 1981.

Lubliner L. Plasticity Theory. New York, Macmillan Publ., 1992.

Odqvist F.K.G. and Hull J. Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Berlin, Springer-Verlag, 1962.

Stüwe H.P. (Ed.) Mechanische Anisotropie. Wien, Springer-Verlag, 1974.

Zeman J.L. and Ziegler F. (Eds.) Topics in Applied Continuum Mechanics. Wien, Springer-Verlag, 1974.

Глава 5

Langhaar H.L. Energy Methods in Applied Mechanics. New York, Wiley, 1962.

Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford, Pergamon Press, 1974. Перевод: Васидзу К. Вариационные принципы в теории упругости и пластичности. М., Мир, 1987.

Глава 6

- Timoshenko S.P. and Goodier J.N. Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1970. Перевод: Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., Наука, 1979.
- Sokolnikoff I.S. Mathematical Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1956.
- Carslaw H.S. and Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids. Oxford, Clarendon Press, 1959. Перевод: Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
- Schuh H. Heat Transfer in Structures. Oxford, Pergamon Press, 1965.
- Boley B.A. and Weiner J. Theory of Thermal Stresses. New York, Wiley, 1960. Перевод: Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М., Мир, 1964.
- Hetnarski R.B. (Ed.) Thermal Stresses. 3 Volumes. Amsterdam, North-Holland, 1989.
- Parkus H. Thermoelasticity. Wien, Springer-Verlag, 1976.
- Szilard R. Theory and Analysis of Plates. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1974. См. также: Сциллард Р. Расчет большепролетных оболочек произвольной формы с учетом геометрической нелинейности и нелинейности материала. М., Стройиздат, 1966.
- Girkmann K. Flachentragwerke. Wien, Springer-Verlag, 1963.
- Timoshenko S.P. and Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. New York, McGraw-Hill, 1959. Перевод: Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1966.
- Flügge W. Stresses in Shells. Berlin, Springer-Verlag, 1962.
- Goldeneiser A.L. Theory of Thin Elastic Shells. Oxford, Pergamon Press, 1961. Оригинал: Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Наука, 1976.
- Seide P. Small Elastic Deformations of Thin Shells. Leyden, Noordhoff, 1975.
- Axelrad E. Schalentheorie. Stuttgart, Teubner, 1983. См. также: Аксельрад Э.Л. Гибкие оболочки. М., Наука, 1976.
- Neuber H. Kerbspannungslehre. Berlin, Springer-Verlag, 1958. См. также: Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.-Л., 1947.
- Liebowitz H. (Ed.) Fracture. An Advanced Treatise. Vol. I to VII. New York, Academic Press, 1968-1972. Перевод: Либовиц Г. (редактор). Разрушение, тома I - VII. М., Мир, 1973-1976.
- Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids. New York, McGraw-Hill, 1952. Перевод: Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Том I, М., ИЛ, 1954. Том II, М., Мир, 1969.
- Peterson R.E. Stress Concentration Factors. New York, Wiley, 1974.

Глава 7

- Kane T.R. and Levinson D.A. Dynamics: Theory and Applications. New York, McGraw-Hill, 1985.
- Wittenburg J. Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart, Teubner, 1977. Перевод: Виттенбург И. Динамика систем твердых тел. М., Мир, 1980.
- Slibar A. and Springer H. (Eds.) The Dynamics of Vehicles. Proceedings of the 5th VSD-2nd IUTAM-Symposium. Amsterdam, Swets and Zeitlinger, 1978.
- Bianchi G. and Schiehlen W. (Eds.) Dynamics of Multibody Systems. Proceedings of the IUTAM-Symposium. Berlin, Springer-Verlag, 1986.
- Schiehlen W. (Ed.) Nonlinear Dynamics in Engineering Systems. Proceedings of the IUTAM-Symposium. Berlin, Springer-Verlag, 1990.
- Rimrott F.P.J. Introductory Orbit Dynamics. Braunschweig, Vieweg, 1989.
- Timoshenko S.P., Young D.H. and Weave W. Vibration Problems In Engineering. New York, Wiley, 1974. Перевод: Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М., Машиностроение, 1985.

- Den Hartog J.P. Mechanical Vibration. New York, McGraw-Hill, 1956. Перевод: Ден Гартог Дж.П. Механические колебания. М., Физматгиз, 1960.
- Meirovitch L. Elements of Vibration Analysis. New York, McGraw-Hill, 1975.
- Clough R.W. and Penzien J. Dynamics of Structures. New York, McGraw-Hill, 1975. Перевод: Клаф Р.В., Пензиен Дж. Динамика сооружений. Стройиздат, 1979.
- Hurty W.C. and Rubinstein M.F. Dynamics of Structures. Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1964.
- Yang C.Y. Random Vibrations of Structures. New York, Wiley, 1986.
- Pestel E.C. and Leckie F.L. Matrix Methods in Elastomechanics. New York, McGraw-Hill, 1963.
- Magrab E.B. Vibrations of Elastic Structural Members. Alphenaan der Rijn, Sijthoff & Noordhoff, 1979.
- Schmidt G. Parametererregte Schwingungen. Berlin, VEB Verlag Technik, 1975. Перевод: Шмидт Г. Параметрические колебания. М., Мир, 1978.
- Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam, North-Holland, 1975.
- Ewing W.M., Jardetsky W.S. and Press F. Elastic Waves in Layered Media. New York, McGraw-Hill, 1957.
- Rao Y.H. and Mow C.C. Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations. New York, Crane, Russak, 1973.

Глава 9

- Ziegler H. Principles of Structural Stability. Blaisdell, Waltham, Mass., 1968.
- Dym C.L. Stability Theory and its Application to Structural Mechanics. Leyden, Noordhoff, 1974.
- Müller P.C. Stabilität und Matrizen. Berlin, Springer-Verlag, 1977.
- Home M.R. Plastic Theory of Structures. Oxford, Pergamon Press, 1979.
- Zyczkowski M. Combined Loadings in the Theory of Plasticity. Cracow, PWN-Polish Scientific Publisher, 1981.
- Doweli E.H. (Ed.) A Modern Course in Aeroelasticity. Dordrecht, Kluwer Academic Press, 1989.

Глава 10

- Hamel G. Theoretische Mechanik. Berlin, Springer-Verlag, 1949.
- Päsler M. Prinzipie der Mechanik. Berlin, De Gruyter, 1968.
- Goldstein H. Classical Mechanics. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1981. Перевод: Голдстейн Г. Классическая механика. М., Наука, 1975.

Глава 11

- Biezeno C.V. und Grammel R. Technische Dynamik. Berlin, Springer-Verlag, 1953. Перевод: Бицено К.Г., Граммель Р. Техническая динамика, М.-Л., ГИТТЛ, 1950 и 1952.
- Meirovitch L. Computational Methods in Structural Dynamics. Groningen, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- Fryba L. Vibrations of Solids and Structures under Moving Loads. Groningen, Sijthoff & Noordhoff, 1972.
- Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin, Springer-Verlag, 1958. Перевод: Каудерер Г. Нелинейная механика. М., ИЛ, 1961.
- Stoker J.J. Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems. New York, Wiley, 1950. Перевод: Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., ИЛ, 1952.

Глава 12

Goldsmith W. Impact. The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids. London, Arnold, 1960. Перевод: Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М., Стройиздат, 1965.

Глава 13

Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge, University Press, 1932. Перевод: Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.

Landau L.D. and Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Oxford, Pergamon Press, 1959. Оригинал: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, М., Наука, 1985.

Kotschin N.J., Kibel I.A. und Rose N.W. Theoretische Hydromechanik. Berlin, Akademie Verlag. Band I, 1954. Band II, 1955. Оригинал: Кочин Н.Е., Кибель И.Я., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, тома I и II. М., Физматгиз, 1963.

Betz A. Kontorme Abbildung. Berlin, Springer-Verlag, 1964.

Schneider W. Mathematische Methoden der Strömungsmechanik. Braunschweig, Vieweg, 1978.

Ashley H. and Landahl M. Aerodynamics of Wings and Bodies. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1965. Перевод: Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1969.

