

В. Д. КЛЮШНИКОВ

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

(Элементы теории определяющих соотношений)

Рекомендовано Госкомитетом Российской Федерации по высшему образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Механика» и специальности «Теория упругости, пластичности и прочности»

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
1994

Федеральная программа книгоиздания России

Рецензенты:  
кафедра «Сопротивление материалов» МАИ,  
академик *Е. И. Шелякин*

**Клюшников В. Д.**

52 Физико-математические основы прочности и пластичности: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 189 с.  
ISBN 5—211—03078—8.

Пособие посвящено физико-математическим основам замыкающих уравнений (определяющих соотношений) механики деформируемого твердого тела, включая критерии перехода (пластичность, разрушения и т. д.). Содержание пособия соответствует материалу читаемого на кафедре теории пластичности механико-математического факультета МГУ обязательного годового курса. Базой рассуждений являются общезначимые закономерности поведения сплошной среды, такие как: законы сохранения, постулаты термодинамики, ковариантность, ограниченность разрешающей способности макроэксперимента и некоторые частные положения, характеризующие класс материалов и процессов. Сосредоточивая внимание на проблеме определяющих соотношений, автор отводит значительное место новым трактовкам в термодинамике, теориях прочности, пластичности, больших деформаций.

Для студентов, аспирантов и научных сотрудников, специализирующихся по механике деформируемого твердого тела.

163040000(4309000000) — 0,83 67—94  
077(02)—94

ББК 22.251

© Клюшников В. Д., 1994  
© Издательство  
Московского университета, 1994

ISBN 5—211—03078—8

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	4
ГЛАВА I. УПРУГОСТЬ .....	5
§ 1. Закон Гука .....	5
§ 2. Формула Гамильтона — Кели. Нелинейная упругость .....	10
§ 3. Свойства потенциальности соотношений упругости .....	13
§ 4. Анизотропная упругость .....	18
§ 5. Анизотропия тензорно-линейной упругости .....	24
ГЛАВА II. ТЕОРИЯ ТРЕЩИН .....	30
§ 1. Микроструктурные механизмы деформирования и разрушения .....	30
§ 2. Групповые вакансии в виде трещин. Идея Гриффитса .....	33
§ 3. Линейная механика разрушения .....	37
§ 4. Энергетический критерий разрушения .....	43
§ 5. Основы нелинейной механики разрушения .....	49
ГЛАВА III. ТЕОРИЯ ДИСЛОКАЦИЙ .....	63
§ 1. Дислокации Бюргера .....	64
§ 2. Дислокации под нагрузкой .....	69
§ 3. Взаимодействие дислокаций .....	73
§ 4. Причины зарождения трещин .....	79
§ 5. Источники дислокаций и пластичность .....	82
ГЛАВА IV. ПЛАСТИЧНОСТЬ .....	85
§ 1. Теория скольжения .....	85
§ 2. Деформационная теория. Векторное представление тензоров .....	89
§ 3. Теория течения. Регулярная пластичность .....	93
§ 4. Сингулярная пластичность .....	98
§ 5. Аналитическая пластичность .....	109
§ 6. Эксперимент и теория .....	113
§ 7. Принцип макродетерминизма .....	120
ГЛАВА V. ТЕРМОДИНАМИКА .....	131
§ 1. Законы термодинамики однородных процессов .....	131
§ 2. Условия термодинамического баланса. Замкнутые циклы .....	137
§ 3. Уравнения термодинамики для элементарных частиц в однородных процессах. Простейшие среды .....	141
§ 4. Дифференциальные соотношения высокого порядка .....	146
§ 5. Материалы со слабой мгновенной реакцией .....	149
§ 6. Уругопластические материалы .....	153
§ 7. Термодинамика неоднородных процессов .....	160
ГЛАВА VI. БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ .....	168
§ 1. Тензор-градиент перемещений и тензор Пнолы .....	169
§ 2. Формулировка задачи в лагранжевых переменных .....	172
§ 3. Тензоры Грина и Кирхгофа .....	177
§ 4. Полулинейный материал .....	179
§ 5. К вопросу о методе шагов .....	184
Литература .....	186

Проблема определяющих соотношений в широком понимании — связь напряжений и деформаций и критерии перехода, являясь узловой в механике сплошной среды, вступает в новую фазу. В современной механике в меру адекватности модели среды наряду с хорошей аппроксимацией данных эксперимента уже закладываются жесткие требования физико-математической непротиворечивости. Отсутствие должного внимания к таким требованиям нередко приводило к досадным просчетам, таким как нарушения ковариантности, независимости от системы отсчета, законов сохранения и т. д. С развитием наглядных форм представления процессов, руководящей иногда оказывалась геометрическая интуиция, не всегда адекватная физической сути явления. Старшее поколение механиков еще застало времена, когда из-за такого невнимания на глазах «рассыпались» взлелеянные долгим трудом теории.

Но уже в то не столь отдаленное время были предусмотрительные люди, которые, занимаясь, казалось, абстрактным вопросом — мерой влияния общих физико-математических требований на форму определяющих соотношений ряда сложных сред, сделали важное дело. Обнаружилось, что такие весьма неконкретные требования, как термодинамическая согласованность, ограниченность потоков энергии, затухающая память, слабая мгновенная реакция и т. д., накладывают довольно сильные ограничения на форму определяющих соотношений. Более того, выявилось, что и сам базовый макроэксперимент — связующее звено континуальной механики и реальных тел — в силу своей ограниченной разрешающей способности добавляет сюда свои специфические требования.

Соответствующие разработки дали наиболее весомые результаты в прочности и пластичности, и именно эти проблемы составляют основу излагаемого ниже материала. По существу, это элементы теории определяющих соотношений — раздела, слабо представленного в монографической и учебной отечественной литературе.

Представленный здесь материал отвечает читаемому на механико-математическом факультете МГУ спецкурсу для студентов IV—V курсов. Для понимания содержания от читателя требуется знание начал тензорной алгебры и некоторых сведений из теории функций комплексного переменного.

Автор выражает глубокую благодарность М. А. Гамрат-Курэж за помощь при оформлении рукописи.

Простейшим свойством, которым может быть наделено твердое деформируемое тело, является упругость — способность тела возвращать свою форму и размеры при снятии действующих на него сил. Все реальные тела в той или иной степени этим свойством обладают, в связи с чем всякое изучение деформативности начинается с более или менее подробного изложения модели упругого тела. Являясь первоосновой теоретического освоения механики деформируемого твердого тела, эта модель имеет большое практическое значение, так как свойства, ею предписываемые, представляются идеалом, к которому стремится проектировщик при создании долговременных сооружений и машин.

Имеется и другая причина широкого распространения модели упругого тела. Даже если оказывается, что для описания механических свойств реального тела модели упругости недостаточно, и приходится вводить более сложную модель, в большинстве случаев эффективное решение краевых и начальных задач строится сведением их тем или иным способом к задачам упругости.

Естественно, что в связи с этим теория упругости является наиболее разработанной областью механики деформируемого тела, но и в ней не видно конца, поскольку время ставит новые проблемы, для решения которых приходится изобретать все новые методы решения.

Изложенный ниже материал, посвященный определяющим соотношениям упругости, не претендует на широту охвата проблемы, а содержит попытку высвечивания отдельных специфических вопросов, недостаточно освещенных, или слишком заформализованных, или просто отсутствующих в имеющейся литературе, — вопросов происхождения и возможностей соотношений упругости и в связи с этим стратегии макроэксперимента.

### § 1. ЗАКОН ГУКА

Материал твердого тела называется изотропным, если вырезанные из куска такого материала образцы одинаковой формы и размера в отношении механических свойств одинаковы вне зависимости от ориентации произведенной вырезки. Таким материалом является, например, поликристаллическое тело с равновероятной ориентацией кристаллов. Естественно, что строение эталонного образца в виде, например, призматического стержня будет вполне симметричным и при испытании его на растяжение — сжатие возникнут лишь продольная деформация  $\epsilon_{11} = \Delta l_1 / l_1$  и

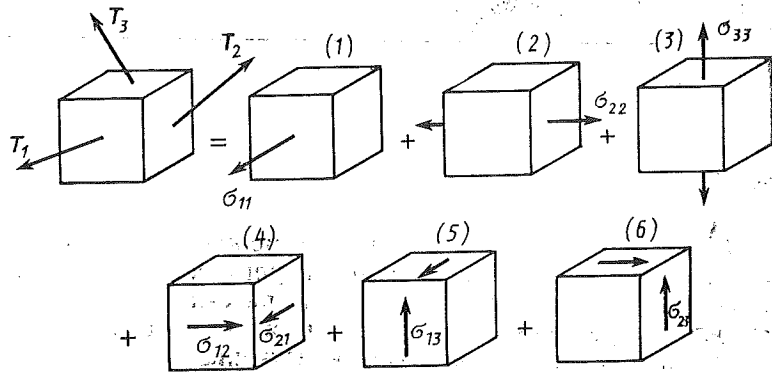


Рис. 1.1

равные поперечные деформации  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \Delta l_2 / l_2$ , где  $l_1$  — длина стержня, а  $l_2$  — длина стороны при квадратном поперечном сечении.

Для большинства изотропных материалов при не слишком высоком напряжении  $\sigma_{11} = P/l_2^2$  и малых деформациях эксперимент с указанным эталонным образцом дает

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11}, \quad (1.1)$$

где  $E$  и  $\nu$  — постоянные ( $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона), т. е. проявляются свойства упругости.

Пусть теперь в теле задано сложное напряженное состояние, так что к граням элементарного кубика, содержащего произвольную точку тела, оказываются приложенными произвольные удельные усилия  $T_1, T_2, T_3$ . Представим их действия в виде суммы элементарных актов, как это изображено на рис. 1.1.

Результат акта (1) совпадает с тем, что получено на эталонном образце, т. е. деформации акта (1) даются формулами (1.1). Аналогичные формулы имеют место для результатов актов (2) и (3) с круговой заменой индексов в (1.1). А поскольку эти соотношения линейны, то действует принцип суперпозиции, так что действие суммы трех первых актов равно сумме их действий

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{11}^{(3)} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{(1)},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{(1)}], \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{33} - \nu\sigma_{(1)}],$$

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

что кратко можно записать в форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{(1)}], \quad (i=j). \quad (1.2)$$

Для определения действий остальных актов может показаться, что необходим эксперимент на сдвиг, значительно более сложный, чем эксперимент на растяжение — сжатие. К счастью, в данном случае легко обойтись и без него. Достаточно заметить, что действие касательного напряжения  $\sigma_{23}$  акта (6) в осях  $x_1, x_2, x_3$  эквивалентно действию растягивающего напряжения  $\sigma'_{22}$  и равному ему, сжимающего напряжения  $\sigma'_{33}$  в осях  $x_1, x'_2, x'_3$ , полученных поворотом исходной системы координат на угол  $\pi/4$  вокруг оси  $x_1$  (рис. 1.2).

Действительно, в силу тензорной природы напряжений при переходе от исходной к штрихованной системе координат

$$\sigma'_{pq} = n_{pi} n_{qj} \sigma_{ij}, \quad n_{pi} = \cos(x'_p, x_i), \quad (1.3)$$

а поскольку для акта (6) все  $\sigma_{ij} = 0$ , кроме  $\sigma_{23} = |\sigma_{32}$ , то

$$\sigma'_{pq} = (n_{p2} n_{q3} + n_{p3} n_{q2}) \sigma_{23}, \quad (n_{pi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

и, следовательно, как легко проверить,

$$\sigma'_{pq} = 0, \quad \text{кроме } \sigma'_{22} = \sigma_{23}, \quad \sigma'_{33} = -\sigma_{23}. \quad (1.5)$$

Этот вид напряженного состояния является наложением актов (2) и (3) в повернутой системе координат и в силу (1.5) создает в этих осях деформации

$$\varepsilon'_{pq} = 0, \quad \text{кроме } \varepsilon'_{22} = -\varepsilon'_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23}. \quad (1.6)$$

В силу тензорной природы деформаций их компонентам в штрихованной системе координат отвечают компоненты в исходной системе в соответствии с формулой, аналогичной (1.3):

$$\varepsilon_{ij} = n_{ip} n_{jq} \varepsilon'_{pq}, \quad n_{ip} = \cos(x_i, x'_p) \quad (1.7)$$

Очевидно, что матрица  $n_{ip}$  является транспонированной по отношению к (1.4):  $(n_{ip}) = (n_{pi})^T$ , и поэтому для случая (1.6) имеем

$$\varepsilon_{ij} = (n_{i2} n_{j2} - n_{i3} n_{j3}) \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \quad (1.8)$$

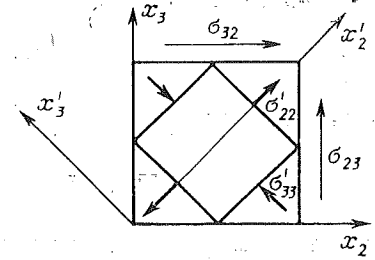


Рис. 1.2

и, следовательно, результатом акта (6) будет

$$\varepsilon_{ij}^{(6)} = 0, \text{ кроме } \varepsilon_{33}^{(6)} = \varepsilon_{32}^{(6)} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23},$$

и аналогично  $\varepsilon_{ij}^{(4)} = 0, \varepsilon_{ij}^{(5)} = 0$ , кроме

$$\varepsilon_{13}^{(4)} = \varepsilon_{31}^{(4)} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13}, \quad \varepsilon_{12}^{(5)} = \varepsilon_{21}^{(5)} = \frac{1+\nu}{E} \varepsilon_{12},$$

так что сумму действий трех последних актов можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \quad (i \neq j). \quad (1.9)$$

В результате на основании формул (1.2) и (1.9) полная сумма действий всех шести актов приводит к результату

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{(1)}\delta_{ij}] \quad (i, j=1, 2, 3), \quad (1.10)$$

который носит название закона Гука. Здесь  $\sigma_{(1)}$  — первый инвариант тензора напряжений,  $\delta_{ij}$  — компоненты единичного тензора

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{kk} = \sigma_{mn}\delta_{mn}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.11)$$

Основу приведенного здесь вывода закона Гука составляет использование принципа суперпозиции. Естественно, что требование линейности связи  $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$  (физическая линейность) при этом является необходимым и с этим связано ограничение на уровень напряжений, отмеченное выше вместе с ограничением на уровень деформаций. Последнее при выводе осталось за кадром, однако является существенным для законности проведенных рассуждений. Дело в том, что вообще сам тензор деформаций как функция градиента перемещений (см. гл. VI) свойством аддитивности не обладает: результирующая деформация отдельных актов перемещений частиц тела не равна сумме деформаций этих актов. Исключение составляет случай линейности указанной функции (геометрическая линейность), что в полной мере представляет деформацию окрестности точки лишь при малых деформациях в форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad |\varepsilon_{ij}| \ll 1. \quad (1.12)$$

Именно так должны расшифровываться компоненты тензора деформаций в соотношении (1.10). Соотношения (1.12) носят название формул Коши и будут считаться выполненными в дальнейшем вплоть до гл. VI.

Из соотношений (1.10) следует связь между первым инвариантом тензора деформаций (объемной деформацией)

$$\varepsilon_{(1)} = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{mn}\delta_{mn} \quad (1.13)$$

и первым инвариантом тензора напряжений  $\sigma_{(1)}$

$$\varepsilon_{(1)} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{(1)}, \quad (1.14)$$

с помощью которой закон Гука можно представить в виде, разрешенном относительно тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{(1)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.15)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.16)$$

Легко заметить, что на основании закона Гука оказываются справедливыми равенства

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} = \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (1.17)$$

которые указывают на то, что связь между напряжениями и деформациями в данном законе является потенциальной. Так, (1.15) можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (1.18)$$

где

$$W = \frac{1}{2} (\lambda \varepsilon_{(1)}^2 + 2\mu \varepsilon_{(2)}), \quad \varepsilon_{(2)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (1.19)$$

является функцией первого  $\varepsilon_{(1)}$  и второго  $\varepsilon_{(2)}$  инвариантов тензора деформаций\*. Из (1.18) также следует, что функция  $W$  представляет работу внутренних сил единицы объема материала

$$W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.20)$$

и в замкнутом по деформациям цикле обращается в нуль. Если исходной посылкой для вывода закона Гука была обратимость деформаций, то последнее свойство указывает на обратимость работы внутренних сил, что в интуитивном плане столь же естественно для тел и процессов, именуемых упругими, но, как это будет видно из дальнейшего, обладает значительно большей эвристической ценностью при разработке соотношений нелинейной упругости.

Заметим, наконец, что все, что нам потребовалось для вывода закона Гука, это предположение о физической и геометрической линейности соотношений и изотропии материала. В этих условиях

\* При вычислении частных производных по тензорному аргументу  $\varepsilon_{ij}$  надо полагать, что компоненты со смешанными индексами независимы.

установочным (определяющим все материальные константы) может служить эксперимент с простейшим эталонным образцом — на растяжение — сжатие призматического стержня.

## § 2. ФОРМУЛА ГАМИЛЬТОНА — КЕЛИ. НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ

Как видно, соотношения (1.10), (1.15) кроме тензоров напряжений и деформаций содержат еще лишь один — единичный тензор. Это является прямым следствием предположенной изотропии материала, так что для такого материала по обнаружении в установочном эксперименте нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями при сохранении свойств обратимости деформаций нужно ожидать обобщения закона Гука в форме

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{mn}, \delta_{mn}). \quad (2.1)$$

Оказывается, что в силу тензорной природы входящих сюда величин функции  $f_{ij}$  не могут быть произвольными, в чем убеждает следующее рассуждение.

Наряду с некоторым тензором  $\mathbf{N}$ , который в декартовой прямоугольной системе координат с ортонормированным базисом из единичных векторов  $\mathcal{E}_i$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{N} = N_{ij} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j = \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j N_{ij}, \quad (2.2)$$

где  $\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j$  — так называемая диада (вообще  $\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j \neq \mathcal{E}_j \mathcal{E}_i$ ), введем степени этого тензора

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}, \mathbf{N}^3 = \mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{N}, \dots, \mathbf{N}^n = \mathbf{N}^{n-1} \cdot \mathbf{N}. \quad (2.3)$$

Здесь точкой обозначено действие, в координатной форме представляемое равенством

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = N_{ij} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j \cdot N_{mn} \mathcal{E}_m \mathcal{E}_n = N_{ij} \mathcal{E}_i (\mathcal{E}_j \mathcal{E}_m) \mathcal{E}_n N_{mn}, \quad (2.4)$$

где скобками выделено обычное скалярное произведение ближайших элементов диад, и для ортонормированного базиса

$$\mathcal{E}_j \cdot \mathcal{E}_m = \delta_{jm}.$$

Выполняя в (2.4) суммирование по повторяющимся индексам и замену немых индексов, получим

$$\mathbf{N}^2 = N_{im} N_{mj} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j = N_{ij}^2 \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j. \quad (2.5)$$

Теперь очевидно, что

$$\mathbf{N}^r = N_{ik_1} N_{k_1 k_2} \cdot \dots \cdot N_{k_{r-1} k_r} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j = N_{ij}^r \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j. \quad (2.6)$$

Если  $n_j$  — компоненты единичного вектора  $\mathbf{n}$ , вообще не совпадающего с ортами  $\mathcal{E}_i$ , то свертка компонент этого вектора и тензора  $\mathbf{N}$  образует вектор  $\mathbf{N}$  с компонентами

$$N_i = N_{ij} n_j, \quad (2.7)$$

причем  $\mathbf{N}$  не обязательно коллинеарен  $\mathbf{n}$ . Но среди множества векторов  $\mathbf{n}$  всегда найдутся три, для которых

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{n} \text{ или } N_i = \lambda n_i = \lambda \delta_{ij} n_j, \quad (2.8)$$

где  $\lambda$  — скаляр. Сопоставления (2.7) и (2.8) приводят к системе уравнений для отыскания этих направлений, которые носят название главных осей тензора  $\mathbf{N}$

$$(N_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (2.9)$$

В силу однородности определитель этой системы должен быть равен нулю, откуда следует кубическое уравнение для  $\lambda$

$$\lambda^3 - a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0 = 0. \quad (2.10)$$

Три корня этого уравнения:  $\lambda_1 = N_{11}^0$ ,  $\lambda_2 = N_{22}^0$ ,  $\lambda_3 = N_{33}^0$  — носят название главных значений тензора  $\mathbf{N}$ .

Ограничиваясь далее рассмотрением симметричных тензоров ( $N_{ij} = N_{ji}$ ), составим квадратичную форму

$$N_{ij} x_i x_j = \text{const},$$

представляющую поверхность второго порядка. Из теории таких поверхностей следует, что при  $N_{ij} = N_{ji}$  существуют три ортогональных направления с ортами  $\mathcal{E}_i^0$ , каждое из которых удовлетворяет уравнению (2.9) и в которых квадратичная форма приводится к каноническому виду, характеризуемому тем, что  $N_{ij}^0 = 0$  при  $i \neq j$ . Следовательно, матрица системы (2.9) приводится к диагональной форме, так что все три корня  $\lambda_2$  уравнения (2.10), представляющие главные значения тензора  $\mathbf{N}$ , действительны.

В силу сказанного в главных осях, т. е. в ортонормированном базисе  $\mathcal{E}_i^0$ , тензор  $\mathbf{N}$  представляется в виде

$$\mathbf{N} = N_{11}^0 \mathcal{E}_1^0 \mathcal{E}_1^0 + N_{22}^0 \mathcal{E}_2^0 \mathcal{E}_2^0 + N_{33}^0 \mathcal{E}_3^0 \mathcal{E}_3^0. \quad (2.11)$$

В этом базисе будут отсутствовать компоненты со смешанными индексами и для тензора любой степени  $\mathbf{N}^r$ , так как при  $i \neq k_1$ , или  $k_1 \neq k_2$  и т. д.,  $N_{ij}^r = 0$ . Следовательно, главные оси любой степени тензора  $\mathbf{N}$  совпадают, а сам тензор представим в том же виде, что и (2.11), с заменой  $N_{22}^0$  на  $(N_{22}^0)^r$ . Здесь и далее суммирования по  $\alpha$  нет.

Для каждого корня  $\lambda_\alpha = N_{22}^0$  в силу (2.10) можно записать

$$\begin{aligned} (N_{11}^0)^3 &= a_2 (N_{11}^0) + a_1 N_{11}^0 + a_0, \\ (N_{22}^0)^3 &= a_2 (N_{22}^0)^2 + a_1 N_{22}^0 + a_0, \\ (N_{33}^0)^3 &= a_2 (N_{33}^0)^2 + a_1 N_{33}^0 + a_0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Если первое из (2.12) умножить на диаду  $\mathfrak{A}_1^0 \mathfrak{A}_1^0$ , второе — на  $\mathfrak{A}_2^0 \mathfrak{A}_2^0$ , третье — на  $\mathfrak{A}_3^0 \mathfrak{A}_3^0$  и результаты сложить, то, как не трудно увидеть, получим

$$\mathbf{N}^3 = a_2 \mathbf{N}^2 + a_1 \mathbf{N}^1 + a_0 \mathbf{N}^0, \quad (2.13)$$

где, очевидно,  $\mathbf{N}^0 = \delta_{ij} \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_j = \delta$ . Тождество (2.13) носит название формулы Гамильтона—Кели и открывает возможность выразить любую степень тензора  $\mathbf{N}$  выше второй через его нулевую, первую и вторую степень. Для этого нужно последовательно умножить левую и правую части равенств типа (2.13) на  $\mathbf{N}$  в смысле, представляемом формулами (2.3)—(2.6), и после приведения подобных членов будем иметь

$$\mathbf{N}^r = b_2 \mathbf{N}^2 + b_1 \mathbf{N}^1 + b_0 \mathbf{N}^0, \quad (2.14)$$

где  $b_2, b_1, b_0$  — функции параметров  $a_2, a_1, a_0$  (можно заметить, что  $b_0 = a_0$ ).

Пусть теперь имеется зависимость

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N}, \delta) = \mathbf{M}(\mathbf{N}, \mathbf{N}^0). \quad (2.15)$$

Если эта зависимость аналитична, то ее можно представить в виде степенного ряда. Последний же в силу (2.14) свертывается в трехчлен

$$\mathbf{M} = A_0 \mathbf{N}^0 + A_1 \mathbf{N}^1 + A_2 \mathbf{N}^2. \quad (2.16)$$

Очевидно, что главные оси тензора  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{M}$  совпадают, а коэффициенты  $A_0, A_1, A_2$  являются функциями  $a_0, a_1, a_2$ , которые в силу (2.10) представляют три независимых инварианта тензора  $\mathbf{N}$  и которые в свою очередь можно считать функциями трех базисных инвариантов тензора  $\mathbf{N}$  (или, что то же, совместных базисных инвариантов тензоров  $\mathbf{N}$  и  $\delta$ )

$$N_{(1)} = N_{ij} \delta_{ij}, \quad N_{(2)} = \frac{1}{2} N_{ij} N_{ij}, \quad N_{(3)} = \frac{1}{3} N_{ik} N_{kj} N_{ji}. \quad (2.17)$$

Инвариантность этих параметров очевидна (каждое из них является скаляром), независимость следует из независимости коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$ , а то, что всякий другой инвариант может быть представлен как функции указанных базисных, легко следует из формулы Гамильтона — Кели.

В связи со сказанным зависимость (2.1) конкретизируется и представляется в форме

$$\sigma_{ij} = A_0(\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}, \varepsilon_{(3)}) \delta_{ij} + A_1(\dots) \varepsilon_{ij} + A_2(\dots) \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}. \quad (2.18)$$

Отметим, что при выводе формулы Гамильтона — Кели и, следовательно, (2.18) нигде не накладывались ограничения на величину компонент входящих тензоров, так что (2.18) может описы-

вать и физически и геометрически нелинейную упругость. В частном случае, когда

$$A_0 = \lambda \varepsilon_{(1)}, \quad A_1 = 2\mu, \quad A_2 = 0,$$

связь (2.18) вырождается в закон Гука.

### § 3. СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ СООТНОШЕНИЙ УПРУГОСТИ

Пример закона Гука подсказывает и другой путь построения определяющих соотношений нелинейной упругости — введение упругого потенциала  $W$ , существование которого будет обосновано в гл. V. Свойство зависимости потенциала  $W$  в линейной упругости только от инвариантов тензора деформаций отражает изотропию материала, и для такого материала оно должно быть сохранено и дополнено введением третьего инварианта. Форма же такой зависимости предполагается пока произвольной.

Итак, полагая, что

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad W = W(\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}, \varepsilon_{(3)}), \quad (3.1)$$

и используя очевидные формулы

$$\frac{\partial \varepsilon_{(1)}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{(2)}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ij}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{(3)}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}, \quad (3.2)$$

из сравнения (3.1) с (2.18) получим как условия потенциальности соотношений изотропной упругости

$$A_0 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{(1)}}, \quad A_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{(2)}}, \quad A_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{(3)}}, \quad (3.3)$$

что существенно упрощает установочный эксперимент, хотя и оставляет его не простым уже потому, что в нем нужно найти (или лучше сказать, приблизить) функцию трех переменных. Да еще возникают и технические трудности, поскольку уже недостаточно эксперимента с призматическим стержнем, нужен эксперимент с другим видом эталонного образца.

Одним из таких видов может быть шарик из данного материала в эксперименте на всестороннее сжатие (шарик в жидкости с нарастающим гидростатическим давлением). Очевидно, что при изотропии материала в таком эксперименте получим

$$\sigma_{(1)} = f'(\varepsilon_{(1)}). \quad (3.4)$$

Сделаем теперь предположение, что найденная таким образом зависимость сохраняется и при произвольном (а не только при гидростатическом) напряженно-деформированном состоянии, и зададим потенциал в виде

$$W = \frac{1}{3} f(\varepsilon_{(1)}) + W_*(\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}, \varepsilon_{(3)}). \quad (3.5)$$

На основании (3.1) и (3.2) получим

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} f' \delta_{ij} + \frac{\partial W_*}{\partial \varepsilon_{(1)}} \delta_{ij} + \frac{\partial W_*}{\partial \varepsilon_{(2)}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial W_*}{\partial \varepsilon_{(3)}} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}, \quad (3.6)$$

откуда с учетом (3.4) следует

$$3 \frac{\partial W_*}{\partial \varepsilon_{(1)}} + \frac{\partial W_*}{\partial \varepsilon_{(2)}} \varepsilon_{(1)} + 2 \frac{\partial W_*}{\partial \varepsilon_{(3)}} \varepsilon_{(2)} = 0, \quad (3.7)$$

Это линейное дифференциальное уравнение в частных производных, как известно, эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [60]:

$$\frac{d\varepsilon_{(1)}}{3} = \frac{d\varepsilon_{(2)}}{\varepsilon_{(1)}} = \frac{d\varepsilon_{(3)}}{2\varepsilon_{(2)}}, \quad (3.8)$$

интегрирование которых приводит, как нетрудно убедиться, к характеристикам

$$\varepsilon_{(2)} - \frac{\varepsilon_{(1)}^2}{6} = \xi, \quad \varepsilon_{(3)} - \frac{2}{3} \varepsilon_{(1)} \varepsilon_{(2)} + \frac{2}{27} \varepsilon_{(1)}^3 = \eta, \quad (3.9)$$

так что (как это следует из теории дифференциальных уравнений [60]) функция  $W_*$  является функцией не трех указанных в (3.5) аргументов, а только двух:  $\xi$  и  $\eta$ . Если теперь ввести девиаторы напряжений и деформаций

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{(1)} \delta_{ij}, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{(1)} \delta_{ij} \quad (3.10)$$

и выразить второй и третий инварианты девиатора деформаций (первый равен нулю) через три инварианта тензора деформаций, то получим

$$\Theta_{(2)} = \frac{1}{2} \Theta_{mn} \Theta_{mn} = \varepsilon_{(2)} - \frac{1}{6} \varepsilon_{(1)}^2, \quad (3.11)$$

$$\Theta_{(3)} = \frac{1}{3} \Theta_{mn} \Theta_{nh} \Theta_{km} = \varepsilon_{(3)} - \frac{2}{3} \varepsilon_{(1)} \varepsilon_{(2)} + \frac{2}{27} \varepsilon_{(1)}^3.$$

Следовательно,

$$\xi = \Theta_{(2)}, \quad \eta = \Theta_{(3)}. \quad (3.12)$$

Нужные для представления (3.6) частные производные от  $\xi$  и  $\eta$  по  $\varepsilon_{(\alpha)}$  будут

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon_{(1)}} = -\frac{1}{3} \varepsilon_{(1)}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon_{(2)}} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon_{(3)}} = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{(1)}} = \frac{2}{3} \left( \frac{\varepsilon_{(1)}^2}{3} - \varepsilon_{(2)} \right), \quad \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{(2)}} = -\frac{2}{3} \varepsilon_{(1)}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{(3)}} = 1,$$

так что, как легко проверить, соотношение (3.6) в новых переменных приобретает вид

$$S_{ij} = \frac{\partial W_*}{\partial \Theta_{(2)}} \Theta_{ij} + \frac{\partial W_*}{\partial \Theta_{(3)}} \left[ \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} - \frac{2}{3} (\varepsilon_{(2)} \delta_{ij} + \varepsilon_{(1)} \Theta_{ij}) \right]. \quad (3.14)$$

Переходя в скобках от тензоров к девиаторам, найдем, что стоящее там выражение равно

$$\Theta_{ik} \Theta_{kj} - \frac{2}{3} \Theta_{(2)} \delta_{ij} = \Theta_{ik}^* \Theta_{kj}^*, \quad (3.15)$$

а последнее представляет девиатор квадрата девиатора деформаций.

Действительно, первый инвариант тензора  $\Theta^2$  равен  $\Theta_{ik} \Theta_{kj} \delta_{ij}$ , т. е. удвоенному второму инварианту  $\Theta_{(2)}$  самого девиатора деформаций. Таким образом, окончательно имеем

$$S_{ij} = \frac{\partial W_*}{\partial \Theta_{(2)}} \Theta_{ij} + \frac{\partial W_*}{\partial \Theta_{(3)}} \Theta_{ik}^* \Theta_{kj}^*, \quad (3.16)$$

и, следовательно, поскольку  $W_* = W_*(\Theta_{(2)}, \Theta_{(3)})$ , то всякое соотношение нелинейной упругости, при условии, что связь (3.4) выполняется для любого вида напряженно-деформированного состояния, распадается на соотношение для шаровых частей тензоров напряжений и деформаций (3.4) и соотношение для их девиаторов.

В эксперименте на растяжение призматического стержня, когда  $\sigma_{ij} = 0$ , кроме  $\sigma_{11}$ ,  $\varepsilon_{ij} = 0$ , кроме  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ , имеем

$$S_{11} = \frac{2}{3} \sigma_{11}, \quad S_{22} = S_{33} = -\frac{1}{3} \sigma_{11} = -\frac{1}{2} S_{11}, \quad (3.17)$$

$$\Theta_{11} = \frac{2}{3} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad \Theta_{22} = -\frac{1}{3} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = \\ = \frac{1}{2} \Theta_{11}, \quad \Theta_{(2)} = \frac{3}{4} \Theta_{11}^2, \quad \Theta_{(3)} = \frac{1}{4} \Theta_{11}^3$$

и из (3.16) следует одно независимое соотношение

$$S_{11} = \frac{\partial W_*}{\partial \Theta_{(2)}} \Theta_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial W_*}{\partial \Theta_{(3)}} \Theta_{11}^2. \quad (3.18)$$

Задавая  $W_*$  в виде разложения с неизвестными коэффициентами типа

$$W_* = \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta} \Theta_{(1)}^\alpha \Theta_{(3)}^\beta = \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta} \left( \frac{3}{4} \Theta_{11}^2 \right)^\alpha \left( \frac{1}{4} \Theta_{11}^3 \right)^\beta \quad (3.19)$$

и аппроксимируя в такой же форме известную из эксперимента зависимость  $S_{11} \sim \Theta_{11}$ , можно с большей или меньшей точностью определить коэффициенты  $C_{\alpha\beta}$ .



Наиболее простым и широко используемым является случай, когда связь первых инвариантов линейна и  $W$  не зависит от  $\varepsilon_{(3)}$ , а следовательно,  $W_*$  не зависит от  $\mathcal{E}_{(3)}$ , т.е.

$$\sigma_{(1)} = k\varepsilon_{(1)}, \quad S_{ij} = \varphi(\mathcal{E}_{(2)})\delta_{ij}. \quad (3.20)$$

Одна неизвестная функция  $\varphi(\mathcal{E}_{(2)})$  определяется из эксперимента по растяжению — сжатию на основании следующей из (3.20) зависимости:

$$\varphi(\mathcal{E}_{(2)}) = \sqrt{\frac{S_{(2)}}{\mathcal{E}_{(2)}}}, \quad S_{(2)} = \frac{1}{2} S_{mn} S_{mn}. \quad (3.21)$$

Поскольку в этом случае по (3.17)

$$\mathcal{E}_{(2)} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2, \quad S_{(2)} = \frac{1}{3} \sigma_{11}^2 \quad (3.22)$$

и, следовательно,

$$\varphi(\mathcal{E}_{(2)}) = \left| \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}} \right|.$$

то измеренные в эксперименте при каждом значении  $\sigma_{11}$  деформации  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  определяют  $\sigma_{11}$  как функцию  $\varepsilon_{11} - \varepsilon_{21}$ , а следовательно, и функцию  $\varphi(\mathcal{E}_{(2)})$ .

Соотношение (3.20) относится к разряду тензорно-линейных, когда индексированные параметры (а не инварианты) входят в соотношение линейным образом. В общем случае физически нелинейного материала довольно трудно указать условия, когда тензорно-нелинейное соотношение, подобное (2.14), может быть сокращено до тензорно-линейного. Но в случае упругости ввиду потенциальности соотношений такое условие состоит, как мы видели, в пренебрежении кубическим инвариантом  $\varepsilon_{(3)}$  в выражении для потенциала  $W$ , которое может быть оправдано, например, малостью деформаций. В этих условиях соотношение (2.18) принимает вид

$$\sigma_{ij} = A_0(\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)})\delta_{ij} + A_1(\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)})\varepsilon_{ij}, \quad (3.23)$$

где, очевидно, коэффициенты  $A_0$ ,  $A_1$  от  $\varepsilon_{(3)}$  не зависят, и должно выполняться условие

$$\frac{\partial A_0}{\partial \varepsilon_{(2)}} = \frac{\partial A_1}{\partial \varepsilon_{(1)}}. \quad (3.24)$$

Все вышесказанное остается в силе, если поменять местами тензоры напряжений и деформаций. Так, вместо (3.23) как тензорно-линейное приближение к общему случаю нелинейной упругости будет справедливо соотношение

$$\varepsilon_{ij} = B_0(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)})\delta_{ij} + B_1(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)})\sigma_{ij}. \quad (3.25)$$

В рамках упругости наряду с потенциалом  $W = W(\varepsilon_{ij})$  существует потенциал  $\Phi = \Phi(\sigma_{ij})$ , определяемый соотношением

$$\Phi = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W. \quad (3.26)$$

Действительно, отсюда имеем

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.27)$$

так что для соотношений упругости, разрешенных относительно  $\varepsilon_{ij}$ , аналогично (1.13) должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{mn}} = \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.28)$$

которые в случае тензорно-линейного соотношения (3.25) приводят к равенствам

$$\frac{\partial B_0}{\partial \sigma_{(2)}} = \frac{\partial B_1}{\partial \sigma_{(1)}}. \quad (3.29)$$

В заключение приведем пример, когда найденная в приведенном выше эксперименте с шариком при гидростатическом давлении зависимость между  $\sigma_{(1)}$  и  $\varepsilon_{(1)}$  не выполняется для произвольного напряженно-деформированного состояния [39]. В соотношениях (3.25) зададим

$$B_0 = \sigma_{(1)}\varphi(\sigma_{(12)}), \quad B_1 = \psi(\sigma_{(12)}), \quad (3.30)$$

где инвариант  $\sigma_{(12)}$  представляется формулой

$$\sigma_{(12)} = \sigma_{(1)}/\sqrt{\sigma_{(2)}}. \quad (3.31)$$

Тогда соотношения (3.25) и, как нетрудно проверить, (3.29) будут

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \sigma_{(1)}\varphi(\sigma_{(12)})\delta_{ij} + \psi(\sigma_{(12)})\sigma_{ij}, \\ \psi' &= -2\sigma_{(12)}^2\varphi'. \end{aligned} \quad (3.32)$$

При всестороннем растяжении, когда  $\sigma_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ),

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{(1)} = 3\sigma_{11}, \quad \sigma_{(2)} = \frac{3}{2}\sigma_{11}^2, \quad \sigma_{(12)} = \sqrt{6}.$$

Из (3.32) следует

$$\varepsilon_{(1)} = [3\varphi(\sqrt{6}) + \psi(\sqrt{6})]\sigma_{(1)},$$

а при одноосном растяжении, когда  $\sigma_{ij} = 0$ , кроме  $\sigma_{11}$ ,

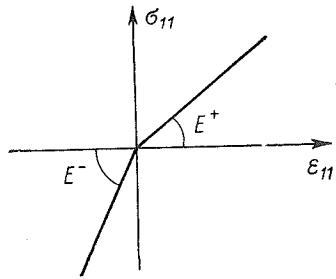


Рис. 1.3

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{11}, \quad \sigma_{(2)} = \frac{1}{2} \sigma_{11}^2, \quad \sigma_{(12)} = \sqrt{2},$$

$$\varepsilon_{(1)} = [3\varphi(\sqrt{2}) + \psi(\sqrt{2})] \sigma_{(1)},$$

так что соотношение  $\varepsilon_{(1)} \sim \sigma_{(1)}$  зависит от вида напряженного состояния и предположение, сделанное в предыдущем, в данном примере не выполняется.

Специфику поведения материала типа (3.32) проще всего проиллюстрировать в случае линейной функции  $\psi$  и следующей из (3.32) функции  $\varphi$

$$\psi = A + B\sigma_{(12)}, \quad \varphi = B/2\sigma_{(12)}, \quad (3.33)$$

т. е. для соотношения (3.32) в форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{B\sigma_{(1)}}{2\sigma_{(12)}} \delta_{ij} + (A + B\sigma_{(12)}) \sigma_{ij}.$$

При одноосном растяжении ( $\sigma_{11} \geq 0$ )

$$\varepsilon_{11} = \left[ A + \left( \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) B \right] \sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_+},$$

а при одноосном сжатии ( $\sigma_{11} \leq 0$ )

$$\varepsilon_{11} = \left[ A - \left( \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) B \right] \sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_-},$$

так что одноосная диаграмма  $\sigma \sim \varepsilon$  (рис. 1.3) имеет по растяжению модуль упругости  $E_+$ , а по сжатию —  $E_-$  и терпит излом при переходе через начало координат  $\sigma_{11} = \varepsilon_{11} = 0$ . В связи с этим модель изотропного упругого тела, описываемая соотношением типа (3.32), носит название разномодульной упругости.

#### § 4. АНИЗОТРОПНАЯ УПРУГОСТЬ

Соотношения изотропной упругости следуют из положения о том, что тензор деформаций зависит только от тензора напряжений и единичного тензора. В случае, если в эту зависимость включен другой тензор, отражающий микроструктуру материала, то это признак анизотропии.

Вообще если тензор  $\mathbf{M}$  представляется в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N}, \delta, \mathbf{R}), \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{R}$  — некоторый двухвалентный тензор и главные оси тензоров  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{R}$  не совпадают, то формула Гамильтона — Кели использована быть не может и требуются дополнительные исследования.

Сначала заметим, что, так же как и вектор в трехмерном евклидовом пространстве представляется через базовые вектора  $\mathcal{E}_i$  в виде

$$\mathbf{A} = A_i \mathcal{E}_i, \quad (4.2)$$

так и двухвалентный тензор может быть представлен не только через диады

$$\mathbf{B} = B_{ij} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j,$$

но и через базовые тензоры  $\mathbf{e}_{(\alpha)}$  [57]

$$\mathbf{B} = \sum_{\alpha=1}^n k_{\alpha} \mathbf{e}_{(\alpha)}, \quad (4.3)$$

где

$$\mathbf{e}_{(\alpha)} = e_{(\alpha)ij} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j \quad (4.4)$$

и являются линейно независимыми в том смысле, что определитель матрицы  $(e_{(\alpha)ij})$ , где  $(\alpha)$  означает строку, а  $i, j \rightarrow (\beta)$  — столбец, не равен нулю

$$|e_{(\alpha)(\beta)}| \neq 0. \quad (4.5)$$

Соответствие  $i, j$  и  $(\beta)$  можно устанавливать произвольно; в дальнейшем:  $11 \rightarrow (1)$ ,  $22 \rightarrow (2)$ ,  $33 \rightarrow (3)$ ,  $12 \rightarrow (4)$ ,  $13 \rightarrow (5)$ ,  $23 \rightarrow (6)$ . Коэффициенты  $k_{\alpha}$  в (4.3) — функции совместных инвариантов базовых тензоров. Для произвольного двухвалентного  $\mathbf{B}$  в формуле (4.3)  $n=9$ . Если тензор  $\mathbf{B}$  симметричен, то  $n=6$ . Для девятиатора  $n=5$ . Формула (2.16) является частным случаем разложения (4.3) при  $n=3$  и с базовыми тензорами  $\delta, \mathbf{N}, \mathbf{N}^2$ , линейная независимость которых легко устанавливается (и следует как частный случай из следующего анализа).

Обратимся теперь к представлению (4.1) и, следуя Седову [57], назовем в качестве базисных тензоров следующие\*:

$$\mathbf{e}_{(1)} = \delta, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \mathbf{N}, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \mathbf{N}^2, \quad \mathbf{e}_{(4)} = \mathbf{R}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{e}_{(5)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}, \quad \mathbf{e}_{(6)} = \mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}^2,$$

считая, что тензоры  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{R}$  — симметричны. Все, что требуется от параметров (4.6), это линейная независимость. Проверку этого проведем в координатной форме в системе координат, главных для тензора  $\mathbf{N}$ :

$$N_{ij} = \lambda_{\nu} \text{ при } i=j=\nu, \quad N_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (4.7)$$

Для  $\mathbf{R}$  оставляем общее представление с компонентами  $R_{ij}$ .

\* Отметим, что такое представление не единственное. Можно было бы, например, поменять в (4.6) местами  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{R}$ , что упростило бы соотношение  $\mathbf{M} \sim \mathbf{N}$  до тензорно-линейного.

Выпишем определитель  $|e_{(\alpha)(\beta)}|$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & R_{22} & R_{33} & R_{12} & R_{13} & R_{23} \\ 2\lambda_1 R_{11} & 2\lambda_2 R_{22} & 2\lambda_3 R_{33} & R_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) & R_{13}(\lambda_1 + \lambda_3) & R_{23}(\lambda_2 + \lambda_3) \\ 2\lambda_1^2 R_{11} & 2\lambda_2^2 R_{22} & 2\lambda_3^2 R_{33} & R_{12}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) & R_{13}(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) & R_{23}(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \end{vmatrix}$$

Очевидно, он равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & \lambda_1^2 + \lambda_3^2 & \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{vmatrix} R_{12} R_{13} R_{23} = \\ = -(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 (\lambda_3 - \lambda_1)^2 R_{12} R_{13} R_{23}.$$

Если  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  различны и  $R_{ij} \neq 0$  ( $i \neq j$ ), то данный детерминант отличен от нуля и, следовательно, система тензоров (4.6) линейно независима. Обращение в нуль одной или нескольких компонент  $R_{ij}$  соответственно понижает размерность ( $\alpha$ ) пространства базовых тензоров.

В общем случае (4.1), таким образом, будет представляться соотношением

$$\mathbf{M} = k_1 \delta + k_2 \mathbf{N} + k_3 \mathbf{N}^2 + k_4 \mathbf{R} + \\ + k_5 (\mathbf{N} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}) + k_6 (\mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}^2), \quad (4.8)$$

где  $k_\alpha$  — скалярные функции совместных инвариантов базисных тензоров (4.6).

Рассмотрим частный случай, когда в качестве структурного параметра выступает вектор  $\mathbf{C}$ , как это имеет место в однонаправленном композите (в общей теории — это случай трансверсальной изотропии). образуем нужный для применения формулы (4.8) тензор  $\mathbf{R}$

$$R_{ij} = C_i C_j, \quad |\mathbf{C}| = 1, \quad (4.9)$$

где  $C_i$  — компонента единичного вектора  $\mathbf{C}$ . Полагая  $\mathbf{M} = \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{N} = \boldsymbol{\sigma}$ , получим

$$\varepsilon_{ij} = k_1 \delta_{ij} + k_2 \sigma_{ij} + k_3 \sigma_{ik} \sigma_{kj} + k_4 C_i C_j + \\ + \frac{1}{2} k_5 (\sigma_{ik} C_k C_j + \sigma_{kj} C_i C_k) + \\ + \frac{1}{3} k_6 (\sigma_{im} \sigma_{mn} C_n C_j + \sigma_{jm} \sigma_{mj} C_i C_n). \quad (4.10)$$

В линейном случае эта связь вырождается в следующую:

$$\varepsilon_{ij} = k_1 \delta_{ij} + k_2 \sigma_{ij} + k_4 C_i C_j + \frac{1}{2} k_5 (\sigma_{ik} C_k C_j + \sigma_{kj} C_k C_i), \quad (4.11)$$

где  $k_2, k_5$  — постоянные,  $k_1, k_4$  — линейные скалярные функции совместных инвариантов, а следовательно, линейные функции линейных совместных инвариантов  $\delta, \sigma, \mathbf{R}$ . Таковых только два:

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{mn} \delta_{mn} \quad \text{и} \quad \sigma_{(1)}^c = \sigma_{mn} C_m C_n, \quad (4.12)$$

поэтому коэффициенты  $k_1$  и  $k_4$  должны представляться в виде

$$k = k' \sigma_{mn} \delta_{mn} + k'' \sigma_{mn} C_m C_n = k' \sigma_{(1)} + k'' \sigma_{(1)}^c. \quad (4.13)$$

Инвариант  $C_k C_k = 1$  в качестве слагаемого, как и любая другая постоянная величина, в  $k$  входить не может, ибо в противном случае нарушается требование существования естественного состояния (при  $\sigma_{ij} = 0$  должно быть  $\varepsilon_{ij} = 0$ ).

Переобозначая коэффициенты в (4.11), запишем

$$\varepsilon_{ij} = (A_1 \sigma_{(1)} + A_2 \sigma_{(1)}^c) \delta_{ij} + A_3 \sigma_{ij} + (A_4 \sigma_{(1)} + \\ + A_4 \sigma_{(1)}^c) C_i C_j + \frac{1}{2} A_5 (\sigma_{ik} C_k C_j + \sigma_{kj} C_k C_i).$$

Требование потенциальности связи  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \boldsymbol{\sigma}$  (3.28)

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{mn}} = \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4.14)$$

как нетрудно проверить, приводит к условию

$$A_4' = A_2, \quad (4.15)$$

в результате

$$\varepsilon_{ij} = (A_1 \sigma_{(1)} + A_2 \sigma_{(1)}^c) \delta_{ij} + A_3 \sigma_{ij} + (A_2 \sigma_{(1)} + \\ + A_4 \sigma_{(1)}^c) C_i C_j + \frac{1}{2} A_5 (\sigma_{ik} C_k C_j + \sigma_{kj} C_k C_i). \quad (4.16)$$

Пусть вектор  $\mathbf{C}$  направлен вдоль оси  $x_3$ ,

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad (4.17)$$

тогда (4.16) дает

$$\varepsilon_{ij} = (A_1 \sigma_{(1)} + A_2 \sigma_{(1)}^c) \delta_{ij} + A_3 \sigma_{ij} + (A_2 \sigma_{(1)} + A_4 \sigma_{(1)}^c) \delta_{i3} \delta_{j3} + \\ + \frac{1}{2} A_5 (\sigma_{i3} \delta_{j3} + \sigma_{3j} \delta_{i3}). \quad (4.18)$$

В эксперименте с призматическим стержнем, вырезанным в направлении  $x_3$ , по растяжению — сжатию, когда  $\sigma_{ij} = 0$ , кроме  $\sigma_{33}$ , из (4.18) имеем

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = (A_1 + A_2) \sigma_{33} = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0, \\ \varepsilon_{33} = (A_1 + A_3 + 2A_2 + A_4 + A_5) \sigma_{33},$$

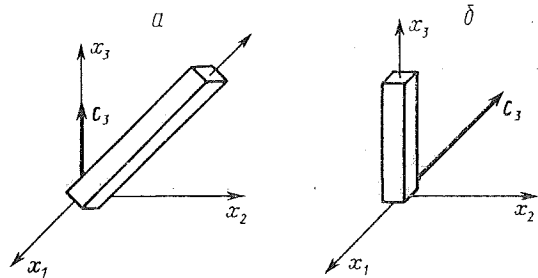


Рис. 1.4

что дает два уравнения для определения  $A_k$ :

$$A_1 + A_3 + 2A_2 + A_4 + A_5 = \frac{1}{E_3}, \quad (4.19)$$

$$A_1 + A_2 = -\frac{\nu_{31}}{E_3},$$

где  $E_3$  — модуль Юнга в направлении  $x_3$ , а  $\nu_{31}$  — соответствующий коэффициент Пуассона.

Остальные уравнения можно получить из эксперимента на растяжение—сжатие призматического образца, вырезанного под углом  $\pi/4^*$  к вектору  $C$ , например ортогонально к направлению  $x_1$  (рис. 1.4, а). Это то же самое, как если бы мы вырезали образец вдоль оси  $x_3$ , а вектор  $C$  направили бы по биссектрисе координатного угла  $x_2x_3$ , т. е. применительно к соотношению (4.16) положили бы (рис. 1.4, б)

$$C_1 = 0, \quad C_2 = C_3 = 1/\sqrt{2}. \quad (4.20)$$

В этих условиях растяжение—сжатие напряжением  $\sigma_{33}$  приводит к уравнениям

$$A_1 + A_2 + A_3 + \frac{1}{4}A_4 + \frac{1}{2}A_5 = \frac{1}{E_3'},$$

$$A_1 + A_2 + \frac{1}{4}A_4 = -\frac{\nu_{32}'}{E_3'}, \quad (4.21)$$

$$A_1 + \frac{1}{2}A_2 = -\frac{\nu_{31}'}{E_1'},$$

где  $E_1'$ ,  $E_3'$ ,  $\nu_{32}'$ ,  $\nu_{31}'$  — аналоги модуля Юнга и коэффициента Пуассона для наклонного стержня.

\* Проще было бы иметь дело с образцом, вырезанным вдоль оси  $x_2$  (или  $x_1$ ). Но в этом случае эксперимента на растяжение—сжатие было бы недостаточно, ибо он добавляет к (4.19) только одно независимое уравнение.

После того как из системы пяти уравнений (4.19), (4.21) будут найдены пять постоянных  $A_k$ , можно представить закон упругости данного материала в главных осях тензора  $R$ , т. е., например, в виде (4.18), в координатной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} (\sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22} - \nu_{13}\sigma_{33}), & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_1} (\sigma_{22} - \nu_{12}\sigma_{11} - \nu_{23}\sigma_{33}), & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3} [\sigma_{33} - \nu_{13}(\sigma_{11} + \sigma_{22})], & \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2G_{13}} \sigma_{31}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} &= A_1 + A_3, & \frac{1}{E_3} &= A_1 + 2A_2 + A_3 + A_5, & \frac{\nu_{31}}{E_3} &= \frac{\nu_{13}}{E_1}, \\ \nu_{21} &= \nu_{12} = -E_1 A_1, & \nu_{13} &= -E_3(A_1 + A_2), & \nu_{23} &= \nu_{13}, \\ \frac{1}{2G_{12}} &= A_3, & \frac{1}{2G_{13}} &= A_3 + \frac{1}{2}A_5 = \frac{1}{2G_{23}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Как видно, для определения механических свойств трансверсально изотропного линейно-упругого тела можно обойтись двумя экспериментами на растяжение—сжатие призматических стержней прямоугольного поперечного сечения с измерением осевого удлинения и двух (для наклонного к  $x_3$  образца) поперечных сужений. Отметим, что в наклонном образце кроме деформаций  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  возникает и сдвиговая деформация  $\varepsilon_{23}$ , измерение которой (например, с помощью крестообразно расположенных тензодатчиков на боковой грани, параллельной плоскости  $x_2x_3$ ) дает соотношение

$$\frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{4}A_4 + \frac{1}{4}A_5 = 1/2G_{23}', \quad (4.24)$$

где  $G_{23}'$  — модуль сдвига в плоскости  $x_2x_3$ . Соотношение (4.24) может служить контрольным, если произведены указанные выше измерения, но может выполнять роль замыкающего уравнения для определения  $A_k$  взамен последнего из уравнений (4.21), связанного с измерением поперечного сужения на грани образца, ортогональной к плоскости  $x_2x_3$ . Таким образом открывается возможность использования для определения свойств рассматриваемого материала плоских эталонных образцов, для которых измерение  $\nu_{31}'$  представляет определенные трудности.

Изложенный материал представляет простой и весьма поучительный пример того, как общезначимые соображения позволяют не только конкретизировать вид определяющего соотношения, но и выявить оптимальную стратегию установочного эксперимента.

## § 5. АНИЗОТРОПИЯ ТЕНЗОРНО-ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

Переходя к рассмотрению нелинейной трансверсально-изотропной упругости, представим соотношение (4.21) в виде, разрешенном относительно напряжений, для чего достаточно положить в разложении (4.8)  $\mathbf{M}=\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{N}=\boldsymbol{\varepsilon}$ , и ограничимся в дальнейшем тензорно-линейным приближением

$$\sigma_{ij} = \kappa_1 \delta_{ij} + \kappa_2 C_i C_j + \kappa_3 \varepsilon_{ij} + \kappa_4 \varphi_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (5.1)$$

$$\varphi_{ij} = (\varepsilon_{ik} C_k C_j + \varepsilon_{jh} C_h C_i)/2.$$

Здесь в силу потенциальности и тензорной линейности параметры  $\kappa_k$  и потенциал  $W$  являются функциями четырех независимых инвариантов тензоров  $\delta_{ij}$ ,  $C_i C_j$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varphi_{ij}$ , например

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(1)} &= \varepsilon_{mn} \delta_{nm}, & \varepsilon_{(1)}^c &= \varepsilon_{mn} C_n C_m, \\ \varepsilon_{(2)} &= \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nm}/2, & \varepsilon_{(2)}^c &= \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nh} C_m C_h/2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

которые получаются сверткой тензоров  $\varepsilon_{ij}$  и  $\varphi_{ij}$  с  $\delta_{ij}$ ,  $C_i C_j$  и  $\varepsilon_{ij}$ . Все другие линейные и квадратичные инварианты указанных тензоров являются функциями (5.2). Кубические инварианты в тензорно-линейной связи  $\boldsymbol{\sigma} \sim \boldsymbol{\varepsilon}$  отсутствуют.

Заметим теперь, что для анизотропного тела количество независимых инвариантов выше, чем для изотропного. Так, при тензорной линейности в изотропном случае имеются только два инварианта  $\varepsilon_{(1)}$  и  $\varepsilon_{(2)}$ , для трансверсальной изотропии, как только что выяснено, их уже четыре. Это, однако, не означает, что анизотропное тело более «инвариантно», чем изотропное. Просто это компенсация за увеличение аргументов в определяющем соотношении анизотропного тела, что явным образом и отражено присутствием в (5.2) компонент вектора  $\mathbf{C}$ , хотя последнее может оказаться незаметным при выборе конкретной системы координат, жестко связанной с вектором  $\mathbf{C}$  — осью трансверсальной изотропии.

Если такую ось совместить с координатой  $x_3$ , т. е. положить  $C_1=C_2=0$ ,  $C_3=1$ , то окажется, что

$$\varepsilon_{(1)}^c = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{(2)}^c = \varepsilon_{1h} \varepsilon_{h3}/2.$$

Следовательно, в качестве линейных инвариантов можно взять

$$x = \varepsilon_{(1)} - \varepsilon_{(1)}^c = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \quad y = \varepsilon_{(1)}^c = \varepsilon_{33}, \quad (5.3)$$

что рассоединяет зависимость первого от компонент с индексом 3, а второго от компонент с индексами 1 и 2.

Попытаемся добиться такого рассоединения и в квадратичных инвариантах. Для этого представим их в следующем виде:

$$X = Ax^2 + By^2 + C\varepsilon_{(2)} + D\varepsilon_{(2)}^c,$$

$$Y = ax^2 + by^2 + c\varepsilon_{(2)} + d\varepsilon_{(2)}^c$$

и потребуем, чтобы

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \varepsilon_{12}} = \frac{\partial X}{\partial \varepsilon_{23}} = \frac{\partial X}{\partial \varepsilon_{33}} &= 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_{11}} = \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_{12}} = \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_{22}} &= 0^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$D=2C, \quad B=C/2, \quad a=c=0.$$

Коэффициенты  $A$ ,  $C$ ,  $b$ ,  $d$  остаются произвольными, и для максимального упрощения выражений  $X$  и  $Y$  положим

$$A=-1/2, \quad C=1, \quad b=-1/2, \quad d=1$$

и в результате получим

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon_{(2)} - 2\varepsilon_{(2)}^c + x^2/4 + y^2/2 = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2/4 + \varepsilon_{12}^2, \\ Y &= \varepsilon_{(2)}^c - y^2/2 = \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ненулевыми производными от инвариантов (5.3), (5.4) являются следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_{11}} = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_{22}} = \frac{\partial y}{\partial \varepsilon_{33}} &= 1, & \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_{12}} &= \varepsilon_{12}, & \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_{23}} &= \varepsilon_{23}, \\ \frac{\partial X}{\partial \varepsilon_{11}} = -\frac{\partial X}{\partial \varepsilon_{22}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), & \frac{\partial X}{\partial \varepsilon_{12}} &= \varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Очевидно, что аналогичное представление инвариантов будет иметь место и для напряжений, поскольку разрешенное относительно  $\varepsilon_{ij}$  соотношение (5.1) сохраняет форму (5.1) с заменой  $\boldsymbol{\sigma}$  на  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и наоборот. В частности, будут инвариантными выражения

$$u = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad v = \sigma_{33}, \quad (5.6)$$

для которых, как нетрудно проверить на основании формул (5.5), представление через потенциал  $W$  сводится к простым соотношениям:

$$u = 2 \frac{\partial W}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial y}. \quad (5.7)$$

Сделаем теперь предположение, обобщающее (3.4) на трансверсально-изотропное тело. Будем считать, что вне зависимости от вида напряженно-деформированного состояния линейные инварианты напряжений зависят только от линейных инвариантов деформаций

$$u = 2\varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y). \quad (5.8)$$

\* Напомним, что при вычислении частных производных по  $\varepsilon_{ij}$  надо считать  $\varepsilon_{ij}$  при  $i \neq j$  независимыми.

В этих условиях, если задать

$$W(x, y, X, Y) = W^0(x, y) + W^*,$$

и определить  $W^0$  так, чтобы

$$u = 2 \frac{\partial W^0}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial W^0}{\partial y} \left( \psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + f(y) \right), \quad (5.9)$$

то в силу (5.7) обнаруживается, что

$$\frac{\partial W^*}{\partial x} = \frac{\partial W^*}{\partial y} = 0. \quad (5.10)$$

Таким образом, в предположении (5.8) проблема экспериментального определения  $W$  как функции четырех параметров, практически невыполнимая, сводится к определению двух функций от двух пар аргументов

$$W = W^0(x, y) + W^*(X, Y), \quad (5.11)$$

что уже значительно проще. В результате для связи  $\sigma \sim \varepsilon$ , с использованием формул (5.5) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial W^0}{\partial x} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \frac{\partial W^*}{\partial X}, \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial W^0}{\partial x} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \frac{\partial W^*}{\partial X}, \\ \sigma_{33} &= \frac{\partial W^0}{\partial y}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial W^*}{\partial X} \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} &= \frac{\partial W^*}{\partial Y} \varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = \frac{\partial W^*}{\partial Y} \varepsilon_{23}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

При простом растяжении — сжатии образца, вырезанного в направлении оси  $x_3$ , очевидно, что  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu_{31} \varepsilon_{33}$ , т. е.  $x = -2\nu_{31} \varepsilon_{33}$ ,  $y = \varepsilon_{33}$ , и из (5.12) следует

$$\frac{\partial W^0}{\partial y} = \sigma_{33}, \quad \frac{\partial W^0}{\partial x} = 0. \quad (5.13)$$

Аналогично, для подобного нагружения образца, вырезанного в направлении оси  $x_1$ , когда  $\varepsilon_{22} = -\nu_{12} \varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{33} = -\nu_{13} \varepsilon_{11}$ , т. е.  $x = (1 - \nu_{12}) \varepsilon_{11}$ ,  $y = -\nu_{13} \varepsilon_{11}$ , будем иметь

$$\frac{\partial W^0}{\partial x} = \frac{\sigma_{11}}{2}, \quad \frac{\partial W^0}{\partial y} = 0, \quad (5.14)$$

$$2 \frac{\partial W^0}{\partial x} = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \frac{\partial W^*}{\partial X}.$$

Известен частный случай (5.12), когда связь линейных инвариантов полагалась линейной (упрощенная теория [46]), что эквивалентно заданию  $W^0$  в форме

$$W^0 = \alpha x^2/2 + \beta xy + \gamma y^2/2, \quad (5.15)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — материальные константы. В этом случае из условий (5.13) и первых двух из (5.14) найдем

$$2\nu_{31} = \beta/\alpha, \quad 2\nu_{13} = \beta E_1 (\alpha\gamma - \beta^2), \quad 2(1 - \nu_{12}) = \gamma E_1 / (\alpha\gamma - \beta^2), \quad (5.16)$$

$$E_1 = \sigma_{11}/\varepsilon_{11}, \quad E_3 = \sigma_{33}/\varepsilon_{33} = \gamma - \beta^2/\alpha, \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31},$$

а также то, что при простом растяжении образцов, вырезанных вдоль координатных осей, зависимость  $\sigma \sim \varepsilon$  будет линейной. Из последнего условия (5.14), которое должно выполняться, кроме указанных выше условий на  $x$  и  $y$ , так же при  $X = (1 + \nu_{12})^2 \varepsilon_{11}^2/4$ ,  $Y = 0$ , вытекает требование

$$\left. \frac{\partial W^*}{\partial X} \right|_{Y=0} = \text{const.} \quad (5.17)$$

Здесь запись без указания конкретного вида  $X$  возможна потому, что конкретизация переменной  $X$  в форме, указанной выше, не мешает ей пробегать все свои возможные значения. Это положение остается в силе и при  $X = \varepsilon_{12}^2$  (чистый сдвиг в плоскости  $x_1 x_2$ ).

Таким образом, принятие  $W^0$  в форме (5.15) приводит к линеаризации связи с деформациями компонент  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$ . Нелинейность допускается только для компонент  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{23}$ . Более содержательно предлагаемое в той же работе [46] упрощение, состоящее в том, что  $W^* = P(X) + Q(Y)$ .

Заметим, что изложенный выше подход годится для любого тензора  $R$ . Действительно, все приведенные выше формулы остаются справедливыми, если в них заменить  $C_i C_j$  на  $R_{ij}$ .

До сих пор рассматривалась зависимость  $\sigma \sim \varepsilon$ , включающая только один структурный тензор  $R$ . Очевидно, однако, что если расширить представление (4.1) введением других симметричных двухвалентных тензоров

$$M = M(\delta, N, R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(n)}), \quad (5.18)$$

где, например,  $R^{(1)}$  удовлетворяет требованиям линейной независимости базисных тензоров (4.6), то представление (4.9) с заменой  $R$  на  $R^{(1)}$  будет оставаться законным, с тем лишь изменением, что теперь коэффициенты  $k_\alpha$  будут функциями совместных инвариантов всех входящих в (5.18) тензоров. Например, если материал обладает тремя осями упругой анизотропии (ортотропия), а эти направления характеризуются единичными векторами  $a, b, c$ , то в представлении (5.18) в качестве  $R^{(a)}$  надо взять три следующих:

$$R_{ij}^{(1)} = a_i a_j, \quad R_{ij}^{(2)} = b_i b_j, \quad R_{ij}^{(3)} = c_i c_j. \quad (5.19)$$

В линейном случае число упругих постоянных вместо 5 для трансверсальной изотропии, например при ортогональных векторах  $a, b, c$  (ортотропия), возрастет до 9.

Надо отметить, что вообще для линейной и геометрически и физически упругости проще пользоваться не разложениями типа (4.6), а использовать непосредственную процедуру установления типа симметрии матрицы  $E_{ijmn}$  в представлении

$$\sigma_{ij} = E_{ijmn} \varepsilon_{mn}, \quad (5.20)$$

где с учетом симметрии  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , потенциальности и малости деформаций

$$E_{ijkl} = E_{jilm} = E_{ijlm} = E_{mnij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,l} + u_{l,i}). \quad (5.21)$$

В общем случае матрица  $E_{ijmn}$  содержит, как видно, 21 константу. Если имеется одна плоскость симметрии  $x_1x_2$  (см., например, [54]\*), то при замене  $x_1 = x_1'$ ,  $x_2 = x_2'$ ,  $x_3 = -x_3'$  компоненты перемещения  $u_1, u_2$  останутся неизменными, а  $u_3 = -u_3'$ . Следовательно, по (5.21),  $\varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij}$ , кроме  $\varepsilon_{13}' = -\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}' = -\varepsilon_{23}$ , в то же время  $\sigma_{ij}' = \sigma_{ij}$  при любых  $i, j$ ; отсюда вытекает, что среди 21 константы в  $E_{ijmn}$  должны быть приравнены нулю  $E_{1123}$ ,  $E_{1113}$ ,  $E_{2223}$ ,  $E_{2213}$ ,  $E_{3323}$ ,  $E_{2312}$ ,  $E_{1312}$ ,  $E_{3313}$ , т. е. те составляющие, которые содержат индекс 3 один или три раза. Таким образом, в данном случае матрица  $E_{ijmn}$  содержит 13 констант.

Если имеется вторая плоскость симметрии механических свойств, например  $x_1x_3$ , то кроме вышеназванного обращаются в нуль и те компоненты  $E_{ijmn}$ , которые имеют индекс 2, встречающийся один или три раза, т. е.  $E_{2331}$ ,  $E_{1112}$ ,  $E_{2212}$ ,  $E_{3312}$ , и количество констант материала сокращается до 9. Попутно обнаруживается, что оставшиеся компоненты  $E_{ijmn}$  не содержат один и три раза индекс 1 и, следовательно, материал, имеющий две ортогональные плоскости симметрии механических свойств, имеет и третью ортогональную. А это упомянутый выше ортотропный материал. Такой материал в координатах  $x_1x_2x_3$  — главных осях ортотропии — содержит девять компонент матрицы  $E_{ijmn}$ , имеющих попарно одинаковые индексы.

Наконец, обратимся к проблеме анизотропии упругих тел в связи со следующим интересным обстоятельством. В некоторых задачах механики деформируемых твердых тел (устойчивость, волны малой амплитуды и т. д.) необходимо иметь соотношение между малыми (бесконечно малыми) приращениями напряжений и деформаций. Так вот оказывается, что, несмотря на изотропию тела при нагружении из естественного состояния, связь этих приращений характеризуется некой анизотропией, проявляемой при догрузке из уже деформированного состояния.

\* Общий анализ групп симметрий линейно-упругих тел (кристаллов) можно найти в книге [58]. Оригинальный подход к этой проблеме развит в работе [55].

Это положение проиллюстрируем на примере тензорно-линейной связи (3.23), (3.24), представив ее в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{(1)}} \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{(2)}} \varepsilon_{ij}, \quad W = W(\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}). \quad (5.22)$$

Отсюда для приращений  $d\sigma_{ij}$ ,  $d\varepsilon_{ij}$  получим

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{(2)}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{(1)}^2} \delta_{ij} \delta_{mn} d\varepsilon_{mn} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{(1)} \partial \varepsilon_{(2)}} \delta_{ij} \varepsilon_{mn} d\varepsilon_{mn} + \frac{\partial^3 W}{\partial \varepsilon_{(1)} \partial \varepsilon_{(2)}} \varepsilon_{ij} \delta_{mn} d\varepsilon_{mn} + \frac{\partial^3 W}{\partial \varepsilon_{(2)}^2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} d\varepsilon_{mn},$$

или при введении обозначений

$$A = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{(2)}}, \quad B = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{(1)}^2}, \quad C = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{(1)} \partial \varepsilon_{(2)}}, \quad D = \frac{\partial^3 W}{\partial \varepsilon_{(2)}^2}, \quad (5.23)$$

для матрицы  $E'_{ijmn}$  в представлении

$$d\sigma_{ij} = E'_{ijmn} d\varepsilon_{mn} \quad (5.24)$$

будем иметь

$$E'_{ijmn}(\varepsilon_{pq}) = A \delta_{im} \delta_{jn} + B \delta_{ij} \delta_{mn} + C(\varepsilon_{mn} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \delta_{mn}) + D \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn}. \quad (5.25)$$

Поскольку на основании (5.23)

$$C = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{(1)}}, \quad D = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{(2)}}, \quad (5.26)$$

то при фиксированном состоянии  $\varepsilon_{ij}$  связь (5.24) отвечает специальной трехмодульной анизотропии, которая в главных осях тензора  $\varepsilon_{ij}$  характеризуется следующими ненулевыми мгновенными упругими модулями:

$$\begin{aligned} E'_{\alpha\alpha\alpha\alpha} &= A + B + 2C\varepsilon_{\alpha\alpha} + D\varepsilon_{\alpha\alpha}^2, \\ E'_{\alpha\alpha\beta\beta} &= B + C(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}) + D\varepsilon_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\beta\beta}, \\ E'_{\alpha\beta\alpha\beta} &= A. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Здесь суммирование по  $\alpha, \beta$  отсутствует и  $\alpha \neq \beta$ .

Проблема прочности конструкций, деталей машин и механизмов всегда представляла одну из главных забот человеческой деятельности. Подходы к решению этой проблемы долгое время основывались на чисто феноменологических критериях. Старшее поколение ученых и инженеров еще застало времена, когда узаконенным был расчет на прочность по максимальным напряжениям, максимальным деформациям и другим параметрам, вычисляемым для сплошного тела. Нельзя сказать, что при этом полностью игнорировались возможные в теле полости, трещина и другие дефекты. Однако бытовало мнение, что при малых размерах таких образований их роль в определении начала разрушения незначительна и сказывается только на послекритическом поведении уже разрушающейся конструкции.

Лишь постепенно, по мере накопления случаев разрушения конструкций, благополучных в отношении традиционных прочностных расчетов, эти малые дефекты стали вызывать более пристальное внимание. К тому же стала осознаваться серьезность выводов уже известной к тому времени работы Гриффитса о трещине. Начался этап пересмотра причин разрушения, который привел (в особенности после серии катастроф судов и газопроводов конца сороковых годов) к интенсивному развитию теорий трещин с целью адекватного предсказания начала разрушения и его послекритического режима.

Примерно с этого времени начался лавинообразный рост публикаций на эту тему, так что к настоящему моменту накоплен огромный материал по теории трещин. Изложить все детали этого направления здесь невозможно, и автор при написании этой главы руководствовался в основном желанием выявить физико-математическую подоплеку тех положений, которые составляют основу современной теории трещин.

### § 1. МИКРОСТРУКТУРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ

Рассмотрим идеальную структуру кристалла в виде упорядоченных рядов молекул (атомов) (рис. 2.1), взаимодействующих в соответствии с законом Ван-дер-Ваальса

$$V = A_0 r^{-\alpha} - B_0 r^{-\beta}. \quad (1.1)$$

Здесь  $r$  — расстояние между двумя уединенными атомами,  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — постоянные, характеризующие вид взаимодействия

(металлическая, ковалентная и ионная связь). Представляется вполне естественным, что при растяжении в направлении  $x_2$  силой  $P$ , отнесенной к единице длины в направлении, ортогональном чертежу, достаточно большого объема такой структуры, горизонтальные ряды молекул будут равномерно расходиться, оставаясь параллельными. Ввиду быстрого затухания сил взаимодействия (1.1) с расстоянием (коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  достаточно велики) можно считать, что приложение силы  $P$  сводится к возникновению сил взаимодействия лишь ближайших рядов молекул, так что аналогично (1.1)

$$P = n(A'r^{-\alpha} - B'r^{-\beta}), \quad n = S/b^2, \quad (1.2)$$

где  $n$  — число молекул на площадке  $S$  при  $x_2 = 0$ ,  $b$  и  $c$  — межмолекулярные расстояния в направлениях  $x_1$  и ортогональном к чертежу соответственно. Отличие коэффициентов  $A'$  и  $B'$  от таковых в (1.1) связано со сдвигом одного горизонтального слоя молекул по отношению к соседнему.

Очевидно, что отмеченный сдвиг не влияет на показатели  $\alpha$  и  $\beta$  степеней, а переменную  $r$  теперь надо понимать как текущее расстояние между соседними горизонтальными рядами молекул.

В результате для удельного усилия  $\sigma$  будем иметь

$$\sigma = Ar^{-\alpha} - Br^{-\beta}, \quad \sigma = P/S, \quad (1.3)$$

где новые постоянные  $A$ ,  $B$  могут быть определены по заданным  $A_0$ ,  $B_0$ , но для последующего их значения несущественны.

Характерный график зависимости представлен на рис. 2.2. Точка  $a$  отвечает расстоянию между горизонтальными рядами в исходном ненапряженном состоянии и на основании (1.3) определяется формулой

$$a = \left( \frac{B}{A} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}. \quad (1.4)$$

Угловым наклоном кривой в точке  $r = a$ , значение  $r = r_0$ , отвечающее максимуму  $\sigma$ , и сам этот максимум  $\sigma_{th}$  с учетом (1.4), как легко видеть, определяются формулами

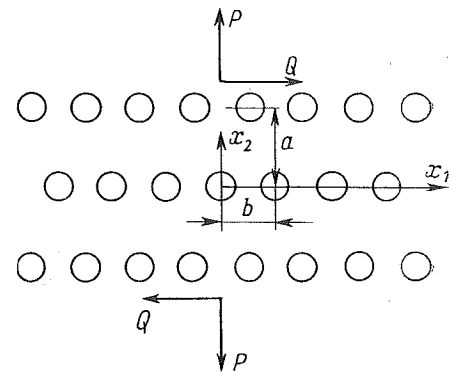


Рис. 2.1

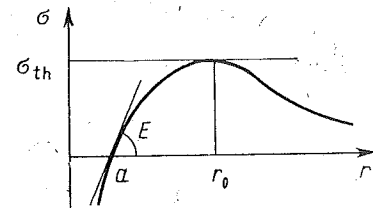


Рис. 2.2



$$\left. \frac{d\sigma}{dr} \right|_{r=a} = a^{-\beta-1} B(\beta-\alpha), \quad r_0 = a \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}},$$

$$\sigma_{th} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} B(\beta-\alpha) a^{-\beta}. \quad (1.5)$$

Удельное усилие  $\sigma$  в макроэксперименте отвечает нормальному напряжению в направлении  $x_2$ . Ему соответствует осевая деформация

$$\varepsilon = \frac{r}{a} - 1. \quad (1.6)$$

Поэтому первая из формул (1.5) определяет коэффициент связи  $\sigma \sim \varepsilon$  на начальном участке, который в макроэксперименте воспринимается как модуль Юнга

$$E = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = B(\beta-\alpha) a^{-\beta}, \quad (1.7)$$

и, следовательно, последняя из формул (1.5) может быть преобразована к виду

$$\sigma_{th} = \frac{E}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}. \quad (1.8)$$

Таким образом, теоретическая прочность  $\sigma_{th}$  определяется только модулем Юнга и показателями степеней  $\alpha$  и  $\beta$ . Для металлического типа связи можно принять ([7])

$$\alpha \cong 7, \quad \beta \cong 14 \quad (1.9)$$

и, следовательно,

$$\sigma_{th} \cong \frac{E}{28}. \quad (1.10)$$

Реальная прочность  $\sigma_b$  для различных материалов составляет 0,1 ~ 0,01 от  $\sigma_{th}$ , а это означает, что приведенный расчет не отражает реального поведения атомно-молекулярной структуры.

Еще более разительное несоответствие теоретического и реального значения предельного значения усилия получается в случае действия на упорядоченную молекулярную структуру касательного усилия  $Q$  в направлении  $x_1$  (рис. 2.1). В этом случае перемещение верхнего ряда молекул как единого целого относительно нижнего в направлении оси  $x_1$  сопровождается возникновением переменного удельного усилия  $\tau$ , которое можно приближенно описать формулой

$$\tau = \tau_{th} \sin \frac{2\pi x_1}{b}, \quad \tau = \frac{Q}{S}. \quad (1.11)$$

Аналогично предыдущему, вводя в рассмотрение макродеформацию сдвига  $\gamma$  и соответствующий модуль сдвига  $G$

$$\gamma = \frac{x_1}{a}, \quad G = \left. \frac{d\tau}{d\gamma} \right|_{\gamma=0}, \quad (1.12)$$

на основании (1.11) получим

$$\tau_{th} = \frac{G}{2\pi} \frac{b}{a}. \quad (1.13)$$

При  $b \sim a$  такое значение предельного сдвигающего напряжения дает превышение над реально наблюдаемым его значением, достигающее трех-четыре порядков.

Размышления над причинами такого несоответствия привели к выводу о том, что главным здесь является принятие предположения о строгой упорядоченности атомно-молекулярной структуры, о строгой «дисциплине» в процессе перемещений составляющих ее частиц. Картина деформирования будет другой, если допустить наличие разного рода дефектов начальной структуры — одиночных и групповых вакансий или внедрений. В этом случае при нагружении будут энергетически выгодней не перемещения частиц «единым строем», а последовательное их включение в перемещение. Именно на такой основе строится современная теория пластичности и разрушения.

## § 2. ГРУППОВЫЕ ВАКАНСИИ В ВИДЕ ТРЕЩИН. ИДЕЯ ГРИФФИТСА

В 1920 году английским инженером Гриффитсом [79] была предложена идея определения прочности упругого материала, в которой причиной расхождения реального и теоретического значения предельной нагрузки объявлялся неучет всегда имеющихся в материале трещин, что на уровне микроструктуры означает наличие участков групповых вакансий в виде вытянутых пустот (полостей) большой по сравнению с молекулярными расстояниями протяженностью.

Рассмотрим пример, когда трещина в плане представляет полость шириной  $2c$ , пронизывающую упругое тело с типичным ортогональным сечением, представленным на рис. 2.3. Пусть такое тело нагружено в бесконечности равномерно распределенными усилиями, нормальными к срединной плоскости трещины, так что в отсутствие трещины в теле осуществлялось бы однородное напряженное состояние с нормальной компонентой  $\sigma_{11} = \sigma$ .

Наличие трещины приводит к исчезновению части упругой энергии, равной той, что заключена в цилиндре, окружающем трещину, с квадратным сечением порядка  $2c \times 2c$ . В расчете на едини-

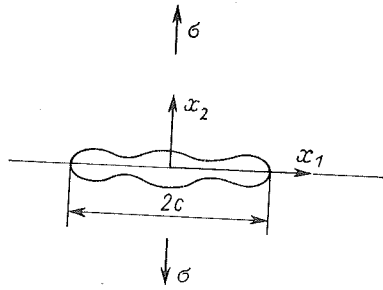


Рис. 2.3

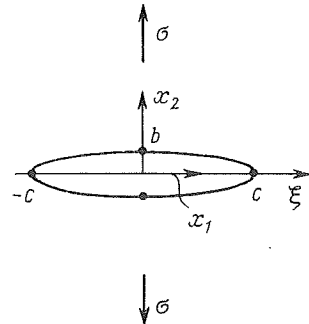


Рис. 2.4

цу длины тела в направлении, ортогональном плоскости  $x_1x_2$ , как и во всех последующих вычислениях, это будет

$$4\lambda c^2 \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (2.1)$$

где  $\lambda$  — неопределенный коэффициент порядка единицы.

При увеличении напряжения  $\sigma$  может наступить момент, когда ширина полости станет увеличиваться. Этот момент страгивания трещин отвечает началу разрушения и может считаться предельным. В бесконечно близкий к страгиванию трещины момент ширина трещины увеличится на  $2dc$ , и при этом возникнут новые свободные поверхности общей площадью  $4dc$ .

С возникновением новой единицы свободной поверхности естественно связывать некоторую удельную энергию  $\gamma_s$ , так что на создание указанных новых поверхностей требуется энергия

$$4\gamma_s dc. \quad (2.2)$$

Источником этой энергии является запасенная в теле упругая энергия, которая при продвижении трещины должна потерять часть, дополнительную к (2.1) и равную (2.2). Следовательно, в момент страгивания трещины должен выполняться энергетический баланс

$$\frac{d}{dc} \left( 2\lambda c^2 \frac{\sigma^2}{E} \right) = 4\gamma_s, \quad (2.3)$$

откуда для предельного (критического) значения  $\sigma = \sigma_0$  следует

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{\lambda c}}. \quad (2.4)$$

Входящая в эту формулу материальная константа  $\gamma_s$  может быть оценена на основании формулы (1.3) как работа по разделению двух молекулярных рядов

$$2\gamma_1 = \int_a^\infty \sigma(r) dr = \int_a^\infty (Ar^{-\alpha} - Br^{-\beta}) dr,$$

откуда

$$\gamma_s = \frac{Ea}{2(\alpha-1)(\beta-1)}. \quad (2.5)$$

С другой стороны,  $\gamma_s$  можно считать такой же макрохарактеристикой, как и модуль  $E$ , и определять из опыта на предельную нагрузку для одной фиксированной длины трещины, если бы не неопределенность постоянной  $\lambda$ . Вообще, возможность толкования формулы (2.4) с позиций феноменологической теории не столь очевидна, как это может показаться. Пока ее главное достоинство состоит в том, что из нее следует существование предельного значения внешних усилий, безопасных в отношении прочности. Но как использовать эту формулу для получения конкретного значения  $\sigma_0$ , если, как это неизбежно на практике, точная форма трещины (полости), а следовательно, и  $\lambda$  неизвестны, и можно ли вообще это сделать, остается проблематичным.

Попробуем разобраться с этим вопросом. Интуитивно ясно, что чем острее кончик трещины, т. е. меньше концевой радиус кривизны  $\rho$  полости, тем меньше при одном и том же размере  $2c$  предельное значение  $\sigma_0$ . Поэтому главными геометрическими параметрами в рассматриваемой проблеме являются  $c$  и  $\rho$ . Это приводит к гипотезе о замене действительной формы полости некоторой более простой. Например, применительно к рассматриваемому частному случаю, когда предполагается, что срединная поверхность полости близка к плоскости, вместо истинной формы взять (рис. 2.4) тонкий эллипс с полуосями  $c$  и  $b$  вдоль  $x_1$  и  $x_2$  соответственно, такой, чтобы минимальный радиус кривизны его

$$\rho = \frac{b^2}{c} \quad (2.6)$$

отвечал истинному радиусу кривизны в кончике реальной полости, то можно рискнуть использовать известное [42] решение классической линейной упругости. Риск будет оправдан, если, во-первых, величина  $\rho$  будет много больше межмолекулярного расстояния (в противном случае неприменимы приемы континуальной механики), и, во-вторых, если полученные в результате максимальные деформации будут малы по сравнению с единицей (в противном случае неприменимы уравнения линейной упругости).

Из указанного решения следует, что максимальным растягивающим напряжением будет напряжение  $\sigma_{22}$  в вершине полости при  $x_1 = c$  (и, естественно, при  $x_1 = -c$ )

$$\sigma_{22} = \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{c}{\rho}} \right) \sigma \cong 2 \sqrt{\frac{c}{\rho}} \sigma. \quad (2.7)$$

При состыковке феноменологического и микроструктурного подходов в предельном состоянии должно быть

$$\sigma_{22} = \sigma_{th} \quad (2.8)$$

и, следовательно, на основании (2.7), (1.8), (2.4), (2.5)

$$\rho = \frac{2\alpha^2 a}{\lambda(\alpha-1)(\beta-1)} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha-\beta} = \rho_0. \quad (2.9)$$

Этой формулой определяется связь кривизны в кончике полости и межмолекулярного расстояния  $a$  в предельном состоянии. Поскольку в ней отсутствуют параметры процесса нагружения, а кривизна  $\rho$  в силу использованной линейной упругости — это кривизна  $\rho_0$  кончика ненагруженной полости, то (2.9) может быть истолковано следующим образом. В реальном, имеющем молекулярную структуру теле могут существовать только полости с минимальным радиусом кривизны острой кромки, большим (2.9); в закритическом режиме, когда  $\sigma_{\max} = \sigma_{th}$ , такие трещины распространяются ускоренно (катастрофически). Трещины, в которых на кромке минимальный радиус кривизны меньше  $\rho_0$ , самосхлопываются.

При значениях  $\alpha$ ,  $\beta$ , использованных выше, формула (2.9) дает

$$\rho_0 \cong \frac{20}{\lambda} a. \quad (2.10)$$

Как будет видно из дальнейшего, коэффициент  $\lambda$  близок к единице ( $\lambda \cong 4/3$ ), так что можно признать, что  $\rho_0 \gg a$ , и, следовательно, риск использования свойств континуальности оправдан. Такое же заключение можно сделать и по поводу максимальной деформации. По оценке (1.10), в кончике трещины имеем

$$\varepsilon_{\max} \cong \sigma_{th}/E = 0,035. \quad (2.11)$$

Решение задачи о растяжении эллиптической полости [42] приводит к следующему выражению для напряжения  $\sigma_{22}$  на оси  $x_1$ :

$$\sigma_{22} = \sigma \frac{1+m}{R^2-m} \left\{ 1 + \frac{1-m}{2(R^2-m)} \left[ 1 + R^2 - 2 \frac{R^2(R^2-1)}{R^2-m} \right] \right\}, \quad (2.12)$$

где

$$R = \frac{1}{2} (1+m) \left( t + \sqrt{t^2 - \frac{4m}{(1+m)^2}} \right), \quad m = \frac{c-b}{c+b}, \quad t = \frac{x_1}{c}. \quad (2.13)$$

Асимптотический анализ при малых по сравнению с единицей

$$\alpha = 1 - m = \frac{2b}{c+b}, \quad \frac{\xi}{c} = t - 1, \quad (2.14)$$

где  $\xi$  отсчитывается от вершины полости  $x_1 = c$  (рис. 2.4) и  $b^2 = \rho c$ , дает

$$\sigma_{22} = \sigma \sqrt{\frac{c}{\rho + 2\xi}} \left( 1 + \frac{\rho}{\rho + 2\xi} \right). \quad (2.15)$$

Отсюда следуют два результата:

$$\sigma_{22}|_{\xi=0} = 2\sigma \sqrt{\frac{c}{\rho}}, \quad \sigma_{22}|_{\rho=0} = \sigma \sqrt{\frac{c}{2\xi}}. \quad (2.16)$$

Первый уже использовался выше и относится к узкой эллиптической полости, второй представляет предельный случай такой полости, сжатой в линию, и в отличие от первого не содержит практически неизмеримого параметра  $\rho$ . Это важное обстоятельство, а также то, что, как будет видно из дальнейшего, второй результат одновременно является следствием решения более простой краевой задачи, говорит о перспективе направления, в котором имеет место вторая из асимптотик (2.16).