Launders B.E. and Spalding D.B. Mathematical Models of Turbulence. New York, Academic Press, 1972.

Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. New York, Wiley, 1974.

Bisplinghoff R.L., Ashley H. and Halfmann R.L. Aeroelasticity. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1965. Перевод: Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л. Аэроупругость. М., ИЛ, 1958.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ*

- Адиабатическое состояние 91
Адмиттанс 645
Аксиальная сила 117, 159
Аксиальные моменты 75, 115
Аксиальный момент инерции 110
Аксиома Больцмана (*Boltzmann L.*) 423
Амортизатор (демпфер) 210, 603
Амплитуда 450, 451, 592
Аналогия Мора (*Mohr O.C.*) 398
Аналогия по Гринхиллу (*Greenhill A.G.*) 333
Аналогия упругости и вязко-упругости
Алфрея (*Alfrey T.*) 387
Аналогия упругости и вязко-упругости Ли
(*Lee E.H.*) 387
Аналогия Хоффа (*Hoff N.J.*) 219
Анизотропия 201
Асимптотическая устойчивость 603
- Базисные векторы 187
Балка Бернулли (*Bernoulli J.*)-Эйлера (*Euler L.*) 262
Балка 114, 244, 260, 285, 604, 618, 623, 628, 644, 647, 668
Балка, работающая на сдвиг 399
Балочный механизм 564
Бар 88
Барометр 89
Барометрическая формула 91
Баротропная жидкость 90, 185, 504, 680, 690
Безвихревое векторное поле 176
Безвихревое течение 25, 42, 712
Безразмерные координаты 698
- Бесконечная пластина с круговым отверстием 357
Бесконечная полюса 408
Бетон 203
Бигармоническое уравнение пластины 363
Бигармоническое уравнение 271, 350
Биения 460, 592
Билинейная модель 225
Бифуркация 533, 537, 550, 576
Болты, работающие на растяжение 393
Большие вращения 49
Бурун 572
Быстрое преобразование Фурье (*Fourier J.B.J.*) 456
Быстрое течение 572
Быстрота 573
- Вал с прямоугольной канавкой 332
Вал 490
Вектор вихря 26, 690
Вектор напряжений Коши (*Cauchy A.L.*) 59
Вектор напряжений 59
Вектор перемещения 2, 16, 17, 477
Вектор поляризации 478
Вектор скорости 3, 587
Вектор состояния 457, 636
Вектор ускорения 4, 11
Вектор-момент 74, 76, 78
Векторное преобразование 36
Векторный потенциал магнитного поля 589
Векторный потенциал 707
Веревочная кривая 347
Веревочный многоугольник 79, 131, 133, 299

* Цифры обозначают номера страниц

- Вертикальная свободная струя 525
Вертикальное ускорение 5
Вертикальный полет 431
Верхняя граница 566
Вершина трещины 408
Взаимодействие жидкости и твердого тела 723
Вибратор 607
Винт 164
Вириал силы 717
Виртуальная работа 235, 264, 266, 586
Виртуальное перемещение 235, 585
Вихревой центр 715
Внешняя статическая неопределимость 145
Внутреннее и внешнее давление 273
Внутренняя сила 115
Внутренняя энергия 179, 521
Вода 55, 91, 207
Водяная турбина 518
Возбуждение опорой 467
Возбуждение резонансной частотой 460
Возвращающий момент 536
Возвращающий момент 536
Воздух 91
Воздушная турбина 485
Воздушный винт 485
Возмущенное движение 575
Волна давления 682, 851
Волна напряжений 677
Волновая зона 573
Волновое уравнение 477, 490, 676, 681
Волновое число 494
Волны $P(unda\ prima)$ 477
Волны $S(unda\ secunda)$ 477
Вращательная энергия 498
Вращающаяся система координат 438
Вращающееся твердое тело 445
Вращающиеся толстостенные валы 356
Вращающийся диск 356
Вращение твердого тела 727
Время запаздывания 212
Время релаксации 214
Вторая кривизна 8
Второе колебание 599
Вызванные скорости 715
Вынужденные изгибные колебания 642
Вынужденные колебания 452, 599, 654
Высота метацентра 107
Вязкая жидкость 719, 731
Вязкие сдвиги 701
Вязкий рост поперечного сечения 391
Вязкое тело 216
Вязкое течение 435, 484, 508
Вязко-упругий образ по Лапласу (*Laplace P.S.*) 388
Газовая постоянная 91
Гармоническая функция времени 451
Гармонические колебания 212
Гармонический баланс 636
Гармоническое приближение 637
Гаситель колебаний 471, 608
Гектопаскаль 88
Геометрическая поправка 621
Геометрические соотношения 16, 52
Геометрический коэффициент коррекции 294
Герметизирующая прокладка 394
Гибкость стержня 548
Гидравлическая арка 731
Гидравлический скачок 572
Гидравлический удар 683, 850
Гидравлическое манометрическое давление 166, 168
Гидродинамическая аналогия 333
Гидродинамическая связь 730
Гидродинамическое давление 723, 729
Гидростатический парадокс 97

- Гидростатическое давление 376, 412
- Гидростатическое напряженное состояние 71, 88, 185
- Гиперболы 709
- Гипотеза Бернулли (*Bernoulli J.*)-Эйлера (*Euler L.*) 245, 286, 473
- Гипотеза Генки (*Hencky G.*) – Мизеса (*von Mises R.*) 284
- Гипотеза Кирхгоффа (*Kirchhoff G.*) 247
- Гипотеза Кирхгоффа (*Kirchhoff G.*) 360
- Гипотеза Кулона (*Coulomb C.A.*) 285
- Гипотеза Мора (*Mohr O.C.*) 285
- Гипотеза напряжений Мора (*Mohr O.C.*) – Кулона (*Coulomb C.A.*) 284
- Гипотезы напряжений 283
- Гирокомпас Фуко (*Foucault J.B.L.*) 445
- Гироскопические уравнения Эйлера (*Euler L.*) 438
- Главная кривизна 8
- Главное колебание 599
- Главные деформации 37, 55
- Главные жесткости при изгибе 393
- Главные координаты 601
- Главные нормальные напряжения 66
- Главные оси деформации 37
- Годограф 4, 5
- Головка цилиндра 393
- Гравитационная постоянная 178
- Гравитационное поле 5
- Гравитация (поле силы тяжести) 57, 89, 462
- Градиент деформации 17, 18
- Градиент температуры 396
- Градиент 25, 26, 27, 175
- Градиенты большой деформации 51
- Граничные условия Дирихле (*Dirichlet G.P.*) 491
- Граничные условия 26, 246, 294
- Гуковская (*Hooke R.*) двойная фаза 226
- Гуковская (*Hooke R.*) пружина 268
- Гуковское (*Hooke R.*) тело 194, 476
- Давление застоя 506
- Давление торможения 695
- Давление 87, 168
- Датчики деформации 55
- Движение основания 646
- Движение по траектории 5
- Движение твердого тела 44, 517
- Движущаяся контрольная поверхность 421
- Движущаяся сила 642
- Движущаяся система отсчета 423, 487, 517
- Двойное векторное произведение 436
- Двойной ряд Фурье (*Fourier J.B.J.*) 366
- Двуглавое поперечное сечение 405
- Двуглавые балки 141
- Двухосный изгиб 123, 392
- Двухпролетная балка 134, 242, 256, 413
- Двухфазная модель твердого тела 211
- Двухфазное течение 703
- Двухфазный материал 213
- Девиатор деформаций 22
- Девиатор деформаций 22, 195, 204
- Девиатор напряжений 71, 195, 212
- Девиаторный момент 98, 111
- Декомпозиция Гельмгольца (*Helmholtz H.*) 477, 492
- Дельта-функция Дирака (*Dirac P.A.M.*) 135, 212, 398
- Демпфирование гистерезисного типа 447
- Демпфирование 212
- Демпфирующая кулоновская (*Coulomb C.A.*) сила 464
- Дестабилизирующее воздействие 577
- Деформации Грина (*Green J.*) 187, 192
- Деформации 16, 18, 19
- Деформационное упрочнение 226
- Деформация искажений 228
- Деформация ползучести 217, 389