### § 3. ЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ

Приведенные рассуждения подталкивают нас принять в качестве эталонной формы полости даже не эллипс, а значительно более простой объект — математический разрез. Правда, при этом приходится мириться с тем, что соответствующая асимптотика (2.16) при любом, даже исчезающе малом напряжении на бесконечности выдает для растягивающего напряжения  $\sigma_{11}$  в кончике такого разреза бесконечный результат, а критериальным параметром, в смысле начала распространения дефекта, может служить лишь коэффициент при бесконечности, так что условием разрушения будет соотношение

$$\sigma = \sqrt{\frac{c}{2}} = \text{const.}$$

Такой подход в проблеме прочности составлял основу предложенной Ирвином [81] теории трещин-разрезов, которая в рамках линейной упругости обычно именуется линейной механикой разрушения.

Рассмотрим на основе линейной механики разрушения обсуждаемую выше задачу о трещине (а теперь — математическом разрезе) при ортогональном к ней нагружении — о трещине нормального отрыва (рис. 2.5).

Пользуясь принципом суперпозиции, справедливым в линейной механике, разобьем задачу на две: растяжение плоскости без разреза напряжениями  $\sigma_{22}$  и нагружение свободной в бесконечности плоскости равномерно распределенными нормальными усилиями (напряжениями —  $\sigma_{22}$ ) по берегам разреза.

Напряженно-деформированное состояние в первой задаче очевидно:

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{12}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma, \quad u_2^{(1)} = x_2 \sigma / E. \quad (3.1)$$

и, следовательно, на основании (2.7), (1.8), (2.4), (2.5)

$$\rho = \frac{2\alpha^2 a}{\lambda(\alpha-1)(\beta-1)} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha-\beta} = \rho_0. \quad (2.9)$$

Этой формулой определяется связь кривизны в кончике полости и межмолекулярного расстояния  $a$  в предельном состоянии. Поскольку в ней отсутствуют параметры процесса нагружения, а кривизна  $\rho$  в силу использованной линейной упругости — это кривизна  $\rho_0$  кончика ненагруженной полости, то (2.9) может быть истолковано следующим образом. В реальном, имеющем молекулярную структуру теле могут существовать только полости с минимальным радиусом кривизны острой кромки, большим (2.9); в закритическом режиме, когда  $\sigma_{\max} = \sigma_{th}$ , такие трещины распространяются ускоренно (катастрофически). Трещины, в которых на кромке минимальный радиус кривизны меньше  $\rho_0$ , самосхлопываются.

При значениях  $\alpha, \beta$ , использованных выше, формула (2.9) дает

$$\rho_0 \cong \frac{20}{\lambda} a. \quad (2.10)$$

Как будет видно из дальнейшего, коэффициент  $\lambda$  близок к единице ( $\lambda \cong 4/3$ ), так что можно признать, что  $\rho_0 \gg a$ , и, следовательно, риск использования свойств континуальности оправдан. Такое же заключение можно сделать и по поводу максимальной деформации. По оценке (1.10), в кончике трещины имеем

$$\varepsilon_{\max} \cong \sigma_{th}/E = 0,035. \quad (2.11)$$

Решение задачи о растяжении эллиптической полости [42] приводит к следующему выражению для напряжения  $\sigma_{22}$  на оси  $x_1$ :

$$\sigma_{22} = \sigma \frac{1+m}{R^2-m} \left\{ 1 + \frac{1-m}{2(R^2-m)} \left[ 1 + R^2 - 2 \frac{R^2(R^2-1)}{R^2-m} \right] \right\}, \quad (2.12)$$

где

$$R = \frac{1}{2}(1+m) \left( t + \sqrt{t^2 - \frac{4m}{(1+m)^2}} \right), \quad m = \frac{c-b}{c+b}, \quad t = \frac{x_1}{c}. \quad (2.13)$$

Асимптотический анализ при малых по сравнению с единицей

$$\alpha = 1 - m = \frac{2b}{c+b}, \quad \frac{\xi}{c} = t - 1, \quad (2.14)$$

где  $\xi$  отсчитывается от вершины полости  $x_1 = c$  (рис. 2.4) и  $b^2 = \rho c$ , дает

$$\sigma_{22} = \sigma \sqrt{\frac{c}{\rho + 2\xi}} \left( 1 + \frac{\rho}{\rho + 2\xi} \right). \quad (2.15)$$

Отсюда следуют два результата:

$$\sigma_{22}|_{\xi=0} = 2\sigma \sqrt{\frac{c}{\rho}}, \quad \sigma_{22}|_{\rho=0} = \sigma \sqrt{\frac{c}{2\xi}}. \quad (2.16)$$

Первый уже использовался выше и относится к узкой эллиптической полости, второй представляет предельный случай такой полости, сжатой в линию, и в отличие от первого не содержит практически неизмеримого параметра  $\rho$ . Это важное обстоятельство, а также то, что, как будет видно из дальнейшего, второй результат одновременно является следствием решения более простой краевой задачи, говорит о перспективе направления, в котором имеет место вторая из асимптотик (2.16).

### § 3. ЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ

Приведенные рассуждения подталкивают нас принять в качестве эталонной формы полости даже не эллипс, а значительно более простой объект — математический разрез. Правда, при этом приходится мириться с тем, что соответствующая асимптотика (2.16) при любом, даже исчезающе малом напряжении на бесконечности выдает для растягивающего напряжения  $\sigma_{11}$  в кончике такого разреза бесконечный результат, а критериальным параметром, в смысле начала распространения дефекта, может служить лишь коэффициент при бесконечности, так что условием разрушения будет соотношение

$$\sigma = \sqrt{\frac{c}{2}} = \text{const.}$$

Такой подход в проблеме прочности составлял основу предложенной Ирвином [81] теории трещин-разрезов, которая в рамках линейной упругости обычно именуется линейной механикой разрушения.

Рассмотрим на основе линейной механики разрушения обсуждаемую выше задачу о трещине (а теперь — математическом разрезе) при ортогональном к ней нагружении — о трещине нормального отрыва (рис. 2.5).

Пользуясь принципом суперпозиции, справедливым в линейной механике, разобьем задачу на две: растяжение плоскости без разреза напряжениями  $\sigma_{22}$  и нагружение свободной в бесконечности плоскости равномерно распределенными нормальными усилиями (напряжениями —  $\sigma_{22}$ ) по берегам разреза.

Напряженно-деформированное состояние в первой задаче очевидно:

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{12}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma, \quad u_2^{(1)} = x_2 \sigma / E. \quad (3.1)$$

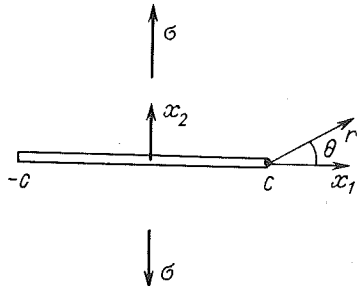


Рис. 2.5

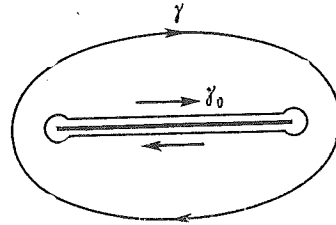


Рис. 2.6

Во второй задаче граничные условия имеют вид

$$\sigma_{12}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(2)} = -\sigma, \quad (x_1 = 0, |x_1| \leq c),$$

$$\sigma_{12}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0), \quad \sigma_{ij}^{(2)} \rightarrow 0 \quad (r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty). \quad (3.2)$$

Для решения этой задачи используем метод теории функций комплексного переменного

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)} &= 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)], \\ \sigma_{22}^{(2)} - \sigma_{11}^{(2)} + 2i\sigma_{12}^{(2)} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \\ 2\mu(u_1^{(2)} + iu_2^{(2)}) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \\ z &= x_1 + ix_2, \quad \mu = G, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\kappa = 3 - 4\nu$  для задачи о плоской деформации,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния. Из второго соотношения в силу отсутствия касательных напряжений на оси  $x_1$  следует условие

$$\operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, \quad (3.4)$$

которое можно удовлетворить заданием

$$2\varphi'(z) = Z'(z), \quad 2\psi'(z) = -zZ''(z). \quad (3.5)$$

Действительно, при таком задании, как нетрудно проверить,

$$\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) = -ix_2[\operatorname{Re}Z''(z) + i\operatorname{Im}Z''(z)], \quad (3.6)$$

в силу чего условие  $\sigma_{12}^{(2)} = 0$  при  $x_2 = 0$  выполняется тождественно.

Теперь из (3.3) получаем представление компонент напряжений через одну функцию комплексного переменного

$$\sigma_{11}^{(2)} = \operatorname{Re} Z' - x_2 \operatorname{Im} Z'', \quad (3.7)$$

$$\sigma_{22}^{(2)} = \operatorname{Re} Z' + x_2 \operatorname{Im} Z'',$$

$$\sigma_{12}^{(2)} = -x_2 \operatorname{Re} Z''.$$

Для перемещений будет иметь место представление

$$2\mu u_1^{(2)} = (\kappa - 1) \operatorname{Re} Z/2 - x_2 \operatorname{Im} Z',$$

$$2\mu u_2^{(2)} = (\kappa + 1) \operatorname{Im} Z/2 - x_2 \operatorname{Re} Z'. \quad (3.8)$$

Согласно краевым условиям (3.2) с учетом представления (3.7) будем иметь

$$\operatorname{Re} Z'(z) = -\sigma, \quad (x_2 = 0, |x_1| \leq c), \quad (3.9)$$

причем из условия равенства нулю перемещений в бесконечности

$$Z'(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (3.10)$$

Введем вспомогательную функцию  $\Phi(z) = Z'(z)\sqrt{z^2 - c^2}$ , где функция  $\sqrt{z^2 - c^2}$  на верхнем берегу разреза принимает значение  $i\sqrt{c^2 - x_1^2}$ , на нижнем меняет знак.

При указанном сильном затухании на бесконечности функции  $Z'(z)$  вспомогательная функция будет не только голоморфна вне отрезка  $[-c, c]$ , но и будет ограничена в концах этого отрезка. Для произвольного замкнутого контура  $\gamma$ , проведенного вне разреза (рис. 2.6), в этих условиях будет справедлива формула Коши [42]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(t) dt}{t - z} \quad (\Phi_{\infty}(z) = 0). \quad (3.11)$$

Если стянуть контур  $\gamma$  непосредственно к разрезу, то на верхнем и нижнем отрезках такого предельного контура  $\gamma_0$  будем иметь

$$\Phi_{\pm}(x_1) = \mp i\sigma\sqrt{c^2 - x_1^2}. \quad (3.12)$$

Если теперь заменить контур  $\gamma_0$  на дважды проходимый отрезок  $[-c, c]$ , то формула (3.11) приобретает вид

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\sigma}{x_1 - z} \sqrt{c^2 - x_1^2} dx_1.$$

Отсюда получим

$$Z' = -\frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - c^2}} \int_{-c}^c \frac{\sigma\sqrt{c^2 - x_1^2}}{x_1 - z} dx_1. \quad (3.13)$$

Функции  $\pm i\sqrt{c^2 - x_1^2}$  являются крайними значениями на верхнем и нижнем берегах разреза голоморфной вне его функции  $\sqrt{z^2 - c^2}$ . Поэтому при постоянстве  $\sigma$  возможен переход в (3.13) от интегрирования по отрезку  $[-c, c]$  снова к интегрированию по  $\gamma_0$

$$Z'(z) = \frac{-\sigma}{\sqrt{z^2 - c^2}} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{i\sqrt{c^2 - t^2}}{t - z} dt \right). \quad (3.14)$$

Использование той же формулы Коши, но теперь с ненулевым членом, отвечающим поведению искомой функции на бесконечности, дает

$$Z'(z) = -\frac{\sigma}{\sqrt{z^2-c^2}} (\sqrt{z^2-c^2} - z) = \sigma \left( \frac{z}{\sqrt{z^2-c^2}} - 1 \right). \quad (3.15)$$

Затем найдем

$$Z(z) = \sigma \sqrt{z^2-c^2} - \sigma z, \quad Z''(z) = -\frac{c^2}{(z^2-c^2)^{3/2}}. \quad (3.16)$$

С учетом того, что  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$ ,  $u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ , отсюда при  $x_2=0$  по формулам (3.7) можно получить

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma x_1}{\sqrt{x_1^2-c^2}}, \quad u_2 = 0 \quad \text{при } |x_1| > c, \quad (3.17)$$

$$\sigma_{22} = 0, \quad u_2 = \frac{(x+1)\sigma}{4\mu} \sqrt{c^2-x_1^2} \quad \text{при } |x_1| < c.$$

Поместим в кончик разреза полярную систему координат  $z-c=re^{i\theta}$  (рис. 2.5) и рассмотрим асимптотику напряженно-деформированного состояния, т. е. зону  $r \ll c$ . После несложных выкладок на основании (3.15), (3.16) найдем [92]

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \varphi_{ij} + O(1), \quad u_i = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \psi_i + O(r^{3/2}), \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \varphi_{22} &= \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \varphi_{12} &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \psi_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{x-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ \psi_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{x+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

и, в частности, при  $x_2=0$ , т. е. при  $\theta=0$  для  $\varphi_{ij}$  и  $\theta=\pi$  для  $\psi_k$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} &= K_I / \sqrt{2\pi r}, \quad \sigma_{12} = 0 \quad (x_2=0, |x_1| > 0), \\ u_1 &= 0, \quad u_2 = \frac{x+1}{2\mu} K_I \sqrt{r/2\pi} \quad (x_2=0, |x_1| < 0), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi c} \quad (3.21)$$

— так называемый коэффициент интенсивности [82; 83]. Формула (3.13) остается справедливой и для  $\sigma = \sigma(x_1)$ , и ее асимптотика, как нетрудно увидеть, дается формулой

$$Z'(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(z-c)}} + O(1), \quad (3.22)$$

где

$$K_I = \frac{1}{\pi c} \int_{-c}^c \sigma(x_1) \sqrt{\frac{c+x_1}{c-x_1}} dx_1. \quad (3.23)$$

Отсюда следует, что в представлении (3.18) функции  $\varphi_{ij}(\theta)$  и  $\psi_i(\theta)$  не зависят от типа нагружения берегов разреза, на него реагирует лишь коэффициент интенсивности. Так, в задаче о раздвигании разреза сосредоточенными силами, приложенными к серединам его берегов (рис. 2.7), т. е.

$$\sigma(x_1) = P\delta(0), \quad (3.24)$$

интеграл в (3.14) по свойству дельта-функции  $\delta(x_1)$  будет равен подынтегральному выражению в точке  $x_1=0$ , т. е.

$$Z'(z) = \frac{Pc}{\pi z \sqrt{z^2-c^2}}, \quad (3.25)$$

а коэффициент интенсивности

$$K_I = P/\sqrt{\pi c}. \quad (3.26)$$

Из проведенного анализа следует, что при приближении к кончику трещины извне напряжения нарастают как  $\sqrt{1/r}$  (корневая особенность), а при приближении изнутри перемещения уменьшаются как  $\sqrt{r}$ . Что же касается деталей асимптотики для напряжений [58], то из (3.19) следует, что наибольшим из главных напряжений является растягивающее напряжение  $\sigma_{22}$  ( $\varphi_{22}=1,3$ ) при  $\theta=\pi/3$  (рис. 2.8), и было бы логично в качестве критерия разрушения выставлять требование, в котором предельная нагрузка оп-

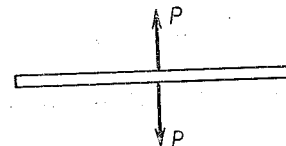


Рис. 2.7

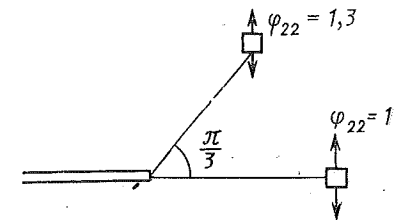


Рис. 2.8

ределяется моментом достижения  $1,3 K_I$  некоторой материальной константы, определяемой экспериментально. Однако при этом возникают трудности с установлением картины распространения трещины, в то время как в рамках упругости, т. е. для хрупких тел, хорошо установленным фактом является то, что трещина нормального отрыва, по крайней мере на начальной фазе, распространяется вдоль своей плоскости, т. е. при  $\theta=0$ , где  $\varphi_{22}=1$ . Поэтому в линейной механике разрушения принимается, что носителем критериальности в отношении разрушения является сам коэффициент интенсивности, а критерий разрушения представляется (как и предсказано в начале параграфа) в виде

$$K_I = K_{Ic} \left( \sigma \sqrt{\frac{c}{\rho}} = \text{const} \right), \quad (3.27)$$

где  $K_{Ic}$  — материальная константа, имеющая размерность  $\text{кгс}/\text{см}^{3/2}$ , а подход на основании условий такого вида носит название силового критерия разрушения. Нужно отметить, что при растяжении силами в бесконечности коэффициент интенсивности по (3.21) увеличивается с ростом длины разреза, в то время как по (3.26)  $K_I$  при этом уменьшается. Поэтому закритическое поведение разреза будет разным: в первом случае выполнение предельного условия приведет к ускоренному (катастрофическому) росту трещины. Во втором — для продвижения трещины в закритическом режиме требуется наращивать усилия  $P$ . Таким образом, в первом случае закритический режим неустойчив, во втором — устойчив. Обычно, хотя это и неправильно, термином «устойчивость» (или «неустойчивость») принято характеризовать саму трещину, а не режим (устойчивое и неустойчивое распространение трещины).

Пользуясь принципом суперпозиции, любой вид нагружения трещины можно представить как сумму трех элементарных видов нагружения, изображенных на рис. 2.9. Здесь  $a$  — тип I — трещина нормального отрыва,  $b$  — тип II — трещина плоского сдвига и  $c$  — тип III — трещина поперечного (антиплоского) сдвига (усилие  $g$  направлено по оси  $x_3$ ).

Используя тот же, что и для типа I, метод, можно определить напряженно-деформированное состояние вблизи кончика трещины

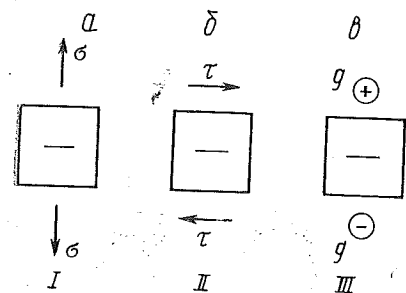


Рис. 2.9

для типов II и III конкретно: для трещины типа II

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= K_{II} / \sqrt{2\pi r}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0 \\ & \quad (x_2 = 0, |x_1| > c), \\ u_1 &= \frac{\nu+1}{2\mu} K_{II} \sqrt{r/2\pi} u_2 = 0 \quad (x_2 = 0, \\ & \quad |x_1| < c), \quad K_{II} = \tau \sqrt{\pi c}, \quad (3.28) \end{aligned}$$

для трещины типа III

$$\begin{aligned} \sigma_{23} &= K_{III} / \sqrt{2\pi r}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \dots = \sigma_{13} = 0 \quad (x_2 = 0, |x_1| > c), \\ u_3 &= \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{r/2\pi} u_1 = u_2 = 0 \quad (x_2 = 0, |x_1| < c), \quad (3.29) \\ K_{III} &= g \sqrt{\pi c}. \end{aligned}$$

Как видно, коэффициенты  $K_\alpha$  одинаковы как для плоской деформации, так и для плоского напряженного состояния. Однако их критическое значение  $K_{Ic}$  и  $K'_{Ic}$ , как показывает эксперимент, не совпадает. Отметим также, что поскольку наиболее опасными являются трещины нормального отрыва, то коэффициент  $K_{Ic}$  играет в механике разрушения доминирующую роль и ему присвоено специальное название — вязкость разрушения.

Полученные выше результаты относились к неограниченным телам с нагрузками, приложенными в бесконечности. Для произвольно нагруженных конечных тел с трещинами малой по сравнению с характерными размерами тела длины можно использовать те же формулы, только в качестве нагрузки на берегах трещины взять то, что следует из расчета напряженного состояния тела без трещины в месте ее нахождения. Полученную задачу надо разложить на три указанные выше элементарные, а для вычисления использовать единую для всех трех типов задач формулу (3.23).

Такой подход не будет годиться, только если размеры трещины велики (что бывает редко) или трещина подходит близко к поверхности тела. В этом случае формула (3.23) неприменима и для расчета коэффициентов интенсивности и требуется дополнительный анализ.

Для трещин смешанного типа силовой критерий должен представляться условием

$$F(K_I, K_{II}, K_{III}, K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}) = 0, \quad (3.30)$$

где  $K_{IIc}$ ,  $K_{IIIc}$  аналогично  $K_{Ic}$  — материальные константы, определенные из опыта на соответствующий вид нагружения. Очевидно, что если выполняется хотя бы одно из условий  $K_\alpha = K_{\alpha c}$ , то трещина должна стронуться. Это обстоятельство в рамках силового критерия является единственным условием, накладываемым на форму функции  $F$ .

#### § 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ

Идею Гриффитса, использованную в § 2 для трещины нормального отрыва, можно распространить на другие типы трещин, а в рамках линейной механики разрушения для трещин-разрезов получить строгие формулы для предельного состояния.

Рассмотрим тело, занимающее в исходном состоянии объем  $V$  с поверхностью  $S = S_T + S_u$ , где  $S_T$  — часть поверхности с задан-

ными усилиями,  $S_u$  — с заданными перемещениями. Тело содержит полость объемом  $v$  с поверхностью  $\Sigma$ . Без ограничения общности будем считать поверхность  $\Sigma$  свободной от усилий. Начальное состояние тела с полостью характеризуется напряжениями  $\sigma_{ij}$ , деформациями  $\varepsilon_{ij}$  и перемещениями  $u_i$ .

Пусть объем полости при фиксированных внешних параметрах, т. е. при условии

$$\Delta T_i|_{S_T} = 0, \quad \Delta u_i|_{S_u} = 0, \quad (4.1)$$

изменился на  $\Delta v$ , его поверхность — на  $\Delta \Sigma$ . Это вызовет изменение напряженно-деформированного состояния на  $\Delta \sigma_{ij}$ ,  $\Delta \varepsilon_{ij}$ ,  $\Delta u_i$ . Если такой переход в новое состояние является квазистатическим, то должно выполняться уравнение баланса энергии

$$\Delta A - \Delta U = \Delta \Pi, \quad (4.2)$$

где  $\Delta U$  — изменение упругого потенциала,  $\Delta A$  — приращение работы внешних сил,  $\Delta \Pi$  — приращение поверхностной энергии тела, которая в § 2 характеризовалась параметром  $\gamma_s$

$$U = \int_V W(\varepsilon_{ij}) dV, \quad A = \int_{S_T} T_i u_i dS, \quad \Pi = \gamma_s \Sigma. \quad (4.3)$$

Обозначим

$$A - U = Q \quad (4.4)$$

и с учетом изменения объема тела получаем

$$\Delta Q = \int_{S_T} T_i \Delta u_i dS + \int_V W(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{V-\Delta v} W(\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}) dV. \quad (4.5)$$

В силу (4.1) и того, что на вновь образованной поверхности усилия отсутствуют, первый интеграл можно распространить на всю поверхность тела в виде

$$\int_{S_T} T_i \Delta u_i dS = \int_{S+\Sigma+\Delta \Sigma} (T_i + \Delta T_i) \Delta u_i dS$$

и на основании теоремы Гаусса — Остроградского превратить в объемный:

$$\int_{V-\Delta v} (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \Delta \varepsilon_{ij} dV.$$

Теперь, разбивая второй интеграл в (4.5) на области  $V-\Delta v$  и  $\Delta v$ , формулу (4.5) представим в виде

$$\Delta Q = \int_{\Delta v} W(\varepsilon_{ij}) dV + \int_{V-\Delta v} [(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \Delta \varepsilon_{ij} - W(\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}) + W(\varepsilon_{ij})] dV. \quad (4.6)$$

Для линейно-упругого тела  $W(\varepsilon_{ij}) = (1/2)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ , так что

$$W(\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}) - W(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} \Delta \sigma_{ij}) + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij},$$

но в силу линейности связи  $\sigma \sim \varepsilon$  слагаемые в скобках правой части равны и, следовательно, подынтегральное выражение во втором интеграле (4.6) равно  $\Delta \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} / 2$ , так что, переводя этот интеграл из объемного опять в поверхностный, с учетом (4.1) и отсутствия усилий на границе исходной полости получим

$$\frac{1}{2} \int_{V-\Delta v} \Delta \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{S+\Sigma+\Delta \Sigma} \Delta T_i \Delta u_i dS = \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma} \Delta T_i \Delta u_i dS.$$

Появление усилий  $\Delta T_i$  на приросте поверхности полости требует пояснения. Конечно, на поверхности как исходной, так и увеличенной полости никаких усилий нет. Однако они появились и сработали в момент, непосредственно предшествующий возникновению новой части поверхности полости, как силы противодействия имеющимся в неразрушенном теле удельным усилиям  $T_i = \sigma_{ij} n_j$ , где  $n_j$  — нормали к будущей новой свободной поверхности. Поэтому в последнем интеграле  $\Delta T_i = -T_i$ , и окончательно имеем

$$\Delta Q = \int_{\Delta v} W(\varepsilon_{ij}) dV - \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma} T_i u_i d\Sigma.$$

Для трещины-разреза  $\Delta v = 0$  и, следовательно,

$$-\Delta Q = \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma^+} T_i^+ \Delta u_i^+ d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma^-} T_i^- \Delta u_i^- d\Sigma,$$

а поскольку на берегах разреза  $T_i^+ = -T_i^-$ , то

$$-\Delta Q = \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma^+} T_i^+ [\Delta u_i] d\Sigma, \quad (4.7)$$

где  $[u_i]$  — скачок перемещений на разрезе.

Полагая, что трещина расположена вдоль оси  $x_1$  с учетом знака нормали к  $\Sigma^+$  и симметрии в расхождении берегов разреза,

$$T_1^+ = -\sigma_{12}, \quad T_2^+ = -\sigma_{22}, \quad T_3^+ = -\sigma_{32},$$

$$[\Delta u_1] = 2\Delta u_1^+, \quad [\Delta u_2] = 2\Delta u_2^+,$$

на основании (4.7) получим

$$\Delta Q = \int_0^{\Delta c} (\sigma_{12} u_1^+ + \sigma_{22} u_2^+ + \sigma_{32} u_3^+) dx_1, \quad (4.8)$$

где за начало координат принят кончик разреза и, следовательно, интегрирование распространяется на малое расстояние от конца



разреза, так что для вычисления интеграла достаточны асимптотические формулы (3.20), (3.28), (3.29). При этом следует считать напряжения такими, какими они были в исходном состоянии, что же касается перемещений, то они отвечают раскрытию берегов разреза после его продвижения на  $\Delta c$ , так что входящие в (4.8) перемещения надо подсчитывать по указанным формулам асимптотики со смещенным на  $\Delta c$  началом координат, т. е. с заменой  $\sqrt{2\pi l} = \sqrt{2\pi x_1}$  на  $\sqrt{2\pi(\Delta c - x_1)}$ .

Таким образом, на основании формулы (4.8) и (3.20) для предельного состояния трещины нормального отрыва будем иметь

$$\Delta Q_I = \frac{K_{Ic}^2}{4\pi\mu} (\kappa + 1) \int_0^{\Delta c} \sqrt{\frac{\Delta c - x_1}{x_1}} dx_1. \quad (4.9)$$

Входящий сюда интеграл равен

$$\left[ (\Delta c - x_1)x_1 - \frac{\Delta c}{2} \arcsin \frac{\Delta c - 2x_1}{\Delta c} \right]_0^{\Delta c} = \frac{\pi}{2} \Delta c,$$

и в результате

$$\Delta Q_I = \frac{K_{Ic}^2}{8\mu} (\kappa + 1) \Delta c. \quad (4.10)$$

Аналогично для трещины типа II и III

$$\Delta Q_{II} = \frac{K_{IIc}^2}{8\mu} (\kappa + 1) \Delta c, \quad (4.11)$$

$$\Delta Q_{III} = \frac{K_{IIIc}^2}{2\mu} \Delta c.$$

Возвращаясь к уравнению баланса энергии (4.2), представим  $\Delta\Pi$  для трещины-разреза в виде

$$\Delta\Pi = G_{ac}\Delta\Sigma^+ = G_{ac}\Delta c. \quad (4.12)$$

Тогда, вспоминая, что  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоской деформации (ПД) и  $\kappa = (3 - \nu)/(1 - \nu)$  для плоского напряженного состояния (ПНС),  $\mu = E/2(1 + \nu)$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона, на основании (4.4) и (4.10) в предельном состоянии будем иметь

$$G_{Ic} = (1 - \nu^2)K_{Ic}^2/E \quad \text{ПД},$$

$$G_{Ic} = K_{Ic}^2/E \quad \text{ПНС}. \quad (4.13)$$

Можно продолжить эти формулы и в допредельное состояние

$$G_I = (1 - \nu^2)K_I^2/E, \quad G_I = K_I^2/E, \quad (4.14)$$

приписывая параметру  $G_I$  смысл потока энергии в кончик трещины при докритическом нагружении, так как

$$G_I = \frac{dQ_I}{dc} = \frac{d}{dc}(A - U),$$

или (на основании его размерности, равной размерности силы) смысл силы сопротивления распространению трещины [82]. В таком случае в качестве предельного условия выступает равенство

$$G_I = G_{Ic}, \quad (4.15)$$

где  $G_{Ic}$  — материальная константа. Есть основания экспериментального плана считать, что условие (4.15) является более универсальным, чем условие (3.27). Энергетический подход в соответствии с критерием (4.15) предсказывает, что отмеченное в конце § 3 расхождение  $K_{Ic}$  для плоской деформации и плоского напряженного состояния определяется в силу (4.13) так, что отношение значения  $K_{Ic}$  для первого случая к значению для второго равно  $1/(1 - \nu^2)$ .

Если в действительности такие соотношения выполняются, то в количественном отношении силовой и энергетический подходы эквивалентны порознь для задач всех указанных выше типов. Однако в качественном отношении энергетический подход обладает большей эвристичностью. Так, он снимает неопределенность в форме предельного условия для трещин смешанного типа, подобного (3.30). Действительно, по принципу суперпозиции предельное состояние должен определять суммарный поток энергии в кончик трещины (или суммарная сила сопротивления распространению трещины)

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left( K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1 - \nu} \right), \quad (4.16)$$

где  $G_{II}$  и  $G_{III}$ , так же как и ранее  $G_I$ , отвечают формулам (4.11) с заменой  $\Delta Q_\alpha \rightarrow G_\alpha \Delta c$ ,  $K_{\alpha c} \rightarrow K_\alpha$ . И если верны исходные положения линейной механики разрушения, то должна существовать единственная дополнительная к модулям  $E$  и  $\nu$  константа упругого материала  $G_c$  размерности погонной силы, которая определяет прочность материала условием

$$\frac{1 - \nu^2}{E} \left( K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1 - \nu} \right) = G_c. \quad (4.17)$$

В частном случае трещины нормального отрыва энергетический критерий дает возможность определить значение неопределенного множителя  $\lambda$ , фигурирующего в формулах § 2. Поскольку  $G_c = 2\gamma_s$ , то в условиях плоской деформации первая из формул (4.14) с учетом (3.21) в предельном состоянии дает

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{(1 - \nu^2)\pi c}}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (2.4), получим

$$\lambda = \frac{\pi(1-\nu^2)}{2}, \quad \lambda \left(\frac{1}{3}\right) = 1,39, \quad \lambda \left(\frac{1}{2}\right) = 1,18. \quad (4.18)$$

Экспериментальное определение  $G_c$  в противоположность  $\gamma_s$  не требует больших хлопот. Простейший способ определения  $G_c$  состоит в так называемом методе податливости. Идея этого метода состоит в следующем.

Пусть трещина в линейно-упругом теле нагружена нормальными к ее берегам распирающими сосредоточенными силами величины  $P$ . Действие этой силы вызовет под ней перемещение

$$u = kP,$$

где  $k$  — податливость. При этом в теле возникнет упругая энергия, которая, по теореме Клапейрона, будет равна

$$U = kP^2/2.$$

При малом увеличении площади трещины на  $d\Sigma$  (что при старых обозначениях нужно было бы обозначать как  $d\Sigma^+$  или  $d\Sigma^-$ ) произойдет увеличение податливости, вследствие чего возрастет перемещение  $u$  и сила  $P$  произведет дополнительную работу

$$du = d(kP), \quad dA = Pdu.$$

Изменится на  $dU$  и накопленная упругая энергия тела. Очевидно, что

$$dA = \left( P^2 \frac{\partial k}{\partial \Sigma} + Pk \frac{\partial P}{\partial \Sigma} \right) d\Sigma,$$

$$dU = \left( \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial k}{\partial \Sigma} + Pk \frac{\partial P}{\partial \Sigma} \right) d\Sigma$$

и, следовательно,

$$G = \frac{d}{d\Sigma} (A - U) = \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial k}{\partial \Sigma}.$$

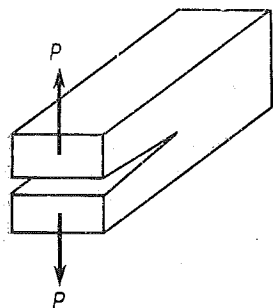


Рис.2.10

Это соотношение по известной зависимости  $k(\Sigma)$  позволяет определить текущие и предельные значения  $G$ . Отметим, что, как указано выше, при данных условиях нагружения трещина является устойчивой, так что в одном эксперименте в принципе можно получить целую область зависимости предельных параметров  $G_c$  от длины трещины. Простейшая реализация этой идеи в эксперименте достигается на так называемой двухконсольной балке (рис. 2.10) или различных ее модификациях.

Возвращаясь к основным посылкам линейной механики разрушения в формальной трактовке, надо отметить их экстраординарность в механике сплошных тел. Действительно, в классической механике континуума существовал запрет на перенос обычной для регулярных в отношении напряженно-деформированного состояния областей трактовки на сингулярные точки. Смысл в таких точках выявлялся их иссечением из тела с последующим анализом сил, уравнивающих влияние отображенной части тела. В реальном материале существование сингулярностей не допускалось, а возникновение таковых в моделях сплошной среды считалось хотя и терпимым (как расплата за простоту идеи континуума), но недостатком.

В обсуждаемой же механике сингулярность (правда, специального корневого вида) из недостатка превращена в достоинство, к тому же наделенное свойством критериальности, что, во всяком случае на первый взгляд, представляется заумным: материал терпит бесконечные напряжения, пока эта бесконечность достаточно «не подрастет». Противоречивым представляется и использование модели линейного в геометрическом отношении упругого тела. В самой важной для проблемы точке (кончик трещины) деформации оказываются бесконечными\*.

Тем не менее линейная механика разрушения получила столь широкое распространение, какого не видела ни одна другая современная область механики деформируемого тела. Об этом говорят и огромное число публикаций, и внесение ведущими учебными заведениями в программы обучения специалистов соответствующего профиля курса по линейной механике разрушения.

Главной причиной такого феномена является хорошее согласие теории с экспериментом. Можно сказать, что линейная механика разрушения является наиболее экспериментально апробированным разделом общей механики разрушения. Не последнюю роль играет также и привлекательность математического аппарата этой теории.

Как будет видно из дальнейшего, в противоположность логической натянутости рассмотренного выше силового подхода, в энергетическом плане линейная механика разрушения вполне корректна и приводит для отдельных видов деформирования (типы I, II, III трещин порознь) к тем же результатам, что и силовой подход.

## § 5. ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Для большинства конструкционных материалов в докритическом состоянии в окрестности кончика трещины возникает пластическая область, так что законы линейной упругости оказываются в этой зоне неприемлемыми. Для последующего будет

\* Известны попытки выправить это положение использованием геометрически нелинейной теории упругости. Все они по тем или иным причинам оказывались неудачными [8].

важно знать критический размер пластической области. Ввиду сложности точного упругопластического решения используется приближенная оценка на основе упругого решения, состоящая в определении линии, на которой выполняется то или иное условие пластичности.

Если характерный размер зоны пластичности мал по сравнению с длиной трещины, то можно предположить, что ответственность за разрушение сохранится за параметром  $K_{\alpha}$ , а наличие малой пластической области отразится на изменении величины удельной поверхностной энергии: параметр  $\gamma_s$  надо теперь заменить на  $\gamma_s + \gamma_p$ , где  $\gamma_p$  реально ощутимо в виде тонкого (по сравнению с длиной начальной трещины) пластического слоя по поверхности разрушенного материала, без каких-либо других проявлений (образование шейки, утяжки сечения, коробления берегов трещины). Внешне само разрушение при этом происходит так же, как и для хрупких тел, и носит название квазихрупкого разрушения. Как показывают эксперименты, такое разрушение для упругопластического материала происходит в том случае, когда характерный размер пластической зоны не превышает одной пятой длины исходной трещины.

Таким образом, на случай квазихрупкого разрушения распространяются все выводы линейной механики разрушения. Разница будет лишь в числовом значении параметров  $K_{\alpha c}$  и  $G_c$ , проистекающая из указанной выше замены, которая носит название поправки Ирвина — Орована. В частности, формула Гриффитса имеет вид [81, 88]

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{E(\gamma_s + \gamma_p)}{\lambda c}}, \quad (5.1)$$

где  $\lambda = \pi(1 - \nu^2)/2$  для плоской деформации,  $\lambda = \pi/2$  для плоского напряженного состояния.

На основании условия пластичности Мизеса

$$\sigma_T^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} S_{ij} S_{ij} = \text{const}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{ij}, \quad (5.2)$$

с учетом того, что при плоской деформации  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ , а при плоском напряженном состоянии  $\sigma_{33} = 0$ , формулы (3.18), (3.19) для трещины нормального отрыва приводят к следующим уравнениям предельных линий:

$$r_T = \frac{K_I^2}{4\pi\sigma_T^2} \left[ \frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right],$$

$$r_T = \frac{K_I^2}{4\pi\sigma_T^2} \left[ \frac{3}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta + 1 \right], \quad \rho = \frac{4\lambda\sigma_T^2}{K_I^2} r_T, \quad (5.3)$$

для первого и второго вида состояний соответственно. При  $\nu = 1/2$  кривые  $\rho = \rho(\theta)$  даны на рис. 2.11. Как видно, размеры области,

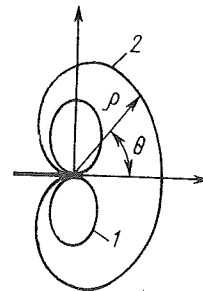


Рис. 2.11

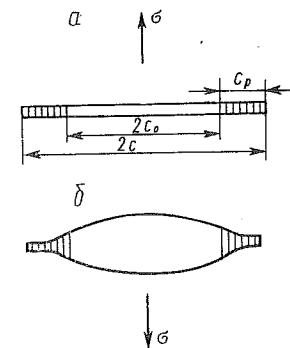


Рис. 2.12

охватываемой второй кривой, значительно превосходят размеры первой. Так, максимальное удаление второй кривой от начала координат (при  $\cos \theta = 1/3$ ) почти вдвое превышает таковое (при  $\theta = \pi/2$ ) для первой кривой. Можно поэтому полагать, что при прочих равных условиях размер пластической зоны при плоском напряженном состоянии будет существенно превосходить соответствующие размеры для плоской деформации. Таким образом, при одном и том же  $K_I$  для трещины в массивном теле, где в зоне кончика создается состояние, близкое к плоской деформации, проявление квазихрупкого разрушения имеет больше шансов, чем в тонкой пластине. А поскольку квазихрупкая трещина, как правило, неустойчива, развивается катастрофически за счет накопленной упругой энергии и, следовательно, наиболее опасна, смешивать при прогнозировании указанные два типа плоских состояний недопустимо.

Требования трещиностойкости привели к тому, что современные материалы отличаются не только большим пределом пластичности  $\sigma_T$ , но и высоким значением вязкости разрушения  $K_{Ic}$ . В связи с этим оценка характерного размера пластической области может (а для больших габаритов тела при коротких трещинах это наиболее распространенный случай) достигать порядка метра, так что условия квазихрупкого разрушения реализоваться не могут. Если квазихрупкое разрушение являлось одним из крайних случаев процессов, в которых ответственность за разрушение возлагалась на упругие свойства материала ( $r_T \rightarrow 0$ ) и где распространение трещины носило, как правило, катастрофический характер, подпитываемый большой накопленной упругой энергией, то другим крайним случаем является преобладание пластических зон ( $r_T \rightarrow \infty$ ), что является предметом исследования классических феноменологических теорий прочности. При незначительной концентрации напряжений в этих условиях процесс разрушения развивается медленно и в основном за счет возрастания внешних нагрузок. Промежуточную область между двумя этими крайними случаями занимает собственно нелинейная механика разрушения.

В техническом плане главная трудность нелинейной механики разрушения состоит в нахождении решения упругопластической задачи. Точные аналитические решения могут быть получены в весьма редких случаях, в основном для трещин поперечного сдвига (см., например, [1; 25]). Для наиболее интересного случая трещины нормального отрыва имеются лишь численные решения [1], которые неудобны при детальном качественном анализе. В связи с этим получила широкое распространение так называемая модель трещины отрыва Дагдейла [77]\*.

При одноосном растяжении пластинки (плоское напряженное состояние) в окрестности кончика трещины пластические деформации представляют результат сдвигов по плоскостям, направленным под углом  $\pi/4$  к плоскости пластинки. Если предположить, что все они сводятся к двум, пересекающим пластинку по линии, продолжающей трещину, то вся пластическая область представляется двумя отрезками прямой длиной  $c_p$  (рис. 2.12, а), и хотя далеко не всякое предугадывание формы пластической области допустимо в смысле выполнения всех требований механики деформируемого твердого тела, такое простое предложение оказалось приемлемым для неупрочняющегося материала. В этом случае наличие пластических отрезков эквивалентно действию равномерно распределенных усилий, скрепляющих трещину длиной  $2c = 2c_0 + 2c_p$  на участках  $c_p$ , при отсутствии на них напряжения  $\sigma_{11}$ . Последнее условие в рамках плоского напряженного состояния означает, что единственным действующим напряжением на  $c_p$  является  $\sigma_{22}$ , так что указанными скрепляющими усилиями для идеально пластического тела являются  $\sigma_{22} = \sigma_T$ .

Введение такой модифицированной трещины означает перевод задачи в рамки линейной упругости с одним лишь исключением. Кончики модифицированной трещины устроены не так, как в обычной трещине. Обычная трещина не должна самосхлопываться, и, следовательно, по сказанному в § 2 (см. формулы (2.9), (2.10)), ее кончик в любом состоянии должен иметь конечный радиус кривизны. Модифицированная трещина в противоположность этому является частично самосхлопывающейся (на участках  $c_p$ ), и, следовательно, в идеале кончик ее должен быть клювообразным, как это показано на рис. 2.12, б. Появление в механике линейного разрушения особенности в напряжениях является отражением фактора конечности указанного радиуса, хотя вследствие идеализации сам этот параметр в теории и не фигурирует. Очевидно, что отражением специфики в геометрии кончика модифицированной трещины должна быть конечность напряжений в окружающем упругом материале.

Таким образом, суперпозиция теперь трех решений: для пластинки без трещины, растягиваемой на бесконечности усилиями

\* Несколько раньше эта модель была предложена Леоновым и Панасюком [36], поэтому правильной было бы называть эту модель моделью Леонова — Панасюка — Дагдейла.