- Деформация 16
Деформируемое тело 15
Джоуль 171
Диаграмма Блейка (*Blake*) 452
Диаграмма Кремоны (*Cremona L.*) 146, 161, 162
Диаграмма равновесия сил 122, 144
Диаграмма расхода 574
Диаграмма скоростей 28, 29
Дивергенция 42
Дилатация (объемное расширение) 21, 184, 195, 271
Динамическая балансировка 445
Динамическая вязкость 206, 209
Динамическая матрица 601, 657
Динамическая модель грунта 607
Динамическая неустойчивость 574
Динамическая реакция 427
Динамическая функция Грина (*Green G.*) 644
Динамические испытания 603
Динамический критерий устойчивости 532
Динамический феномен 453
Динамическое давление 506
Диполь 714
Диск 355, 797
Дискретный спектр 455
Диссипация кинетической энергии 671
Диссипированная энергия (работа) 234, 562, 701
Дифференциальное уравнение Матье (*Mathieu E.*) 597
Дифференциальное уравнение прогиба 245
Дифференциальное уравнение типа уравнения Эйлера (*Euler L.*) 406
Дифференциальный оператор Гамильтона (*Hamilton W.R.*) 24
Диффузия вихря 731
Диффузор 436, 516
Дополнительная виртуальная работа 250
Дополнительная энергия 181, 252, 263, 269, 275, 278, 294, 351, 364
Допустимые напряжения 157, 285
Дорожка Кармана (*von Karman Th.*) 720
Дренажная труба 513
Дробильный ролик 12
Единица длины 715
Естественные координаты 7, 35
Железобетонная конструкция 232
Жесткая поперечина 395
Жесткий угол рамы 344
Жесткое основание 590
Жестко-пластическое тело 222
Жесткость на закручивание 620
Жесткость при кручении (крутильная жесткость) 199, 308, 317, 327, 328, 332, 405, 626, 843
Жесткость при растяжении 197
Жесткость 182, 192, 411, 483
Жидкая (материальная) линия 689
Жидкостное трение 206
Жидкость Максвелла (*Maxwell J.C.*) 213, 227, 388
Задача Буссинеска (*Boussinesq J.V.*) 333, 354, 385, 413, 804
Задача Фламана (*Flamant A.*) 803
Задачи устойчивости по Клеппелю (*Killöppel K.*) и Ли (*Lee K.*) 550
Заделанная балка 279
Зажим 259
Закон вязко-пластичности Пежины (*Perzyna P.*) 230
Закон Гука (*Hooke R.*) в форме Ламе (*Lame G.*) 195
Закон Гука (*Hooke R.*) 182, 183, 184, 195, 201, 204, 214, 215, 227, 228, 273, 634

- Закон движения Ньютона (*Newton I.*) 415
- Закон движения 6, 7
- Закон Кулона (*Coulomb C.A.*) 63, 221, 439, 502
- Закон Ньютона (*Newton I.*) для гравитации 32
- Закон равенства действия и противодействия по Эйлеру (*Euler L.*) и Коши (*Cachy A.L.*) 62
- Закон теплопроводности Фурье (*Fourier J.B.J.*) 386, 521
- Закон течения Мизеса (*von Mises R.*) 223
- Закон течения 222
- Закон Хагена (*Hagen G.*)–Пуазейля (*Poiseuille J.*) 701
- Законы Кеплера (*Kepler J.*) 31
- Закрепление оси 674, 847
- Закручивание 307
- Замедленность 3, 7
- Заменяющая система с конечным числом степеней свободы 611
- Запаздывающая упругость 211
- Затухающая память 452
- Защемленная пластина 728
- Защемленный на обоих концах стержень 548
- Звуковая волна 477
- Землетрясение 646, 721
- Земля 33, 57, 178
- Зона контакта 383
- Зона текучести 558
- Идеализированная теория удара 661
- Идеализированная ферма 182
- Идеальная жидкость 503
- Идеальная турбина 520
- Идеальный газ 91, 724
- Избыточные внутренние силы 145
- Изгибающий момент 117, 121, 123, 132, 160, 277, 343, 372, 373
- Изгибная жесткость 197
- Изгибное возмущение 372, 374
- Изгибные колебания 501, 623
- Изгибные колебания 619, 628, 641, 648
- Изгибные напряжения 140
- Изменение кинетической энергии 496
- Изменение количества движения 419, 661, 681
- Измеритель Вентури (*Venturi D.B.*) 857
- Изогнутые стержни переменного сечения 648
- Изолинии напряжений 328, 354
- Изоляция колебаний 453
- Изотропное гуковское (*Hooke R.*) твердое тело 184
- Изохорический процесс деформации 222
- Импульс 419, 662
- Импульсный момент 425
- Инварианты 70
- Инерционная нагрузка 501
- Инерционная система отсчета 416
- Интеграл в виде свертки 217
- Интеграл свертки Дюгамеля (*Duhamel J.M.K.*) 456
- Интеграл Фурье (*Fourier J.B.J.*) 352, 455
- Интегралы гидродинамических уравнений Гельмгольца (*Helmholtz H.*) 689
- Интегральная теорема Гаусса (*Gauss C.F.*) 41, 179, 235, 251, 418, 422
- Интегральная теорема Стокса (*Stokes G.G.*) 691
- Исследования по ползущим течениям Озеена (*Oseen C.W.*) 697
- Кавитация 435, 519, 683
- Канатный шкив 440
- Каноническое представление 23, 151

- Касательная жесткость 639
- Касательное напряжение кручения 118, 142
- Касательные напряжения на примыкающих площадках 83
- Касательные напряжения 60, 66, 69, 254, 288
- Касательный модуль 92, 204, 234, 549
- Качение без проскальзывания 588, 674
- Квадратный ящик 142
- Квазистатический прогиб 467
- Киловатт-час 172
- Килограмм 39
- Кинематическая вязкость 209
- Кинематически допустимое состояние пластического деформирования 562
- Кинематически определенная система 335
- Кинематические волны 43
- Кинематический метод 241, 242
- Кинематическое ограничение 173
- Кинетика 415
- Кинетическая энергия поступательного движения 498
- Кинетическая энергия 495, 587, 611, 618, 620, 621, 622, 665, 666, 668
- Клиновидный ремень 163
- Колебания с демпфированием 489
- Колено 427
- Колесо без спиц 349
- Колесо Пельтона (*Pelton*) 429
- Колесо 12, 14, 439, 479
- Количество движения 419
- Колокольная башня 464
- Комплексная скорость 709
- Комплексные модули 388
- Комплексные числа с единичным модулем 450
- Комплексный модуль сдвига 212, 214, 215, 216
- Комплексный модуль Юнга (*Young Th.*) 389
- Комплексный потенциал 709
- Композитная балка 400
- Композиционная балка 802
- Композиционная пластина 794, 826
- Компоненты сдвиговой деформации 37, 55, 342
- Конвективное ускорение 24, 35
- Коническая оболочка 412
- Коническое сечение 33
- Консервативная система 176, 243, 497
- Консольная балка 125, 129, 131, 133, 146, 258, 260, 261, 282, 295, 297, 319, 392, 396, 490, 548, 684, 685, 801
- Константа Ламе (*Lame G.*) 447
- Конструкция крыши 411, 605, 606
- Контакт 381
- Контактная сила 443
- Контактное давление 384
- Континуум Коссера (*Cosserat E. and F.*) 83
- Континуум 39
- Контрольная поверхность 40, 43, 421, 679
- Контрольное уравнение 554
- Контрольный объем 40, 421, 520, 522, 693
- Конус статического трения 63
- Конусообразная труба 45
- Конусообразный туннель 527
- Конфигурационная плоскость 80
- Конфигурационные координаты 238
- Концентрация напряжений 310
- Косая зубчатая передача 13
- Косой изгиб 123, 278, 289, 649
- Коэффициент выпучивания 548
- Коэффициент демпфирования (сопротивления) 449, 605
- Коэффициент динамического усилия 452, 644, 676, 685, 817, 850
- Коэффициент динамической нагрузки 417
- Коэффициент жесткости деформации 321
- Коэффициент запаса прочности 285

- Коэффициент концентрации напряжений 331, 407
- Коэффициент концентрации напряжений 359, 407
- Коэффициент критической нагрузки 533
- Коэффициент критической нагрузки 552, 653
- Коэффициент нагрузки 539, 550
- Коэффициент передачи (передаточное отношение) 13, 30
- Коэффициент подъемной силы 695
- Коэффициент потерь 573
- Коэффициент Пуассона (*Poisson S.D.*) 185, 195
- Коэффициент сопротивления на единицу толщины 706
- Коэффициент сопротивления 699, 706, 720
- Коэффициент сопротивления 701
- Коэффициент статического трения 63
- Коэффициент температурного расширения 275
- Коэффициент температуропроводности 387
- Коэффициент теплопроводности 386
- Коэффициент трения 727
- Коэффициент увеличения 310
- Коэффициент участия 645, 647
- Коэффициент формы 359
- Коэффициенты влияния 184, 268, 269, 298, 600
- Коэффициенты температурной нагрузки 397
- Краевая задача Дирихле (*Dirichlet G.P.*) 583
- Крановая конструкция 159
- Кривая Велера (*Wöhler A.*) 566
- Кривизна за счет деформации сдвига 294
- Кривизна за счет изгибающего момента 278
- Кривизна 244, 246, 278, 294
- Криволинейная (искривленная) балка 119, 254, 344
- Кривошипный механизм 28, 241
- Критерий Гурвица (*Hurwitz A.*) 555
- Критерий текучести Треска (*Tresca H.E.*) 224
- Критерий устойчивости Дирихле (*Dirichlet G.P.*) 532, 535, 577, 626
- Критическая нагрузка 538, 545, 548, 566, 581, 583, 626
- Критическая нагрузка 652
- Критическая растягивающая сила 580
- Критическая скорость полета 576
- Критическая скорость 643
- Критическая частота вынуждающей силы 452
- Критические угловые скорости 490, 491
- Критический напор 571
- Критический угол 543
- Критическое давление 568, 724
- Критическое соотношение давлений 724
- Критическое число Рейнольда (*Reynolds O.*) 702, 706
- Круг Мора (*Mohr O.C.*) 38, 55, 71, 72, 112, 285, 353, 360
- Круг напряжений Мора (*Mohr O.C.*) 60, 66
- Круглая мембрана 491
- Круглая пластина 365, 410, 583, 622, 653, 699, 798, 830
- Круглое кольцо 347
- Круглое поперечное сечение 329
- Круглый диск 406
- Круглый цилиндр 699
- Круговая арка 123
- Круговая траектория 480
- Круговая труба 142
- Крутильные колебания 481, 490, 607, 619
- Крутильный осциллятор с одной степенью свободы 620
- Крутящий момент 118, 141, 160, 308, 317, 321, 360
- Кручение по Сен-Венану (*Saint-Venant A.J.K.B.*) 307, 620
- Кручение 141, 255

- Крыло 574
Крылья с конечным размахом 695
Крыша 160
Крюк 344
Кубический закон нелинейности 203
Кубическое уравнение 69, 71, 542, 571, 573, 599, 616, 654
Кулачковый механизм 47
- Лагранжево (*Lagrange J.L.*) описание зависимости координаты от времени 46
Лагранжево (*Lagrange J.L.*) представление 4, 17, 34, 46, 187, 192, 247
Ламинарное течение 209, 700
Лемма Штейнера (*Steiner J.*) 110
Линеаризация 530, 556, 595, 606
Линеаризованное уравнение 462, 591, 637
Линейно упругие пружины 188
Линейное векторное преобразование 51
Линейный источник 711
Линейный осциллятор 447
Линии вихря 691, 711
Линии влияния 134, 149, 240, 241, 299, 306
Линии тока силового поля 175
Линия влияния прогиба от сдвига 398
Линия тока 22, 36, 44, 503, 708
Линия уровня 708
Листовая рессора 51
Лифт 417
Логарифмическая деформация 20, 219
Логарифмическая спираль 458
Логарифмический декремент 450
Логарифмическое распределение скоростей по Прандтлю (*Prandtl L.*)-Шлихтингу (*Schlichting H.*) 689
Логарифмическое распределение скорости 706
- Локальное ускорение 24
Лопасты 692
Лопасть 648, 692
Луч веревочного многоугольника 80
- Малое возмущение 529, 552, 556
Манометр 89
Манометрическая трубка 511
Масса 39
Материал Гука (*Hooke R.*) 192
Материал Нортонна (*Norton F.H.*) 219
Материал Сен-Венана (*Saint-Venant A.J.K.B.*) 221
Материал Шведова (*Шведов Ф.Н.*) 230
Материальная линия 689
Материальная точка 577
Материальные координаты 4, 17, 34
Материальный объем 418, 585
Матрица демпфирования 483
Матрица жесткости 183, 270, 298, 575, 600, 629
Матрица инерции 575, 630
Матрица массы 483
Матрица переноса 469
Матрица податливости 184, 270, 298, 600
Матрица системы 457
Матрица угловой скорости 10, 13
Матрица, соответствующая радиусу-вектору 75
Матрицы вращения 49, 111, 650
Матричная экспоненциальная функция 457
Матричные итерации 656
Матричный функциональный анализ 457
Маховик 348, 816
Маятник 105, 169, 446, 461, 480, 489, 514, 529, 593, 596, 607, 663, 666, 672, 686
Маятник 672, 674
Мембрана 332, 491, 582

- Мембранное напряжение на единицу длины 370
- Мембранные напряжения 95, 196, 412, 583
- Мембранные силы 550
- Метод Бетти (*Betti E.*) 260, 279
- Метод Вестергаарда (*Westergaard H.M.*)-Галеркина (*Галеркин Б.Г.*) 272
- Метод Вильсона (*Wilson J.*) 639
- Метод Гурса (*Goursat E.*) 271
- Метод деформаций Генки (*Hencky G.*) 567
- Метод Крылова (*Крылов Н.М.*)-Боголюбова (*Боголюбов Н.Н.*) 637
- Метод Ляпунова (*Ляпунов А.М.*) 552
- Метод Мора (*Mohr O.C.*) 295, 297, 335, 336
- Метод Нейбера (*Neuber H.*) – Папковича (*Папкович П.Ф.*) 272, 413
- Метод остатков Хольцера (*Holzer H.*) и Толле (*Tolle H.*) 468
- Метод перемещений 337
- Метод Риттера (*Ritter A.*) 148, 160
- Метод сил 334
- Метод Стодолы (*Stodola A.*) 656
- Метод Холецкого 635
- Метод ширины полосы 605
- Метрический тензор 188
- Механизм смешанного типа 566
- Механический импеданс 455, 644, 677
- Многопролетная балка 303, 334, 335
- Многослойное поперечное сечение 140
- Многоступенчатая ракета 432
- Многоугольная форма 368
- Многоячейчатое сечение 309
- Множители Лагранжа (*Lagrange J.L.*) 262, 588
- Мода выпучивания 545, 547, 552, 581, 625
- Модальный ряд 475
- Модель Бингама (*Bingham E.C.*) 229
- Модель Сен-Венана (*Saint-Venant A.J.K.B.*) 222, 464
- Модулированное колебание 592
- Модуль объемного сжатия 91, 185, 195
- Модуль сдвига 185, 194, 199, 200
- Модуль Юнга (*Young Th.*) 181, 183, 192, 197
- Момент инерции 98
- Момент количества движения 423, 424, 436, 662
- Момент количества движения 424
- Момент текучести 559
- Момент температуры 277
- Моментные напряжения 83
- Моменты на единицу длины 360
- Мост через реку Такома (*Tacoma*) 576, 721
- Мостовой настил 169
- Мощность 172, 174
- Нагретая рама 397
- Нагружение в плоскости 350
- Наклонный открытый канал 570
- Напряжение выпучивания 548
- Напряжение текучести 222
- Напряжения депланации 319
- Напряжения Кирхгоффа (*Kirchhoff G.*) 187, 192
- Напряжения Коши (*Cauchy A.L.*) 187
- Насос 507
- Настройка 484, 608
- Натяжение каната (троса) 150, 441
- Начальная кривизна 342, 549, 655
- Начальное приближение 657
- Начальные условия 6, 592
- Неголономные связи 588
- Незамкнутое поперечное сечение 313
- Нейтральная ось 198, 286, 343, 345
- Неконсервативная система 502
- Нелинейная пружина 538
- Нелинейно упругие материалы 202
- Нелинейное геометрическое соотношение 544