$\sigma(x_1)$ , для пластинки с трещиной длиной  $2c$  с распределенными по ее берегам усилиями —  $\sigma(x_1)$  и для трещины той же длины с усилиями  $\sigma_T$  на участках  $c_p$  — должна давать всюду регулярное решение. Выражаясь в терминах линейной механики разрушения, сумма коэффициентов интенсивности двух последних задач  $K_1'$  и  $K_1''$  должна быть равна нулю

$$K_1 = K_1' + K_1'', \quad (5.4)$$

где в соответствии с формулой (3.23)

$$K_1' = \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_{-c}^c \sigma(x_1) \sqrt{\frac{c+x_1}{c-x_1}} dx_1, \quad (5.5)$$

$$K_1'' = -\frac{2\sigma_T}{\sqrt{\pi c}} \int_{c-c_p}^c \sqrt{\frac{c+x_1}{c-x_1}} dx_1.$$

Используя формулу (3.14), получим при  $\sigma(x_1) = \text{const}$

$$K_1' = \sigma \sqrt{\pi c}, \quad K_1'' = -\frac{2\sigma_T \sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \arccos \left( 1 - \frac{c_p}{c} \right), \quad (5.6)$$

так что условие (5.4) с учетом того, что  $c = c_0 + c_p$ , приводится к виду

$$c_p = c_0 \left( \frac{1}{\cos(\pi\sigma/2\sigma_T)} - 1 \right). \quad (5.7)$$

При малых  $\sigma$  ( $\ll \sigma_T$ ) эта формула дает значение почти вдвое большее, чем вторая из формул (5.3)\*, что и неудивительно при столь разных подходах. Конечно, в силу непротиворечивости модели Дагдейла результат (5.7) является предпочтительным.

Как видно, сумев оценить размер пластической области, мы утратили внутреннюю критериальность теории, подобную той, что имела место в линейной теории разрушения. В отсутствие сингулярности и возможности контролировать напряжения (они фиксированы) в устье трещины остается критериальный смысл приписывать параметрам кинематическим, например раздвиганию (раскрытию) берегов в устье трещины при  $x_1 = c_0$ . Условие, состоящее в том, что страгивание трещины возникает в момент достижения определенного раскрытия, носит название критерия раскрытия трещины.

В рамках рассматриваемой модели на основании представления (3.8), где надо положить

$$\kappa - 1 = (1 - \nu)\mu/E, \quad \kappa + 1 = 2\mu/E,$$

\* В теории квазихрупкого разрушения на основании не очень убедительной аргументации принято удваивать значение  $r_T$  в формулах (5.3). Тогда сравниваемые результаты становятся близкими.

будем иметь

$$u_1(x_1) = \frac{(1-\nu)}{E} \operatorname{Re} Z(z), \quad u_2(x_1) = 2 \operatorname{Im} Z(z)/E, \quad (5.8)$$

и условия на разрезе будут

$$\begin{aligned} \sigma(x_1) &= \sigma \quad (0 \leq |x_1| < c - c_p), \\ \sigma(x_1) &= \sigma - \sigma_T \quad (c - c_p < |x_1| \leq c), \end{aligned}$$

из чего на основании формулы (3.14) следует

$$\begin{aligned} Z'(z) &= \frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - c^2}} \left[ \sigma \int_{-c}^c \frac{\sqrt{c^2 - x_1^2}}{z - x_1} dx_1 - \right. \\ &\left. - \sigma_T \left( \int_{-c}^{c-p} \frac{\sqrt{c^2 - x_1^2}}{z - x_1} dx_1 + \int_{c-p}^c \frac{\sqrt{c^2 - x_1^2}}{z - x_1} dx_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

В результате интегрирования (см. гл. I, § 4) и нахождения первообразной  $Z(z)$  на основании (5.8) можно вычислить (см., например, [18]) величину раскрытия устья трещины

$$\delta_I = 2u_2(c_0) = \frac{8\sigma_T c_0}{\pi E} \ln \left( 1 / \cos \frac{\pi \sigma}{2\sigma_T} \right). \quad (5.9)$$

Отсюда при  $\sigma \ll \sigma_T$  следует

$$\sigma_I = \pi \sigma^2 c_0 / E \sigma_T,$$

или при использовании формул (3.21) и (4.13)

$$\delta_I = \frac{K_I^2}{E \sigma_T} = \frac{G_I}{\sigma_T}, \quad (5.10)$$

что подтверждает критериальность параметра  $\delta_I$ .

Различными существующими экспериментальными методами критериальность  $\delta_I$  (как и  $\delta_{II}$ ,  $\delta_{III}$  — раскрытия трещин типа II и III) подтверждена для отношения  $\sigma/\sigma_T$  вплоть до порядка единицы. Ввиду трудности измерения раскрытия устья трещины, в эксперименте измеряются раскрытия берегов трещины в других точках. Для известной из теории формулы для перемещений берегов производится пересчет такого раскрытия на исходное. Так, для модели Дагдейла раскрытия в устье  $\delta_I$  и в центре  $\delta_{II}$  трещины связаны формулой

$$\delta_I = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{\frac{E^2}{16\sigma^2} \delta_{II}^2 - c_0^2}.$$

Для случаев, когда модель Дагдейла неприменима, определенные  $\delta_I$  производят на основании некоторых дополнительных соображений, например геометрического порядка.

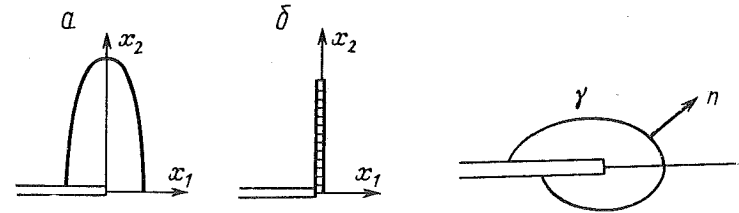


Рис. 2.13

Рис. 2.14

Полезно отметить, что простого решения типа Дагдейла в условиях плоской деформации построить не удастся, несмотря на то, что и оценка формы границы пластической области по упругому решению (5.3), и найденные ее формы в численных решениях [1; 78] (рис. 2.13, а) дают несравненно большие надежды на решение вида поперечной к трещине пластической линии (рис. 2.13, б), чем это было при плоском напряженном состоянии в отношении линии, продолжающей трещину.

Для упрочняющихся тел перестает быть приемлемой и модель Дагдейла (хотя она продолжает использоваться как приближенная с заменой  $\sigma_T$  на временное сопротивление  $\sigma_b$ ), и здесь возникают трудности с выбором теории пластичности и ее асимптотикой на большие напряжения. Но особенно сложным становится вопрос об условиях медленного продвижения трещины в связи с необходимостью учета зон разгрузки.

Остановимся пока на вопросе о критерии страгивания трещины, не обремененном этой последней трудностью. Известно [8; 59; 78], что уже при использовании физически нелинейной упругости при асимптотически степенной диаграмме растяжения особенности в кончике трещины для напряжений и деформации различны и отличаются от корневой:

$$\sigma_{ij} \sim \sigma_{ij}^0(\theta) r^{-1/(n+1)}, \quad \varepsilon_{ij} \sim \varepsilon_{ij}^0(\theta) r^{-n/(n+1)}, \quad (5.11)$$

где  $n$  — показатели степени в указанной диаграмме. Но силовой критерий и понятие о коэффициенте интенсивности тесно связаны с корневой особенностью. Поэтому силовой критерий оказывается неприменимым. Этому негативному заключению способствует и случай идеальной пластичности, который формально следует из (5.11) при  $n \rightarrow \infty$ .

Однако сингулярность произведения  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  в (5.11), что эквивалентно результатам деформационной пластичности, не зависит от  $n$  и составляет, как и в линейной упругости,  $1/r$ . А поскольку указанное произведение имеет энергетический смысл, то естественно использовать при формулировке критерия разрушения (а точнее, страгивания трещины) соображения энергетического плана, среди которых, несомненно, главным видится использование идеи потока энергии в кончик трещины  $G$ .

Очевидно, что в нелинейной механике формулы (4.14), (4.16) перестают быть справедливыми и анализ энергетического баланса надо проводить заново.

Будем предполагать, что материал обладает потенциалом

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad W = W(\varepsilon_{ij}), \quad (5.12)$$

что имеет место для нелинейной упругости и деформационной теории пластичности при активном нагружении, и для трещины в условиях плоской деформации вычислим изменение энергии  $\delta\Pi = \delta A - \delta U$  внутри контура  $\gamma$  (рис. 2.14) при увеличении длины трещины на  $dc$ .

Изменение энергии деформации в силу (5.12) будет

$$\delta U = \int_S \frac{\partial W}{\partial c} \delta c dx_1 dx_2, \quad (5.13)$$

а вариация работы внешних по отношению к контуру сил —

$$\delta A = \int_\gamma T \frac{\partial u}{\partial c} \delta c d\gamma. \quad (5.14)$$

Естественно, что на берегах разреза ввиду отсутствия контактных усилий  $T=0$ . Используя ту же, что и в § 4, идею о продвижении трещины, как переносе ее кончика в новое положение, или, что то же, о надвигании тела на трещину, получим

$$\partial/\partial c = -\partial/\partial x_1. \quad (5.15)$$

Внося такую замену в (5.13), (5.14) и преобразуя интеграл по площади в интеграл по замкнутому контуру по формуле Грина, для  $\delta\Pi$  получим

$$\delta\Pi = \delta A - \delta U = J \delta c,$$

где, при учете того, что  $dx_2 = n_1 d\gamma$  (рис. 2.14),

$$J = \int_\gamma \left( W dx_2 - T \frac{\partial u}{\partial x_1} d\gamma \right), \quad (5.16)$$

так называемый «джи»-интеграл, введенный в механику разрушения почти одновременно и независимо Черепановым [69] и Райсом [90]. Если, как и прежде в балансе энергии (4.2), (4.12), считать  $\delta\Pi = G_\alpha \delta c$ , где  $G_\alpha$  поток энергии в кончик трещины или сила сопротивления продвижению трещины для разных типов трещины, то полученный результат можно представить в форме

$$J_\alpha = G_\alpha. \quad (5.17)$$

Индекс  $\alpha$  отражает то обстоятельство, что численное значение «джи»-интеграла будет, естественно, разным для разных типов трещин.

Нетрудно убедиться, что для линейной упругости равенство выражает эквивалентность силового и энергетического подходов, а принцип суперпозиции позволяет записать

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} \left( K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{1}{1-\nu} K_{III}^2 \right). \quad (5.18)$$

«Джи»-интеграл обладает важным качеством инвариантности относительно контура. Для доказательства проведем замкнутый контур, не включающий кончик трещины — начало координат, и перейдем в (5.16) к интегралу по площади, с учетом того, что

$$T \frac{\partial u}{\partial x_1} = T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j.$$

По формуле Грина получим

$$\begin{aligned} J &= \int_S \left[ \frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 dx_2 = \\ &= \int_S \left( \frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} \right) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Второй член в подынтегральном выражении ввиду отсутствия массовых сил равен нулю, а третий член

$$\sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1}$$

равен первому

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1}.$$

Следовательно, «джи»-интеграл на замкнутом контуре, не охватывающем кончик трещины, равен нулю вне зависимости от протяженности и формы контура. А отсюда следует, что этот интеграл одинаков на любом контуре, начинающемся и кончающемся на берегах трещины. Действительно, рассмотрим замкнутый контур, изображенный на рис. 2.15 и частично идущий по двум противоположным берегам трещины, где значение «джи»-интеграла равно нулю и, следовательно, он равен нулю на проходимых во взаимнообратных направлениях контурах  $\gamma_1 + \gamma_2$ . Но при изменении направления обхода «джи»-интеграл меняет знак, а это означает равенство интегралов на каждом из этих контуров.

Таким образом, «джи»-интегралы, вычисленные по двум произвольным контурам, начинающимся на одном и кончающимся на другом берегу трещины, равны друг другу. Контур  $\gamma$  может стягиваться вокруг кончика трещины, а может частично или полностью (для краевой трещины) проходить по границе тела, связывая, таким образом, параметры асимптотики в кончике трещины с па-

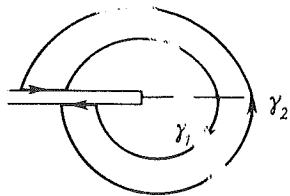


Рис. 2.15

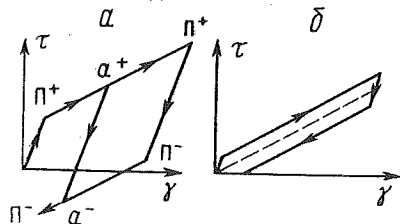


Рис. 2.16

раметрами, характеризующими напряженно-деформированное состояние на границе тела.

Но главное его качество — критериальность. Из тех же, что и в § 4, соображений момент срагивания должен определяться на основании равенства

$$J_a = J_{ac} = G_{ac}. \quad (5.19)$$

В силу (5.17), (5.18) этот критерий совпадает с энергетическим критерием для квазихрупкого разрушения. Для известных упруго-пластических решений он дает результат, совпадающий с критерием раскрытия трещины. Например, в решении Дагдейла при интегрировании по берегам пластической зоны, где  $W=0$ , так как пластическая зона в этом решении — это трещина (пустота), имеем

$$J = - \int_{\gamma} \sigma_{1j} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 = - \int_{c_0}^c \sigma_T \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 - \\ - \int_c^{c_0} (-\sigma_T) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 = -2\sigma_T \int_{c_0}^c \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 = \sigma_T \delta_1,$$

что совпадает с результатами (5.10) и, следовательно, приводит к одному и тому же выводу в критическом состоянии.

На основе «джи»-интеграла и критерия (5.19) строятся различные методы определения трещиностойкости [18; 59; 70], причем отмечается хорошее и устойчивое согласование данных, полученных в экспериментах с поведением реальных конструкций даже там, где условия применимости «джи»-интеграла не выполнены.

Однако, строго говоря, «джи»-интеграл обладает свойством инвариантности и критериальности только в рамках нелинейной упругости. Не говоря уже об учете разгрузки в продвигающейся трещине, уже для теории изотропного упрочнения «джи»-интеграл эти свои свойства теряет, и хотя некоторым подправлением его подынтегрального выражения удастся [8] восстановить его инвариантность, восстановить критериальность для продвигающейся трещины не удастся. Значение «джи»-интеграла при стягивании

контура интегрирования к кончику трещины оказывается равным нулю.

Эту и другие попытки сохранить свойство критериальности модернизацией «джи»-интеграла на основе прямого использования известных теорий пластичности нужно признать неудачными. И главным препятствием здесь является не вид используемой теории, а смена законов деформирования при разгрузке.

Однако стоит обратить внимание на следующее обстоятельство, почти не затрагиваемое в известных публикациях по теории трещин. Для такой специфической задачи, как определение напряженно-деформированного состояния вблизи особенности, требуются не обычные определяющие соотношения, а их экстраполяция на высокие (точнее, как угодно высокие) напряжения — задача, во многом неопределенная и прямым экспериментом не корректируемая. Несомненным является лишь требование, чтобы соответствующие определяющие соотношения при обычных наблюдаемых напряжениях превращались в ту или иную экспериментальную в той или иной мере обоснованную теорию.

В линейной механике имеется естественный путь — распространение линейности соотношений вплоть до бесконечности, хотя, строго говоря, это не единственная возможная экстраполяция на бесконечные напряжения, которым если и можно приписать какой-то смысл, то только как формальное продолжение решения вовне области, занимаемой телом (см. § 2).

При экстраполяции в пластической области при всем произволе подобной операции должны быть сохранены такие основные качества, как независимость результата деформирования от скорости проведения процесса нагружения и смысл пластической деформации как результата полной разгрузки элемента тела, а следовательно, должна быть сохранена концепция предельных поверхностей (см. гл. IV). В рамках последней для экстраполяции имеет решающее значение редко отмечаемое в обычных условиях требование ограниченности упругой области.

На рис. 2.16, а изображена диаграмма чистого сдвига при идеальном эффекте Баушингера и линейном упрочнении. Участки  $P^+$  и  $P^-$  отвечают прямой и обратной пластичности (прямой и обратный активные процессы), а отрезки  $a^-a^+$  постоянной длины отвечают упругому поведению. Можно сказать, что  $a^-a^+$  — упругий люфт между двумя активными процессами. В реальном эксперименте обратная пластичность, возникающая при разгрузке (точка  $a^-$ ), относится, как правило, к области отрицательных  $\tau$ . Но при экстраполяции на большие напряжения сохранение типа эффекта Баушингера выводит точку  $a^-$  в область положительно-го  $\tau$ , а сама диаграмма с вынужденным изменением масштаба выглядит так, как представлено на рис. 2.16, б, и при уровне действующих напряжений  $\tau \gg \tau_0$  это узкая полоска, ширина которой (упругий люфт) при  $\tau \rightarrow \infty$  в масштабе  $\tau$  стремится к нулю.

Таким образом, в окрестности кончика трещины и рост и падение напряжений характеризуется одной и той же линией —

средней линией полосы на рис. 2.16, б, к которой в пределе при  $\tau \rightarrow \infty$  стягивается эта полоса, причем очевидно, что остаточная деформация при полной разгрузке элемента будет в окрестности кончика трещины порядка  $\tau_0/G$ , где  $G$  — модуль упругого сдвига.

Главное, что следует отсюда, это то, что сама специфика поведения упругопластического материала в окрестности особой точки должна существенно меняться: нет необходимости различать активный и пассивный процессы, они должны описываться одним и тем же законом, причем, как сейчас будет видно, можно установить и форму этого закона при сложном напряженном состоянии и сложном нагружении.

Уровень сложности нагружения вблизи кончика трещины при ее продвижении можно представить на основе анализа линейно-упругого поведения материала. При плоской деформации, которая здесь рассматривается, имеются лишь две независимые компоненты девиатора напряжения (см. гл. IV):

$$S_{11} = \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11}), \quad S_{12} = \sigma_{12}. \quad (5.20)$$

Исследуем, как ведут себя в фиксированной материальной точке эти параметры в силу формул (3.18), (3.19) при продвижении трещины. В подвижной, связанной с кончиком трещины системе  $x_1 x_2$  указанная точка перемещается влево и имеет текущие координаты  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta = h = \text{const}$ , откуда

$$r = h / \sin \theta. \quad (5.21)$$

Внося это представление в формулы (3.18), (3.19), для параметров (5.20) получим

$$S_{11} = \frac{a}{2} (\sin \theta)^{3/2} \cos \frac{3\theta}{2}, \quad S_{12} = a (\sin \theta)^{1/2} \sin \frac{3\theta}{2},$$

$$a = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi h}}. \quad (5.22)$$

В осях  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  при  $a=1$  формулы (5.22) определяют замкнутую кривую, представленную на рис. 2.18, или, по принятой терминологии, траекторию нагружения типичной материальной точки. Как видно, даже в упругости эта траектория весьма сложна и нет основания полагать, что при учете пластичности она станет проще. Если бы шел вопрос о выборе теории пластичности для описания такого процесса нагружения при обычных умеренных напряжениях, то это было бы непростой задачей. Но для экстраполяции при малых  $h$  и, следовательно, при больших  $a$  и сильно увеличенных размерах траектории нагружения для учета основного фактора — ограниченности упругой области — пригодна теория идеального эффекта Баушингера.

Эта теория относится к классу теорий течения и определяет связь между приращениями напряжений и деформаций (см. формулу (3.23) гл. IV)

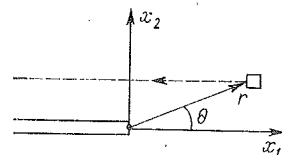


Рис. 2.17

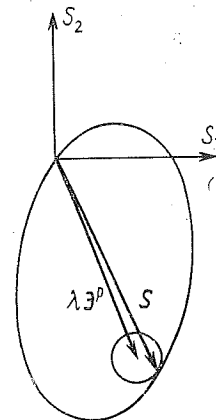


Рис. 2.18

$$\delta \mathcal{E}_{ij}^p = \frac{1}{2\lambda S_0^2} (S_{ij} - \lambda \mathcal{E}_{ij}^p)(S_{mn} - \lambda \mathcal{E}_{mn}^p) dS_{mn}$$

и при прямом использовании сулит большие сложности. Однако при обсуждаемой экстраполяции оказывается важным не это соотношение, а тип (3.23) (гл. IV) предельной поверхности, ограничивающей в рамках этой теории упругую зону

$$(S_{ij} - \lambda \mathcal{E}_{ij}^p)(S_{ij} - \lambda \mathcal{E}_{ij}^p) = 2S_0^2,$$

где  $\lambda$ ,  $S_0$  — постоянные,  $\mathcal{E}_{ij}^p$  — девиатор пластических деформаций, что при плоской деформации превращается в уравнение окружности в плоскости  $S_{11}$ ,  $S_{12}$

$$(S_{11} - \lambda \mathcal{E}_{11}^p)^2 + (S_{12} - \lambda \mathcal{E}_{12}^p)^2 = S_0^2,$$

или при введении векторов  $\mathbf{S}$  и  $\mathcal{E}^p$  с компонентами  $S_{11}$ ,  $S_{12}$  и  $\mathcal{E}_{11}^p$ ,  $\mathcal{E}_{12}^p$  соответственно в предельную окружность

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathcal{E}^p| = S_0$$

с центром в конце вектора  $\lambda \mathcal{E}^p$ .

Каждой точке траектории нагружения, определяемой вектором  $\mathbf{S}$ , отвечает своя предельная окружность с постоянным конечным радиусом, численно равным тому  $\tau_0$ , которое фигурировало при описании диаграммы сдвига, характерного для рассматриваемой теории пластичности.

Так же как и выше, увеличение уровня напряжений при экстраполяции можно имитировать уменьшением радиуса  $S_0$ , и тогда картина соответствия предельного круга и вектора  $\mathbf{S}$  в типичной точке траектории может быть изображена на том же рис. 2.18. Вектор  $\mathbf{S}$  направлен в точку предельной окружности, вектор  $\lambda \mathcal{E}^p$  — в ее центр, и, следовательно, при очень больших напряже-



ниях, или, что то же, при сильном уменьшении  $S_0$ , вектора  $S$  и  $\lambda \mathcal{E}^p$  могут считаться коллинеарными.

Таким образом, в окрестности кончика движущейся трещины [8] дифференциальная теория трансляционного упрочнения вырождается в деформационную теорию пластичности, применяемую без разделения процесса нагружения на активную и пассивную части, т. е. в нелинейную упругость, правда, с учетом остаточных напряжений и деформаций в зонах, прилежащих к берегам трещины. Значения этих параметров подобно примеру с одномерной диаграммой можно оценить, однако при использовании восстановленного в правах критерия продвижения трещины на основе «джи»-интеграла их влияние будет несущественно.

Приведенные выше соображения можно рассматривать как доказательство критериальности «джи»-интеграла в рамках пластичности для продвигающейся трещины. Внимательный читатель, конечно, понял, что привлечение конкретного вида теории пластичности существенным для такого вывода не является и было предпринято для наглядности. Основой же является несомненная ограниченность зоны упругости (величины упругого «люфта»).

Нигде в вышеизложенном вопрос о возникновении самих трещин не затрагивался, хотя некоторые причины их возникновения очевидны. Это и издержки технологии изготовления, и случайные повреждения, и возможные фазовые превращения. Так, избежать возникновения полостей, в том числе и с острыми кромками, при отливке крупногабаритных изделий практически невозможно. Все такие образования возникают вместе с рождением изделия.

Но имеются и другие причины возникновения трещин, связанные с функционированием готового изделия, и в частности с процессом нагружения. Важную роль здесь играют дислокационные механизмы, рассматриваемые в следующей главе.

Как было указано в начале предыдущей главы, теоретическая прочность на сдвиг на 3—4 порядка превосходит реально наблюдаемую. Оказывается, что ответственность за это несут дефекты кристаллической структуры другой, чем при растяжении, природы в виде плоских групповых внедрений — дислокации.

Надо отметить, что то, что выше именовалось теоретической прочностью, имеет разный смысл для растяжения и сдвига. Если в первом случае последствием ее исчерпания является разрушение в виде разделения тела на части, то послекритическое поведение при сдвиге — это переход к новому, необратимому типу деформаций, как правило, без потери сплошности — к возникновению пластических деформаций. Влияние же на этот процесс дислокаций легко уяснить на примере двух рядов атомов правильного и неправильного (с лишней частицей) строения (рис. 3.1, а, б). Для продвижения одного слоя относительно другого в первом случае требуется усилие, равное суммарному для взаимных перемещений уединенных атомов, в то время как во втором (рис. 3.1, б) уже при небольшом внешнем касательном усилии в месте сгущения начнется последовательный перескок атомов верхнего ряда. В пространственном случае для работы такого механизма требуется внедрение не одного атома, а целой полуплоскости таких атомов.

Теория дислокаций начиналась (см., например, [30; 54]) в рамках континуальной механики с работ Вольтерра как изящное, но абстрактное продолжение теории упругости на случай разрывных

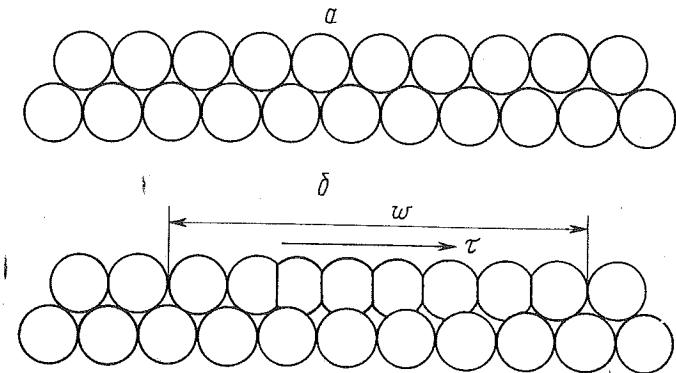


Рис. 3.1

полей перемещений при непрерывности напряжений и деформаций. Вольтерра занимался внедрениями более общего вида, получившими впоследствии наименование дисклинаций. В настоящее время дислокациями называются дефекты отмеченного выше вида, развитие теории которых связывают с именем Бюргерса. Являясь причиной пластических деформаций такие дислокации могут являться и причиной зарождения трещин.

### § 1. ДИСЛОКАЦИИ БЮРГЕРСА

Ниже рассматриваются дефекты атомно-молекулярного строения и их континуальные аналоги, которые в рамках микро-структуры можно трактовать как внедрение в правильную кристаллическую решетку лишней атомной полуплоскости (рис. 3.2). Вблизи торца лишней полуплоскости, отмеченного на рис. 3.2 точкой  $D$ , происходит сильное искажение атомно-молекулярной структуры, в то время как в удаленных частях эта структура остается невозмущенной. Торцы  $D$  представляют так называемую линию дислокаций, ортогональную к плоскости рисунка.

Такая же ситуация возникает, если на плоскости, видимой как отрезок  $AB$  на рис. 3.2, были временно нарушены атомные связи и левая над этой плоскостью часть атомного ряда была передвинута вправо с последующим восстановлением атомно-молекулярных связей, так что в результате на некотором удалении от точки сгущения указанная часть атомного ряда переместилась вправо на одно межатомное расстояние  $b$  — на вектор Бюргерса.

Если не касаться причин, вызвавших такой дефект кристаллической решетки, то можно образовать дислокационную линию, подрезая связи под углом  $\arctg(b/a)$ , перемещая соответствующий атомный ряд в этом направлении. Тогда новый вектор Бюргерса будет повернут по отношению к прежнему на указанный угол и для рассматриваемой атомно-молекулярной структуры будет длиннее на  $\sqrt{a^2 + b^2} - b$ . Наконец, можно производить сдвиг в вертикальном направлении с величиной вектора Бюргерса, равной  $a$ .

Не останавливаясь на других возможных способах образования линии дислокации, перейдем к важной для дальнейшего ее феноменологической интерпретации. В континуальной механике образование, подобное рассмотренному, возникает вследствие следующей несложной операции. Кусок материала подрезается плоскостью с прямой кромкой (рис. 3.3), затем верхний берег разреза перемещается относительно нижнего как жесткое целое на расстояние  $b$  и в новом положении берега разреза склеивается.

Очевидно, что в вершине разреза, имитирующей линию дислокации  $D$ , возникнет особенность напряженного состояния, а при обходе точки по замкнутому контуру  $\gamma$  обнаружится скачок перемещений, равный  $b$ .

Эти два обстоятельства подсказывают вид аналитических функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , определяющих напряженно-деформированное состояние в данной плоской задаче классической теории уп-

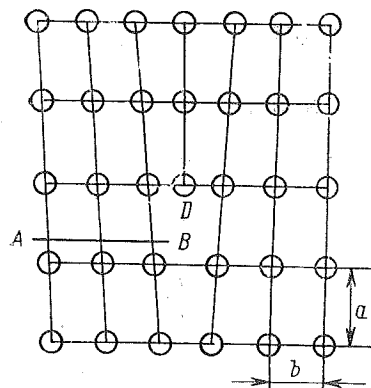


Рис. 3.2

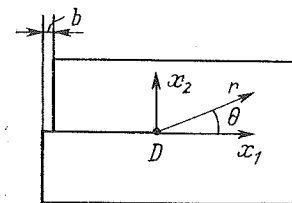


Рис. 3.3.

ругости, по формулам Колосова — Мусхелишвили, частично уже использованным в предыдущей главе,

$$\begin{aligned} 2\mu(u_1 + iu_2) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\operatorname{Re}\varphi'(z), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[\overline{z\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}],$$

$$i(R_1 + iR_2) = [\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}],$$

где для рассматриваемой плоской деформации  $\kappa = 3 - 4\nu$ ,  $R_1 + iR_2$  — главный результирующий вектор усилий, действующих на внутреннюю часть замкнутого контура  $\gamma$ .

Поместим начало координат декартовой  $x_1, x_2$  и полярной  $r, \theta$  систем координат в вершину разреза и заметим, что при обходе начала координат по замкнутому контуру  $\gamma$  (при изменении  $\theta$  в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ ) должен возникать разрыв в перемещении

$$[u_1] = b,$$

и, следовательно,

$$\{\operatorname{Re}[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}]\}_{-\pi}^{\pi} = 2\mu b, \quad (1.2)$$

в то время, как разрыв  $[u_2] = 0$ , т. е.

$$\{\operatorname{Im}[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}]\}_{-\pi}^{\pi} = 0. \quad (1.3)$$

Простейшей аналитической функцией комплексного переменного, способной дать такой разрыв, является  $\ln z$ . К тому же эта функция дает и особенность в напряжениях, что нетрудно усмотреть из формул (1.1) для этих параметров. Такое предположение будет оправдано, если оно удовлетворяет условиям (1.2), (1.3), а также условию самоуравновешенности напряженного состояния, что означает равенство нулю главного вектора усилий

$$[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_{-\pi}^{\pi} = 0. \quad (1.4)$$

Итак, зададим

$$\varphi = A \ln z, \quad \psi = B \ln z,$$

где

$$A = A_1 + iA_2, \quad B = B_1 + iB_2. \quad (1.5)$$

Входящие в формулы (1.1) функции имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{A}{z}, \quad \overline{\varphi'(z)} = \frac{\bar{A}}{z} = \frac{\bar{A}}{r^2} z, \quad z\overline{\varphi'(z)} = \\ &= \frac{\bar{A}}{r^2} z^2, \quad z\overline{\varphi''(z)} = -\frac{A\bar{z}}{z^2}, \quad \overline{\psi'(z)} = \frac{\bar{B}}{r^2} z. \end{aligned}$$

Внося эти выражения в условия (1.2), (1.3), с учетом того, что  $z = re^{i\theta}$ , получим

$$\begin{aligned} [(\kappa A_1 - B_1) \ln r - (\kappa A_2 - B_2)\theta - A_1 \cos 2\theta + A_2 \sin 2\theta]_{-\pi}^{\pi} &= 2\mu b, \\ [(\kappa A_2 + B_2) \ln r - (\kappa A_1 + B_1)\theta + A_2 \cos 2\theta - A_1 \sin 2\theta]_{-\pi}^{\pi} &= 0. \end{aligned}$$

Единственным ответственным за разрыв здесь является член с углом  $\theta$ , поэтому эти условия будут выполняться, если потребовать, чтобы

$$-2\pi(\kappa A_2 - B_2) = 2\mu b, \quad \kappa A_1 + B_1 = 0. \quad (1.6)$$

Легко установить, что условие (1.4) удовлетворяется, если положить

$$A - \bar{B} = 0, \quad (1.7)$$

что совместно с (1.6) дает

$$A_1 - B_1 = 0, \quad A_2 = -B_2 = -\frac{\mu b}{(\kappa + 1)\pi} = -\frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)}. \quad (1.8)$$

Для напряжений в соответствии с (1.1) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4 \operatorname{Re} \frac{iA_2}{z} = 4A_2 \frac{x_2}{r^2}, \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= -2iA_2 \left( \frac{z}{z^2} - \frac{1}{z} \right), \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} &= -\frac{8A_2}{r^4} x_1^2 x_2, \quad \sigma_{12} = -\frac{2A_2}{r^4} x_1(x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -D \frac{x_2(3x_1^2 + x_2^2)}{r^4}, \quad \sigma_{22} = D \frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{r^4}, \\ \sigma_{12} &= D \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{r^4}, \quad D = -2A_2 = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Как видно, с дислокацией связана система самоуравновешенных напряжений с особенностью на самой линии дислокации  $1/r$  (напомним, что для трещины особенность была корневой  $1/\sqrt{r}$ ). Такое самонапряжение создает в теле потенциальную энергию, которая по теореме Клапейрона равняется половине работы внешних сил, затраченных на создание дислокации. Но как следует из способа образования дислокации, работают лишь касательные усилия  $\sigma_{12}$  на перемещении  $u_1 = b$ . Таким образом, в расчете на единицу длины линии дислокации запасенная упругая энергия будет равна

$$W = \frac{1}{2} \int_{\rho}^R \sigma_{12} b dx_1 = \frac{Db}{2} \int_{\rho}^R \frac{dx_1}{x_1} = \frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{R}{\rho}. \quad (1.10)$$

Если энергия, связанная с трещиной, ограничена, то в рамках континуальной  $\rho \rightarrow 0$  механики энергия дислокации бесконечна даже для ограниченного тела (для ограниченного  $R$ ). Таким образом, хотя в обоих случаях имеет место особенность напряженно-деформированного состояния, все нужные для анализа поведения трещины параметры определяются без выхода за рамки континуальной модели, для дислокации это не так. Избавление от неряшливого результата для  $W$  при  $\rho \rightarrow 0$  может быть достигнуто лишь с учетом атомно-молекулярной структуры. В физике кристаллов (см., например, [7]) полагают, что  $R$  — это среднее расстояние между множеством находящихся в теле дислокаций, а  $\rho$  имеет порядок межмолекулярного расстояния, и пользуются оценкой

$$\ln(R/\rho) \cong 4\pi. \quad (1.11)$$

Использованная выше феноменологическая трактовка дислокации легко допускает обобщения на криволинейную форму дислокационной линии. В куске материала делается плоский подрез в виде языка (рис. 3.4), верхний берег смещается как жесткое целое на расстояние  $b$ , и в новом положении берега склеиваются. На полученной кривой линии дислокации можно выделить два характерных участка: I, где она ортогональна вектору  $\mathbf{b}$ , и II, где направления линии дислокации и вектора  $\mathbf{b}$  совпадают. Первый тип носит название краевой дислокации и был нами уже исследован. Второй — представляет так называемую винтовую дислокацию. Остальная часть линии является дислокацией смешанного типа.

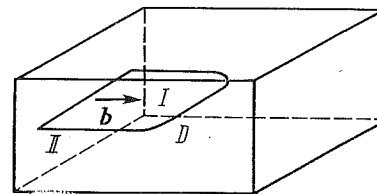


Рис. 3.4

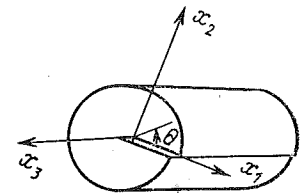


Рис. 3.5

Напряженно-деформированное состояние уединенной винтовой дислокации находится значительно более просто, чем для краевой дислокации, поскольку отличным от нуля перемещением в этом случае является лишь  $u_3$ , а операция ее создания состоит в плоском подрезании до оси цилиндра (рис. 3.5) и сдвиге нижнего (ради удобства) берега относительно верхнего в направлении оси  $x_3$  на расстояние  $b$  с последующей склейкой. Получающаяся линия дислокации совпадает с осью цилиндра.

Для перемещений решение легко угадывается

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{b}{2\pi} \theta, \quad [u_3]_0^{2\pi} = b, \quad (1.12)$$

где  $\theta$  — полярный угол плоской системы координат  $x_1, x_2$ . Действительно, уравнения Ламе для (1.11) сводятся к гармоническому уравнению для  $u_3$ , т. е. к уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} = 0,$$

которое при

$$\theta = \arctg \frac{x_2}{x_1}$$

удовлетворяется тождественно.

Поскольку

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{r^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{x_1}{r^2},$$

то по закону Гука  $\sigma_{ij} = 0$ , кроме

$$\sigma_{13} = -\frac{\mu b x_2}{2\pi r^3}, \quad \sigma_{23} = \frac{\mu b x_1}{2\pi r^3}. \quad (1.13)$$

Из усилий на внешнем контуре ненулевым может быть только

$$T_3 = \sigma_{31} v_1 + \sigma_{32} v_2 = -C \left[ \frac{x_2}{r^2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{x_1}{r^2} \frac{dx_1}{ds} \right],$$

где  $v_1, v_2$  — компоненты единичной нормали к контуру,  $C = \text{const}$ ,  $s$  — длины дуги контура. Проверим самонапряженность полученного решения

$$\oint T_3 ds = -\frac{C}{2} \oint \frac{dr^2}{r^2} = -C [\ln r(2\pi) - \ln r(0)]$$

и поскольку  $r(\theta)$  — функция однозначная, то этот интеграл действительно равен нулю.

Энергия, заключенная в винтовой дислокации, рассчитывается точно так же, как и в краевой дислокации, и равна

$$\frac{\mu b^2}{4\pi} \ln \frac{R}{\rho},$$

т. е. в  $(1-\nu)$  раз меньше последней.

Очевидно, что в промежуточном между краевой и винтовой случае смешанной дислокации запасенная энергия также пропорциональна квадрату вектора Бюргерса и, естественно, длине линии дислокации. И если в кристалле при образовании дислокации есть выбор различных плоскостей и векторов Бюргерса, то известные энергетические принципы механики в связи с последним результатом указывают на такой выбор, при котором вектор Бюргерса окажется наименьшим (в приведенных выше вариантах выбора этого вектора должен реализоваться первый при  $b < a$ ). А это направление наиболее плотной упаковки атомов в кристалле, которое выделяет специальные объекты кристалла: плоскости и направление в них с наиболее плотной упаковкой, так называемые системы скольжения. Поэтому в дальнейшем, кроме оговоренных случаев, будем считать плоскость, в которой развивается дислокация, плоскостью скольжения, а вектор Бюргерса считать направленным по линии скольжения.

По тем же соображениям устойчивому положению дислокации должна отвечать минимальная ее длина.

## § 2. ДИСЛОКАЦИИ ПОД НАГРУЗКОЙ

Рассмотрим ситуацию, когда дислокация совершается в теле, находящемся под нагрузкой. Исследуем интеграл [54]

$$W' = \int_{\Sigma} \sigma'_{ij} v_i b_j d\Sigma + \int_S T'_i u_i dS, \quad (2.1)$$

где штрихованные компоненты принадлежат внешнему полю, а нештрихованные — полю от дислокации,  $S$  — внешняя поверхность тела,  $\Sigma = \Sigma^+ + \Sigma^-$  — общая площадь сдвинутых на вектор  $\mathbf{b}$  берегов создаваемой дислокации.

Введем временные обозначения

$$\tilde{T}'_i = \begin{cases} \sigma'_{ij} n_j & (S), \\ \sigma'_{ij} v_j & (\Sigma), \end{cases} \quad \tilde{u}_i = \begin{cases} u_i & (S), \\ b_i & (\Sigma^+), \\ 0 & (\Sigma^-), \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности  $S$ . Тогда (2.1) можно представить в форме

$$W' = \int_{S+\Sigma} \tilde{T}'_i \tilde{u}_i dS,$$

а представление (2.2) позволяет применить к последнему интегралу теорему Гаусса — Остроградского, что дает

$$W' = \int_V \sigma'_{ij} e_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} e'_{ij} dV.$$

Последнее равенство является следствием применения теоремы Бетти. А поскольку напряжения  $\sigma_{ij}$  самоуравновешены, а  $\epsilon_{ij}'$  — кинематически возможные деформации, то обратное приведение объемного интеграла к поверхностному дает

$$W' = \int_{S+\Sigma} T_i u_i' dS.$$

Откуда вследствие того, что на  $S+\Sigma$  усилия  $T_i$  отсутствуют, следует, что  $W' = 0$ , т. е.

$$W^* = \int_S T_i u_i dS = - \int_{\Sigma} \sigma'_{ij} v_i b_j d\Sigma. \quad (2.3)$$

Этот результат принадлежит Колонетти. Здесь  $W^*$  — работа внешних сил на перемещениях от создаваемой дислокации.

Если в теле уже существовала дислокация, то создание дислокации можно понимать как передвижение линии дислокации. В этом убеждает следующий простой пример.

Пусть тело, с положительной краевой дислокацией нагружено внешними касательными усилиями  $\tau$  так, как показано на рис. 3.6. Значок  $\perp$  на этом рисунке отражает тот способ образования дислокации, который отвечал внедрению лишней атомной вертикальной полуплоскости в верхнюю часть материала. Это то же, что и сдвиг левой верхней части вправо. Смысл значка  $\tau$  теперь очевиден, а соответствующая краевая дислокация именуется отрицательной.

Применительно к рис. 3.6 имеем  $\xi^0$  — начальное положение дислокации,  $\xi$  — конечное,  $\sigma_{ij} = 0$ , кроме  $\sigma_{12} = \tau$ ,  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = -1$ ,  $b_1 = b$ ,  $b_2 = 0$  и, таким образом

$$W^* = \tau b \int_{\xi_0}^{\xi} dx_1 = \tau b (\xi - \xi_0),$$

$$dW^* = \tau b d\xi,$$

и если в действительности предположенное движение дислокации возможно, то  $dW^*$  должно быть положительным, причем

$$\frac{dW^*}{d\xi} = \tau b = F \quad (2.4)$$

можно трактовать как силу, действующую на дислокацию.

Что же касается возможного движения дислокаций, то оно должно происходить без нарушения сплошности тела. Пусть  $d\mathbf{l}$  положение элемента линии дислокации, достигнутое к данному моменту, а примыкающий к ней участок поверхности, по которой уже прошел этот отрезок дислокации, имеет нормаль  $\mathbf{v}$ . При заданном векторе Бюргерса, а он, может быть и неоднозначно, определяется конструкцией кристаллической решетки, дальнейшее движение должно происходить так, чтобы (рис. 3.7) изменения

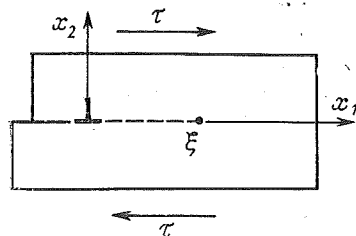


Рис. 3.6

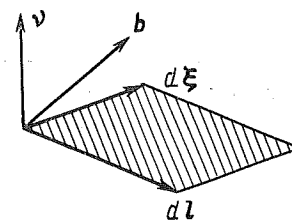


Рис. 3.7

объема при подрезании в направлении  $d\xi$  — вектора перемещения отрезка  $d\mathbf{l}$  и последующей склейки не происходило, т. е. чтобы выполнялось условие

$$dV = d\xi (\mathbf{b} \times d\mathbf{l}) = 0.$$

Отсюда следует, что если  $\mathbf{b} \times d\mathbf{l} \neq 0$ , то в данный и, следовательно, во все прошедшие моменты перемещение дислокации возможно только в одной плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{b}$  и  $d\mathbf{l}$ . Исключением является случай винтовой дислокации, для которой  $\mathbf{b} \times d\mathbf{l} = 0$  и, значит, ее движение произвольно\*.

Указанное правило выполнено при выводе формулы (2.4) и, следовательно, сила  $F$  действительно вызывает движение рассмотренной краевой дислокации.

Силу, действующую на произвольную криволинейную дислокацию, можно определить из следующих соображений.