- Нелинейное распределение напряжений 343
- Нелинейное уравнение колебаний 515
- Нелинейные уравнения движения 596
- Нелинейный осциллятор с одной степенью свободы 636, 639
- Необратимый прогиб 389
- Непрерывный спектр 455
- Несбалансированный ротор 603, 604, 833
- Несвязанные осцилляторы 624
- Несжимаемое течение 42, 428, 434, 435, 504, 698, 708
- Несжимаемость 187
- Несимметричная возвращающаяся сила 656
- Несовершенная конструкция 540
- Несовершенный Эйлеров (*Euler L.*) стержень 549
- Нестационарное течение 504, 513, 514, 525
- Нестационарное ускорение 24
- Несущая способность 560
- Несущая частота 592
- Неупругий удар 671, 687
- Неустойчивая ферма 146
- Неустойчивость движения 597
- Нижняя граница 471, 563, 565
- Нить (струна) 597, 624, 809
- Нормальная сила 115, 343
- Нормальные напряжения 60, 66, 69, 278, 286, 342, 374
- Нулевой угол атаки 696
- Ньютоновская (*Newton I.*) жидкость 206, 223
- Ньютоновская (*Newton I.*) механика 415
- Область без трения 384
- Область ударной волны 573
- Обобщение Одквиста (*Odqvist F.K.G.*) 218
- Обобщенная скорость 665
- Обобщенное отношение Рэля (*Rayleigh J.W.S.*) 501
- Обобщенное уравнение Бернулли (*Bernoulli D.*) 507
- Обобщенные координаты 2, 611
- Обобщенные силы 238, 344, 589, 598, 600, 612
- Обобщенный закон Гука (*Hooke R.*) 276
- Обобщенный импульс 666
- Обобщенный потенциал 589
- Обод колеса 348
- Оболочки вращения 369, 411, 800
- Образование шейки 224
- Объемная (массовая) сила 59, 64, 180
- Объемное сжатие 185
- Одноосная деформация 19, 261
- Одноосное напряженное состояние 59, 72, 181
- Одноосный закон Гука (*Hooke R.*) 193
- Однопролетная балка 129, 398
- Однопролетный мост 641
- Однородная деформация 33
- Однородная нагрузка 132
- Одноярусная рама 138
- Окружная деформация 341
- Окружная скорость 519
- Окружное напряжение 95, 273, 356
- Октаэдрическое касательное напряжение по Мизесу (*von Mises R.*) 71
- Октаэдрическое касательное напряжение 71, 223
- Оператор Гамильтона (*Hamilton W.R.*) 24
- Оператор Лапласа (*Laplace P.S.*) 350, 700
- Опоры 27
- Определитель Рэля (*Rayleigh J.W.S.*) 474
- Определитель 547, 551, 559, 579, 580, 583
- Определяющее соотношение Стокса (*Stokes G.G.*) 207
- Опрокидывающий момент 105, 444

- Орбиты спутников 33
- Ортогональное векторное преобразование 50
- Ортотропный материал 201
- Осевые моменты инерции 437
- Осесимметричный прогиб 410
- Основание Винклера (*Winkler E.*) 190, 574, 625, 834, 840, 843
- Основная мода 593
- Основная частота свободных колебаний 652
- Основная частота 480
- Основное колебание 597
- Остаточное напряжение 215
- Отдача ружья при выстреле 419
- Откалывание 679
- Открытый канал 570
- Относительная линия тока 517
- Относительная скорость 423, 518
- Относительное движение 44, 517
- Относительное количество движения 423
- Относительное ускорение 423, 518
- Отношение Рэля (*Rayleigh J.W.S.*) 500, 501
- Отраженная волна 678, 682, 851, 852
- Пара сил 75
- Параболическая арка 347
- Параболическая огибающая Леона (*Leon A.*) 285
- Параболическая тонкостенная оболочка 103
- Параллельное соединение 188
- Параллельный поток 208, 694, 712
- Параметрическое возбуждение 597
- Первая теорема Мелана (*Melan E.*) о приспособляемости 569
- Первое начало термодинамики 54
- Первый инвариант 21, 39
- Передаточная функция 455
- Перемещение основания 482
- Перемещение 33
- Перенапряжение 230
- Перенос силы 428
- Переносная скорость 517
- Переносное ускорение 517
- Перепад давления 89
- Перераспределение напряжений от нагрузки 396
- Период линейных колебаний 462
- Период собственных колебаний 458, 514
- Период 450
- Периодическое разложение 723
- Плавающее тело 105
- Плавучесть 104, 169
- Планетарная зубчатая передача 29
- Пластина 247, 550, 581, 632, 658, 705, 727, 798, 801, 842
- Пластины Кирхгоффа (*Kirchhoff G.*) 250, 361
- Пластическая вязкость 229
- Пластическая деформация сдвига 222
- Пластическая область 567
- Пластический резерв конструкции 560
- Пластический резерв 560
- Пластический шарнир 559
- Пластическое течение 227
- Платформа 156
- Плоская деформация 37, 196, 390
- Плоская полоса 365
- Плоская система сил 79
- Плоская ферма 255
- Плоские волны 477
- Плоские напряжения 63, 72, 196, 201, 249, 356, 632
- Плоское движение 13
- Плоскость сил 79, 147, 162
- Плотина 721, 814
- Плотность мощности 495
- Плотность потока количества движения 420
- Плотность силы 67

- Плотность энергии деформации 179, 181, 184
- Плотность 39, 415
- Поведение стержня после выпучивания 537
- Поверхностная волна Рэлея
(*Rayleigh J.W.S.*) 474
- Поверхностная волна 492, 722
- Поворот системы координат 111, 649
- Поворотный кран 444
- Пограничный слой 374, 375, 702, 703, 726
- Погруженный цилиндр 692
- Подвесной трос 153, 169
- Поддерживающая (подпорная) стенка 97, 166
- Подковообразная вихревая линия 695
- Подобие 698
- Подпрыгивание 607
- Подъемная сила 104
- Подъемная сила 575, 695
- Поезд 479
- Показатель ползучести 218
- Показатель политропы 92
- Полая сфера 273
- Поле изоклин 456
- Поле напряжений около отверстия по
Эшелби (*Eshelby I.D.*) 390
- Поле скоростей 8, 22
- Полет 575
- Ползучесть 213, 219
- Полиномы Эрмита (*Hermite Ch.*) 628
- Пологая арка 345, 542
- Пологая оболочка 369
- Полубесконечная пластина 352
- Полупространство 381, 413, 492, 804
- Полюс Кульмана (*Culman K.*) 80
- Полярные координаты 31, 38, 46, 330, 433, 480, 653, 732
- Полярный момент инерции 112, 328
- Поперечная инерционная нагрузка 644
- Поперечные силы на единицу длины 362
- Поперечный удар 675
- Посадка с натягом 274
- Последовательное соединение 188
- Потенциал пружины 181
- Потенциал скоростей 26, 43, 707, 721
- Потенциальная энергия внутренних сил 178
- Потенциальная энергия силы тяжести 177
- Потенциальная энергия 175, 176, 243, 496, 532, 586, 611, 619, 620, 622, 625
- Потенциальное течение 26
- Потенциальный вихрь 715, 733
- Потеря напора Карно (*Carnot N.L.C.*) 516
- Поток касательных напряжений
депланации 321
- Поток касательных напряжений 142, 158, 159, 288, 289, 309, 318, 401
- Поток 175
- Правило (метод) Галеркина
(*Галеркин Б.Г.*) 613, 615, 728
- Правило Лейбница (*Leibniz G.W.*) 41, 421
- Правило Лопиталья (*L'Hopital G.F.A.*) 412, 643
- Предварительно напряженная пластина 583
- Предварительное натяжение 582, 583, 597
- Предельная нагрузка 557, 564
- Предельное условие Навье
(*Navier K.L.M.H.*) 363
- Предельный изгибающий момент 231, 563
- Предельный цикл 458, 464
- Представление в виде одного ряда 367
- Прекращение горения 432
- Преобразование Галилея (*Galilei G.*) 416
- Преобразование Лапласа (*Laplace P.S.*) 213, 387
- Преобразование Лежандра
(*Legendre A.*) 252, 276
- Преобразование подобия 51, 112, 650
- Приближение пограничного слоя 374
- Приближение Ритца (*Ritz W.*) 611

- Приведенная длина 548, 579
- Принцип виртуальной работы в форме Гиббса (*Gibbs J.W.*) 243
- Принцип виртуальных перемещений 236
- Принцип Д'Аламбера (*D'Alembert J.D.*) 585, 587
- Принцип минимума потенциальной энергии 265
- Принцип Сен-Венана (*Saint-Venant A.J.K.B.*) 282, 306
- Принцип соответствия (аналогии) 389, 801
- Приповерхностное трение 706
- Приспособляемость 566, 569
- Пробная функция Бернулли (*Bernoulli J.*) 474
- Прогиб 152, 153
- Прогиб 364, 389, 473
- Продольные колебания 616
- Продольный удар 675
- Произведение инерции 98
- Пропеллер 47
- Пространственные координаты 22
- Пространство скоростей 4
- Профиль Жуковского (*Жуковский Н.Е.*) 716
- Процедура Мора (*Mohr O.C.*) 246
- Прошелкивание 533, 534, 541, 606
- Пружинно-демпферная модель 482
- Прямая балка 122
- Прямоточный воздушно-реактивный двигатель 431
- Прямоугольная мембрана 583
- Прямоугольная область 99
- Прямоугольная пластина 409, 581, 652, 798
- Пуаз 207
- Работа 171
- Равновесие жидкости 88
- Равновесие 68, 73, 77, 79, 120, 235, 425
- Равновесная конфигурация 104
- Радарный монитор 46
- Радиальная деформация 341
- Радиальная турбина 432, 523
- Радиальное напряжение 273
- Радиальное перемещение 273, 391
- Радиальное температурное перемещение 281
- Рadiany в секунду 9
- Радиус инерции 548
- Радиус-вектор 1
- Радиус-вектор 1, 585
- Разделение переменных 463, 513, 721
- Разложение по собственным функциям 624
- Разупрочняющаяся пружина 616
- Ракета 429
- Рама 260, 338, 397, 564, 829
- Распределение скоростей при ламинарном движении 727
- Распределение скоростей 55, 665
- Расстояние до полюса 131
- Растягиваемый стержень 19, 54, 59, 222
- Расщепитель 429
- Реактивная турбина 519
- Реактивный двигатель 429
- Реакция опоры 81
- Ребра жесткости 158
- Регулирующий механизм 466
- Резервуар 376
- Резонанс 452, 616, 720
- Результаты Прандтля (*Prandtl L.*) 225, 332, 703
- Результаты Энгессера (*Engesser F.*) 252, 549
- Результирующая 76
- Релаксация напряжений 213
- Решение Гертлера (*Goertler H.*) 732
- Решение Д'Аламбера (*D'Alembert J.D.*) 478, 677, 681
- Решение Кирша (*Kirsch G.*) 357

- Решение Леона (*Leon A.*) 357
Решение Мелана (*Melan E.*) 390
Решение Мухелишвили
(*Мухелишвили Н.И.*) 407
Решение Навье (*Navier K.L.M.H.*) 366
Решение Томсона (*Thomson W.*) и Тэйта
(*Tait P.G.*) 364
Розетка деформации 55
Ротор (вихрь) 25, 176, 690
Ряд Лорана (*Laurent P.A.*) 718
Ряд Тейлора (*Taylor B.*) 64, 152, 462
Ряд Фурье (*Fourier J.B.J.*) 408, 451, 551, 636,
642, 798

Самовозбуждаемые колебания 466, 574
Самолет 47
Самоторможение 162, 164
Самоуравновешенное распределение
напряжений 116
Самоуравновешенные касательные
напряжения 118
Самоуравновешенные температурные
напряжения 278
Сварное или клеевое соединение 401
Сверхзвуковая скорость 725
Свободная поверхность 700, 731
Свободная струя 429, 487, 508, 819
Свободные колебания 449, 658
Свободные колебания 499, 527, 582
Свободный вектор 9
Связанные колебания 592, 597
Связанные уравнения движения 601
Связующий поверхности материал 157
Связь момента и кривизны 246, 361
Сдвиговые деформации 21, 194, 292, 293,
398, 473, 581
Сдвиговые нагрузки 652
Сдвиговые силы 115, 118, 121, 132, 160,
372, 374

Секторная скорость 32
Сепаратриса 464
Сечение в виде равнобокого уголка 392
Сечение из трех ячеек 404
Сечение с одной ячейкой 289, 307
Сжимаемое течение 42, 53
Сжимаемость 91, 195, 207, 680, 724
Сила воздушного винта 485
Сила инерции 476, 585
Сила Лоренца (*Lorentz G.A.*) 589
Сила на единицу площади 59, 179
Сила натяжения 523
Сила сопротивления 484, 485, 696, 698, 720
Сила тяги двигателя 430
Сила тяжести 57, 86, 167, 416
Сила 58
Силовой винт 78
Силовой многоугольник 131
Символы Кронекера (*Kronecker L.*) 18
Симметрия тензора напряжений 83
Симметрия 589
Сингулярное течение 710
Система волн 477
Система двух сил с моментом 74
Система лопастей 692
Система параллельных сил 83
Система с конечным числом степеней
свободы 237, 239, 467, 585, 587, 666
Система с одной степенью свободы 239,
535, 602, 618
Система сходящихся сил 73, 144
Система уравнений 457, 635
Система четырех стержней 47
Скалярное произведение двух функций 613
Скачок моды 626
Скользющие опоры 163
Скоростной винт 10
Скоростной напор 506, 512
Скорость звука 447, 681, 724

- Скорость изменения любого вектора 438
- Скорость изменения момента количества движения 438
- Скорость отрыва 33
- Скорость потока массы 40, 45, 426
- Скорость света 39, 415
- Скорость 3, 7, 14, 31, 33
- Скручиваемый стержень 404
- След за неподвижным цилиндром 718
- Следящая сила 575
- Сливная труба 822
- Слоистые жидкости 90
- Смещение волн 466
- Собственная частота 449, 468, 475, 481, 490, 491, 591, 595, 641, 659
- Собственное вращение 479
- Собственные векторы 601
- Собственные формы колебаний 475
- Собственные функции 475
- Собственные частоты 624
- Собственные числа 492
- Собственный вес 377
- Солнце 33, 178
- Сообщающаяся система 89
- Соотношение Вебера (*Weber C.*) 25
- Соотношение Коши (*Cauchy A.L.*) 65, 68
- Сопло Лавала (*Laval K.G.P.*) 725
- Сопло 428, 810
- Сопrotивление давления 721
- Сопrotивление трения 721
- Сопrotивление 695
- Сопряженная балка 296, 300
- Сосредоточенные массы 460
- Сосуд под давлением 567
- Сосуд 103
- Соударение 669, 670
- Сохранение кинетической энергии системы 669
- Сохранение массы 39
- Сохранение энергии 497, 531
- Спин 439
- Спиральная пружина 403
- Спица 349
- Спокойное течение 571, 572
- С-профиль (швеллер) 322
- Среднее напряжение 274
- Среднее ускорение 3
- Средняя скорость 3
- Средняя температура 277
- Срок эксплуатации 220, 232, 543
- Стальная труба 681
- Стандартное твердое тело 214
- Статическая деформация 664
- Статическая функция влияния 642
- Статически допустимые напряжения 561
- Статически неопределенная система сил 78, 138
- Статически неопределимая балка (балка с избыточными связями) 262, 300, 399
- Статически неопределимые рамы 337, 621
- Статически определенная система сил 65, 78, 140
- Статически эквивалентные системы сил 75, 76
- Статические моменты 87, 97, 154, 289
- Статический прогиб 500, 668
- Статическое трение 62, 162
- Стационарное движение 24
- Стационарное течение 23, 36, 44, 45, 505
- Степени свободы 2
- Стержень Бека (*Beck M.*) 574
- Стержень 33, 114, 285, 676
- Стержень 59, 547, 621
- Сток 714
- Стоячая волна 573
- Стрела 443
- Стремление угловых скоростей к параллельности 447