В общем случае [54] на основании (2.3)

$$dW^* = - \sigma'_{ij} v_i b_j d\omega, \quad (2.5)$$

где  $d\omega$  — площадь, ометаемая элементом линии дислокации  $d\mathbf{l}$  при его перемещении на  $d\xi$ , т. е. (рис. 3.8)

$$\overline{v} d\omega = d\mathbf{l} \times d\xi. \quad (2.6)$$

Введем новый вектор  $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p}_i = \sigma'_{ij} b_j, \quad (2.7)$$

т. е. вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{b}$ , умноженный на  $|\mathbf{b}|$ . Тогда формула (2.5) примет вид

$$dW^* = - \mathbf{p} (d\mathbf{l} \times d\xi) = d\xi (d\mathbf{l} \times \mathbf{p}) = dF d\xi,$$

а действующая на  $d\mathbf{l}$  сила аналогично (2.4) будет

$$dF = d\mathbf{l} \times \mathbf{p}, \quad (2.8)$$

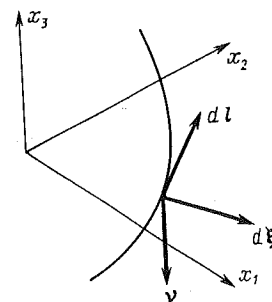


Рис. 3.8

\* Нужно отметить, что в результате диффузии (условия ползучести) возможно удлинение или укорочение лишней атомной стенки, что означает перемещение краевой дислокации в параллельную плоскость скольжения — эффект переползания краевой дислокации [7].

где вместо  $F$  в (2.4) фигурирует прирост этой силы, отвечающий элементу  $d\mathbf{l}$ . (В рассмотренном выше примере  $d\mathbf{F} \rightarrow F$ ,  $d\mathbf{l} \rightarrow l$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \tau b$ .)

В континуальной теории дислокаций в основном нужно знать не полную силу  $\mathbf{F}$ , а ее проекцию  $\mathbf{Q}$  на плоскость, в которой движется дислокация (плоскость скольжения), т. е. на плоскость с нормалью  $\mathbf{v}$ :

$$d\mathbf{Q} = d\mathbf{F} - (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}.$$

По законам векторной алгебры это выражение преобразуется в тройное векторное произведение

$$d\mathbf{Q} = \mathbf{v} \times d\mathbf{F} \times \mathbf{v}.$$

Для первой части векторного произведения имеем

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{F} = \mathbf{v} \times d\mathbf{l} \times \mathbf{p} = d\mathbf{l} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}) = d\mathbf{l} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}),$$

и, таким образом,

$$d\mathbf{Q} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) = \sigma_{ij} v_i b_j (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}). \quad (2.9)$$

Из этой формулы следует, что сила  $d\mathbf{Q}$  действует на дислокацию по внешней нормали к контуру (линии) дислокации и ее величина определяется скалярным произведением вектора внешнего напряжения на плоскости скольжения на вектор Бюргерса. А поскольку последний лежит на плоскости скольжения, то величина силы, действующей на дислокацию, зависит только от касательной составляющей  $\tau_v'$  вектора напряжений внешнего поля на этой плоскости и вектора Бюргерса. На основании (2.9) для удельного (отнесенного к единице длины линии дислокации) усилия  $\mathbf{q}$ , действующего на дислокацию, будем иметь

$$\mathbf{q} = \frac{d\mathbf{Q}}{dl} = (\tau_v' \cdot \mathbf{b}) \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{l}}{dl}, \quad (2.10)$$

где  $dl$  — длина вектора  $d\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  — нормаль к линии дислокации. Отметим особо, что направление  $\mathbf{q}$  не зависит от направления  $\tau_v'$  и  $\mathbf{b}$ .

В частном, но весьма важном случае, когда линия дислокации представляет окружность (кольцевая дислокация) и подвержена сдвигу напряжением  $\tau_v' = \tau$  в направлении вектора  $\mathbf{b}$ , в соответствии с (2.10) создаются радиально направленные усилия

$$q = \tau b, \quad (2.11)$$

стремящиеся, вне зависимости от направления вектора  $\tau_v'$ , изотропно расширить дислокационное кольцо. Заметим, что при этом часть дуги дислокации будет перемещаться против направления  $\tau_v'$ .

Из приведенного в конце предыдущего параграфа энергетического анализа следует, что кольцевая линия дислокации подобно растянутой упругой нити стремится сжаться и поскольку общая энергия линии дислокации прямо пропорциональна ее длине, то

растягивающее усилие в элементе линии дислокации равно как раз удельной энергии, посчитанной на единицу длины

$$T = W = \frac{\mu b^2 k}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{R}{\rho}, \quad (2.12)$$

где коэффициент  $k$  учитывает смешанность типа дислокации и весьма близок к единице [54].

Баланс сил (2.10) и (2.11) (рис. 3.9, б) дает  $T = qr$ , откуда можно определить касательное усилие  $\tau$ , необходимое для существования кольцевой дислокации:

$$\tau = \frac{\mu b k}{4\pi(1-\nu)r} \ln \frac{R}{\rho}.$$

По оценке (1.11) для поддержания равновесного состояния кольцевой дислокации требуется усилие  $\tau \approx b\mu/r$ , которое в реальных условиях может быть обеспечено лишь при достаточно большом радиусе кольца ( $r \gg b$ ). Следовательно, малые кольца ( $r$  порядка  $b$ ) существовать не могут.

### § 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИСЛОКАЦИЙ

Если в теле имеются две дислокации, то поле напряжений каждой из них является внешним по отношению к другой и приводит к силовому воздействию, вызывающему различные эффекты. Очевидно, что сила воздействия одной дислокации на другую равна с обратным знаком силе воздействия поля этой другой на первую.

Пусть имеются две краевые параллельные дислокации в одной плоскости с векторами Бюргерса \*  $b_0$  и  $b_1$  на расстоянии (рис. 3.10)  $a_1$ . Совместим первую дислокацию с началом координат и вычислим силу  $q$  воздействия этой дислокации на вторую.

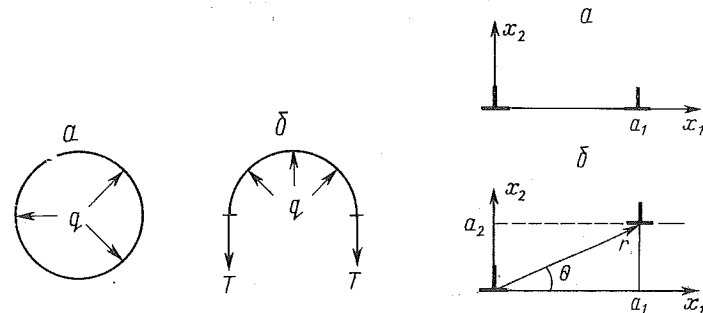


Рис. 3.9

Рис. 3.10

\* В феноменологической трактовке разница между  $b_0$  и  $b_1$  может быть произвольной, в макроструктурной — их отношение должно быть целым числом, например  $b_1 = 2b_0$  (сдвиг атомных плоскостей сразу на два атомных расстояния).

Поле первой дислокации определяется формулами (1.9), но в силу (2.10) для определения искомой величины нужна лишь формула для  $\sigma_{ij}$  при  $x_2=0$

$$\sigma'_{12} = \frac{\mu b_0}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x_1}. \quad (3.1)$$

Штрихом, как и прежде, отмечено то обстоятельство, что данное поле является внешним для второй дислокации. Итак, по (2.10)

$$q = \frac{\mu b_0 b_1}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{a_1}. \quad (3.2)$$

Если векторы Бюргерса обеих дислокаций имеют одинаковые знаки, то  $q$  — сила отталкивания и предоставленные самим себе дислокации разбегутся. Если знаки разные, то  $q$  — сила притяжения и в указанных условиях дислокации сольются и аннигилируют.

Аналогично ведут себя две винтовые дислокации; на основании второй из формул (1.12) сила их взаимодействия равна

$$q = \frac{\mu b_0 b_1}{2\pi} \frac{1}{a_1}. \quad (3.3)$$

Если две краевые дислокации находятся в параллельных плоскостях скольжения (рис. 3.10, б), то первая (в начале координат) дислокация создает в плоскости второй напряжение

$$\sigma'_{12} = \frac{\mu b_0 x_1 (x_1^2 - x_2^2)}{2\pi(1-\nu)r^4},$$

и для силы взаимодействия имеем

$$q = \frac{\mu b_0 b_1}{2\pi(1-\nu)} \frac{a_1(a_1^2 - a_2^2)}{r^4},$$

где  $r^2 = a_1^2 + a_2^2$ , и в полярной системе координат можно записать

$$q = \frac{\mu b_0 b_1}{8\pi(1-\nu)} \frac{\sin 4\theta}{a_2}. \quad (3.4)$$

Поскольку краевые дислокации могут двигаться только в своей плоскости скольжения, то  $a_2 = \text{const}$ . Для углов  $\theta < \pi/4$  сила  $q$  положительна и дислокации расталкиваются, для  $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$  она становится отрицательной. Точки  $\theta = \pi/4$  и  $\theta = \pi/2$  соответствуют равновесию ( $q=0$ ), но первая отвечает неустойчивому, а вторая — устойчивому равновесию. Таким образом, если вторая дислокация попадает в зону  $\pi/4 < \theta < \pi/2$  (зона притяжения), то она в результате окажется на оси  $x_2$ .

Отсюда следует, что образование из вертикального ряда положительных краевых дислокаций (рис. 3.11) является устойчивым,

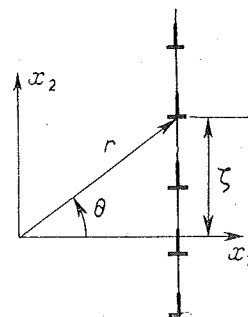


Рис. 3.11

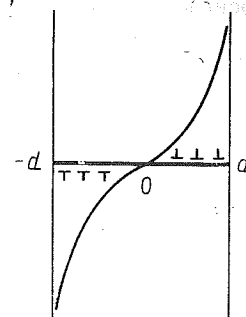


Рис. 3.12

обычно называется стенкой дислокаций и обладает любопытными свойствами.

Вместо дискретного ряда рассмотрим непрерывный ряд плотно расположенных дислокаций с бесконечно малыми векторами Бюргерса, т. е. произведем замену

$$b = \beta d \zeta,$$

где  $\beta$  — погонная интенсивность вектора Бюргерса, в данном случае постоянная. Будем предполагать стенку дислокаций бесконечно длинной и вычислим создаваемое ею поле напряжений. Оно, очевидно, определится суммированием полей, возникающих от каждой точки стенки, и для касательного напряжения в точках  $x_1, x_2$  будет

$$\sigma_{12} = \frac{\mu \beta}{2\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1 [x_1^2 - (x_2 - \zeta)^2]}{[x_1^2 + (x_2 - \zeta)^2]^2} d\zeta.$$

В полярных координатах, введенных в произвольной точке  $x_1, x_2$  (рис. 3.11), так что

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 - \zeta = r \sin \theta,$$

при постоянстве  $x_1, x_2$  имеем

$$dr \cos \theta + r \sin \theta d\theta = 0, \quad d\zeta = -d(r \cos \theta)$$

или

$$d\zeta = -\frac{rd\theta}{\cos \theta},$$

и выражение для  $\sigma_{12}$  приобретает вид

$$\sigma_{12} = \frac{\mu \beta}{2\pi(1-\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\theta d\theta = 0.$$

Можно на основании (1.9) проверить, что все остальные компоненты напряжений тоже оказываются нулевыми, что представляет необычный факт: множество сингулярных полей одного знака гасят друг друга, переводя тело в ненапряженное состояние.

Как показывают эксперименты, границы субзерен в кристалле, т. е. поверхности разориентации кристаллографических плоскостей, состоят из рядов дислокаций. А поскольку эти границы устойчивы, то и соответствующие ряды дислокаций должны обладать этим качеством. Конечно, рассмотренная выше стенка дислокаций этим качеством обладает. Оно сохраняется и при слабой разориентации подходящих к стенке дислокаций плоскостей скольжения\* и, следовательно, кристаллографических плоскостей. Однако при больших разориентациях устойчивость стенки теряется [54]. Стенка дислокаций может служить границей субзерен со слабой разориентацией (по данным эксперимента до  $5^\circ$ ).

Рассмотрим теперь другое образование из дислокаций — полосу скольжения, состоящую из параллельных краевых дислокаций с одинаковыми по величине векторами Бюргерса, но вообще разных знаков, расположенных в одной плоскости скольжения на отрезке  $[-d, d]$  (рис. 3.12). Естественно, что если не принять специальных мер, то такое скопление либо разбежится, либо аннигилирует. Но мы предполагаем, что выход за указанный отрезок запрещен, а чуть позднее будут указаны реальные условия, при которых такое предположение оправдано. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями декартовых координат  $x$  и  $y$ .

Допустим, что под действием внешнего касательного напряжения дислокации выстраиваются в некую последовательность с разными между собой интервалами. При этом на  $j$ -ю дислокацию будут действовать поля напряжений  $\sigma_{12}'$  всех остальных  $i$ -х дислокаций и условие равновесия с учетом внешнего касательного напряжения  $\tau$  и формулы (3.1) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{Db_i b_j}{x_j - x_i} + \tau b_j = 0, \quad (3.5)$$

где  $D$  определяется последней из формул (1.9).

Совершим ту же, что и для стенки дислокаций, операцию перехода к непрерывному распределению, полагая

$$b_i = b = f(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

и заменяя суммирование в (3.5) интегралом

$$D \int_{-d}^d \frac{f(\xi) d\xi}{x - \xi} + \tau = 0.$$

\* Тенденция к разориентации плоскостей скольжения, подходящих к стенке дислокаций на основе вычисления углов поворота элементов в поле перемещений, показана в [54].

Перепишем это уравнение в виде

$$\int_{-d}^d \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - x} = C, \quad C = \frac{\tau}{D}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-d}^d \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (3.8)$$

где относительно  $f(\xi)$  будем предполагать только, что она непрерывна по Гельдеру внутри интервала  $[-d, d]$ .

В соответствии с формулами Сохоцкого — Племяля граничные значения функции  $F(z)$  при подходе к отрезку  $[-d, d]$  с верхней и нижней полуплоскости будут

$$F^+(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-d}^d \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - x}, \quad (3.9)$$

$$F^-(x) = -\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-d}^d \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - x}.$$

Отсюда и из (3.7) следует

$$\begin{aligned} F^+(x) - F^-(x) &= f(x), \\ F^+(x) + F^-(x) &= \frac{C}{\pi i}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Введем вспомогательную функцию комплексного переменного

$$F_0(z) = \frac{1}{\sqrt{d^2 - z^2}}. \quad (3.11)$$

При обходе отрезка  $[-d, d]$  предельным контуром  $\gamma_0$  (рис. 2.6, гл. II) функция  $F_0(z)$  имеет разные знаки при движении по верхнему и нижнему берегам, так что

$$F_0^+(x) + F_0^-(x) = 0, \quad (3.12)$$

и, следовательно, на основании (3.10) можно записать

$$\frac{F^+(x)}{F_0^+(x)} - \frac{F^-(x)}{F_0^-(x)} = \frac{C}{\pi i F_0^+(x)},$$



т. е. если обозначить  $\tilde{F}(z) = F(z)/F_0(z)$ , то для этой функции имеем аналогично (3.8)

$$\tilde{F}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-d}^d \frac{\tilde{f}(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (3.13)$$

но, кроме того (см. первую из (3.10)),

$$\tilde{f}(x) = \frac{C}{\pi i F_0^+(x)} = \tilde{F}^+(x) - \tilde{F}^-(x).$$

Если теперь внести в (3.13) выражение для  $\tilde{f}$  и перейти обратно к функции  $F(z)$ , то получим

$$F(z) = -\frac{CF_0(z)}{2\pi^2} \int_{-d}^d \frac{\sqrt{d^2 - \xi^2}}{\xi - z} d\xi. \quad (3.14)$$

Интеграл, подобный входящему сюда, уже встречался (гл. II, формула (3.14)). Напомним, что последний вычисляется по формуле Коши; применительно к интегралу (3.14)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t - z} dt = \frac{1}{\pi i} \int_{-d}^d \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x - z} dx = +\sqrt{d^2 - z^2} - iz.$$

Отсюда по (3.14) следует

$$F(z) = \frac{-C}{2\pi} \left( \frac{z}{\sqrt{d^2 + z^2}} + i \right), \quad (3.15)$$

и по первой из формул (3.10)

$$f(x) = \frac{\tau}{\pi D} \frac{x}{\sqrt{d^2 - x^2}}. \quad (3.16)$$

На основании этой формулы интенсивность дислокаций, или, что то же, густота дискретного множества дислокаций, имеет вид, представленный на рис. 3.12. Слева располагаются дислокации с отрицательными векторами Бюргерса, справа — с положительными.

Теперь можно рассчитать поле напряжений вне полосы скольжения. В частности, для  $\sigma_{12}$  на продолжении полосы имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= D \int_{-d}^d \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - x} + \tau = \frac{\tau}{\pi} \int_{-d}^d \frac{\xi d\xi}{\sqrt{d^2 - \xi^2} (\xi - x)} + \\ &+ \tau = i\tau \left( \frac{z}{\sqrt{d^2 - z^2}} + i - i \right)_{z \rightarrow x}. \end{aligned}$$

Здесь опять использованы переход к интегрированию по предельному контуру  $\gamma_0$  и формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = f(z) - f_\infty(z).$$

В результате получим

$$\sigma_{12} = \frac{\tau x}{\sqrt{x^2 - d^2}} \quad (3.17)$$

и в окрестности концов полосы

$$\sigma_{12} \Big|_{\substack{x \rightarrow \pm d \\ y=0}} = \tau \sqrt{\frac{d}{2r}} + O(1), \quad (3.18)$$

где  $r$  — полярный радиус с полюсом в конце полосы скольжения.

#### § 4. ПРИЧИНЫ ЗАРОЖДЕНИЯ ТРЕЩИН

Таким образом, полоса скольжения является концентратором напряжений, подобным трещине и с той же корневой особенностью.

Полученные формулы позволяют вычислить все компоненты напряжений, возникающие в теле, содержащем полосу скольжения, нагруженную в бесконечности параллельным ей касательным напряжением\*. В частности, можно вычислить максимальное значение  $\sigma_\theta$  в полярной системе координат вблизи конца полосы. Максимальным его значением будет [7]

$$\sigma_\theta \Big|_{\theta=-70.5^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tau \sqrt{\frac{d}{2r}} = (\sigma_\theta)_{\max}. \quad (4.1)$$

В большинстве исследований по прочности это растягивающее напряжение считается главной причиной зарождения трещины и последующего разрушения.

Критический уровень  $\tau$ , отвечающий началу растрескивания в направлении действия  $(\sigma_\theta)_{\max}$ , можно оценить следующим образом.

Если во всей полосе содержится  $n$  дислокаций, то должно быть

$$\int_0^d f(x) dx = \frac{n}{2}, \quad (4.2)$$

т. е.

$$\frac{\tau}{\pi D} \int_0^d \frac{x dx}{\sqrt{d^2 - x^2}} = -\frac{\tau}{\pi D} \sqrt{d^2 - x^2} \Big|_0^d = \frac{\tau}{\pi D} = \frac{n}{2},$$

\* Асимптотика этого поля вблизи конца полосы скольжения аналогична таковой для трещины типа II.

откуда, вспоминая формулу (1.9) для  $D$ , получим

$$d = \frac{\mu b n}{4(1-\nu)\tau} = \frac{E b n}{8(1-\nu^2)\tau}. \quad (4.3)$$

В качестве критерия начала растрескивания примем условие

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \sigma_{th}, \quad (4.4)$$

где  $\sigma_{th}$  определено формулой (1.8) предыдущей главы, и при принятых там значениях показателей  $\alpha$  и  $\beta$  имеем  $\sigma_{th} = E/28$ . Внося (4.1) в (4.4) и полагая, что условие выполняется на расстоянии  $r_0$  от конца полосы и что  $r_0$  и  $b$  одного (атомного) порядка, получим с учетом (4.3)

$$\tau_{кр} \sim \frac{E}{n} 10^{-2}. \quad (4.5)$$

Эта оценка критического касательного напряжения даже при небольшом  $n$  значительно ниже, чем теоретическая (по формуле (1.13) гл. II  $\tau_{th} \sim G/2\pi$ ), а при достаточно большом  $n$  критическое значение  $\tau$  может достигаться еще до наступления пластичности.

В связи с последним обратим внимание на то, что из предыдущих рассуждений, как ни странно, следует, что для продвижения по крайней мере уединенной дислокации достаточно бесконечно малой силы  $q$  и, следовательно, касательного напряжения. Этот парадокс проистекает из закругления исходного существа дислокации, как образования микроструктурного, переходом к континуальной трактовке.

Если же обратиться к микроструктурным механизмам, то для смещения одного слоя молекул, верхнего с лишней частицей, (рис. 3.1, б), по отношению к правильному нижнему требуется с учетом сложного силового взаимодействия преодолеть некоторый энергетический барьер.

Для оценки критического значения касательного напряжения, отвечающего началу пластического деформирования, вводится понятие ширины дислокации  $w$  (рис. 3.1, б), определяющей величину области искажения структуры — длину ряда сместившихся молекул — на величину, большую четверти межмолекулярного расстояния  $b$ . Обычно для металлов ширина дислокации равна пяти-шести таким расстояниям. Чем больше ширина дислокации, а точнее отношение  $w/b$ , тем меньше энергетический барьер при движении дислокации через кристалл. Исходя из этих положений и специфики межмолекулярных взаимодействий, Пайерлс и Наборра предложили применительно к простой кубической решетке формулу для критического касательного напряжения

$$\tau_p = \frac{2\mu}{1-\nu} e^{-2\pi w/b}, \quad (4.6)$$

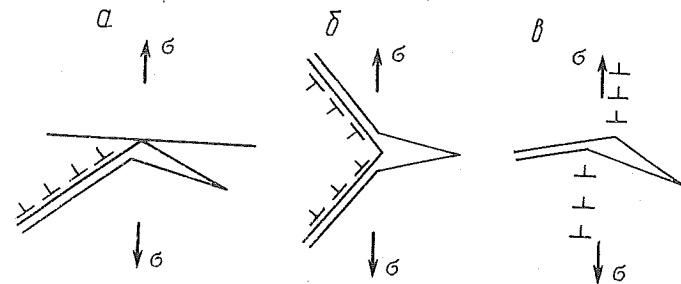


Рис. 3.13

которая при  $\nu = 0,3$  дает

$$\tau_p \sim 2 \cdot 10^{-4} \mu \cong 10^{-4} E,$$

и, таким образом, при  $n$  порядка, большего чем  $10^2$ ,  $\tau_{кр}$  по (4.5) будет меньше  $\tau_p$ .

На основе группового скопления дислокаций типа полосы скольжения разработано несколько моделей зарождения трещин. Они различаются видом преграды, в которую упирается полоса скольжения.

Модель Зинера — Стро. По этой модели зарождение трещин происходит в результате концентрации краевых дислокаций у препятствий, которыми служат границы зерен (рис. 3.13, а). Действие растягивающего напряжения  $\sigma$  на границе зерна при косом расположении полосы скольжения вызывает касательное напряжение в ее направлении, что приводит к возникновению максимального растягивающего напряжения в том же, что и вышеуказанном, направлении относительно полосы. Зарождающаяся трещина идет с границы внутрь зерна.

Модель Коттрелла. В этой модели препятствием служит точка пересечения, или, лучше сказать, точка встречи двух полос скольжения, возникших в пересекающихся плоскостях (рис. 3.13, б). Здесь возникает внутренняя трещина в направлении, определяемом интенсивностью дислокаций полос скольжения. При равенстве интенсивностей трещина пойдет по биссектрисе угла между полосами.

Модель Орована — Стро. Эта модель расслоения полосы скольжения (рис. 3.13, в) в результате образования разорванной стенки дислокаций.

Не останавливаясь на других моделях зарождения трещин, отметим, что для поддержания у препятствия краевых дислокаций должен быть задействован механизм подкачки одноименных краевых дислокаций (точку, где расположен этот источник, можно считать полудлиной рассмотренной выше полосы  $[-d, d]$ ). Таким образом, проблема зарождения трещин поднимает вопрос об источниках дислокаций.

## § 5. ИСТОЧНИКИ ДИСЛОКАЦИИ И ПЛАСТИЧНОСТЬ

Вопрос об источниках дислокаций возникает и при описании реально наблюдаемой пластической деформации в кристаллах.

В кубическом кристалле с ребром в 1 см одна дислокация дает перемещение порядка  $b \sim 10^{-7}$  см, что соответствует сдвигу  $\gamma \sim 10^{-7}$ . Для создания пластической деформации в 1% число дислокации должно быть порядка  $10^5$ .

Известно [7], что в процессе роста кристалла (при переходе из жидкой в твердую фазу) возникают дискообразные вакансии толщиной в одно межмолекулярное расстояние, схлопывание которых образует порядка  $10^3$  дислокаций в одном кубическом сантиметре. Это основной источник возникновения дислокаций в процессе производства самого материала, инициируемый присутствием примесных атомов и термической обработкой.

Такого количества дислокаций для наблюдаемой пластической деформации недостаточно. Остается полагать, что дополнительные дислокации возникают в результате действия внешних сил. Однако зарождение новых дислокаций, например из одиночной вакансии, требует касательного усилия порядка теоретического  $\tau_{th} \sim G/2\pi$  и, следовательно, в расчет приниматься не может. А вот эффект размножения имеющихся дислокаций обнаруживается\* уже при небольших значениях касательного напряжения. Это так называемый источник Франка—Рида для краевых дислокаций и подобный источник для винтовых дислокаций.

Источник Франка—Рида — это отрезок линии краевой дислокации  $AB$ , вне которого линия дислокации в силу каких-либо причин заторможена. При действии касательного напряжения в плоскости скольжения, совпадающей с плоскостью чертежа на рис. 3.14, отрезок  $AB$  принимает криволинейную форму и в дальнейшем ведет себя так, как изображено на рис. 3.14. За моментом  $g$  соприкасающиеся части линии дислокации аннигилируют и петля разбивается на два образования — замкнутую петлю, удаляющуюся от источника, и восстановленный отрезок, соединяющий точки  $A$  и  $B$ . При неизменном (в идеале) внешнем касательном напряжении процесс продолжается новым циклом раздувания и отрыва петли. Источник Франка—Рида создает в плоскости скольжения большое число расходящихся петель дислокаций, которые в реальном кристалле тормозятся другими дислокациями и иными пре-

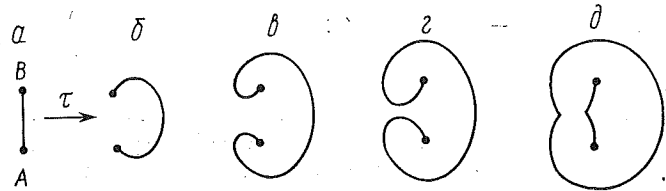


Рис. 3.14

\* Экспериментаторы научились наблюдать этот эффект в микроскоп.

пятствиями, в частности границами зерен, и в конце концов источник может оказаться заблокированным.

Для начала работы такого источника внешнее касательное напряжение должно превосходить некоторое предельное, которое легко определяется из условия равновесия криволинейного отрезка дислокации между точками  $A$  и  $B$  (рис. 3.14). Усилия натяжения  $T$  (реакции в точках  $A$  и  $B$ ) по уже отмеченному выше положению численно равны удельной энергии дислокации  $W$ , а действие внешнего касательного напряжения  $\tau$  создает нормальное к линии дислокации равномерно распределенное давление  $q = \tau b$ . Условие равновесия этих сил будет иметь вид

$$2W = qL,$$

где  $L$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ , и на основании формулы (1.10) получим

$$\tau_0 = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)L} \ln \frac{R}{\rho}, \quad (5.1)$$

или если принять указанную выше оценку  $\ln(R/\rho) \sim 4\pi$ , то

$$\tau_0 \cong \frac{2\mu b}{(1-\nu)L}, \quad (5.2)$$

откуда видно, что источник Франка—Рида может начать работать уже при не слишком высоких напряжениях, если  $L \gg b$ .

Аналогичным образом устроен механизм, производящий петли винтовых дислокаций. В этом случае выделение отрезка  $AB$  с закрепленными концами возникает в силу свойств самой винтовой дислокации. Двигаясь по плоскости  $S_0$ , винтовая дислокация с вектором Бюргерса  $\mathbf{b}$  (рис. 3.15) может в результате некой причины изменить на отрезке  $AB$  направление движения (переползание) и пройти по плоскости  $S'$ , пересекающей плоскость  $S_0$ , некоторое расстояние, а затем восстановить направление своего движения в параллельной  $S_0$  плоскости  $S_1$ . В этой плоскости окажется лишь отрезок линии дислокации  $A'B'$  с закрепленными концами  $A'$  и  $B'$ , поскольку эти точки принадлежат отрезкам  $AA'$ ,  $BB'$  вновь организованной краевой дислокации, которая в плоскости  $S_1$  двигаться уже не может.

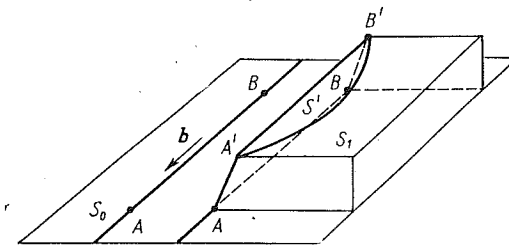


Рис. 3.15

В результате работы всех таких источников должно накопиться порядка  $10^{12}$  дислокаций в кубическом сантиметре, и если бы все из них реализовались, т. е. пересекли кристалл и уничтожились, то пластический сдвиг был бы порядка  $10^7$ , что, конечно, не реально.

В действительности от работы указанных механизмов образуется весьма сложная дислокационная картина. Кроме стенок и полос дислокаций возникают и другие образования: дислокационные диполи, ленточные вакансии, супердислокации и т. д. В этом «лесу» дислокаций произвести детальный расчет поля напряжений и сил взаимодействия дислокаций невозможно. Ясно только, что в результате самоблокировки дислокаций активными среди них будут порядка максимум  $10^7$ , что отвечает 100%-му сдвигу.

Множественность разных форм дислокационных структур приводит в тому, что в реальном кристалле уже в фиксированной плоскости скольжения поле напряжений будет неоднородным и неопределенным, если заранее не указаны вид и расположение самих дислокационных структур. Очевидно, что и в целом напряженное состояние кристалла при любом как угодно простом виде внешнего нагружения будет неоднородным, причем эта неоднородность не имеет прямой связи с кристаллографической структурой.

Поэтому стройная и изящная теория дислокаций в плане предсказания механических свойств реальных материалов может выполнять лишь качественную роль, подсказывая правильный выбор феноменологических гипотез.

Как видно из предыдущего, происходящее в реальных телах мгновенное (независимое от масштаба времени) несобратимое изменение формы при уровне силовых воздействий, существенно меньших теоретического ( $\tau_{th}$ ), — пластическая деформация — имеет в своей основе дислокационный механизм. Однако количественная оценка этого эффекта по ряду причин, отмеченных в конце предыдущей главы, затруднительна даже для монокристалла. Что же касается наиболее интересных для техники элементов машин, механизмов и сооружений, то, поскольку они, как правило, являются телами поликристаллическими, рассчитывать на успех количественного описания пластичности, основываясь на математической теории дислокаций, не приходится. Из микроструктурных механизмов разумно сохранить лишь главные и корректировать определяющее соотношение данными макроопыта. Пример такого построения сейчас будет приведен, а затем будут изложены и другие подходы к построению определяющих соотношений пластичности.

### § 1. ТЕОРИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

Поликристаллическое тело есть агрегат, состоящий из множества кристаллитов (кусков монокристаллической структуры) различной формы и ориентации. Основываясь на выводе теории дислокаций, будем полагать, что пластическая деформация каждого монокристалла происходит в плоскостях, а в них — в направлениях наиболее плотной упаковки молекул (плоскости и направления скольжения). Например, для гранецентрированной кубической решетки кристалла (рис. 4.1) такими плоскостями являются те, что пересекают его по диагоналям граней, а направлениями — сами эти диагонали. Каждое образование из плоскости

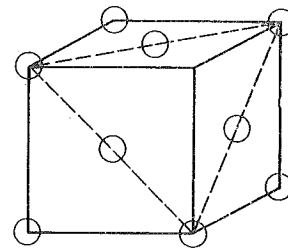


Рис. 4.1

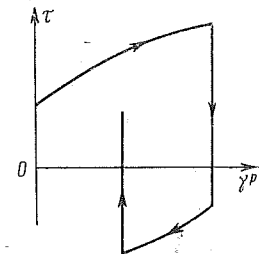


Рис. 4.2

и направления скольжения носит название системы скольжения и определяется единичными векторами нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости скольжения и  $\mathbf{t}$  — направления скольжения. Поскольку в данном случае четыре плоскости скольжения и по три направления в них, то гранецентрированная решетка имеет 12 систем скольжения.

Пластическая деформация сдвига в системах скольжения происходит в соответствии с рассмотренным в гл. III дислокационным механизмом под действием касательной составляющей напряжения. В первом приближении можно принять, что сдвиг  $\gamma_{nt}^p$  в системе скольжения  $\mathbf{nt}$  определяется компонентой касательного напряжения

$$\gamma_{nt}^p = F(\tilde{\tau}_{nt}), \quad (1.1)$$

причем фигурирующее в этой формуле  $\tilde{\tau}_{nt}$  есть экстремальное значение  $\tau_{nt}$  за историю деформирования в данной системе скольжения, превысившее по модулю в начальный момент некоторое значение  $\tau_0$ . Собственно, эта зависимость вполне аналогична обычной зависимости  $\gamma^p \sim \tau$  для упругопластического материала в макроэксперименте (рис. 4.2).

Если рассматриваемый агрегат при невысоких напряжениях (в упругой области) ведет себя как изотропное тело, то это значит, что любая ориентация составляющих его кристаллитов, а следовательно, и их систем скольжения равновероятна. Будем в дальнейшем предполагать это свойство выполненным, а также то, что напряженное состояние всех кристаллитов одинаково и в неподвижных осях  $x_i$  определяется тензором  $\sigma_{ij}$ .

Введем подвижную систему координат  $x'_i$  с единичными ортами, два из которых совпадают с векторами  $\mathbf{n}'$  и  $\mathbf{t}'$  некоторой системы скольжения. В такой системе координат компонента  $\tau_{n't'}$  касательного напряжения определяется на основе закона тензорного преобразования

$$\tau_{n't'} = \sigma_{ij} n'_i t'_j \quad (1.2)$$

и в силу (1.1) определяет сдвиг  $\gamma_{n't'}^p$  в системе скольжения  $\mathbf{n}'$ ,  $\mathbf{t}'$  и соответствующий вклад в пластическую деформацию всего агрегата в осях  $x_i$

$$(\epsilon_{ij}^p)_0 = \frac{1}{2} \gamma_{n't'}^p n'_i t'_j \frac{N'}{N}, \quad (1.3)$$

где  $N$  общее число зерен, а  $N'$  — их число с ориентацией систем скольжения  $\mathbf{n}'$ ,  $\mathbf{t}'$ . Если же учесть, что в силу закона парности касательных напряжений сдвиг одновременно возникает и в парной системе скольжения других кристаллитов, где роли  $\mathbf{n}'$  и  $\mathbf{t}'$  поменялись местами, то общая пластическая деформация агрегата может быть представлена формулой

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} \sum_{n't'} \gamma_{n't'}^p (n'_i t'_j + n'_j t'_i) \frac{N'}{N}. \quad (1.4)$$

Систему скольжения  $\mathbf{n}'\mathbf{t}'$  можно задать с помощью точки на единичной сфере и угла  $\omega$ , отсчитываемого от некоторого фиксированного направления (рис. 4.3). Если  $\Delta\Omega$  — малый телесный угол на такой сфере, то в элемент  $\Delta\Omega\Delta\omega$  вообще попадает не одинаковое количество  $N'$ , но при  $N \rightarrow \infty$  это количество  $N' = \Delta N$  становится для разных систем скольжения одинаковым, причем

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta\Omega\Delta\omega}{4\pi 2\pi}, \quad (1.5)$$

так что, обозначая через  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$  среднюю ориентацию систем скольжения  $\mathbf{n}'$ ,  $\mathbf{t}'$  в элементе  $\Delta\Omega\Delta\omega$ , формулу (1.4) можно конкретизировать в виде

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{16\pi^2} \iint d\Omega \int F(\tilde{\tau}_{nt}) (n_i t_j + n_j t_i) d\omega. \quad (1.6)$$

В силу неопределенности функции  $F$ , которая должна определяться из макроэксперимента, коэффициент  $1/16\pi^2$  несуществен и может быть отброшен, а функция  $F$  — задаваться в виде, например, полинома с неизвестными коэффициентами. Общая деформация получается добавлением к компонентам (1.6) упругих составляющих, вычисляемых по закону Гука.

Простота соотношения (1.6) только видимая. При конкретном использовании этого соотношения большие трудности вызывает определение пределов интегрирования в соответствующих интегралах, т. е. определение области  $\Omega\omega$ , в которой в данный момент нагружения  $\tau_{ni} = \tilde{\tau}_{ni}$ .

Такая теория — теория скольжения — была предложена Батдорфом и Будянским в 1947 г. в работе [2]. Это была первая из так называемых физических\* теорий пластичности, самая простая и, естественно, с рядом недостатков, проистекающих из грубости исходных предположений. Действительно, при внимательном анализе явных и неявных допущений, приводящих к соотношению (1.6), их полный перечень представляется в следующем виде.

1. Напряженное состояние каждого кристаллита одинаково и совпадает с тем, которое было бы при макрооднородности тела.

\* Такое наименование призвано отразить то обстоятельство, что в основе теории заложены соображения о микроструктурных механизмах деформирования. Однако, как видно на примере теории скольжения, да и в других вариантах подобных теорий, это наименование оправдано не полностью. Оно было бы вполне обосновано, если бы все нужные количественные характеристики определялись на микроуровне и не требовалась бы корректировка макроэкспериментом. «Полуфизичность» известных теорий этого направления подчеркивается еще и тем обстоятельством, что они допускают чисто феноменологическую трактовку.

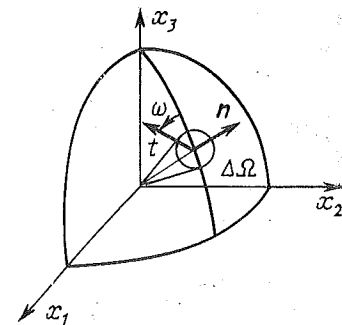


Рис. 4.3

2. Влиянием формы и размеров кристаллитов на деформацию агрегата пренебрегается. По существу, вместо кристаллитов рассматривается абстрактный монокристалл.

3. Каждый монокристалл обладает лишь одной равновероятно ориентированной системой скольжения.

4. Необратимый сдвиг в данной системе скольжения  $nt$  зависит лишь от касательной составляющей  $\tau_{nt}$  вектора напряжения, действующего на плоскости с нормалью  $\mathbf{n}$  в направлении вектора  $\mathbf{t}$ .

5. Общая необратимая деформация является суммой вкладов сдвиговых деформаций во всех активных (где  $\tau_{nt} = \tilde{\tau}_{nt}$ ) системах скольжения.

Каждое из этих предположений уязвимо. Но если недостатки второго, третьего и четвертого носят количественный характер, то первое и пятое положения подозрительны в качественном отношении. Принятие первого при хаотичности ориентации кристаллитов означает допущение разрывов перемещений на их границах, а пятое предположение — это использование принципа суперпозиции в нелинейных эффектах, к которым, несомненно, относится пластичность.

Любопытно отметить, что в последующих разработках этого направления большее (если не все) внимание уделялось совершенствованию пунктов 1—4, а пятый оставался в принципе неизменным. Достаточно полные сведения о различных «физических» теориях пластичности можно найти в обзоре Линя [38]. Мы же здесь ограничимся лишь указаниями на возможность чисто феноменологической трактовки таких теорий. Так, соотношение (1.6) может быть получено на основе следующих предположений.

1. Пластическая деформация элемента континуальной среды есть среднее арифметическое единичных скольжений по всем возможным плоскостям и направлениям в них (системы  $nt$ ).

2. Пластический сдвиг  $\gamma_{nt}^p$  в системе  $nt$  определяется лишь компонентой касательного напряжения  $\tau_{nt}$  в виде (1.1).

Интересно отметить, что переход к феноменологической трактовке, кроме снятия некоторых принципиальных противоречий микроструктурного толкования пластичности, открывает возможности упрощения или совершенствования определяющих соотношений по отношению к (1.6). Примером упрощения может служить теория, предложенная Малмейстером [41] и основанная на предположениях, несколько измененных по сравнению с только что приведенными.

1. Пластическая деформация элемента континуума есть среднее арифметическое единичных сдвигов по всем возможным плоскостям в направлениях максимального касательного напряжения на них.

2. Единичный сдвиг  $\gamma_n^p$  на плоскость с нормалью  $\mathbf{n}$  определяется через максимальное касательное напряжение  $\tau_{n\max}$  на этой плоскости соотношением, подобным (1.1):

$$\gamma_n^p = f(\tilde{\tau}_{n\max}), \quad (1.7)$$

где  $\tilde{\tau}_{n\max}$  определяется  $\tau_{n\max}$  подобно тому, как  $\tilde{\tau}_{nt}$  определяется  $\tau_{nt}$ .

В рамках этих предположений определяющее соотношение типа (1.6) содержит не тройной, а двойной интеграл (отсутствует интегрирование по  $\omega$ ), правда, при этом усложняется тензорный множитель под интегралом. Теперь он становится зависимым от девиатора напряжений и, следовательно, от  $\tau_{n\max}$ , ибо от девиатора зависит направление максимального касательного напряжения на данной плоскости. Отметим, что при внешней убедительности этого варианта в нем содержится логический подвох, состоящий в неравноправии плоскостей и направлении сдвига. В создании пластической деформации могут участвовать все возможные плоскости, а направления — только избранные. Почему не наоборот? Подобные вопросы наталкивают на мысль, уже частично осуществленную в теории Христиановича — Шемякина [68]: принять в качестве источника пластической деформации сдвига на площадках с максимальными касательными напряжениями.

Примером усовершенствования по отношению к теории Батдорфа — Будянского может служить феноменологический вариант Леонова — Швайко [37], где учитывалось взаимовлияние скольжения в различных плоскостях. Не останавливаясь на других феноменологических вариантах теории скольжения, заметим, что вообще они могут и утратить возможность трактовки с позиций дислокационных механизмов. Так, теория Малмейстера связывается не с дислокационным механизмом, а с механизмом двойникования. Микроструктурная расшифровка других теорий такого типа затруднительна или неизвестна вовсе.

## § 2. ДЕФОРМАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ. ВЕКТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕНЗОРОВ

До момента появления теории скольжения описание пластических эффектов поликристаллических тел строилось на основе чисто феноменологических представлений. К концу двадцатых годов была в принципе завершена разработка теории идеальной пластичности, а вот в проблеме пластичности с упрочнением, которая к этому времени стала весьма актуальной в связи с резким возросшим производством алюминиевых сплавов, были сделаны лишь первые шаги. Шла интенсивная экспериментальная проверка единственной, по существу, теории упрочнения, предложенной Генки [3] и Надаи [43] и состоящей в утверждении, что

$$S_{ij} = 2G_s(T) \Delta_{ij} \text{ при } T = \tilde{T}, \quad (2.1)$$

$$dS_{ij} = 2Gd\Delta_{ij} \text{ при } T < \tilde{T},$$

где  $S_{ij}$  и  $\Delta_{ij}$  — девиаторы напряжений и деформаций,  $G_s$  — секущий модуль на диаграмме чистого сдвига,  $G$  — упругий модуль сдвига,  $T$  — интенсивность касательных напряжений

$$T^2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad (2.2)$$

$\bar{T}$  — максимальное значение  $T$  за историю нагружения, превосходящее некоторое значение  $T_0$ . Предполагалось, что в отношении объемной деформации материал ведет себя упруго\*

$$\sigma = Ke, \quad (2.3)$$

где  $\sigma = (1/3)\sigma_{(1)}$ ,  $e = \varepsilon_{(1)}$ ,  $K$  — объемный модуль упругости. Напомним, что  $\sigma_{(1)}$ ,  $\varepsilon_{(1)}$  — первые инварианты тензоров напряжений и деформаций. Истоки такой теории и детали ее экспериментальной проверки можно найти в сборнике статей [61].