- Структурная пластичность 221
- Супергармоническая частота 470
- Сухое трение 464
- Сфера 272, 699
- Сферическая оболочка 96, 374, 377, 684
- Сферическая поверхность 100
- Сферические координаты 11, 52, 567
- Сцепление 468
- Тангенциальное ускорение 5
- Твердое тело 2, 8, 12, 49, 436, 498
- Тележка 522
- Тело Кельвина (*Kelvin W.*) – Фойгта (*Voigt W.*) 212, 447, 482
- Тело Рэнкина (*Rankine W.J.M.*) 714
- Температура по Кельвину (*Kelvin W.*) 275, 315
- Температура по Цельсию (*Celsius A.*) 275
- Температура 232, 274
- Температурная (термическая) кривизна 278, 305, 367, 397, 399
- Температурная функция влияния 369
- Температурное перемещение 280, 379
- Температурное поле, не вызывающее напряжений 387
- Температурные деформации 275
- Температурные напряжения 277, 305, 306, 367, 379, 406
- Температурные эффекты 635
- Температурный удар 647, 842
- Тензор деформаций Альманси (*Almansi E.*) 191
- Тензор деформаций Фингера (*Finger J.*) 187
- Тензор деформаций 37
- Тензор инерции 112
- Тензор момента 363, 368
- Тензор напряжений Коши (*Cauchy A.L.*) 69, 191
- Тензор напряжений Пиола (*Piola G.*) – Кирхгоффа (*Kirchhoff G.*) 187, 188
- Тензор напряжений 65, 114, 180
- Тензор плоских напряжений 66
- Тензор скоростей деформаций 180
- Тензор 36, 69, 437
- Теорема взаимности Бетти (*Betti E.*) -Релея (*Rayleigh J.W.S.*) 269
- Теорема взаимности Максвелла (*Maxwell J.C.*) 269
- Теорема Кастильяно (*Castigliano C.A.P.*) 253, 259, 345, 364, 395, 399, 403, 412
- Теорема Кельвина (*Kelvin W.*) о циркуляции 689
- Теорема Койтера (*Koiter W.T.*) 561
- Теорема Кутта (*Kutta W.*) – Жуковского (*Жуковский Н.Е.*) 694
- Теорема Ляпунова (*Ляпунов А.М.*) 531, 556
- Теорема Максвелла (*Maxwell J.C.*) 410
- Теорема Менабреа (*Menabrea L.F.*) 253, 255, 257, 278, 340, 345, 397, 401
- Теорема мощностей 496
- Теорема о дивергенции 41
- Теорема о неоднородной жидкости Бьеркнеса (*Bjerkness V.*) 690
- Теорема Прагера (*Prager W.*) 561
- Теорема снижения 262
- Теорема Торричелли (*Toricelli E.*) 509
- Теорема Шенли (*Shanley F.R.*) 549
- Теоремы Мелана (*Melan E.*) 561
- Теоретическая мощность 433, 488
- Теоретический коэффициент полезного действия 520
- Теория Герца (*Hertz H.*) 381, 382, 451
- Теория Кармана (*von Karman Th.*) 247, 549, 725
- Теория пропеллера 486

- Теория упругости векторного порядка 545, 621, 623, 650
- Термическое нагружение 395
- Термодинамическая температура 275
- Термодинамическая функция состояния 521
- Термодинамическое рассмотрение Грина (*Green J.*) 178, 191
- Термоупругие перемещения 359
- Термоупругий поворот 305
- Термоупругий прогиб 304
- Термоупругое удлинение 304
- Технические компоненты напряжений 188
- Течение в канале 208, 828
- Течение вокруг цилиндрического выступа 713
- Течение Куэтта (*Couette M.*) 206
- Толстостенные поперечные сечения 290
- Толстостенный цилиндр 273
- Толщина количества движения 705, 727
- Толщина пограничного слоя 727
- Толщина смещения 705, 727
- Толщина энергии 705
- Тонкий прямоугольник 317
- Тонкостенная труба 308
- Тонкостенное незамкнутое поперечное сечение 317
- Тонкостенные конструкции 288
- Тонкостенный Т-образный профиль 560
- Точечный источник 710
- Точечный континуум 83
- Точка отрыва 721
- Точка поворота 499, 502
- Точка стагнации 710, 712
- Траектория 1, 7, 23, 33, 44, 171
- Траектория 2, 5, 7
- Транспонированная матрица 50, 184
- Транспортная теорема Рейнольдса (*Reynolds O.*) 41, 421, 522
- Транспортное устройство с двигателем 502
- Трансцендентное уравнение 579
- Трапецеидальная область 166
- Трение 62, 674, 684
- Третий закон Ньютона (*Newton I.*) 61
- Третье колебание 599
- Треугольный элемент 632
- Трехмерное напряженное состояние 68
- Трехпролетная балка 266
- Трехфазная модель Бингама (*Bingham E.C.*) 229
- Трехфазный материал 214
- Трехшарнирная арка 139, 161, 167, 238, 542
- Трещина Гриффита (*Greefith A.A.*) 407
- Труба (с разрезом) 314
- Труба Вентури (*Venturi D.B.*) 733
- Труба с сечением в виде кольца 702
- Труба с упругими стенками 679
- Труба 390, 488, 700, 800
- Труба 701
- Трубка переменного сечения 514
- Трубка Пито (*Pitot F.*) 512, 821
- Трубка Прандтля (*Prandtl L.*) 512
- Трубка тока 23, 44
- Трубопровод 434, 681, 851, 853
- Турбина 507
- Турбинное уравнение Эйлера (*Euler L.*) 433, 524
- Турбореактивный двигатель 431
- Турбореактивный двигатель 431
- Турбулентное сопротивление 638
- Турбулентное течение 210, 698
- Турбулентный пограничный слой 721
- Угловая скорость 9, 13, 26, 30, 48, 50, 348, 355, 436, 663
- Угловые координаты 49
- Углы Кардана (*Kardano D.*) 49
- Углы Эйлера (*Euler L.*) 49
- Угол атаки 488, 575, 695

- Угол закручивания 310, 321
Угол отражения 684
Угол статического трения 62
Удаляющая матрица 658
Удельная теплоемкость 724
Удельный поток массы 42
Удлинение 18, 54
Универсальная постоянная Бернулли
(*Bernoulli D.*) 506
Универсальный шарнир Кардана
(*Kardano D.*) 30
Универсальный шарнир 30, 812
Упорный подшипник 856
Управляющая задвижка 434
Упрочняющаяся пружина 616
Упругая пружина 605
Упругие константы при вращении 336
Упругий потенциал 179, 181, 244, 275, 500,
600
Упругий удар 670
Упругое основание 574
Упругое перемещение 182
Упругое тело 179
Упругое ядро 559
Упруго-пластическая балка 562
Упруго-пластическое тело 224, 227, 233
Уравнение Бернулли (*Bernoulli D.*) 505, 570
Уравнение Гельмгольца (*Helmholtz H.*) 491,
582
Уравнение Дуффинга (*Duffing G.*) 615, 638
Уравнение Кармана (*von Karman Th.*) для
пластины 249, 369, 581, 583, 652, 653,
655
Уравнение Клайперона
(*Clapeyron B.P.E.*) 303
Уравнение Коши (*Cauchy A.L.*)-Римана
(*Riemann G.F.B.*) 709
Уравнение Лагранжа (*Lagrange J.L.*) 588,
589, 612, 666
Уравнение Лапласа (*Laplace P.S.*) 43, 701
Уравнение моментов 423
Уравнение Навье (*Navier K.L.M.H.*) – Стокса
(*Stokes G.G.*) 697, 727, 731, 855
Уравнение неразрывности 40, 42, 45, 53,
681
Уравнение пограничного слоя 704
Уравнение прогибов Тимошенко
(*Timoshenko S.P.*) 473
Уравнение Пуассона (*Poisson S.D.*) 326, 363,
701
Уравнение теплопроводности 386, 390
Уравнение трех моментов 303
Уравнение Хилла (*Hill R.*) 597
Уравнение частот 591, 595, 601
Уравнение Эйлера (*Euler L.*) 442, 545, 556,
570, 689, 730
Уравнения Бельтрами (*Beltrami E.*)-
Митчелла (*Michell A.G.M.*) 271
Уравнения движения Эйлера (*Euler L.*)-Коши
(*Cachy A.L.*) 415, 585
Уравнения Максвелла (*Maxwell J.C.*) 589
Уравнения Навье (*Navier K.L.M.H.*) 271, 406
Уравнения Прандтля (*Prandtl L.*)-Рейсса
(*Reuss A.*) 228
Уравнения Эйлера (*Euler L.*)-Лагранжа
(*Lagrange J.L.*) 249
Ускорение Кориолиса (*Coriolis G.G.*) 49, 479,
517
Ускорение основания 484
Ускорение основания 723
Ускорение свободного падения 178
Ускорение 7, 8, 15, 32, 34, 45, 415, 502
Условие ортогональности 399, 658
Условие текучести Мизеса
(*von Mises R.*) 227
Условие текучести 559
Условие устойчивости 169, 530, 536
Условия равновесия 612

- Условия равновесия 635
- Условия совместности 17, 249, 630
- Фазовая плоскость 456
- Фазовый угол 450, 592
- Фактор нагружения 269
- Ферма Мизеса (*von Mises R.*) 541
- Ферма 143, 155, 160, 183, 242, 255, 266
- Фермы с особенностями согласно Риттеру (*Ritter A.*) 146
- Фиктивная нагрузка 280
- Фиктивная нагрузка 612
- Фиктивная поперечная нагрузка 623, 628
- Фиктивная сила 259, 279
- Фиктивная сила 80, 131, 183, 255, 258, 359
- Фиктивные напряжения 260
- Фиктивный момент 258, 346
- Флаттер 574
- Формула Бейли (*Baily R.W.*) и Нортон (*Norton F.H.*) 217, 232
- Формула Блазиуса (*Blasius H.*) 703, 706, 717
- Формула Данкерлея (*Dunkerly*) 471
- Формула для сосудов давления, описывающая напряжения 95
- Формула Майзеля (*Mayzel V.M.*) 279, 359, 367, 379, 413
- Формула Прандтля (*Prandtl L.*)-Никурадзе (*Nikuradse J.*) 703
- Формулы Бредта (*Bredt R.*) 142, 282, 307, 308, 404
- Формулы Френе (*Frenet F.*) 8
- Формы свободных колебаний 468
- Функции Бесселя (*Bessel F.*) 492, 584
- Функция влияния для бесконечной пластины 359
- Функция влияния 367, 369, 380, 410, 628
- Функция Гаусса (*Gauss C.F.*) 732
- Функция Грина (*Green J.*) 136, 214, 410
- Функция депланации 308, 311, 313, 319, 326, 404
- Функция Лагранжа (*Lagrange J.L.*) 589
- Функция напряжений при кручении 316
- Функция напряжений при кручении 327
- Функция напряжений Эри (*Airy G.B.*) 65, 249, 350, 803
- Функция напряжений 355, 796
- Функция отклика фазового угла 453
- Функция ползучести 211, 213
- Функция релаксации 212, 214
- Функция тока 333, 708, 713, 731
- Функция формы 501
- Функция Хевисайда (*Heaviside O.*) 211, 389, 676, 678
- Характеристическое уравнение 449, 555, 557, 575
- Центр давления 98
- Центр масс 86
- Центр объема 86
- Центр параллельных сил 84
- Центр площади 97, 117, 154
- Центр сдвига 118, 312, 313, 318, 405
- Центр сдвига 404
- Центр скоростей 14, 28
- Центр тяжести 86
- Центр удара 673
- Центр ускорений 15
- Центральное движение 31
- Центральное поле тяжести 178
- Центробежные моменты инерции 437
- Центробежный регулятор 552
- Центроиды 14
- Центростремительное ускорение 12
- Цепная линия 152, 170
- Цепь 667
- Циклическая пластическая деформация 225
- Цилиндр 105, 106, 107, 272, 716, 719

- Цилиндрическая оболочка 94, 157, 376, 412, 654, 680, 695
- Цилиндрическая поверхность 99
- Цилиндрические координаты 11, 52, 680, 700
- Цилиндрический изгиб 366
- Циркулирующая система 575
- Циркуляция 688, 694, 711
- Частота возбуждения 451
- Частота модуляции 592
- Частота производства вихрей 720
- Чертежный стол 264
- Четырехстержневой механизм 264
- Четырехфазное тело 230
- Численный эксцентриситет 33
- Число Маха (*Mach E.*) 725
- Число оборотов в минуту 30
- Число Рейнольдса (*Reynolds O.*) 209, 697, 699, 701
- Число Струхала (*Strouhal B.*) 720
- Число Фруда (*Froude B.*) 573, 700
- Чистый изгиб 351
- Чувствительность вала 332
- Чувствительность к несовершенствам 540
- Чувствительность к перемещениям 484
- Чувствительность 220
- Шарнирно опертая балка 128, 130, 558
- Шарнирное соединение 82
- Шарнирно-опертая балка 129, 136, 279
- Шарниры Гербера (*Gerber A.*) 134, 242, 301
- Шаровой слой 567
- Эйлеров (*Euler L.*) стержень 546, 625
- Эйлерова (*Euler L.*) выпучивающая нагрузка 545
- Эйлерово (*Euler L.*) описание движения 18, 23, 24, 34, 45, 174, 187, 191
- Эквивалентная система 664, 669, 685
- Эквивалентная трехстержневая система 47
- Эквивалентное напряжение Мизеса (*von Mises R.*) 567
- Эквипотенциальные поверхности 175
- Экран 811
- Эксцентриситет 550
- Электродинамика 589
- Электропроводящая бумага 333
- Элементарная работа 171
- Эллипс инерции по Кульману (*Culman K.*) 113
- Эллипс инерции 113
- Эллипсы 328
- Эллиптическая функция Якоби (*Jacobi C.G.J.*) 463
- Эллиптический интеграл 463
- Эллиптическое отверстие 407
- Эллиптическое поперечное сечение 328
- Энергетическая норма 532
- Энергия деформации 179, 181, 184, 244, 276
- Эффект Баушингера (*Bauschinger I.*) 226, 234
- Эффект скачка 616
- Эффективная длина 513, 527
- Эффективная жесткость 188, 401, 403, 618, 619, 621
- Эффективная изгибная жесткость 643
- Эффективная поперечная сила Кирхгоффа (*Kirchhoff G.*) 364
- Эффективная сила сопротивления 488
- Эффективное эквивалентное напряжение 218, 284
- Эффективный модуль 681
- Ядро поперечного сечения 287
- Ядро 392

Франц Циглер

Механика твердых тел и жидкостей

*Дизайнер М.В.Ботя
Технический редактор А.В.Широбоков*

Подписано в печать 20.01.02. Формат 60x84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 53,01. Уч. изд. л. 53,53.
Гарнитура Ариал. Бумага газетная. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.