Как видно, эта теория, получившая название деформационной теории (а у нас в стране часто именуемая теорией малых упруго-пластических деформаций), есть не что иное, как частный (тензорно-линейный) вид теории упругости, дополненный эффектом разгрузки (второе из соотношений (2.1)). В соответствии с этой теорией в фазовом пространстве девиатора напряжений (в многомерной декартовой системе координат, где вдоль осей откладываются значения составляющих девиатора  $S_{ij}$ ) для произвольной точки тела в каждый момент нагружения существует предельная поверхность в виде гиперсферы  $T = \bar{T} = \text{const}$  (в начальный момент —  $T = T_0$ ). Если вектор  $S$ , имеющий компонентами составляющие девиатора  $S_{ij}$ , в результате изменения напряженного состояния двигается внутри этой предельной поверхности, то  $T < \bar{T}$  и в силу второго из (2.1) происходит лишь упругое изменение деформаций. В таком пассивном процессе предельная поверхность не меняется. Пластические деформации возникают и изменяются, если этот вектор проколот начальную предельную поверхность  $T = T_0$  и, изменяясь, будет длиннее всех своих предшествующих значений. Очевидно, что в таком активном процессе непрерывно меняется и сама предельная поверхность, текущий ее радиус — длина указанного вектора. Таким образом, этот вектор не может проколот текущую предельную поверхность, попытка такого прокола приводит к расширению сферы и сопровождается изменением пластической деформации. Принято называть такую предельную поверхность поверхностью нагружения, а иногда — поверхностью текучести (по аналогии с идеальной пластичностью, а не по существу). Указанный вектор будем, несколько вольно, называть вектором напряжения, а в последующем распространять это название и на вектор с компонентами самого тензора напряжений  $\sigma$ , а не только его девиатора  $S$ . Выписываемый концом вектора напряжения путь будем называть траекторией, или путем, нагружения.

\* Это положение будет безоговорочно приниматься всюду в дальнейшем, а на основании результатов § 3 гл. I задача об установлении связи  $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$  будет сводиться к таковой для связи  $S_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ .

В дальнейшем будут использоваться векторные представления других двухвалентных тензоров: тензоров деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$  и т. д. Вообще любой тензор как набор  $n$  чисел можно представить бесчисленным способом в виде вектора в  $n$ -мерном декартовом пространстве. Иллюстративная роль такого представления бывает полезной при ряде теоретических разработок. Но хотелось бы большего, чтобы вместе с векторным представлением тензоров были представлены векторно-инвариантным образом и некоторые тензорно-инвариантные операции. Но здесь выбор сильно ограничен, так как множество тензорно-инвариантных и векторно-инвариантных операций не соизмеримы. Существуют, однако, три подобные и, главное, весьма важные в механике сплошных сред векторные и тензорные (для двухвалентных тензоров) операции — это сложение, умножение на число и скалярное произведение. Если договориться откладывать вдоль осей фазового пространства одноиндексные составляющие двухвалентных тензоров, то вместе с их представлением в виде векторов могут быть записаны в векторно-инвариантной форме и три указанные операции. Если известно, что в тензорном определяющем соотношении присутствуют лишь тензоры второго ранга и скаляры, а среди тензорных операций имеются лишь три указанные выше, то такое определяющее соотношение допускает векторно-инвариантную запись, а вместе с этим обладает одним специфическим качеством, вытекающим из того, что свойства векторных соотношений инвариантны относительно группы ортогональных преобразований. Напомним, что к ортогональным относятся преобразования, не меняющие внутреннюю геометрию пространственной кривой — это ее жесткие повороты относительно начала координат и отражение в прямых, плоскостях и т. д. Так, если разыскивается связь между тензорами  $S_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  и известно, что определяющее уравнение для них удовлетворяет указанным требованиям, то как траектории нагружения, получаемые одна из другой ортогональным преобразованием, так и траектории деформирования получаются одна из другой тем же самым ортогональным преобразованием. Очевидно, что и обратно, если относительно указанных траекторий соблюдается такое условие, то соответствующее определяющее соотношение включают лишь двухвалентные (и сводящиеся к ним) тензоры и три указанных тензорных действия.

Соотношение (2.1) удовлетворяет требуемым условиям и может быть представлено в векторной форме:

$$S = 2G_s(T)\varepsilon \quad \text{при} \quad T = \frac{1}{2} |S| = \bar{T}, \quad (2.4)$$

$$dS = 2Gd\varepsilon \quad \text{при} \quad T < \bar{T}.$$

Как показала экспериментальная проверка теории Генки — Надаи, в условиях сложного напряженного состояния она достаточно хорошо описывает пластичность, по крайней мере для траекто-

рий нагружения, близких к лучевым. Но и для путей, более отдаленных от лучевых траекторий, когда количественное описание оказывалось непригодным, как в ранних экспериментах [66], так и в более поздних [32] продолжала сохраняться указанная выше инвариантность по отношению к внутренней геометрии траекторий, что дало возможность посчитать это положение общим для любых упругопластических первоначально изотропных сред и ввести в науку в ранге постулата — постулата изотропии Ильюшина [11]. На самом деле это хорошая рабочая гипотеза, упрощающая экспериментальную корректировку теоретических разработок, вполне приемлемая для ряда материалов и связанная с указанным выше условием на вид определяющего соотношения. Однако существуют другие среды, например идеальнопластические и сыпучие, где существенным параметром является  $\tau_{\max}$ , вычисление которого связано с тензорными операциями типа свертки по одному индексу, что обсуждаемому условию не удовлетворяют.

Деформационная теория (2.1) получила широкое распространение в расчетной практике в связи со своей простотой и вполне удовлетворительной возможностью предсказания условий внешнего нагружения и частных свойств материала, при которых гарантируется слабое отклонение траектории нагружения в каждой точке тела от лучевого. Последнее обеспечивается известной теоремой о простом нагружении Ильюшина [10]. Нагружение в каждой точке тела будет простым (лучевым), если внешнее нагружение осуществляется ростом поверхностных и массовых сил пропорционально одному параметру, материал является несжимаемым и функция  $G_s(T)$  является степенной

$$e=0, G_s(T)=AT^n. \quad (2.5)$$

Доказательство теоремы элементарно. Надо убедиться, что заданием  $\sigma_{ij}=\lambda\sigma_{ij}^0$ , где  $\sigma_{ij}^0$  — фиксированный тензор напряжений, можно при указанных выше условиях удовлетворить уравнения равновесия, статические краевые условия, условия совместности и соотношения (2.1) и (2.3). Очевидно, что малое отклонение свойств от тех, что указаны в (2.5), при пропорциональном внешнем нагружении приведет к малому отклонению от лучевого внутреннего нагружения.

Однако при сильном отклонении от лучевого нагружения предсказания деформационной теории могут оказаться неправильными. Так, при нагружениях, близких к так называемому нейтральному (нагружение вдоль предельной поверхности), выявляется серьезный дефект этой теории. На двух как угодно близких отрезках траекторий, идущих из данной точки  $a$  на предельной поверхности, построенной для этой точки предыдущей траектории, с внешней и внутренней ее стороны (рис. 4.4) приросты деформации отличаются на конечную величину. Действительно, поскольку, как очевидно, внеш-

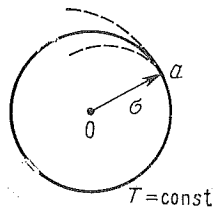


Рис. 4.4

няя траектория отвечает активному процессу, то на ней

$$dS_{ij}=2G_s(T)d\mathcal{E}_{ij}+2G'_s(T)\mathcal{E}_{ij}dT, \quad (2.6)$$

а на внутренней — пассивному, когда

$$dS_{ij}=2Gd\mathcal{E}_{ij}. \quad (2.7)$$

При стягивании этих траекторий друг к другу, т. е. при  $T \rightarrow T_a$  ( $dT \rightarrow 0$ ), отношение элементарных приростов деформаций определяется формулой

$$\frac{(d\mathcal{E}_{ij})_{\text{акт}}}{(d\mathcal{E}_{ij})_{\text{пасс}}} = \frac{G}{G_s(T)}, \quad (2.8)$$

и поскольку секущий модуль  $G_s$  в пластической области не равен упругому  $G$ , на конечных отрезках как угодно близких траекторий будет накоплена конечная разность деформаций.

### § 3. ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ. РЕГУЛЯРНАЯ ПЛАСТИЧНОСТЬ

Первым, кто обратил внимание широкого читателя на этот дефект деформационной теории был Прагер [89]. Полагая, что такая ситуация в пластичности недопустима, он призвал к пересмотру теорий на основе положений, включающих так называемое условие непрерывности: две траектории нагружения, как угодно близкие к нейтральному нагружению, должны приводить к одинаковому результату. Простейшая из таких теорий, предложенная в работе [80], основывалась кроме этого положения на следующих: 1) приращение девиатора деформаций вполне определяется девиатором напряжений и его приращением, 2) эта связь линейна относительно указанных приращений, как в упругой, так и в пластической (с другим видом пропорциональности) области, и, наконец, 3) текущие предельные поверхности, как и в деформационной теории, представляются в пространстве девиатора напряжений гиперсферами.

Из этих условий следует, что при догрузке из пластического состояния

$$d\mathcal{E}_{ij} = \begin{cases} A_{ijmn}dS_{mn}, & dT \geq 0, \\ dS_{ij}/2G, & dT \leq 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $A_{ijmn}$  зависит только от девиатора напряжений. Полагая, что

$$d\mathcal{E}_{ij} = d\mathcal{E}_{ij}^e + d\mathcal{E}_{ij}^p, \quad (3.2)$$

где  $d\mathcal{E}_{ij}^e = dS_{ij}/2G$  — обратимая упругая часть девиатора приращений деформаций, а  $d\mathcal{E}_{ij}^p$  — необратимая пластическая, получаем в активном процессе

$$d\mathcal{E}_{ij}^p = C_{ijmn}dS_{mn}, \quad (3.3)$$

где  $C_{ijmn}$ , так же, как и  $A_{ijmn}$ , зависит только от  $S_{pq}$ . При догрузке из состояния на предельной поверхности для двух продолже-



ний вовне и внутрь поверхности как угодно близко к нейтральной догрузке в силу условия непрерывности должно, очевидно, быть

$$d\mathcal{E}_{ij}^p = C_{ijmn} dS_{mn} = 0 \quad \text{при} \quad dT = (1/2)S_{mn} dS_{mn} = 0,$$

а одновременное выполнение этих условий требует, чтобы

$$C_{ijmn} = C_{ij} S_{mn}, \quad (3.4)$$

и, следовательно,

$$d\mathcal{E}_{ij}^p = \begin{cases} C_{ij} dT & dT \geq 0, \\ 0 & dT \leq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Очевидно, что  $C_{ij}$  — девиатор, и его зависимость от  $S_{mn}$  определяется формулой Гамильтона — Кели (см. гл. I, § 2), которая для связи девиаторов имеет вид [49]

$$C_{ij} = Q(S_{(2)}, S_{(3)}) + R(S_{(2)}, S_{(3)}) \left( S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} S_{(2)} \delta_{ij} \right), \quad (3.6)$$

где  $S_{(2)} = T^2$  — второй, а  $S_{(3)} = (1/3) S_{ik} S_{kj} S_{ji}$  — третий инварианты девиатора напряжений. Формула (3.6) легко проверяется на основе (2.16) гл. I с учетом того, что  $S_{ij} \delta_{ij} = C_{ij} \delta_{ij} = 0$ .

В рамках обычного предположения о тензорной линейности в результате имеем

$$d\mathcal{E}_{ij}^p = \begin{cases} Q(T) S_{ij} dT & (dT \geq 0), \\ 0 & (dT \leq 0). \end{cases} \quad (3.7)$$

Отметим, что, как обнаружилось впоследствии, такая форма определяющего соотношения была предложена Ланингом в неопубликованной рукописи еще в 1942 г. Однако в то время как закон Ланинга базировался в конечном итоге на гидродинамических аналогиях, предложенный выше вывод являлся результатом первого целенаправленного исследования, основанного на свойствах пластичности, инвариантных по отношению к масштабу времени, и хотя теории подобного типа стали в дальнейшем относить к теориям течения, правильнее их именовать теориями приращения деформаций, или дифференциальными теориями пластичности.

Как в деформационной теории, так и в только что приведенной, текущей поверхностью нагружения служит гиперболоид, что означает изотропию фазового пространства девиатора напряжений и, следовательно, изотропию упрочнения, в связи с чем соотношение (3.7) получило название теории течения с изотропным упрочнением или, кратко, теории изотропного упрочнения. Несмотря на ее дифференциальную форму, в расчетах конкретных задач она не намного сложнее деформационной теории и допускает общий метод решений [25], подобный методу упругих решений в деформационной теории [10]. Эксперименты по сложному нагруже-

нию обнаружили приемлемость (3.7) для более широкого, чем в деформационной теории, класса траекторий нагружения. Очевидно, однако, что, например, для циклического нагружения с пластическими деформациями разных знаков теория изотропного упрочнения неприменима в силу ее неспособности правильно оценить эффект Баушингера. Поскольку этот эффект выражается в том, что, например, в следующем за пластическим растяжением сжатии предел упругости на сжатие понижается (рис. 4.2), то правильная теория должна иметь поверхность нагружения, подтягивающую свою тыльную часть в направлении вектора нагружения, что приводит к нарастающей анизотропии материала, вследствие пластических деформаций — к деформационной анизотропии.

Отказ от изотропии упрочнения усложняет дело. Для вывода соотношения типа (3.5) требуются дополнительные логические звенья. Одно из них легко следует из очевидной непрерывности изменения предельной поверхности. Если уравнение текущей предельной поверхности представить в виде

$$f(S_{ij}, \mathcal{E}_{ij}^p; \chi_k^p) = 0, \quad (3.8)$$

где  $\chi_k^p$  — некоторые параметры истории нагружения или пластического деформирования, которые вместе с  $\mathcal{E}_{ij}^p$  остаются неизменными в пассивном процессе, то при активном — должно выполняться условие [89]

$$\frac{\partial f}{\partial S_{ij}} dS_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}_{ij}^p} d\mathcal{E}_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \chi_k^p} d\chi_k^p = 0, \quad (3.9)$$

т. е. малая догрузка сопровождается малым изменением предельной поверхности. Отметим, что левая часть (3.8) носит название функции нагружения. Одним из наиболее известных параметров истории  $\chi_k^p$  является так называемый параметр Одквиста

$$\kappa_p = \int \sqrt{2d\mathcal{E}_{ij}^p d\mathcal{E}_{ij}^p}, \quad (3.10)$$

пропорциональный длине дуги траектории пластического деформирования. Для теории изотропного упрочнения, например, функция нагружения представляется в виде

$$f \equiv \int Q(T) dT - \kappa_p. \quad (3.11)$$

В дальнейшем предполагается, что вид параметров  $\chi_k^p$  известен.

Условие отсутствия пластических деформаций при нейтральном нагружении теперь будет сводиться к требованию, чтобы

$$C_{ijmn} dS_{mn} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial f}{\partial S_{mn}} dS_{mn} = 0,$$

откуда в прежнем предположении о независимости  $C_{ijmn}$  от  $dS_{kl}$  следует, что

$$d\mathcal{E}_{ij}^p = C_{ij} \frac{\partial f}{\partial S_{mn}} dS_{mn}. \quad (3.12)$$

Внося это представление в условие (3.9), получим

$$C_{ij} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = -1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \chi_k^p} d\chi_k^p \right) / \left( \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} dS_{ij} \right). \quad (3.13)$$

Естественно, что это одно уравнение не позволяет определить весь девиатор  $C_{ij}$ , и в свое время (см., например, [63]) делалось предположение, что

$$C_{ij} = h \frac{\partial g}{\partial S_{ij}}, \quad (3.14)$$

где  $g$  и  $h$  новые скалярные функции, зависящие от напряжений и, возможно, от истории пластического деформирования. Тогда определяющее соотношение принимает в активном процессе вид

$$d\varepsilon_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial S_{ij}} \frac{\partial f}{\partial S_{mn}} dS_{mn}, \quad (3.15)$$

где функции  $h$ ,  $g$  и  $f$  связаны уравнением (3.13).

Как видно, такое расширение теории на анизотропное упрочнение в связи с предположением (3.14) сильно «разрыхляет» теорию, что, естественно, вызывает чувство неудовлетворенности. Сцементировало теорию течения и замкнуло логическую цепочку, приводящую теорию к ее современному компактному виду, предложение Друккера [76], состоящее в заявлении о том, что из пластического тела и действующих на него сил нельзя извлечь работу, т. е. если к нагруженному в пластическую область телу прикладываются и затем снимаются дополнительные силы, то работа дополнительных сил на вызванных ими дополнительных перемещениях должна быть неотрицательной. В частном случае однородного напряженного состояния это равносильно утверждению, что

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij} \geq 0, \quad (3.16)$$

причем равенство достигается, если только в цикле приложения и снятия дополнительных сил пластических деформаций не возникает. Этот постулат, являясь по духу термодинамическим, представляется весьма надежным и ведет к довольно сильным заключениям. Так, для цикла, следующего в пространстве напряжений из состояния  $\sigma^0$ , как представлено на рис. 4.5, с малым выходом за поверхность нагружения, имевшую место для состояния  $\sigma$ , часть интеграла (3.16), отвечающая упругой составляющей  $d\varepsilon_{ij}^e$ , обратится, естественно, в нуль, а оставшаяся часть будет не нулевой только на участке от  $\sigma$  до  $\sigma + \Delta\sigma$ . Таким образом, из (3.16) в случае исчезающе малого выхода  $\Delta\sigma$  следует по теореме о среднем, что

$$(\sigma - \sigma^0 + \alpha d\sigma) d\varepsilon^p \geq 0 \quad (0 < \alpha < 1), \quad (3.17)$$

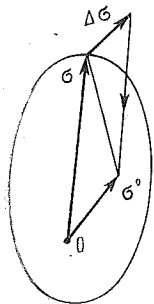


Рис. 4.5

а поскольку расположение  $\sigma^0$  произвольно, то отсюда вытекают два неравенства

$$(\sigma - \sigma^0) d\varepsilon^p \geq 0 \text{ и } d\sigma d\varepsilon^p \geq 0. \quad (3.18)$$

Полученные соотношения носят название основных неравенств пластичности. Из них следует, что предельная поверхность не вогнута и в регулярной точке предельной поверхности вектор  $d\varepsilon^p$  направлен по нормали к этой поверхности. Действительно, если в данной точке предельная поверхность вогнута, то нельзя указать направление  $d\varepsilon^p$ , для которого не нашлось бы положения  $\sigma^0$ , противоречащего первому из (3.18), а если эта поверхность не вогнута, то единственное направление, для которого не найдется  $\sigma^0$ , противоречащего первому неравенству (3.18), есть направление внешней нормали. Второе из (3.18), по существу, покрывается первым и является предельной формой записи первого при  $\sigma^0$ , совпадающем с  $\sigma$ . Отметим, что неравенства типа (3.18) предлагались ранее непосредственно без связи с циклированием, как независимые экстремальные принципы (Мизес, Бишоп — Хилл).

В соответствии с (3.18) должно быть (принцип градиентальности)

$$d\varepsilon^p \sim \text{grad} f, \quad (3.19)$$

и, следовательно, в силу (3.12) и (3.13)

$$d\varepsilon_{ij}^p = k \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} \frac{\partial f}{\partial S_{mn}} dS_{mn} \text{ при } \frac{\partial f}{\partial S_{mn}} dS_{mn} \geq 0, \quad (3.20)$$

$$k = - \frac{\frac{\partial f}{\partial S_{mn}} dS_{mn} + \frac{\partial f}{\partial \chi_k^p} d\chi_k^p}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} \frac{\partial f}{\partial S_{mn}} dS_{mn}}. \quad (3.21)$$

Соотношения типа (3.20) получили название ассоциированных законов (ассоциированных с предельной поверхностью).

Как видно, теория течения определяется заданием одной скалярной функции и параметров истории нагружения  $\chi_k^p$ . Логическая завершенность позволяет причислить ее к классическим теориям, а относительная простота обеспечила возможность ее практического применения, тем более что довольно широкий класс гладких траекторий нагружения достаточно хорошо ею описывается.

Среди возможных видов теории течения на практике используются в основном два варианта: теория изотропного упрочнения с функцией нагружения (3.11) и теория с идеальным эффектом Баушингера, или теория трансляционного упрочнения, в которой поверхность нагружения испытывает лишь чистый перенос. Соответствующая функция нагружения имеет вид

$$f = (S_{ij} - \lambda \varepsilon_{ij}^p)(S_{ij} - \lambda \varepsilon_{ij}^p) - 2S_0^2, \quad (3.22)$$

где  $\lambda$  и  $S_0$  — материальные постоянные. На основании (3.20) и (3.21) в активном процессе будем иметь

$$d\mathcal{E}_{ij}^p = \frac{1}{2\lambda S_0^2} (S_{ij} - \lambda \mathcal{E}_{ij}^p)(S_{mn} - \lambda \mathcal{E}_{mn}^p) dS_{mn}. \quad (3.23)$$

Такая теория была независимо предложена Ишлинским [16] и Прагером [50].

Более точный учет реальных эффектов в рамках этой теории возможен, если, например, считать  $S_0$  функцией параметра Одквиста. Естественно, что здесь открываются и другие возможности более точного согласования с экспериментальными данными.

Теорию течения можно строить, исходя не из пространства напряжений, а из пространства деформаций, где предельной поверхностью является поверхность деформирования с сохранением по отношению к ней ортогональности вектора прироста пластической деформации. Соотношения типа (3.19) следуют из некоторых модельных представлений (см., например, [17]). Однако любая теория течения с гладкой предельной поверхностью обладает одной специфической особенностью — слабой чувствительностью к изломам траектории нагружения (деформирования). И объясняется это тем, что в ней отсутствует жесткая связь глобального объекта — предельной поверхности с дифференциальным — приростом пластической деформации. На коротких отрезках задаваемого процесса изменить направление этого прироста невозможно, в связи с чем применение этой теории, в частности, к проблеме устойчивости может приводить к неадекватным результатам. Примером может служить задача о крутильной неустойчивости [22]\*, когда результаты расчета и эксперимента могут различаться в десятки и сотни раз. Этот недостаток, как нетрудно видеть, является следствием предположения о гладкости, или регулярности, предельной поверхности в точке нагружения\*\* — в точке, которой касается в активном процессе этой поверхности конец вектора напряжений. В связи с этим классическую теорию течения можно определить как теорию, описывающую регулярную пластичность. Исправление указанного недостатка в рамках концепции предельных поверхностей возможно, если допустить, что текущую точку нагружения постоянно сопровождает особенность типа гиперконуса, т. е. если перейти к рассмотрению сингулярной пластичности.

#### § 4. СИНГУЛЯРНАЯ ПЛАСТИЧНОСТЬ

Реализуя идею об особенности, сопровождающей точку нагружения, Койтер [85] высказал следующее простое геометрическое соображение. Предельная поверхность является огибающей

\* См. также [45].

\*\* Стационарные особые точки, такие как, например, на поверхности течения Треска, положения не спасают.

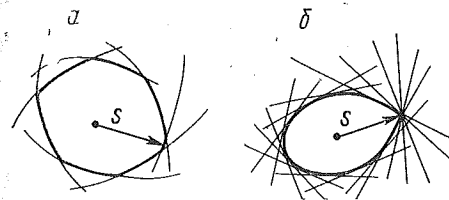


Рис. 4.6

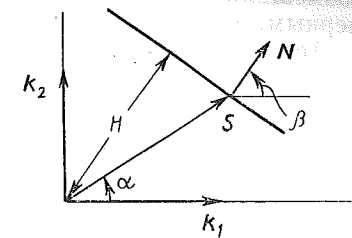


Рис. 4.7

$m$  гладких предельных поверхностей (рис. 4.6, а), каждая из которых, действуя самостоятельно, дает в общую пластическую деформацию вклад, определяемый механизмом регулярной пластичности

$$d\mathcal{E}_{ij}^p = \sum_{\omega=1}^m dk_{\omega} \frac{\partial f_{\omega}}{\partial S_{ij}}. \quad (4.1)$$

Здесь ненулевым являются те  $dk_{\omega}$ , для которых по соответствующей поверхности  $f_{\omega}$  совершается нагружение, т. е.

$$(\partial f_{\omega} / \partial S_{ij}) dS_{ij} \geq 0.$$

Продолжая идею Койтера, Сандерс [56] предложил рассматривать в качестве образующих сингулярную поверхность гиперплоскости всевозможных направлений (рис. 4.6, б), которые перемещаются вектором напряжения  $S$  самопараллельно от начала координат. Очевидно, что в этом случае определяющее соотношение приобретает вид

$$\mathcal{E}^p = \int \int \dots \int Q(H) N(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6) d\beta_1 d\beta_2 \dots d\beta_6, \quad (4.2)$$

где  $H$  — результирующее перемещение плоскости с нормалью  $N$ ,  $\beta_{\omega}$  — углы, задающие направление  $N$ . Интегрирование ведется по набору углов, отвечающих нормальям  $N$  с активными (перемещающимися) гиперплоскостями.

Рассмотрим частный случай плоской пластической деформации, когда пластические сдвиги происходят по плоскостям, нормальным к некоторой неподвижной плоскости и параллельно ей. Если нормаль к этой плоскости направить вдоль оси  $x_3$  декартовой системы координат, то будем иметь

$$\mathcal{E}_{ij}^p = 0, \text{ кроме } \mathcal{E}_{11}^p, \mathcal{E}_{22}^p = -\mathcal{E}_{11}^p, \mathcal{E}_{12}^p = \mathcal{E}_{21}^p, \quad (4.3)$$

а это требует, чтобы

$$S_{ij} = 0, \text{ кроме } S_{11}, S_{22} = -S_{11}, S_{12} = S_{21}. \quad (4.4)$$

Как видно, в этом случае имеются лишь две независимые компоненты девятора пластических деформаций и напряжений и

совмещенное фазовое пространство этих девиаторов будет двумерным, т. е. представимым на обычной плоскости\*.

Теория Сандерса в этом случае представляется соотношением

$$\mathfrak{D}^p = \int Q(H) N(\beta) d\beta, \quad (4.5)$$

где параметры  $H$ ,  $N$ ,  $\beta$  (рис. 4.7) имеют вид

$$N = \cos\beta k_1 + \sin\beta k_2, \quad H = S \cdot N, \quad S = S_1 k_1 + S_2 k_2, \quad (4.6)$$

$$S_1 = S_{11}, \quad S_2 = S_{12}, \quad S_1 = S \cos\alpha, \quad S_2 = S \sin\alpha,$$

$$S_{(2)} = \frac{1}{2} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2) = S_1^2 + S_2^2 = |S|^2, \quad |S| = S,$$

где  $k_1, k_2$  — единичные орты фазового пространства. Таким образом,

$$\mathfrak{D}_1^p = \int_{\beta^-}^{\beta^+} Q[S \cos(\beta - \alpha)] \cos\beta d\beta, \quad (4.7)$$

$$\mathfrak{D}_2^p = \int_{\beta^-}^{\beta^+} Q[S \cos(\beta - \alpha)] \sin\beta d\beta.$$

Интегрирование ведется по тем углам  $\beta$ , для которых отвечающие прямые испытали перемещение,  $\beta^-$  и  $\beta^+$  — нижняя и верхняя грани этих углов.

В силу сделанных предположений текущая поверхность (кривая) нагружения строится методом внешних касательных, как огибающая перемещенных и неперемещенных прямых. Исходной предельной кривой является, очевидно, окружность радиуса  $S = S_0$ . Последующие предельные кривые, как нетрудно видеть, будут огибающими исходной и траектории нагружения (рис. 4.8). Возникающий в точке нагружения угол будет в дальнейшем называться углом нагружения.

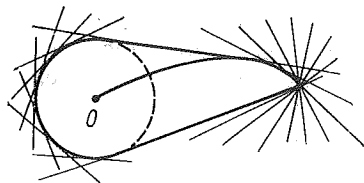


Рис. 4.8

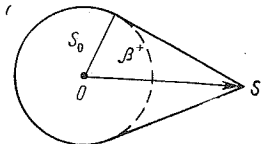


Рис. 4.9

\* Как видно, такое представление возможно для девиаторов только в частном случае. Иногда при качественном анализе бывает удобно использовать модель «двухмерного мира» [21], девиаторное пространство в котором двумерно всегда.

При лучевом нагружении ( $\alpha = 0$ ) из исходного состояния (рис. 4.9), как легко видеть,

$$\beta^+ = -\beta^- = \arccos \frac{S_0}{S}. \quad (4.8)$$

Обозначим

$$Q^*(\beta) = Q(S \cos\beta) N(\beta) \quad (4.9)$$

и заметим, что в пучке  $[-\beta^+, \beta^+]$  каждому вектору  $Q^*(\beta)$  отвечает вектор, зеркально отраженный в векторе  $S$ . Поэтому интеграл (4.5) представим в виде

$$\mathfrak{D}^p = g(S, S_0) S, \quad (4.10)$$

где функция  $g(S, S_0)$  легко вычисляется по заданной  $Q(H)$ . Действительно, умножая скалярно (4.5) и (4.10) на  $S$ , с учетом (4.6) получим

$$g(S, S_0) = \frac{2}{S} \int_0^{\beta^+} Q(S \cos\beta) \cos\beta d\beta. \quad (4.11)$$

Симметрия текущей предельной кривой относительно вектора  $S$  обнаруживается не только при лучевом нагружении. Такая симметрия будет в каждый момент так называемого полного нагружения, состоящего из полных догрузок, таких, которые попадают внутрь или совпадают с границей внешнего угла по отношению к углу нагружения (зона ПД на рис. 4.10). Очевидно, что траектории полного нагружения могут весьма сильно отличаться от лучевой, но всякой такой траектории, как легко убедиться, присуща отмеченная выше симметрия, и, следовательно, на ней выполняется соотношение (4.10) деформационной теории.

Безотносительно к геометрии предыдущей траектории та же деформационная теория будет справедлива для подсчета пластической деформации в момент, когда возникла или восстановилась указанная симметрия.

Простейшим случаем, когда симметрия отсутствует, является прямолинейная траектория, продолжающая лучевое нагружение.

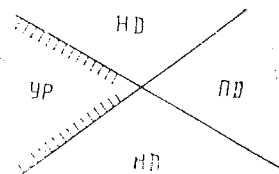


Рис. 4.10

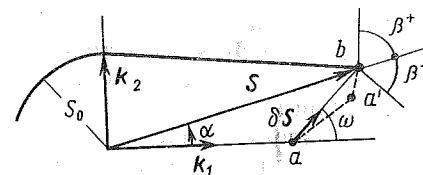


Рис. 4.11

Прирост пластической деформации за точкой  $a$  будет (рис. 4.11, зона НД)

$$\Delta \mathcal{E}^p = \int_{\beta^-}^{\beta^+} Q(H) N d\beta - \int_{\beta_a^-}^{\beta_a^+} Q(H) N d\beta. \quad (4.12)$$

Здесь при отсчете  $\beta$  от вектора  $S$  имеем

$$\beta^- = \omega - \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \beta^+ = \arccos \frac{S_0}{S}, \quad (4.13)$$

$$\beta_a^- = \omega - \frac{\pi}{2}, \quad \beta_a^+ = \arccos \frac{S_0}{S_a}.$$

Заметим, что в теориях, подобных (4.5), история нагружения (деформирования) заключена в пределах  $\beta^-$ ,  $\beta^+$ , и если эти пределы истории не содержат, как, например, при полном нагружении, то и связь (4.5) будет типа деформационной. Как видно из (4.13), за точкой  $a$  углы  $\beta^+$ ,  $\beta^-$  определяются положением точки нагружения в данный момент и истории нагружения не содержат. В целом, т. е. в соотношении (4.12), сохранится память лишь об одной точке  $a$ . В связи с этим (4.12) можно представить в виде

$$\Delta \mathcal{E}^p = A(S, S_0, S_a, \omega) \Delta S + B(S_0, S, S_a, \omega) S_a, \quad (4.14)$$

$$S = S_a + \Delta S$$

и, следовательно, в форме обобщенной деформационной теории, расчет по которой при заданной функции  $Q(H)$  технических сложностей не составляет.

Следует отметить, что найденный результат по деформациям в конечной точке  $b$  сохранится для любой криволинейной траектории  $L$ , колностью лежащей в предельной кривой  $f_b$ , в то время как для траектории  $L$ , выходящей из этой области, расчет существенно усложняется. На такой траектории может найтись такая точка  $a'$  (рис. 4.11), за которой пучок активных предельных прямых станет уменьшаться непрерывно, создавая тем самым память о каждой точке этого пути. Формулу для подсчета пластических деформаций на таком пути естественно представлять не в конечно-разностной, как (4.12), а в дифференциальной форме

$$\delta \mathcal{E}^p = \int_{\beta^-}^{\beta^+} Q'(H) \delta H N d\beta. \quad (4.15)$$

Не рассматривая весь процесс  $L$ , ограничимся пока выяснением качества связи  $\delta \mathcal{E}^p \sim \delta S$  в точке  $a'$ , когда она совпадает с точкой  $a$ , т. е. рассмотрим связь приращений в пучке догрузок из конца лучевого (или полного) нагружения.

Для выявления качественной стороны дела будем полагать в дальнейшем, что функция  $Q(H)$  линейна, так что

$$Q'(H) = A = \text{const}. \quad (4.16)$$

Заметим, что такое упрощение часто используется в сингулярных теориях (см., например [72]) и позволяет с достаточной точностью аппроксимировать одноосные диаграммы многих материалов.

В ортах  $k_1, k_2$  имеем

$$\delta S_1 = \delta s \cos \omega, \quad \delta S_2 = \delta s \sin \omega,$$

$$N = \cos \beta k_1 + \sin \beta k_2, \quad \delta S = \delta s (\cos \omega k_1 + \sin \omega k_2), \quad (4.17)$$

$$\delta H = \delta S \cdot N = \delta s \cos(\omega - \beta), \quad \delta s = |\delta S|.$$

Таким образом, (4.15) представляется в виде

$$\delta \mathcal{E}^p = A \delta s \int_{\beta^-}^{\beta^+} \cos(\omega - \beta) (\cos \beta k_1 + \sin \beta k_2) d\beta. \quad (4.18)$$

При полной догрузке (зона ПД на рис. 4.10)

$$\beta^- = -\beta^+ = -\arccos \frac{S_0}{S_a} = -\tilde{\beta} \quad (4.19)$$

имеем дифференциально-линейное (и интегрируемое) соотношение

$$\delta \mathcal{E}^p = A \left[ \delta S_1 \left( \tilde{\beta} + \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\beta} \right) k_1 + \delta S_2 \left( \tilde{\beta} - \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\beta} \right) k_2 \right], \quad (4.20)$$

и, в частности, при продолжении лучевого нагружения, когда  $\omega = 0$ ,  $\delta S_1 = 0$ ,

$$\delta \mathcal{E}^p = A \delta S \left( \tilde{\beta} + \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\beta} \right). \quad (4.21)$$

При неполной догрузке (зона НД на рис. 4.10)

$$\beta^- = \omega - \frac{\pi}{2}, \quad \beta^+ = \tilde{\beta}, \quad (4.22)$$

и из (4.18) следует

$$\delta \mathcal{E}^p = \frac{A}{2} \delta s \left\{ \left[ \left( \tilde{\beta} - \omega + \frac{\pi}{2} \right) \cos \omega + \frac{1}{2} \sin \omega + \frac{1}{2} \sin(2\tilde{\beta} - \omega) \right] k_1 + \right. \\ \left. + \left[ \left( \tilde{\beta} - \omega + \frac{\pi}{2} \right) \sin \omega - \frac{1}{2} \cos \omega - \frac{1}{2} \cos(2\tilde{\beta} - \omega) \right] k_2 \right\}. \quad (4.23)$$

Это соотношение дифференциально-нелинейное, поскольку в него входит комбинация  $\omega \delta s$ , где

$$\omega = \arctg \frac{\delta S_2}{\delta S_1}, \quad \delta s = \sqrt{\delta S_1^2 + \delta S_2^2}.$$

В частном случае ортогональной догрузки ( $\omega = \frac{\pi}{2}$ ) для связи  $\delta\mathcal{E}_2^p \sim \delta S_2$  имеем

$$\delta\mathcal{E}_2^p = \frac{A}{2} \delta s \left( \tilde{\beta} + \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\beta} \right). \quad (4.24)$$

Используя последнюю из формул (4.19), легко показать, что

$$\frac{d}{dS_1} \left[ S_1 \left( \tilde{\beta} + \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\beta} \right) \right] = \tilde{\beta} + \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\beta}$$

и, следовательно, на основании (4.21) и (4.24)

$$\frac{d}{dS_1} \left( 2S_1 \frac{\delta\mathcal{E}_2^p}{\delta S_2} \right) = \frac{\delta\mathcal{E}_1^p}{\delta S_1} \quad \text{или} \quad \frac{\delta\mathcal{E}_2^p}{\delta S_2} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_1^p}{S_1}. \quad (4.25)$$

Полученный результат позволяет по известной диаграмме простого растяжения вычислить так называемый мгновенный модуль сдвига

$$G_i = \frac{\delta\tau}{\delta\gamma} = \frac{\delta S_{12}}{2\delta\mathcal{E}_{12}} = \frac{G}{1 + 2G (\delta\mathcal{E}_{12}^p / \delta S_{12})}, \quad (4.26)$$

где  $G$  — модуль упругого сдвига и использовано представление  $\delta\mathcal{E}_{12} = \delta S_{12}/2G + \delta\mathcal{E}_{12}^p$ . Относительно легко измеряемый в эксперименте параметр  $G_i$  может служить в качестве пробы на сингулярность.

Если диаграмму простого растяжения задать в виде  $\sigma_{11} = E_s \varepsilon_{11}$ , где  $E_s$  — секущий модуль, то, используя равенства

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{11}^p, \quad \sigma_{11}/E = \varepsilon_{11}^e, \quad \varepsilon_{11}^p = \mathcal{E}_{11}^p, \quad \sigma_{11} = \frac{3}{2} S_{11}$$

и формулу (4.6), где, как условлено ранее, векторный индекс 1 отвечает тензорному 11, индекс 2 — тензорному 12, можно привести выражение для  $G_i$  к виду

$$G_i = G \left[ 1 + \frac{3}{2} G \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \right]^{-1}. \quad (4.27)$$

Точно такая же формула следует и из теории скольжения. Это был первый результат анализа теории [72], показавший, что теория скольжения должна быть отнесена к разряду теорий, описывающих сингулярную пластичность. Совпадение же указанного результата двух теорий говорит по крайней мере о том, что в качественном отношении эти теории близки. А как сейчас будет видно, в случае плоской пластической деформации они просто совпадают. Действительно, в этом частном случае соотношение (1.6) теории скольжения имеет вид

$$\mathcal{E}_{ij}^p = 2 \int F(\tau_{nt}) (n_i t_j + n_j t_i) d\varphi, \quad (4.28)$$

где цифровой коэффициент введен для удобства,

$$n_1 = \sin\varphi, \quad n_2 = \cos\varphi, \quad t_1 = \cos\varphi, \quad t_2 = -\sin\varphi,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11}^p &= 2 \int F(\tau_{nt}) \sin 2\varphi d\varphi, \\ \mathcal{E}_{12}^p &= 2 \int F(\tau_{nt}) \cos 2\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Здесь  $\tau_{nt} = \tau_n$  определяется известной формулой

$$\tau_n = S_{11} \sin 2\varphi + S_{12} \cos 2\varphi, \quad (4.30)$$

и если положить

$$S_{12} = S \cos \psi, \quad S_{11} = S \sin \psi, \quad (4.31)$$

то

$$\tau_n = S \cos (2\varphi - \psi). \quad (4.32)$$

В результате

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11}^p &= 2 \int F[S \cos (2\varphi - \psi)] \sin 2\varphi d\varphi, \\ \mathcal{E}_{12}^p &= 2 \int F[S \cos (2\varphi - \psi)] \cos 2\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Интегрирование ведется по тем углам  $\varphi$ , где параметр

$$S \cos (2\varphi - \psi) = \tau_n \quad (4.34)$$

растет.

Если теперь сделать замену

$$F = Q, \quad 2\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad h = H, \quad (4.35)$$

то соотношения (4.33) полностью совпадут с (4.7)\*, а в силу указанного закона нагружения выясняется способ построения предельной кривой — тот же метод внешних касательных, что и в теории Сандерса.

Любопытно отметить, что теория скольжения Батдорфа — Будянского, оказавшаяся первой в разряде сингулярной пластичности, таковой не замышлялась. Это свойство явилось следствием задействованных в ней микроструктурных механизмов пластичности, и, возможно, неожиданным для самих авторов.

Рассмотренные две теории обладают недостатком, подобным теории изотропного упрочнения, в отношении учета эффекта Баушингера. Для правильного учета этого эффекта тыльная часть предельной кривой должна подтягиваться к точке нагружения. К счастью, без существенной ломки теории этот недостаток легко

\* При этом так же, как и в (4.7),  $S = S_1 k_1 + S_2 k_2$ ,  $S_1 = S_{11}$ ,  $S_2 = S_{12} \sqrt{2}$ . Изменение знаков перед интегралами в (4.33) компенсируется перестановкой пределов интегрирования.

устраним. Для этого надо вместо множества предельных прямых в теории Сандерса рассматривать множество параллельных пар таких прямых, приходящих в движение, если вектор напряжений касается и передвигает одну из них. Например, при идеальном эффекте Баушингера эти пары должны сохранять одинаковое между собой расстояние. Тогда метод касательных при построении текущей предельной кривой становится методом касательных полос, образуемых указанными выше парами. Результат построения ясен из рис. 4.12. При неидеальном эффекте Баушингера расстояние между парами меняется и в простейшем случае может считаться функцией  $S$ . В теории скольжения такое усовершенствование достигается учетом эффекта Баушингера в связи  $\tau_{nt} \sim \gamma_{nt}^p$ .

Размытость результатов экспериментов по определению предельных поверхностей (см. § 6 этой главы) давала основание ряду специалистов относиться к сингулярной пластичности скептически, вплоть до утверждения о полной ее надуманности. Нужен был пример реального объекта, проявляющего эффекты сингулярной пластичности, и такой пример был указан Работновым [53].

Объектом рассмотрения была тонкостенная трубка, выполненная из упругопластического материала, изгибаемая двумя моментами  $M_1$  и  $M_2$  в двух ортогональных плоскостях (рис. 4.13). Ввиду тонкостенности вектор момента определяется лишь напряжением  $\sigma_{33} = \sigma$ :

$$\mathbf{M} = \int \delta_{33} r ds, \quad \mathbf{M} = M_1 \mathbf{k}_1 + M_2 \mathbf{k}_2, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{k}_1 + x_2 \mathbf{k}_2, \quad ds = r d\theta, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор срединной поверхности трубки, полагаемый в дальнейшем, без уменьшения общности, единицей,  $t (\ll r)$  — толщина ее стенки,  $\theta$  — полярный угол,  $s$  — длина дуги срединной поверхности в сечении  $x_3 = \text{const}$ ,  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  — единичные орты вдоль осей  $x_1, x_2$ .

Общая деформация трубки создается растяжением — сжатием  $\varepsilon_{33}$  волокон, направленных вдоль ее образующей, что вызывает сложный изгиб трубки с вектором кривизны  $\boldsymbol{\kappa}$ , таким что

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \kappa_1 \mathbf{k}_1 + \kappa_2 \mathbf{k}_2. \quad (4.37)$$

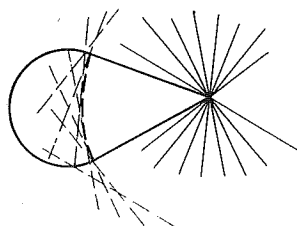


Рис. 4.12

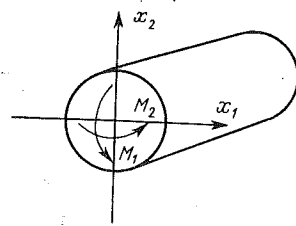


Рис. 4.13

В волокне, характеризуемом углом  $\theta$ , при деформировании из естественного состояния первые пластические деформации возникнут при переходе через значение  $|\varepsilon| = \varepsilon_0$ , т. е. при

$$|\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}| = \varepsilon_0 = \kappa_0 |\mathbf{r}| = 1, \quad (4.38)$$

что на плоскости  $\kappa_1, \kappa_2$  определяет пару параллельных прямых, ибо равный вклад в деформацию дает и волокно с углом  $\theta_1 = \theta + \pi$ . Значению  $\varepsilon_0$  отвечает значение  $|\boldsymbol{\kappa}| = \kappa_0$ . Поэтому в начальный момент пластического деформирования ширина полосы будет равна  $2\kappa_0$ . Аналогичная ситуация имеет место и для других углов  $\theta$ . Поэтому пересечение множества пар прямых, подобно указанной выше, выделит упругую зону на плоскости  $\kappa_1, \kappa_2$  в виде круга радиусом  $\kappa_0$ .

При дальнейшем пластическом деформировании пары прямых, очевидно, будут перемещаться самопараллельно, если одну из них перемещает вектор  $\boldsymbol{\kappa}$ , при этом граница упругой области, или, как прежде, предельная кривая, строится точно так же, как и в двух вышеописанных теориях, модернизированных на учет эффекта Баушингера. Различие состоит лишь в том, что теперь рассуждения ведутся не в пространстве напряжений, которым здесь бы отвечали компоненты моментов, а в пространстве деформаций, которые здесь представляют кривизны.

Таким образом, предельная кривая в плоскости деформаций, а следовательно, и предельная кривая в плоскости напряжений, которая повторяет форму первой с точностью до переноса и изотропного расширения (в силу действующего внутри них закона Гука), обладают особенностью (углом) в текущей точке нагружения. Следовательно, пример Работнова является модельным представлением сингулярной пластичности.

Соответствующее определяющее соотношение строится на основе формул (4.36) — (4.38), если известна, например, зависимость

$$\varepsilon^p = q(\varepsilon) \frac{\pi}{2} \quad (4.39)$$

для волокна. Тогда с использованием того, что

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p),$$

и указанных формул будем иметь

$$\mathbf{M} = 2tE \int_0^\pi (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) r d\theta - 2tE \frac{\pi}{2} \int_{\theta^-}^{\theta^+} q(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) r d\theta, \quad (4.40)$$

где первый интеграл представляет вклад упругого деформирования и берется по половине полярных углов, второй определяется пластическим деформированием и берется в пределах углов  $\theta$ , где предельные прямые в данный момент активны, т. е. в точности

так, как в теории Сандерса. Вычисляя первый интеграл и вводя обозначения

$$\kappa^e = \frac{M}{\pi t E}, \quad \kappa^p = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q(\kappa \cdot r) r d\theta, \quad (4.41)$$

удовлетворим уравнению (4.40), полагая

$$\kappa = \kappa^e + \kappa^p, \quad (4.42)$$

что вполне аналогично разбиению деформации в обычном смысле на упругую и пластическую части.

Как нетрудно видеть, данные соотношения с точностью до замены  $\kappa$  на  $\mathfrak{E}$  и  $M$  на  $S$  могли бы быть получены в рамках идеи Сандерса, применительно к пространству деформаций, автоматически дополнив ее связностью пар плоскостей.

В исходной формулировке теории Батдорфа — Будянского и Сандерса предполагали полную независимость элементов (систем скольжения и предельных плоскостей), создающих пластическую деформацию. Модернизация их на элементы в виде пары плоскостей означает введение простейшей зависимости пластических элементов. Существуют теории, вводящие более сильную взаимосвязь. Так, в теории, предложенной Леоновым [35], задействована связь всех таких элементов. В рамках геометрических представлений Сандерса это означает, что перемещение данной предельной плоскости вектором напряжения (принудительное перемещение) приводит к перемещению всех предельных плоскостей на разное, задаваемое специальным законом, расстояние. Естественно, что это усложняет теорию, но и дает возможность большего маневра при сопоставлении с экспериментом.

В разряд сингулярной пластичности попадают и теории, основанные на учете микронапряжений. Среди них отметим теорию Новожилова, детально разработанную его учениками. Ее изложение можно найти в недавно вышедшей книге [44]. Возможности сингулярной пластичности в описании реальных эффектов недавно с успехом продемонстрированы Поповым [47] на основе обобщения модели Работнова.

Соотношения сингулярной пластичности в своем большинстве удовлетворяют всем общезначимым требованиям и, по-видимому, способны описать все известное к настоящему времени эффекты пластичности. Как было показано выше, для довольно широкого класса траекторий они вырождаются в соотношения обычной деформационной теории Генки — Надаи\*, для более широкого класса оказывается справедливым обобщенное соотношение деформационного типа и лишь для некоторых участков траекторий приходится прибегать к соотношениям более сложной формы вида

\* Возрождение в рамках сингулярной пластичности старой и, казалось бы, навсегда перечеркнутой деформационной теории является одним из наиболее замечательных моментов в истории развития теории пластичности.

(4.15) или при условии (4.16) к дифференциально-нелинейным соотношениям (4.21) и (4.23).

В заключение отметим, что соотношения (4.21) и (4.23) справедливы не только для догрузок из конца лучевого нагружения, но и для догрузок из произвольного состояния, только в этом случае орт  $k_1$  должен быть направлен по биссектрисе угла нагружения, а пара  $k_1, k_2$  должна составлять правую систему ортов. Полезно еще привести соотношения связи  $\delta\mathfrak{E}^p \sim \delta S$  в других ортах, один из которых ( $j$ ) направлен по одной стороне угла нагружения (от его вершины), а второй ( $i$ ) — первый орт правой пары  $i, j$  (рис. 4.14).

В этих ортах параметры, входящие в (4.15), представляются в следующем виде ( $\beta \rightarrow \omega, \omega \rightarrow \eta$ ):

$$N = \cos \omega i - \sin \omega j, \quad \delta S = \delta s (\sin \eta i + \cos \eta j), \quad (4.43)$$

$$\delta H = N \delta S = \delta s \sin(\eta - \omega),$$

$$\omega^- = 0, \quad \omega^+ = \begin{cases} \eta & (\omega \leq \eta), \\ \gamma & (\eta < \omega \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}), \end{cases}$$

где  $\gamma$  — полная величина угла нагружения. Таким образом, с учетом (4.16) соотношение (4.15) примет вид

$$\delta\mathfrak{E}^p = A \delta s \int_0^{\omega^+} \sin(\eta - \omega) (\cos \omega i - \sin \omega j) d\omega, \quad (4.44)$$

и после интегрирования и несложных выкладок получим

$$\text{Зона НД: } \delta\mathfrak{E}^p = \frac{A}{2} \delta s [\eta \sin \eta i + (\eta \cos \eta - \sin \eta) j],$$

$$\begin{aligned} \text{Зона ПД: } \delta\mathfrak{E}^p = \frac{A}{2} \delta s \{ & [\gamma \sin \eta + \sin \gamma \sin(\eta - \gamma)] i + \\ & + [\gamma \cos \eta - \sin \gamma \cos(\eta - \gamma)] j \}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

## § 5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПЛАСТИЧНОСТЬ

В последнее время активно пропагандируется направление в пластичности, не опирающееся на концепцию предельных поверхностей. В нем соотношение  $\sigma \sim \varepsilon$  записывается в виде единого для всех видов догрузки аналитического выражения (что невозможно для двух предыдущих групп теорий), в связи с чем эти теории будут характеризоваться термином «аналитическая пластичность». Среди таких теорий видное место занимает теория Ильюшина (так называемая теория упругопластических процессов). В

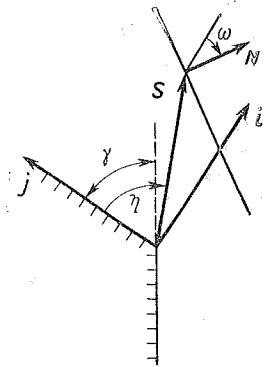


Рис. 4.14



основу ее положен уже описанный в § 2 настоящей главы постулат изотропии [11], заключающийся в том, что два пути деформирования, получающиеся один из другого ортогональным преобразованием, должны порождать пути нагружения, получающиеся друг из друга тем же ортогональным преобразованием. Как уже было сказано, это возможно, только если в разыскиваемой связи девиаторов напряжений и деформаций  $S_{ij} \sim \mathcal{E}_{ij}$  задействованы лишь три тензорно-инвариантные операции: сложение, умножение на скаляр, и скалярное произведение двухвалентных тензоров, что дает возможность представить искомую связь в векторной инвариантной форме\*, а для гладких путей (траекторий) — в виде пятичленной формулы

$$S^* = \sum_n A_n \frac{d^n \mathcal{E}^*}{de^n}, \quad e = \int \sqrt{d\mathcal{E}_\alpha^* d\mathcal{E}_\alpha^*}. \quad (5/1)$$

Здесь  $S^*$  и  $\mathcal{E}^*$  — векторы напряжений и деформаций в пятимерном пространстве, имеющие в качестве компонент не сами составляющие девиаторов, а их линейные комбинации (см. [11]),  $A_n$  — функционалы параметров внутренней геометрии траекторий деформирования: длины дуги  $e$ , четырех кривизны и кручения. Индекс  $n$  может принимать значение от единицы до пяти или от нуля до четырех.

Как и любое разложение двухвалентного тензора по базовым тензорам [57], соотношение (5.1) лишь переводит задачу разыскания связей между самими компонентами тензоров к равному количеству связей между их инвариантами, однако в ряде случаев оказывается более удобным. Так, кроме указанного сокращения математических действий для аргументов функционалов  $A_n$  из (5.1) следует, что, например, плоской траектории деформирования отвечает плоская траектория нагружения и эти плоскости совпадают. При этом возможны альтернативные формы (5.1):

$$S^* = A_1 \frac{d\mathcal{E}^*}{de} + A_2 \frac{d^2 \mathcal{E}^*}{de^2}, \quad S^* = A'_0 \mathcal{E}^* + A'_1 \frac{d\mathcal{E}^*}{de},$$

$$\frac{d\mathcal{E}^*}{ds} = A \frac{dS^*}{as} + BS^*, \quad s = \int \sqrt{dS_\alpha^* dS_\alpha^*}, \quad (5.2)$$

и хотя сам постулат изотропии не способен определить конструкцию функционалов  $A_1, \dots$ , представления (5.2) обладают некоторой эвристичностью. Так, первое из (5.2) наводит на мысль, что при малой кривизне траектории деформирования (при большом по сравнению с характерным размером  $h$  радиусе кривизны) главную роль будет выполнять первый член, поскольку второй явно отражает влияние кривизны, что и было подтверждено в опы-

\* Надо отметить, что неявным образом такое предположение использовалось и в других работах, там где с направленными отрезками в пространствах напряжений или деформаций поступали как с векторами, например, в теории Сандерса.

тах Ленского [32] при  $h$  (следе запаздывания) порядка деформационного предела текучести. Одновременно было показано, что  $A_1$  может считаться функцией одного только  $e$ . Вторая форма позволяет предсказать, что при малых угловых отклонениях траектории деформирования от лучевой, явно отражаемых вторым членом, соотношение  $S \sim \mathcal{E}$  должно быть подобно таковому в деформационной теории, что, впрочем, было известно и ранее. В этом случае предлагается считать  $A'_0$  зависящим лишь от  $|\mathcal{E}|$ .

В окрестности точки излома траектории деформирования первые две формы (5.2) непригодны, поскольку из них явно следовало бы, что изменение направления касательной (скачок  $d\mathcal{E}/de$ ) при переходе через точку излома приводит к конечному скачку напряжений, что, естественно, для пластичности неприемлемо. В этом случае предлагается пользоваться третьей формой при не зависящем от угла излома (теперь траектории нагружения) коэффициенте  $A$  и существенно зависящем от этого угла коэффициенте  $B$  (в противном случае не избежать указанного выше дефекта с разрывом  $S^*$ ). После точки излома для двухзвенной траектории предлагаются соотношения типа деформационной теории предварительно деформированного тела с коэффициентами, уже зависящими от угла излома и длины дуги траектории деформирования, а также от  $|S^*|$ , подобно тому, что было получено в (4.14).

Аналогичный подход: тип деформирования — специальная форма определяющего соотношения, предлагается и для более сложных процессов (траектории средней кривизны, трехзвенные процессы и т. д.). Результаты таких разработок можно найти в обзорах Ильюшина [13], Ленского [34] и других многочисленных статьях этого направления. При неизбежных частных предположениях, среди которых наиболее универсальными являются постулат запаздывания [13] и гипотеза локальной определенности [33], основная ставка делается на специально (для данного типа процесса) спланированные эксперименты, что для описания произвольного процесса в принципе потребует на каждом таком его этапе обращения к эксперименту. Последнее даже было формализовано как метод СН—ЭВМ решения краевых задач пластичности с одновременным использованием испытательной и электронно-вычислительной машин [13], и хотя несомненно, что в основе всякой механической модели должен лежать эксперимент, такое его преобладание над теорией в современной механике сплошных сред не всяким специалистом воспринимается без критики.

В раздел аналитической пластичности это направление включено в связи с его переориентировкой в последние годы как теории, не опирающейся на концепцию предельных поверхностей. В основополагающих своих работах [10; 11] Ильюшиным, который является автором общепринятых терминов «активный» и «пассивный» процессы, концепция предельных поверхностей не отвергалась. Более того, в те же годы, кроме формулировки постулата изотропии

и введения пятичленной формулы (4.1), был выдвинут широко известный постулат пластичности, детально обсуждаемый далее в гл. V, § 6 и явно связанный с концепцией предельных поверхностей. Это дает основание утверждать, что обсуждаемая теория задумывалась не как противопоставление теории течения в отношении такой концепции. Просто впоследствии, по-видимому, она оказалась ненужной.

Целенаправленно эта концепция как причина неаналитичности классических теорий пластичности была, видимо, впервые исключена в работе [23]. В ней содержался аналитический аналог теории изотропного упрочнения, задуманный как приближение к этой классической теории, изложенной в § 3 данной главы.

Представим определяющее соотношение (3.7) в векторной форме

$$d\mathcal{P} = \begin{cases} g(S) \frac{S}{S} dS & (dS \geq 0), \\ 0 & (dS \leq 0) \end{cases} \quad (5.3)$$

и определим параметр  $\lambda$  следующим образом ( $ds = |dS|$ ,  $S = |S|$ ):

$$\lambda = \frac{|d\mathcal{P}|}{g(S)ds} = \begin{cases} \frac{dS}{ds} = \cos \theta & \left( |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ 0 & \left( |\theta| \geq \frac{\pi}{2} \right), \end{cases} \quad (5.4)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $S$  и  $dS$ . Соответствующая диаграмма  $\lambda \sim \theta$  представлена на рис. 4.15. Она имеет разрыв наклона касательной в точках  $\theta = \pm \pi/2$ . Заменяя эту диаграмму близкой гладкой кривой, например (штриховая линия)

$$\lambda = \frac{1}{2^n} (1 + \cos \theta)^n, \quad (5.5)$$

и восстанавливая теперь связь  $d\mathcal{P} \sim dS$ , получим

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{2^n} g(S) (1 + \cos \theta)^n \frac{S}{S} ds. \quad (5.6)$$

Теперь это соотношение, являясь приближением к исходной теории, допускает малые пластические деформации в бывшей упругой области, но описывает все догрузки единым аналитическим выражением без разделения на активные и пассивные продолжения и, следовательно, без вмешательства каких-либо предельных поверхностей\*.

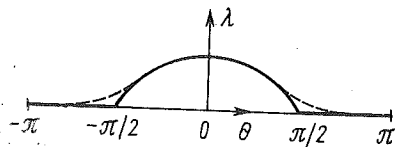


Рис. 4.15

\* Можно было бы сказать, что в данном приближении предельная поверхность выродилась в отрезок луча, но уже со свойствами, не присущими настоящей предельной поверхности.

Наконец к соотношениям, не базирующимся на концепции предельных поверхностей, надо отнести так называемую эндохронную теорию пластичности. Идея этой теории состоит в замене в соотношении типа наследственной теории Больцмана естественного времени параметром деформирования  $z$

$$S = \int_0^z J(z, z') d\mathcal{Z}(z'). \quad (5.7)$$

В известных случаях полагается

$$dz = \psi(\xi) d\xi, \quad (5.8)$$

где  $\xi$  либо совпадает с длиной дуги траектории деформирования  $e$ , либо задается соотношением

$$d\xi = \left| d\mathcal{Z} - \chi \frac{dS}{E} \right|, \quad (5.9)$$

а ядро  $J$  считается вырожденным разностным, что позволяет от интегрального соотношения (5.7) перейти к дифференциальному того же типа, что и (5.6), например [5]:

$$dS = 2Gd\mathcal{Z} - A(S - 2B\mathcal{Z})(1 + Cz)^{-1} f(\theta) de, \quad (5.10)$$

где  $A, B, C, D$  — постоянные,  $\theta$  — угол между векторами  $S$  и  $d\mathcal{Z}$ ,  $f(\theta) = D + (1 - D)[\cos(\theta/2)]^{2n}$ ,  $de = |d\mathcal{Z}|$ . Более общая дифференциальная форма (3.4) может быть представлена в виде

$$dS = Q(S, d\mathcal{Z}), \quad (5.11)$$

т. е. в виде обобщения известной теории гипопругости [51] на дифференциально нелинейный случай.

Авторство эндохронной пластичности приписывается Валанису [93], хотя еще в работе [13] Ильюшин предлагал соотношения того же типа, что и (5.7), как истокообразное представление функционалов пластичности.

Все теории, относящиеся к типу аналитических, являются дифференциально нелинейными, что в краевых задачах должно создавать большие математические сложности. Все они не удовлетворяют принципу Друккера. Известная критика эндохронной теории [91] по этим поводам в равной мере относится и к другим направлениям аналитической пластичности. Однако этому направлению присущи более серьезные недостатки общезначимого плана, обсуждаемые ниже.

## § 6. ЭКСПЕРИМЕНТ И ТЕОРИЯ

В подавляющем большинстве исследований по проблеме определяющих соотношений имеются в виду положения о том, что при подсчете напряжений в данной элементарной частице тела можно не учитывать влияние других частиц, удаленных от данной

на любое конечное расстояние (принцип локального действия [62]). Кроме того, полагается, что напряжения в элементарной частице зависят только от градиента перемещений и их предистории в ней. Это так называемые простые материалы. Именно такие материалы рассматривались выше и будут рассматриваться в дальнейшем. Для них определяющее соотношение в произвольном поле перемещений такое же, как и при однородном поле указанных градиентов или деформаций.

Принятие таких естественных предположений дает возможность использовать для определения механических свойств материала в качестве базового эксперимент с эталонным образцом при однородном деформированном состоянии. Такой образец должен быть довольно больших размеров, достаточных для того, чтобы возможная микроструктурная неоднородность оказалась в нем незаметной.

Такой макроэксперимент для выявления свойств пластичности при сложном нагружении, как известно, проводится на трубчатом образце с размерами, например, для металлов и сплавов порядка миллиметра толщины стенки и сотни миллиметров длины рабочей части трубки. Такой образец пригоден для выявления свойств в трех типах нагружения (деформирования): простого растяжения — сжатия, чистого сдвига и двухосного растяжения. Первый вид создается осевым усилием, второй — скручивающим моментом и третий — комбинацией внутреннего давления и осевого усилия.

Здесь мы не будем останавливаться на деталях экспериментального исследования и на его трудностях. Нас будут интересовать в основном принципиальные вопросы, такие как уровень сложности охватываемых процессов, влияющие допуски на пластическую деформацию при определении формы предельных поверхностей и на разрешающую способность такого макроэксперимента.

Напряженное состояние элемента стенки трубчатого образца при ее толщине, много меньшей радиуса срединной окружности поперечного сечения, можно с большей точностью считать плоским (точнее, обобщенным плоским), т. е. состоянием трехпараметрическим как по напряжениям, так и по девиаторам. Действительно, здесь  $S_{33} \neq 0$  и, следовательно, в общем случае составляющие  $S_{11}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{12}$  будут ненулевыми и независимыми. В связи с этим надо сделать некоторые разъяснения, связанные с выводами, полученными в предыдущем параграфе на основе рассмотрения плоскопластической деформации. Так, очевидная симметрия полученных соотношений и связанная с этим возможность инвариантной формы может нарушаться при других видах деформации, в частности, при плоском напряженном состоянии, т. е. приемлемость такого свойства может контролироваться экспериментом. Так, в рамках теории скольжения Батдорфа — Будянского нарушается подобие девиаторных диаграмм простого растяжения и чистого сдвига. Если при плоскопластической деформации все плоскости скольжения, по которым могли проходить сдвиги, в том

числе и пластические, составляли однопараметрическое множество, ортогональное одной фиксированной плоскости, то при плоском напряженном состоянии это множество будет двухпараметрическим множеством плоскостей, огибающих некоторые конусы. Если при чистом сдвиге в плоскости  $x_1x_2$  (в опыте на кручение) однопараметричность плоскостей скольжения сохраняется, то при простом растяжении возникает указанная двухпараметричность с круговым конусом. Становится очевидным, что теория Батдорфа — Будянского не удовлетворяет постулату изотропии, изложенному в § 2 данной главы. Поэтому при одной и той же функции  $F$  в соотношении (1.6) в силу различия в пределах интегрирования результаты для связей  $\partial_{12}^p \sim S_{12}$  и  $\partial_{11}^p \sim S_{11}$  окажутся различными, и нетрудно усмотреть, что первая диаграмма пойдет выше второй. Превышение это, как показал на основе прямых расчетов Иосимура [15], довольно значительное и противоречит данным эксперимента.

Заметим, что, несмотря на вышесказанное, формула (4.27) для  $G_i$ , полученная в условиях плоскопластической деформации, совпадает с найденной ранее Чикала [72] для плоского напряженного состояния. Объясняется это тем, что при выводе (4.27) рассчитывался только эффект догрузки от сдвига в наперед заданной плоскости, а данные о растяжении брались прямо из одномерной диаграммы.

Постулату изотропии не удовлетворяет и теория Малмейстера [41], уже хотя бы потому, что опирается на параметр  $\tau_{\max}$ , вычисление которого требует действий, выходящих за рамки указанных в § 2 этой главы трех тензорно-инвариантных операций, хотя при плоскопластической деформации она неотличима от теории Батдорфа — Будянского и Сандерса. Что же касается последней, то она этому постулату удовлетворяет, ибо строится в векторном пространстве и ее исходное определяющее соотношение имеет векторно-инвариантную форму, и в связи с этим упомянутые диаграммы в рамках этой теории должны совпадать.

Большая серия экспериментов по поводу проверки постулата изотропии, предпринятая Ленским и другими исследователями (см. [34]), показала его практическую приемлемость для первоначально изотропных металлических и некоторых других материалов. В тех процессах, которые можно контролировать в макроэксперименте (кривые в трехмерном подпространстве пятимерного пространства девиаторов), эти эксперименты состояли в сопоставлении результатов двух процессов, траектории которых получены друг из друга ортогональным преобразованием.

Более сложными являются опыты по определению формы предельной поверхности, или, точнее, кривой — плоского ее сечения в девиаторном пространстве. Во-первых, для этого требуется несколько образцов, предварительно сформированных одинаковым образом (например, простым растяжением), а затем нагружаемых по различным траекториям (чаще — по лучам) до перехода в новое пластическое состояние. Во-вторых, определить истинный

момент перехода, т. е. отдельную точку предельной кривой, известными методами невозможно. Момент перехода фиксируется с опозданием, и на практике ловят не истинную предельную кривую, а кривую равного допуска по дополнительной пластической деформации, надежно регистрируемой измерительным устройством.

Такая кривая равных допусков, довольно часто отождествляемая с самой предельной кривой, на самом деле может даже в качественном смысле резко отличаться от таковой. Восстановить истинную предельную кривую по найденной поверхности равного допуска возможно, если закон деформирования из каких-либо соображений установлен или постулирован. Очевидно, что разные определяющие соотношения будут приводить при одних и тех же поверхностях равного допуска  $f_{\Delta}$  к различным предельным поверхностям  $f$ , так что судить о действительной форме предельной поверхности по экспериментально полученной поверхности  $f_{\Delta}$  можно лишь приближенно и то только в рамках регулярной пластичности. При сингулярной пластичности в области точки нагружения формы этих поверхностей могут качественно различаться, как это показывает следующее соображение.

Нетрудно заметить, например, на основании теории Сандерса, что чем острее угол нагружения, тем при одной и той же догрузке выше уровень добавочной пластической деформации. В связи с этим если последующая траектория проходит вблизи начального угла нагружения  $a$  (рис. 4.16), возникшего в результате предварительного деформирования, то в силу принятого в теории способа построения предельных поверхностей при проколе новой траекторией (лучом) стороны начального угла новые текущие углы будут тем острее, чем ближе новая траектория проходит к точке  $a$ . А это означает, что для накопления одного и того же уровня дополнительных пластических деформаций требуется тем меньший выход за начальную предельную поверхность, чем ближе он к точке  $a$ . В результате поверхность (кривая) равного допуска будет выглядеть по отношению к собственно предельной кривой приблизительно так, как показано на рис. 4.16. Недорисованный кусок кривой  $f_{\Delta}$  относится к области, куда в абсолютном большинстве экспериментов повторные лучи не направляются. И если (как это принято) отнести точку  $a$  к кривой равного допуска, то  $f_{\Delta}$  может оказаться даже вогнутой. Конкретные расчеты при определенном виде допусков для кривой  $f_{\Delta}$  были получены в работах [24; 38].

Как видно, существующими экспериментальными методами выявить детали истинной предельной поверхности и, в частности, подтвердить или отвергнуть концепцию сингулярности весьма трудно, если возможно вообще.

Как показывает предыдущий анализ, разрешающая способность макроэксперимента в определенной мере ограничена. Даже не говоря о проблеме экспериментального определения предельных кривых, надо признать, что при осуществлении программы

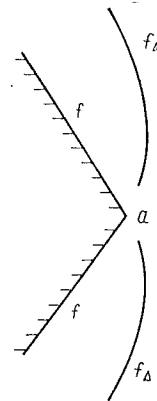


Рис. 4.16

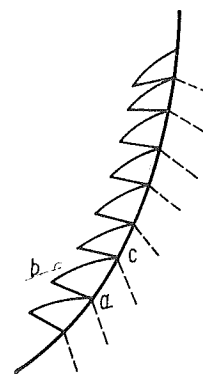


Рис. 4.17

эксперимента по заданию траектории нагружения (деформирования) максимально, что может сделать экспериментатор, это обеспечить попадание такой траектории в некоторую трубку радиуса  $\rho_0$ . И чем искусней оператор и совершеннее экспериментальные аппараты, т. е. чем уже трубка  $\rho_0$ , тем точнее будет результат по деформациям (напряжениям) и другим измеряемым параметрам. Эти требования к эксперименту являются общепринятыми и, следовательно, узаконивают то обстоятельство, что поведение траектории в самой трубке слабо влияет на результат, и надо ожидать, что в пределе при  $\rho_0 \rightarrow 0$  такое влияние исчезает полностью, а получаемый в эксперименте результат будет точным.

Такая гипотеза о предельных свойствах пластического деформирования позволяет внести упрощение в задачу о разыскании определяющего уравнения при произвольном нагружении заменой исходной траектории некоторым близким ломаным путем, на отрезках которого свойства пластичности либо известны, либо постулируются более естественно, чем на исходном. Правильное задание этих свойств определяет успех такого метода. Но сам критерий правильности, как казалось, лежит вне обсуждаемой гипотезы, и здесь представлялась возможной лишь апостериорная оценка на основе не очень разнообразного экспериментального материала да соображений интуитивного плана, которые в основном и побудили к пересмотру первой из теорий такого типа, предложенной в работе [19]. Ниже приводятся основные положения последующей работы [20].

Рассуждения велись в рамках плоскопластической деформации, а основные предположения состояли в следующем: в активном процессе предельная кривая изменяется непрерывно и имеет в точке нагружения особенность, причем вблизи этой точки последующая предельная кривая содержит предшествующую, отдаляясь от нее на минимальное расстояние. Это положение означает принятие способа построения последующих углов нагружения

(но не предельных кривых в целом), отвечающего рассмотренным выше сингулярным теориям.

Существенно новым являлось предположение об инвариантности в векторном пространстве образования, состоящего из векторов  $\delta S$ ,  $\delta \mathcal{E}^p$  и угла нагружения. Пусть даны два состояния:  $S'$  и  $S''$ , из которых производятся догрузки  $\delta S'$  и  $\delta S''$ , вызывающие приросты пластических деформаций  $\delta \mathcal{E}^{p'}$  и  $\delta \mathcal{E}^{p''}$ . Если угол нагружения в состоянии  $S'$  можно путем жестких перемещений или отражений совместить с таковым для состояния  $S''$  и при этом векторы  $\delta S'$  и  $\delta S''$  совместятся, то также совместятся и векторы  $\delta \mathcal{E}^{p'}$  и  $\delta \mathcal{E}^{p''}$ .

Не останавливаясь здесь на аргументации этого предложения, приведенной в [20], отметим, что там использовалось лишь частное следствие его для случая, когда вектор  $\delta S$  направлен по биссектрисе угла нагружения. В этом случае векторы  $\delta S$  и  $\delta \mathcal{E}^p$  коллинеарны, а единственным параметром, от которого может зависеть коэффициент пропорциональности, является величина угла нагружения.

Схема использования предельной гипотезы состоит в том, что исходная траектория нагружения заменяется близкой ломаной (рис. 4.17), состоящей из участков нейтрального и биссекториального нагружения с последующим измельчением составляющих такой путь элементов (зубцов). В типичном элементе  $abc$  такого зубца (рис. 4.18) отрезок  $ab$  отвечает нейтральному нагружению (по стороне угла нагружения для точки  $a$ ),  $bc$  — отрезок биссекториального пути, геометрия которого легко устанавливается по принятой выше схеме построения текущих углов нагружения. Как нетрудно установить, в интервале  $0 \leq \lambda \leq \gamma$ , где  $\gamma$  — величина угла нагружения в точке  $a$  (см. рис. 4.18), биссекториальный путь криволинеен:

$$\frac{dr}{r d\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad r = \frac{C}{\cos^2(\lambda/2)} \quad (r = |r|). \quad (6.1)$$

Для углов  $\lambda \geq \gamma$  биссекториальный путь прямолинеен:

$$r = \frac{\cos(\eta - \gamma/2)}{\cos(\lambda - \gamma/2)} \Delta s, \quad \Delta s = |\Delta S|. \quad (6.2)$$

В зависимости от того, попадает ли вектор догрузки  $\Delta S$  в зону НД ( $0 \leq \eta \leq \gamma$ ) или в зону ПД ( $\eta \geq \gamma$ ) для константы  $C$  имеются два разных значения:

$$C = \begin{cases} \Delta s \cos^2(\eta/2) & (0 \leq \eta \leq \gamma), \\ \Delta s \cos(\eta - \gamma/2) \cos(\gamma/2) & (\eta \geq \gamma). \end{cases} \quad (6.3)$$

Вдоль всего биссекториального пути

$$d\mathcal{E}^p = \Phi(\lambda) dS, \quad (6.4)$$

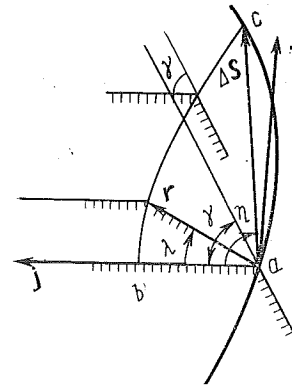


Рис. 4.18

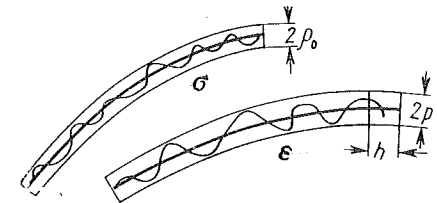


Рис. 4.19

вдоль нейтрального, естественно,  $d\mathcal{E}^p = 0$ . Поэтому в ортах  $i, j$ , таких же как и на рис. 4.14, общий прирост пластической деформации на участке  $abc$  будет

$$\Delta \mathcal{E}^p = \int_0^\eta d\mathcal{E}^p = \int_0^\eta \Phi(\lambda) dr = \Phi(\lambda) r \Big|_0^\eta - \int_0^\eta \frac{d\Phi(\lambda)}{d\lambda} r d\lambda, \quad (6.5)$$

что при учете полученных выше формул и очевидных равенств

$$\Phi(0) = 0, \quad r|_{\lambda=0} = \Delta S, \quad \left. \frac{d\Phi}{d\lambda} \right|_{\lambda>\gamma} = 0 \quad (6.6)$$

приводит к двум различным выражениям для указанных выше зон:

$$\Delta \mathcal{E}^p = \Phi(\eta) \Delta S - \Delta s \cos^2 \frac{\eta}{2} \int_0^\eta \Phi'(\lambda) \frac{nd\lambda}{\cos^2(\lambda/2)},$$

$$\Delta \mathcal{E}^p = \Phi(\gamma) \Delta S - \Delta s \cos(\eta - \gamma/2) \cos \frac{\gamma}{2} \int_0^\gamma \Phi'(\lambda) \frac{nd\lambda}{\cos^2(\lambda/2)}, \quad (6.7)$$

$$n = \sin \lambda i + \cos \lambda j.$$

Как и при качественном исследовании соотношений, рассмотренных в § 4, возьмем частный случай функции  $\Phi$  в виде

$$\Phi = \frac{A}{2} (\lambda + \sin \lambda). \quad (6.8)$$

Тогда соотношения легко интегрируются и принимают форму (см. рис. 1.14)

$$\Delta \mathcal{E}^p = \frac{1}{2} A \Delta s [\eta \sin \eta i + (\eta \cos \eta - \sin \eta) j] \quad (0 \leq \eta \leq \gamma),$$

$$\Delta \mathcal{E}^p = \frac{1}{2} A \Delta s \{ [\gamma \sin \eta + \sin \gamma \sin (\eta - \gamma)] i +$$

$$+ [\gamma \cos \eta - \sin \gamma \cos (\eta - \gamma)] j \} \quad (\gamma \leq \eta).$$

Процесс измельчения элементов ломаной траектории применительно к выписанным соотношениям означает просто замену конечных приращений на бесконечно малые, что формализуется заменой значка  $\Delta$  на значок  $\delta$ , и в такой форме полученные соотношения на основе гипотезы предельных свойств пластического деформирования приписываются исходной траектории нагружения.

Теперь пора сказать, что основным побудительным фактором для приведенной выше разработки являлось желание исключить из набора гипотез всех известных ко времени написания работы [20] теорий сингулярной пластичности подозрительный (упомянутый в § 1) пункт, предписывающий возможность использования в нелинейной механике принципа суперпозиции. А результат получился неожиданный: определяющие соотношения (6.9) в рамках гипотезы о предельных свойствах пластического деформирования совпали с соотношениями (4.45), общими для группы теорий, включающих этот пункт.

Конечно, такое полное совпадение обусловлено частным выбором диаграмм одноосного нагружения (4.16) и (6.8) и показано только для плоскопластической деформации. Однако это дает основание говорить о качественном совпадении результатов столь различных подходов: микроструктурного (теория Батдорфа — Будянского), геометрического (теория Сандерса), модельного (Работнов) и только что изложенного. Такое совпадение, обнаруженное в работе [21], является событием в науке редким и говорит о надежности позиции сингулярной пластичности.

## § 7. ПРИНЦИП МАКРОДЕТЕРМИНИЗМА

В ряду указанных выше подходов наибольшими отличительными особенностями выделяется тот, что основывался на гипотезе предельных свойств пластического деформирования, причем автора не покидала мысль, что эта гипотеза должна давать большую, чем использованная в [20], информацию.

Математическое оформление гипотезы о предельных свойствах пластической деформации состоит в следующем. Если для двух траекторий нагружения можно установить взаимно однозначное соответствие так, что расстояние между соответствующими точками меньше, чем  $\eta$ , то расстояние между отвечающими точками полученных траекторий деформирования будет меньше  $\delta$ , завися-

щего только от  $\eta$  и стремящегося к нулю вместе с последним. Отсюда следует, что если пучок траекторий нагружения может быть заключен в узкую трубку радиуса  $\rho_0$  с донышком, где кончатся все траектории, то отвечающие траектории деформирования можно вложить в трубку радиуса  $\rho$  так, что конец любой из этих траекторий будет находиться в концевой части этой трубки длины  $h$ , причем при  $\rho_0 \rightarrow 0$  одновременно  $\rho \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  (рис. 4.19).

В математическом плане это гипотеза о непрерывной зависимости функционала  $\epsilon \sim \sigma$  в смысле близости нулевого порядка [74], а применительно к пластическим средам выражает принцип макродетерминизма — возможность в макроэксперименте с указанной выше его ограниченной разрешающей способностью выявлять механические свойства такого материала.

Выше этот принцип формулировался для результатов в виде траекторий деформирования. Очевидно, что он остается в силе при задании траекторий деформирования, а результатов — для траекторий нагружения. Очевидно также, что он распространяется и на другие механические параметры скалярного, векторного или тензорного порядка и, в частности, на работу внутренних сил

$$A = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (7.1)$$

и на дополнительную работу

$$B = \int \epsilon_{ij} d\sigma_{ij}. \quad (7.2)$$

Являясь мерой энергетической, эти параметры, или, точнее, их изменения, могут служить представителями и параметра  $h$ . Так, при нагружениях, близких к лучевому, и при выполнении требований относительно  $\rho_0$  и  $\rho$

$$B = \int \epsilon d\sigma \cong \int \epsilon d\sigma_0, \quad (7.3)$$

где использовано обычное векторное представление тензоров и через  $\epsilon$  обозначена длина вектора  $\epsilon$ , а через  $\sigma_0$  — длина трубки нагружения  $\rho_0$ . Любое текущее расхождение в длине вектора  $\epsilon$  для результирующих траекторий деформирования в трубке  $\rho$  должно удовлетворять условию  $\Delta \epsilon \leq h$ , в силу чего

$$\Delta B = \int \Delta \epsilon d\sigma_0 \leq h \int d\sigma_0. \quad (7.4)$$

Естественно, что требование  $h \rightarrow 0$  при  $\rho_0 \rightarrow 0$  должно выполняться для любого  $\sigma_0$  и приводит к заключению, что  $\Delta B \rightarrow 0$  равномерно по длине трубки  $\rho_0$ .

Аналогично этому для работы  $A$  будем иметь

$$\Delta A \leq H \int d\epsilon_0, \quad (7.5)$$

где  $H$  и  $\epsilon_0$  — параметры, аналогичные  $h$  и  $\sigma_0$ , но определенные для задания процесса в пространстве деформаций.

Особое значение в рамках принципа макродетерминизма имеет параметр

$$l = \int |d\epsilon| \quad (7.6)$$

— длина дуги траектории деформирования. В трубке  $\rho$  этот параметр оказывается неконтролируемым\*, так же как и аналогичный параметр  $L$  длины дуги траектории нагружения в трубке  $\rho_0$ . Следует отметить, что в противоположность этому параметр

$$l^p = \int |d\varepsilon^p| \quad (7.7)$$

в рамках концепции предельных поверхностей является контролируемым и конечным на любом отрезке траектории нагружения.

Гипотеза предельных свойств пластического деформирования, а следовательно, и принцип макродетерминизма требуют, чтобы в малой окрестности точки нагружения (в «тонкой структуре» трубки  $\rho_0$ ) выполнялось условие, уже использованное при выводе соотношений (6.9) и состоящее в том, что при сближении точек  $a$  и  $c$  (рис. 4.18) траектории нагружения интеграл

$$\Delta\varepsilon = \int_a^c \delta\varepsilon \quad (7.8)$$

не зависел от пути, т. е. чтобы в «тонкой структуре»

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial(\delta\sigma_{ij})}, \quad \Phi = \Phi(\delta\sigma_{ij}, \dots). \quad (7.9)$$

Таким образом, одним из условий выполнения принципа макродетерминизма является потенциальность связи для приращений [26].

Потенциал  $\Phi$  зависит вообще от параметров состояния и истории нагружения, и здесь возникает проблема о допустимой в рамках выдвинутого принципа форме таких параметров\*\*. Но относительно приращений он должен быть функцией однородной второй степени однородности

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(\delta\sigma_{ij})} \delta\sigma_{ij} = 2\Phi. \quad (7.10)$$

Место (7.8) в предыдущих рассуждениях могло занимать соотношение

$$\Delta\sigma = \int_A^C \delta\sigma, \quad (7.11)$$

\* В отношении длины дуги надо упомянуть известную теорию фракталов (см., например, книгу: Е. Федер. Фракталы. М.: Мир, 1991). Можно указать специальный способ «фрактализации» линий, изображающих упругопластические процессы, обладающих свойством бесконечной длины предельной ломаной в как угодно тонкой трубке.

\*\* Решение этой проблемы связано с анализом поведения на близких траекториях отличных от  $\delta\varepsilon_{ij}$  и  $\delta\sigma_{ij}$  параметров и потребует, по-видимому, привлечения неэлементарных математических методов. Но некоторые результаты можно предвидеть заранее. Так, нельзя допускать зависимость  $W$  от длины дуги траектории деформирования (и соответственно зависимость  $\Phi$  от длины траектории нагружения) и от других параметров, которые на бесконечно близких траекториях могут отличаться хотя бы на конечную величину.

и с очевидной заменой траектории нагружения на траекторию деформирования и наоборот при сближении точек  $A$  и  $C$  следовало бы соотношение

$$\delta\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial(\delta\varepsilon_{ij})}, \quad W = W(\delta\varepsilon_{ij}, \dots). \quad (7.12)$$

Впрочем, потенциал  $W$  можно было бы ввести и чисто формально на основании (7.10)

$$W = \delta\varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} - \Phi(\delta\varepsilon_{mn}).$$

Очевидно также, что вместе с соотношением (7.9) имеют место представления

$$\delta\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial\Phi^p}{\partial(\delta\sigma_{ij})}, \quad (7.13)$$

где

$$\Phi^p = \Phi - \Phi^e, \quad \Phi^e = \frac{1}{2} A_{ijn.n} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{mn}. \quad (7.14)$$

Отметим, что соотношения пластичности типа (7.9), (7.11), (7.13) в приращениях (или в скоростях) уже предлагались различными авторами\* (см., например, [64]) и в предположении выпуклости дифференциального потенциала эффективно использовались в работе [65] при анализе устойчивости. Так что приведенные выше соображения можно рассматривать как подведение базы под эти предложения.

В разряде регулярной пластичности все ассоциированные законы типа (3.20) обладают дифференциальным потенциалом. Так, для теории изотропного упрочнения (3.7)

$$\Phi^p = \frac{1}{4} \frac{Q(T)}{T} (S_{mn} \delta S_{mn})^2. \quad (7.15)$$

Для теории трансляционного упрочнения с идеальным эффектом Баушингера (3.23)

$$\Phi^p = \frac{1}{4\lambda S_0^2} [(S_{mn} - \lambda \Delta_{mn}) \delta S_{mn}]^2. \quad (7.16)$$

Для неассоциированных законов типа (3.15) дифференциального потенциала не существует. Это прямо следует из того, что в них не выполняется требование

$$\frac{\partial(\delta\varepsilon_{ij}^p)}{\partial(\delta S_{mn})} = \frac{\partial(\delta\varepsilon_{mn}^p)}{\partial(\delta S_{ij})}. \quad (7.17)$$

\* В частности, одно из предложений теории Христиановича [67], относящееся к «простому» нагружению, эквивалентно, по существу, обсуждаемой потенциальности. Распространение этого положения на ортогональное нагружение выполнено в работе [68].

Действительно, на основании (3.15) имеем

$$\frac{\partial(\delta\mathcal{E}_{ij}^p)}{\partial(\delta S_{mn})} = h \frac{\partial g}{\partial S_{ij}} \frac{\partial f}{\partial S_{mn}}, \quad \frac{\partial(\delta\mathcal{E}_{mn}^p)}{\partial(\delta S_{ij})} = h \frac{\partial g}{\partial S_{mn}} \frac{\partial f}{\partial S_{ij}}, \quad (7.18)$$

и правые части не совпадают.

Условие (7.17) выполняется только при  $g = \alpha f$ , т. е. при выполнении условия градиентальности (3.19). Таким образом, свойство градиентальности (ассоциированности) регулярной пластичности является непосредственным следствием обсуждаемого принципа макродетерминизма.

В рамках регулярной пластичности возможен и иной способ использования принципа макродетерминизма для доказательства ассоциированности соотношения пластичности [27; 84].

Очевидно, что в общем дифференциально линейном соотношении

$$\delta\mathcal{E}_{ij}^p = C_{ijmn} \delta S_{mn}, \quad (7.19)$$

где в силу условия непрерывности Прагера

$$C_{ijmn} = C_{ij} \frac{\partial f}{\partial S_{mn}},$$

для выполняемости условия ассоциированности, т. е. условия (7.17), требуется симметрия тензора  $C$

$$C_{ijmn} = C_{mnij}. \quad (7.20)$$

Допустим противное:

$$C_{ijmn} = C_{ijmn}^+ + C_{ijmn}^-, \quad C_{ijmn}^\pm = \frac{1}{2} (C_{ijmn} \pm C_{mnij}), \quad (7.21)$$

и рассмотрим пластическую часть работы

$$\begin{aligned} A_-^p &= \int C_{ijmn}^- S_{ij} dS_{mn} = \frac{1}{2} \int (C_{ijmn} - C_{mnij}) S_{ij} dS_{mn} = \\ &= \frac{1}{2} \int C_{ijmn} (S_{ij} dS_{mn} - S_{mn} dS_{ij}). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Проведем произвольную траекторию активного нагружения. На ней при  $C_{ijmn}^-$  работа  $A_-^p \neq 0$ . Но любую такую траекторию можно приблизить отрезками нейтрального и радиального  $dS_{pq} = d\lambda S_{pq}$  нагружений (рис. 4.20). На первых  $A_-^p = 0$  по определению, а на вторых обращается в нуль скобка в последнем интеграле. Поэтому выполнение требования макродетерминизма возможно лишь при  $C_{ijmn}^- = 0$ , т. е. при симметрии (7.20).

Рассмотренные выше варианты сингулярной пластичности также имеют дифференциальный потенциал. Так, для записи соответствующих соотношений в форме (4.45), с учетом того, что

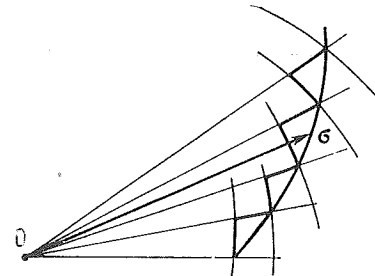


Рис. 4.20

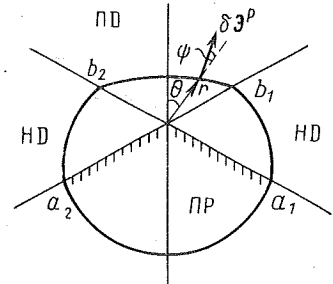


Рис. 4.21

$$\eta = \arctg \frac{\delta S_1}{\delta S_2}, \quad (7.23)$$

нетрудно установить следующие выражения (ПР — полная разгрузка):

$$\begin{aligned} \Phi^p &= 0 && \text{ПР.} \\ \Phi^p &= \frac{1}{4} A \delta s^2 \left( \eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta \right), && \text{НД,} \\ \Phi^p &= \frac{1}{4} A \delta s^2 [\gamma - \sin \gamma \cos (2\eta - \gamma)]. && \text{ПД.} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Интересно отметить, что соотношения, полученные в уже упомянутой работе [19], потенциальными не являются. Таким образом, отмеченное в [20] чувство неудовлетворенности принятым в [19] законом радиального нагружения имело под собой реальную причину, а условие потенциальности выступает как необходимый критерий при постулировании пластических свойств.

Дифференциальная потенциальность соотношений пластичности имеет простую геометрическую интерпретацию. Уравнение

$$\Phi(\delta S_{ij}) = \Phi^e(\delta S_{ij}) + \Phi^p(\delta S_{ij}) = C^2/4 = \text{const}, \quad (7.25)$$

определяющее в общем случае некоторую гиперповерхность, в плоскопластическом случае задает замкнутую вокруг точки нагружения кривую, определенным образом ориентированную по отношению к дифференциальному элементу предельной кривой. Полагая

$$\Phi^e = \frac{B}{4} (\delta s)^2, \quad B = \frac{1}{G} = \text{const}, \quad (7.26)$$

для группы теорий сингулярной пластичности с потенциалом (7.24) соответствующая кривая, описываемая полярным радиусом  $r = \delta s$ , будет состоять из следующих частей (рис. 4.21).

Кривая  $a_1 a_2$

$$r^2 = C^2/B = r_0^2 \quad (\text{окружность}). \quad \text{Зона ПР.} \quad (7.27)$$



Кривая  $a_1b_1$  ( $a_2b_2$ )

$$r^2 = \frac{C^2}{B+A\left(\eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta\right)} \cong \frac{C^2}{B + \frac{2}{3} A\eta^3} \quad (\text{спираль}). \quad \text{Зона НД.} \quad (7.28)$$

Кривая  $b_1b_2$

$$r^2 = \frac{C^2}{B+A[\gamma + \sin \gamma \cos 2\theta]} \quad (\text{эллипс}). \quad \text{Зона ПД.} \quad (7.29)$$

Здесь  $\theta$  — угол, отсчитываемый от биссектрисы угла нагружения. Кривая  $a_2b_2$  — зеркальное отражение кривой  $a_1b_1$  в указанной биссектрисе.

Для заданного угла  $\theta$  или  $\eta = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} - \theta$  направление вектора  $\delta\mathfrak{E}$  определяется нормалью к данной кривой в конце вектора  $r$ , а модуль  $\delta\mathfrak{E}$  — его проекцией на направление  $r$ , которая в силу соотношения

$$\delta S \delta \mathfrak{E} = 2\Phi = C^2/2 \quad (7.30)$$

получается инверсией  $r$  относительно окружности радиуса  $C/\sqrt{2}$

$$\delta \mathfrak{E}_r = |\delta \mathfrak{E}| \cos \psi = \frac{C^2}{2r} \quad (7.31)$$

или инверсией  $2r/B = 2Gr$  относительно продолжения окружности упругого участка в пластическую область.

Характерно, что в известных теориях пластичности, построенных на основе реальных моделей, таких как теория Прагера [50], Кадашевича — Новожилова [17], Работнова [53], дифференциальная потенциальность выполняется, поскольку модель как реальный объект заведомо удовлетворяет принципу макродетерминизма. Потенциальность выполняется, как мы видели, и для группы теорий, в которых отсутствует перекрестное влияние элементов пластических механизмов (парное влияние в модели Работнова не в счет, поскольку оно не отражается на поведении при догрузках).

При учете перекрестного влияния пластических механизмов выполнение условий дифференциальной потенциальности заведомо не обеспечивается. Так обстоит дело в теории Леонова — Швайко [37]. Отсутствие потенциальности при «немонотонной» деформации легко проверяется на основе соотношений (1.15), (1.16) работы [37]. Аналогичное заключение следует для теории Христиановича (см. формулы (2.4), (2.18) работы [67]).

Известны случаи, когда стремление к простоте соотношений приводит к нарушению обсуждаемой потенциальности. Так, в работе [73] как приближения были предложены весьма простые соотношения, которые в несколько измененных обозначениях имеют вид

$$\delta \mathfrak{E}_i^p = g_i(\theta) \delta S_i, \quad g_1 \neq g_2, \quad (7.32)$$

где  $\delta \mathfrak{E}_1^p, \delta \mathfrak{E}_2^p$  — компоненты соответствующих векторов в ортах  $k_1, k_2$ , а  $\theta$  — угол между  $\delta S$  и биссектрисой угла нагружения. Но для потенциальности должно выполняться условие

$$\frac{\partial g_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial (\delta S_2)} \delta S_1 - \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial (\delta S_1)} \delta S_2 = 0. \quad (7.33)$$

Кроме того, поскольку  $\theta$  однородная нулевой степени функция  $\delta S_i$ , то имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial (\delta S_i)} \delta S_i = 0, \quad (7.34)$$

и поэтому должно быть

$$\frac{\partial g_1}{\partial \theta} (\delta S_1)^2 + \frac{\partial g_2}{\partial \theta} (\delta S_2)^2 = 0. \quad (7.35)$$

Очевидно, что входящие сюда произведения в зоне НД отрицательны: увеличение угла  $\theta$  означает замораживание некоторого числа площадок скольжения, что уменьшает податливость  $g_i$  в любом направлении. Следовательно, последнее условие невыполнимо.

Неудовлетворительной в этом отношении является и попытка автора по созданию аналитического аналога теории изотропного упрочнения с определяющим соотношением (5.6). И дело здесь уже не только в отсутствии дифференциальной потенциальности, а в более глубоком дефекте данного соотношения.

Сравним результаты двух процессов нагружения, плоские пути которых укладываются в полосу шириной  $2\rho_0$ : лучевого и ступенчатого при бесконечном сужении полосы, посредством измельчения ступенек (рис. 4.22). Полагая  $|S| = S$  на лучевом пути от  $S_0$  до  $S$  ( $\theta = 0, |\delta S| = \delta s$ ) по (5.6) имеем

$$|\mathfrak{E}_\Lambda^p| = \int_{S_0}^S g(\lambda) d\lambda. \quad (7.36)$$

На этом же отрезке ступенчатого пути при  $\rho_0 \rightarrow 0$  (и, следовательно, при бесконечном увеличении числа ступенек) с точностью до величин второго порядка малости будут справедливы условия

$$\frac{|S|}{|S_\Lambda|} \cong 1, \quad \cos \theta = \frac{\delta S}{\delta s} = \cos \alpha = \text{const} \quad (7.37)$$

и, следовательно, с той же точностью

$$|\mathfrak{E}^p| = \frac{1}{2^n} \frac{(1 + \cos \alpha)^n}{\cos \alpha} \int_{S_0}^S g(\lambda) d\lambda, \quad (7.38)$$

так что разность модулей деформаций на двух сравниваемых как угодно близких путях отличается на конечную величину, которая,

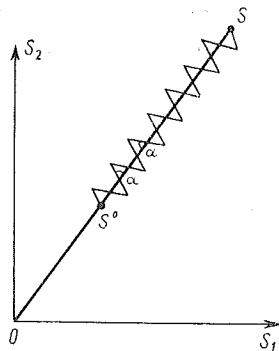


Рис. 4.22

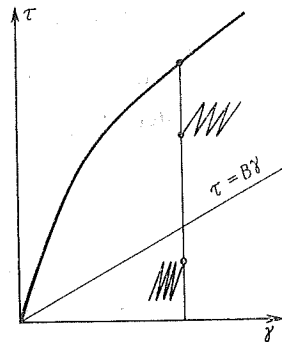


Рис. 4.23

очевидно, меняется вместе с формой ступенек. Аналогичный дефект имеет место и в рамках соотношения (5.10). Подобная ситуация должна восприниматься как неконтролируемость деформаций в макроэксперименте; в последнем экспериментатор может обеспечить лишь попадание задаваемого процесса в более или менее узкую трубку с уверенностью, что ее сужение обеспечит более надежное определение механических свойств материала. Добавим к этому, что значительная часть в основном ранних экспериментов в пластичности проводилась именно ступенчатым нагружением, и можно себе представить трудности, которые возникли бы при обработке их результатов на основании соотношений типа (5.7) и (5.10).

Обращение к примеру аналитического аналога теории течения поучительно еще и в другом важном аспекте. Соотношение (5.7) можно подправить в отношении дифференциальной потенциальности, представив его, например, в виде

$$\delta \mathcal{E}^p = \frac{1}{2} g(S)(1 + \cos \theta) \left( \delta S + \frac{S}{S} \delta s \right) \quad (7.39)$$

с потенциалом

$$\Phi^e = \frac{1}{4} g(S)(\delta S + \delta s)^2, \quad (7.40)$$

и тем не менее нетрудно убедиться, что отмеченный выше дефект сохраняется. Это явным образом указывает на то, что дифференциальная потенциальность может служить лишь необходимым условием выполнения требования макродетерминизма, но не более того. Решающей для допустимости в отношении макродетерминизма является проверка соотношения на близких путях нагружения (деформирования) в виде гладких и ступенчатых, как это было проиллюстрировано выше, или на гладких и петлеобразных, как это использовано в работе [27] при доказательстве несостоятельности соотношений гипотезы.

Отметим, что проба на ступенчатое нагружение, проведенная выше, не затрагивает вопроса о существовании в теории «выключателя» активности процесса в виде предельных поверхностей, поскольку очевидно, что если бы в анализируемой теории такой выключатель и был предусмотрен, он не был бы задействован ввиду симметрии использованного пути. Проба на петлеобразные пути является для теории испытанием более сильным и для (5.6) и для (7.39) как частных случаев гипотезы имеет отрицательный результат.

Очевидно, что и теория упругопластических процессов и эндосинхронная теория в связи с отсутствием в них указанного «выключателя» активного процесса пробу на петлеобразные процессы не выдерживают. Это следует уже из того, что, накручивая путь нагружения (деформирования) на окрестность фиксированного состояния, можно накопить конечную деформацию (напряжение).

Отметим, что факт накопления пластической деформации при бесконечно малых колебаниях напряжения вблизи фиксированного состояния сторонниками аналитической пластичности подается как некий аналог ползучести, хотя ползучесть в обычном смысле отсутствует. При этом обнаруживаются несуразные результаты. Так, в рамках соотношения (5.10) даже при простейших видах нагружения имеются [28] состояния, колебания нагрузки вблизи которых вызывают не увеличение, а уменьшение остаточной деформации. Так, в условиях трансляционного упрочнения и чисто упругой разгрузки ( $C=D=0$ ) при чистом сдвиге, когда  $\mathcal{E} \rightarrow \gamma/2$ ,  $S \rightarrow \tau$ ,  $de = (\sqrt{2}/2)d\gamma$ , соотношения (5.10) дают

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = G \begin{cases} 1 - (\sqrt{2} A/2G)(\tau - B\gamma) & (d\tau > 0), \\ 1 & (d\tau < 0). \end{cases} \quad (7.41)$$

Поэтому малые колебания  $\tau$  после частичной разгрузки будут вести себя по-разному, в зависимости от того происходят они выше или ниже прямой  $\tau = B\gamma$  (рис. 4.23). Если выше, то колебания приводят к росту остаточных деформаций, если ниже — то к уменьшению.

Дефект аналитических теорий пластичности, связанный с невыполнением требования макродетерминизма, может оказаться незаметным при решении конкретных краевых задач, так же, например, как в таких случаях может быть незаметно невыполнение ковариантности определяющих соотношений или непотенциальности в упругости. Но с позиций общих физико-математических основ континуальной механики все такие дефекты в равной мере недопустимы, и расплата за невнимание к ним наступает непременно. Так, в связи с обсуждаемым здесь дефектом возникает проблема с адекватным описанием колебаний конструкций, частично разгруженных из пластической области. Напомним, что подобная ситуация с неадекватным описанием устойчивости кон-

струкций явилась решающим фактором перехода от регулярной к сингулярной пластичности. И уж, кстати, зарождение первой из этих теорий было напрямую связано с частным проявлением требования макродетерминизма — условием непрерывности Прагера.

Принятая в этой главе направленность изложения основных положений современной термодинамики преследует основную цель — выявление ограничений, которые может наложить данный раздел физики на вид определяющих соотношений механики. А поскольку по принципу локальной определенности главным источником информации о свойствах материала в механике является эксперимент с однородным полем определяющих параметров, то основное место здесь будет отведено исследованиям по термодинамике однородных процессов, т. е. случаю, когда основные параметры, такие как деформация, напряжение и температура, постоянны по объему тела. Кратким сведениям по неоднородным процессам посвящен лишь последний параграф этой главы.

Поскольку ниже используется одна фиксированная декартова система координат, то в основном будет применяться векторное представление тензоров, а нужный в некоторых местах переход к тензорно-координатной форме будет производиться без комментариев.

### § 1. ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ ОДНОРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Напомним вначале формулировку теоремы живых сил в механике сплошной среды

$$W^e - \dot{K} = W^i, \quad (\dot{\phantom{x}}) = \frac{d(\phantom{x})}{dt}, \quad (1.1)$$

где

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV \quad (1.2)$$

— кинетическая энергия,

$$W^e = \int_V \rho F_i v_i dV + \int_{\Sigma} T_i v_i d\Sigma \quad (1.3)$$

— мощность работы внешних сил,

$$W^i = \int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.4)$$

— мощность работы внутренних сил. В этих формулах  $t$  — время, точка над переменной означает полную (материальную) производную по времени,  $\rho$  — плотность материала,  $v_i$  — компонента вектора скорости,  $V$  и  $\Sigma$  — текущие объем и ограничивающая его поверхность,  $v_j$  — внешняя нормаль к  $\Sigma$ ,  $F_i$  — массовая сила,  $\sigma_{ij}$  — тензор истинных напряжений (тензор Коши),  $e_{ij}$  — тензор скоростей деформации. Если  $|\epsilon_{ij}| \ll 1$ , то  $e_{ij} = \epsilon_{ij}$ ,  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ .

Поскольку уравнение движения в эйлеровой системе координат, как известно, имеет вид

$$\sigma_{i,i} + \rho F_j = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad (1.5)$$

то равенство (1.1) можно рассматривать просто как определение мощности работы внутренних сил формулой (1.4). Справедливость такого определения легко проверить, если использовать теорему Гаусса — Остроградского для второго члена в (1.3)

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} T_i v_i d\Sigma &= \int_{\Sigma} \sigma_{ij} v_j v_i d\Sigma = \int_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} dV = \\ &= \int_V \sigma_{i,j} v_i dV + \int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV \end{aligned}$$

и равенства (1.2) и (1.5).

Как и в большинстве современных литературных источников, мы будем рассматривать термодинамику как аксиоматическую науку, основанную на ряде постулатов, не противоречащих экспериментам, наблюдениям и практике человеческой деятельности, первым из которых является закон сохранения энергии, который для замкнутой системы (изучаемое тело и окружающая среда) в современном представлении может быть записан в виде

$$\dot{E} = W^e + Q^e, \quad (1.6)$$

где  $E$  — так называемая полная энергия,  $Q^e$  — скорость подвода внешнего тепла. Конечно, классическая трактовка этого равенства как сохранения суммы элементарных количеств совершенной над телом работы и подведенного к телу тепла без конкретизации свойств среды на основании (1.6) подтверждена быть не может. Однако соотношение (1.6) обладает очень важным специфическим свойством, которое и без детальной конкретизации среды позволяет выявить принципиальные черты термодинамических процессов, т. е. свойством эвристическим: хотя порознь  $W^e$  и  $Q^e$  может быть, и не являются полными производными по времени от каких-либо объектов, их сумма всегда такой производной является. Содержательность такого заключения будет раскрыта чуть ниже, а сейчас запишем (1.6) в более удобном для дальнейшего виде. Используя теорему живых сил (1.1) и введя обозначение

$$U = E - K, \quad (1.7)$$

на основе (1.6) получим

$$U = W^i + Q^e. \quad (1.8)$$

Это соотношение в дальнейшем и будем представлять как первый закон термодинамики. Здесь  $U$  — так называемая внутренняя энергия,  $W^i$  может быть вычислено через мощность работы внешних сил и кинетическую энергию, а  $Q^e$  измерено в единицах мощности работы по скорости оттока тепла из окружающей тело среды\*. Что же касается прибывающего в само тело тепла, то скорость его притока  $Q^i$  регламентируется вторым законом термодинамики:

$$\frac{Q^i}{T} = \dot{S}, \quad Q^i - Q^e = Q^* \geq 0, \quad (1.9)$$

где  $T$  — абсолютная температура,  $S$  — энтропия,  $Q^*$  — скорость некомпенсированного тепла. Все, что в дальнейшем требуется в отношении понятия абсолютной температуры, которая, как длина, может измеряться по различным шкалам, это то, что она, как и длина, является величиной положительной. В однородном процессе она должна быть одинаковой во всех точках тела, как и другие входящие в (1.8) и (1.9) величины. Откладывая на будущее обсуждение условий реальной осуществимости такого процесса, здесь мы будем полагать просто, что эти условия выполнены.

Главными качествами, по крайней мере для целей данного исследования, является то, что скорость притока тепла в теле  $Q^i$  не меньше скорости оттока тепла из окружающей среды  $Q^e$ , и то, что, хотя сама скорость  $Q^i$  не является вообще полной производной какого-либо объекта, частное от деления этой скорости на абсолютную температуру такой производной является. Следствием (1.9) является неравенство

$$\dot{S} \geq \frac{Q^e}{T}. \quad (1.10)$$

Естественно, что подчеркиваемое выше дифференциальное качество законов термодинамики может стать инструментом исследования, только если существует способ распознавания того, является ли данная скорость изменения некоей величины полной производной по времени или нет. В рамках классической термодинамики, где по определению величины  $U$  и  $S$  являются функциями состояния, т. е., функциями конечного набора внутренних параметров  $\gamma_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) и, возможно, времени, этот вопрос решается просто на основе правила дифференцирования сложной функции. Для того чтобы дифференциальная форма

$$Q = Q_k \dot{\gamma}_k + Q_0 \quad (1.11)$$

\* Калориметрический эксперимент [48].

являлась полной производной по времени от какой-либо функции  $N$ , надо, чтобы коэффициенты  $Q_k$  и  $Q_0$  имели специальную структуру

$$Q_k = \frac{\partial N}{\partial \gamma_k}, \quad Q_0 = \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Очевидно, что скорости  $Q^i$ ,  $Q^*$ ,  $W^i$ , а следовательно, на основании (1.9) и  $Q^e$  представимы в форме (1.11), но вообще не удовлетворяют требованию (1.12).

В классической термодинамике выбор  $\gamma_k$  определяет качественные особенности термомеханического поведения среды. Так, выбор  $\gamma_k$  в виде компонент тензора деформаций  $\epsilon$  и абсолютной температуры  $T$  определяет класс термоупругих тел. Если сюда добавляются компоненты тензора скоростей деформаций,  $e$ , то это класс вязкоупругих материалов и т. д.

Однако существуют материалы, способные запоминать всю или конечную часть предыстории проходящего в них термомеханического процесса (наследственная упругость, пластичность и т. д.). Попытка расширения набора  $\gamma_k$  для адекватного описания поведения таких тел может быть неэффективной, а иногда, как это будет ясно из дальнейшего (§ 4), невозможной вообще.

Применительно к таким телам классическая термодинамика оказывается бессильной, а потеря, как казалось, основного фактора — возможности представления внутренней энергии  $U$ , энтропии  $S$  и других термодинамических параметров в виде функций состояния — могла поставить под сомнение содержательность самих законов термодинамики.

Однако существует возможность простого обобщения термодинамики на такие сложные среды, не нарушающего указанное выше дифференциальное свойство соотношений (1.8)—(1.10), свойство, которое теперь полезно представить следующим образом. Для содержательности этих соотношений важна не столько конструкция самих объектов  $U$ ,  $S$ ,  $Q^i$ ,  $Q^e$ ,  $Q^*$ ,  $W^i$ , как то, что  $U$  и  $\dot{S}$  обязательно являются полными производными по времени от объектов  $U$  и  $S$ .

Таким образом, в качестве перечисленных и, возможно, других термодинамических объектов могут выступать не только функции, но и функционалы (операторы), способные нести память об истории изменения внутренних параметров во времени. А если так, то нет необходимости специально утруждаться выбором параметров  $\gamma_k$ , как это было необходимо в классической трактовке законов термодинамики, а выбрать для деформируемых твердых тел (материалов) единый набор, например в виде компонент тензора деформаций  $\epsilon$  и абсолютной температуры  $T$ , а конкретизацию свойств материалов производить выбором формы соответствующих функционалов.

Договоримся о следующем. В данной главе условимся отмечать зависимость типа функции круглыми скобками, а типа функционала (оператора) — квадратными

$$z = f(x) \text{ — функция, } z = f[x] \text{ — функционал.} \quad (1.13)$$

Напомним, что функция — это поточечная зависимость (точка  $x_0$  отвечает точке  $z_0$ ), а функционал — это зависимость линия — точка (линия  $x(t)$  и точке  $x_0(t_0)$  отвечает точка  $z_0$ ). Для подтверждения содержательности в указанном выше смысле соотношений (1.8)—(1.10) надо определить структуру полной производной функционала по времени.

Рассмотрим, например, при достаточно гладком ядре  $\varphi_k$  функционал

$$z = \Psi[\gamma_k, t] = \int_0^t \varphi_k(t, \tau) d\gamma_k(\tau) = \int_0^t \gamma_k(t, \tau) \dot{\gamma}_k d\tau. \quad (1.14)$$

По правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом и зависящим от параметра подынтегральным выражением имеем

$$\dot{z} = \varphi_k(t, t) \dot{\gamma}_k + \int_0^t \frac{\partial \varphi_k(t, \tau)}{\partial t} d\gamma_k(\tau). \quad (1.15)$$

Этот простейший пример подсказывает, что существует непустое множество функционалов, полную производную по времени которых можно представить в форме, аналогичной полной производной функции

$$\dot{\Psi} = \frac{d}{dt} [\gamma_k, t] \Psi_{\gamma_k}[\gamma_k, t] \dot{\gamma}_k + \Psi_t[\gamma_k, t], \quad (1.16)$$

где  $\Psi_{\gamma_k}$  и  $\Psi_t$  — частные (в обобщенном смысле) производные от  $\Psi$  по  $\gamma_k$  и  $t$  соответственно. Так, в рассмотренном выше примере

$$\Psi_{\gamma_k}[\gamma_k, t] = \varphi_k(t, t),$$

$$\Psi_t[\gamma_k, t] = \int_0^t \frac{\partial \varphi_k(t, \tau)}{\partial t} \dot{\gamma}_k(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial \varphi_k(t, \tau)}{\partial t} d\gamma_k(\tau). \quad (1.17)$$

Нетрудно убедиться, что в рассмотренном примере и сам функционал и его частные производные обладают тем свойством, что при любом малом продолжении процесса их изменения малы вне зависимости от величины  $\dot{\gamma}_k(t)$ , т. е. значения этих функционалов в момент  $t + \Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  совпадают со значениями в момент  $t$ . Это так называемая непрерывность справа, и в дальнейшем будут рассматриваться только такие среды с конечной памятью, которые этим свойством обладают.

Естественно, для практического использования представления (1.16), которое в ряде источников (см., например, [62]) называется цепным правилом, требуется расшифровка конструкций указанных частных производных, и для ряда функционалов такая расшифровка известна.

Предположим, что

$$\Phi[z(t, \tau)] = \Phi[z(t-\tau)] = \Phi[z(\theta)], \quad (1.18)$$

т. е. применительно к функционалу (1.14) выполняется условие

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(t-\tau) = \varphi(\theta), \quad \tau \geq 0,$$

и выделим в  $\Phi$  явно аргумент  $x(t)$ , который в (1.14) отвечает операции интегрирования с переменным верхним пределом

$$\Phi[z(\theta)] = \Psi[x(t), y(\theta)]. \quad (1.19)$$

Функционал  $\Psi$  непрерывен, если выполняется соотношение

$$\Psi[x(t) + dx(t), y(\theta) + \delta y(\theta)] - \Psi[x(t), y(\theta)] \rightarrow 0, \quad (1.20)$$

при  $|dx| + \|\delta y\| \rightarrow 0$ , где  $|dx|$  — модуль вектора  $dx$ ,  $\|\delta y\|$  — норма в пространстве функций  $\delta y(\theta)$ \*

Функционал  $\Psi$  непрерывно дифференцируем, если предыдущее условие можно заменить условием

$$\frac{1}{|dx| + \|\delta y\|} \{ \Psi[x(t) + dx(t), y(\theta) + \delta y(\theta)] - \Psi[x(t), y(\theta)] \} - D\Psi[x(t), y(\theta)] dx(t) - \delta\Psi[x(t), y(\theta), \delta y(\theta)] \rightarrow 0 \quad (1.21)$$

при  $|dx| + \|\delta y\| \rightarrow 0$ . Здесь  $D\Psi[x(t), y(\theta)]$  — непрерывный функционал,  $\delta\Psi[x(t), y(\theta), \delta y(\theta)]$  — непрерывный и линейный относительно  $\delta y(\theta)$ . Очевидно, что  $D\Psi$  — частная производная от  $\Psi$  по  $x$  при фиксированном  $y$

$$D\Psi[x(t), y(\theta)] = \frac{\partial \Psi}{\partial x}[x(t), y(\theta)]. \quad (1.22)$$

В этих условиях и в дополнительном предположении о гладкости функций  $y(\theta)$  (существовании двух производных) Дэй [4] доказал следующее цепное правило:

$$\dot{\Psi} = \Psi_y[y(t), y(\theta)] \dot{y}(t) + \Psi'_y[y(t), y(\theta), \dot{y}(\theta)]. \quad (1.23)$$

Здесь разделение аргументов в функционале  $\Psi$ , отвечающих текущему состоянию и истории, детализировано по сравнению с (1.21), чтобы отразить принадлежность текущего значения к лобой предыстории. Как и выше, дифференцирование в первом члене производится по первому аргументу при фиксированном втором

\* Выполнение условия  $\|\delta y\| \rightarrow 0$  возможно лишь для функционалов  $\Psi$  с затухающей памятью (см., далее, § 5).

(т. е. как частное дифференцирование функций многих переменных).

Функционал  $\Psi_y$  в (1.23) получается из (1.22) простой заменой  $x(t)$  на  $y(t)$ . Вторым член  $\Psi'_y$  представляет здесь обобщенную форму частной производной по времени, обозначенную в (1.16) через  $\Psi_t$ . По сравнению с соответствующим членом в (1.21) вместо неопределенного параметра  $\delta y(\theta)$  вошел вычисляемый член  $y(\theta)$ . Однако структура  $\Psi'_y$ , за исключением линейности по  $y(\theta)$ , остается неясной. Тем не менее уже то, что последний член в (1.23) явным образом не зависит от  $y(t)$ , дает возможность заключить, что производную  $y(t)$  в момент  $t$  можно выбрать произвольным образом, не затрагивая предыстории функций  $y(\theta)$  и  $y(\theta)$ . Следовательно, если в момент  $t$  производятся два продолжения  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , то разница в результате для  $\dot{\Psi}$  будет определяться формулой

$$\Delta \dot{\Psi} = \Psi_y[y(t), y(\theta)] \Delta \dot{y}(t). \quad (1.24)$$

Соотношение в форме (1.16) имеет место (см. [62]) и для функционалов непрерывных, дифференцируемых и обладающих слабой мгновенной реакцией с памятью более общего, чем рассмотренный, вида (см. далее).

Более конструктивным, но менее обоснованным является предложение Вэнга и Боуэна (см. [4]) использовать то обстоятельство, что на каждой фиксированной предыстории  $y(\theta)$  функционал  $\Psi[y(t), y(\theta)]$  превращается в функцию

$$\Psi[y(t), y(\theta)] = \chi(y(t), t).$$

Поэтому

$$\dot{\Psi} = \dot{\chi}(y(t), t) = \frac{\partial \chi}{\partial y}(y(t), t) \dot{y}(t) + \frac{\partial \chi}{\partial t}(y(t), t).$$

## § 2. УСЛОВИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО БАЛАНСА. ЗАМКНУТЫЕ ЦИКЛЫ

Перепишем первое из (1.9) в виде

$$Q^e + Q^* = TS \quad (2.1)$$

и, исключив отсюда с помощью (1.8)  $Q^e$ , получим

$$\dot{U} - W^i + Q^* - T\dot{S} = 0. \quad (2.2)$$

Введем новый термодинамический объект

$$F = U - TS, \quad (2.3)$$

называемый свободной энергией, и преобразуем (2.2) с учетом (1.9) к виду

$$Q^* = W^i - \dot{F} - T\dot{S}, \quad Q^* \geq 0. \quad (2.4)$$

В дальнейшем, несколько вольно, будем называть первое из (2.4) условием термодинамического баланса\*. Заметим, что условие

$$Q^* \geq 0 \text{ или } W^i - \dot{F} - S\dot{T} \geq 0 \quad (2.5)$$

часто называют неравенством диссипации, в связи с тем, что скорость некомпенсированного тепла  $Q^*$  отражает рассеивание энергии или диссипацию.

Как и выше при малых деформациях, будем считать  $F$ ,  $U$  и  $S$  функционалами от независимых аргументов  $\epsilon_{ij}$ ,  $T$ , или, кратко, от  $\epsilon$  и  $T$  (см., например, [62]), и отметим следующее.

В классической термодинамике, где  $U$ ,  $S$ ,  $F$  полагались функциями состояния, понятие замкнутого цикла (см., например, [58]) в принципиальном плане является одним из главных, если не решающим. Собственно, с помощью этого понятия (правда, на примере весьма частного вида сред) выводятся условия (2.1) как следствия положения о невозможности осуществления вечного двигателя второго рода (тепловой машины, выделяющей механическую энергию из тепла одного нагревателя). Общей декларацией классической термодинамики является неизбежность положения, что эвристическую природу имеют лишь циклы, замкнутые по всем внутренним параметрам среды, хотя основные (если не все) результаты, связанные с понятием циклов, получены для сред типа термоупругих, где внутренними параметрами служат некий коэффициент деформации  $\epsilon$  и температура  $T$  или что-то подобное. Уже для среды с ньютоновской вязкостью пригодный в отношении классической термодинамики цикл должен быть замкнут по параметрам  $\epsilon$ ,  $\dot{\epsilon}$ ,  $T$ . Для более сложных сред, например для пластичности, определить конечный набор параметров замыкания весьма трудно, если вообще возможно.

В этом отношении в современной термодинамике представительным объектом для любой среды считается цикл, замкнутый по одному и тому же набору параметров (ситуаций). Так в рамках механики сплошных сред в качестве такого набора можно взять деформации  $\epsilon$  и абсолютную температуру  $T$  (и иногда ее градиент  $T_{,i}$ ). Правда, за такое упрощение приходится расплачиваться некоторой неопределенностью, устранение которой достигается либо на основе анализа свойств среды, либо, если такой анализ по каким-то причинам невозможен, введением нового постулата.

Рассмотрим некоторую тепловую машину с произвольным рабочим телом, получающую в цикле, замкнутом по  $\epsilon$  и  $T$ , от нагревателя тепло  $Q^+$ , отдающую холодильнику тепло  $Q^-$  и выра-

батывающую энергию  $A$ . По определению коэффициент полезного действия (КПД) равен

$$\eta = \frac{A}{Q^+}. \quad (2.6)$$

Очевидно, что для цикла, в котором прирост кинетической энергии мал или равен нулю, на основании (1.1)

$$A = -\bar{W}^i = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV dt. \quad (2.7)$$

Далее используем обозначения

$$\bar{Q}^+ = \int_{t_1}^{t_2} Q^e dt, \quad \bar{Q}^- = - \int_{t_1}^{t_2} Q^e dt, \quad \bar{Q} = \int_{t_1}^{t_2} Q^e dt = \bar{Q}^+ - \bar{Q}^-,$$

где  $t_1$ ,  $t_2$  — начало и конец цикла,  $\bar{Q}$  — общее количество тепла, полученное рабочим телом за цикл.

Поскольку очевидно, что

$$\bar{Q}^+ = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (|Q^e| + Q^e) dt \geq 0,$$

$$\bar{Q}^- = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (|Q^e| - Q^e) dt \geq 0,$$

то справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (|Q^e| + Q^e) \frac{dt}{T} \geq \frac{1}{T_{\max}} \bar{Q}^+, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (|Q^e| - Q^e) \frac{dt}{T} \leq \frac{1}{T_{\min}} \bar{Q}^-.$$

Вычитая второе из первого и используя первый и второй законы термодинамики в виде

$$\bar{Q}^- = \bar{Q}^+ - \Delta U - \bar{W}^i, \quad \Delta S \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{Q^e}{T} dt,$$

где значком  $\Delta$  отмечен прирост соответствующей величины за цикл, получим цепочку неравенств

$$\Delta S \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{Q^e}{T} dt \geq \frac{\bar{Q}^+}{T_{\max}} - \frac{\bar{Q}^-}{T_{\min}} = \frac{\bar{Q}^+}{T_{\max}} - \frac{\bar{Q}^+}{T_{\min}} + \frac{\Delta U - \bar{W}^i}{T_{\min}}.$$

\* Не путать с уравнением баланса энергии — широко распространенным наименованием первого закона термодинамики (1.8).

Отсюда

$$\eta = -\frac{\tilde{W}^i}{\tilde{Q}^+} \leq 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} - \frac{\Delta U - T_{\min} \Delta S}{\tilde{Q}^+} \quad (2.9)$$

Последний член (2.9) можно преобразовать введением свободной энергии. Поскольку в замкнутом цикле  $\Delta T = 0$ , то

$$\Delta U = \Delta(F + ST) = \Delta F + T_2 \Delta S_2 - T_1 \Delta S_1 = T_1 \Delta S + \Delta F,$$

где  $T_1$  — температура начала цикла. Если теперь положить  $T_1 = T_{\min}$ , т. е. за начало цикла считать момент с минимальной температурой, то последний член в (2.9) будет равен  $\Delta F / \tilde{Q}^+$ , а само условие (2.9) принимает вид

$$\eta \leq 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} - \frac{\Delta F}{\tilde{Q}^+} \quad (2.10)$$

Как известно [58], лучшая оценка КПД для упомянутых выше простейших сред представляется двумя первыми членами правой части (2.9) (цикл Карно для совершенного газа)

$$\eta = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} < 1. \quad (2.11)$$

Исторический опыт наблюдений за работой различных тепловых машин не противоречит этой оценке. Следовательно, чтобы не испортить классическую оценку КПД, следовало бы признать, что

$$\Delta F \geq 0. \quad (2.12)$$

Однако для произвольных термодинамических систем такое заключение было бы поспешным. Во-первых, в каком-то смысле тепловой машиной может названа и живая природа (и космическое мироздание). Даже если для таких систем и выполняются первый и второй законы термодинамики в той (функциональной) трактовке, что принимается здесь, утверждать безоговорочно выполнение (2.11), учитывая, например, способность этих систем к самоорганизации, нельзя. Во-вторых, даже для неживой природы и, в частности, для тепловых устройств, сконструированных (или могущих быть сконструированными) человеком, отмеченный выше исторический опыт утверждает несколько меньшее, чем то, что требует классика, а именно: чтобы общий или средний КПД непрерывно работающей тепловой машины, т. е. совершающей достаточно большое количество одинаковых циклов, был меньше единицы, в то время как КПД некоторых отдельных циклов может и не удовлетворять условию (2.11).

Общий или средний КПД естественно определить формулой

$$\tilde{\eta} = -\frac{\sum \tilde{W}_n^i}{\sum \tilde{Q}_n^+} \leq 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} - \frac{\sum \Delta F_n}{\sum \tilde{Q}_n^+}, \quad (2.13)$$

где суммы  $\Sigma$  берутся по номерам циклов  $n$  от 1 до  $N$ , так что выше сформулированное требование выражается условием

$$\tilde{\eta} < 1. \quad (2.14)$$

Это обстоятельство не привлекало особого внимания, пока в термодинамике ограничивались рассмотрением тел «без памяти». Для них все циклы одинаковы по результатам, так что свойства непрерывно работающего устройства вполне определялись свойствами одного цикла. В телах с памятью о предыстории деформирования это не так. Например, уже в первом цикле КПД может превысить единицу, поскольку предшествующей циклу процесс может быть аномальным по накоплению свободной энергии. Так что математической формулировкой результата «исторического опыта» является не условие (2.12), а условие

$$\sum_{n=1}^N \Delta F_n \geq 0, \quad (2.15)$$

где  $N$  — количество циклов, которое должно быть достаточно большим.

Отметим, что в результате сказанного утверждение классической термодинамики о независимости максимального КПД цикла тепловой машины от свойств рабочего тела становится вообще неприемлемым. В некоторых случаях именно свойства этого рабочего тела позволяют оправдать классическое требование (2.11). Так, например, будет для всех совершенных тел, для которых  $\Delta F$  в любом цикле обращается в нуль, и даже для некоторого весьма обширного класса тел с «памятью» при дополнительных условиях относительно вида процессов.

### § 3. УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ В ОДНОРОДНЫХ ПРОЦЕССАХ. ПРОСТЕЙШИЕ СРЕДЫ

Полагая, что параметры  $U, F, S$ , так же как и  $Q^i, Q^*, Q^e$ , обладают свойством аддитивности, т. е. представимы через свои массовые значения в виде

$$U = \int_V \rho u dV, \quad F = \int_V \rho f dV, \quad S = \int_V \rho s dV, \quad Q = \int_V \rho q dV, \quad (3.1)$$

и отмечая, что в силу закона сохранения массы

$$\dot{U} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \frac{d}{dt} \int_M u dM = \int_M \dot{u} dM = \int_V \dot{\rho} u dV,$$

а при малых деформациях, когда  $e_{ij} = \epsilon_{ij}$ ,  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ,

$$W^i = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV,$$



первый закон термодинамики (1.8) перепишем в форме

$$\int_V (\rho \dot{u} - \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \rho q^e) dV = 0,$$

откуда в силу произвольности объема  $V$  следует

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + q^e. \quad (3.2)$$

Аналогичным образом запись второго закона термодинамики (1.9) приобретает вид

$$s = \frac{q^e + q^*}{T}, \quad q^* \geq 0, \quad (3.3)$$

а условие термодинамического баланса и неравенство диссипации —

$$q^* = \omega - \dot{f} - s\dot{T} \geq 0, \quad \omega = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\epsilon}, \quad (3.4)$$

где  $f$  — удельная свободная энергия  $f = u - sT$ . Естественным образом переписывается и неравенство (2.15) для частицы среды

$$\sum_{n=1}^N \Delta f_n \geq 0. \quad (3.5)$$

В дальнейшем нас прежде всего будет интересовать вопрос о том, в какой мере включение в определяющее соотношение тепловых параметров, т. е. расширение механики до термомеханики, позволяет конкретизировать (или отбраковать) вид определяющего соотношения. Надежды на успех в этом деле основаны в первую очередь на том, что указанное расширение предполагает такое, связанное с данным типом определяющего соотношения задание свободной энергии и энтропии, которое уже как минимум должно удовлетворять условию термодинамического баланса\*. Это положение, которым мы в дальнейшем будем постоянно пользоваться, можно назвать принципом термодинамического согласования.

Рассмотрим некоторые модели сред. Простейшая из таких моделей — упругость, а точнее, термоупругость, определяется соотношением, где напряжения  $\sigma$ , деформации  $\epsilon$  и температура  $T$  связаны конечным соотношением

$$\sigma = \sigma^0(\epsilon, T). \quad (3.6)$$

Для замыкания системы разрешающих уравнений требуется задать свободную энергию  $f$ , энтропию  $s$  и, возможно, некомпенсированное тепло  $q^*$ , так чтобы выполнялось условие (3.4).

\* Возможны альтернативные варианты, например задание свободной энергии и некомпенсированного тепла и т. д.

В дальнейшем там, где это возможно (в соотношениях типа функций, как в рассматриваемом случае), будем пользоваться приемом, который можно назвать правилом равноприсутствия [62]: при задании указанных выше термодинамических функций будем считать их зависимыми от того же набора внутренних параметров, что и в определяющем соотношении. Так, для термоупругости положим, что  $f$  и  $s$  определяются конечными соотношениями через деформации и температуру

$$f = f(\epsilon, T), \quad s = s(\epsilon, T). \quad (3.7)$$

Поскольку при этом

$$\dot{f} = f_\epsilon \dot{\epsilon} + f_T \dot{T}, \quad f_\epsilon = \frac{\partial f(\epsilon, T)}{\partial \epsilon}, \quad f_T = \frac{\partial f(\epsilon, T)}{\partial T},$$

то неравенство диссипации можно представить в виде

$$\left( \frac{\sigma}{\rho} - f_\epsilon \right) \dot{\epsilon} - (s + f_T) \dot{T} \geq 0. \quad (3.8)$$

Напомним, что первый член — это свертка тензоров и в координатной форме состоит из шести слагаемых.

Величины в скобках, очевидно, не зависят от  $\epsilon$  и  $T$ , и поэтому при произвольных  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{T}$  неравенство (3.8) может быть выполнено только при условии, что эти скобки равны нулю, т. е. при

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad s = - \frac{\partial f}{\partial T}, \quad (3.9)$$

а поскольку левая часть (3.8) по (3.4) равна  $q^*$ , то одновременно надо потребовать, чтобы

$$q^* = 0. \quad (3.10)$$

Полученный результат означает, что для термоупругого тела напряжения не являются произвольной тензорной функцией деформаций и температуры, а выражаются через последние посредством одной скалярной функции — свободной энергии, так же как и энтропия, и что некомпенсированное тепло или внутренняя диссипация отсутствуют. Тела, обладающие этим последним свойством, принято называть совершенными.

Как видно, уже в простейшем случае неравенство диссипации накладывает довольно сильные ограничения на определяющее соотношение, хотя начальные посылки были весьма неконкретными.

Для термоупругости в силу того, что свободная энергия является функцией (а не функционалом) от  $\epsilon$  и  $T$ , условие (3.5) выполняется автоматически, так как при замкнутом по  $\epsilon$  и  $T$  цикле  $\Delta f_n$  для любого номера цикла обращается в нуль.

Любое реальное тело в той или иной степени обладает свойством упругости. Поэтому свободная энергия, отвечающая свойству упругости, заслуживает особого внимания и детализации. В дальнейшем ее будем обозначать через  $f^0$ , а конкретизация для малых деформаций и слабого изменения температуры, т. е. при условиях

$$|\epsilon| \ll 1, T - T_0 \ll T_0, \quad (3.11)$$

где  $T_0$  — температура начального недеформированного тела, заключается в сохранении в выражении для  $f^0$  только линейных и квадратичных членов. С учетом того что в исходном (естественном) состоянии  $\epsilon = \sigma = 0$ , а  $T = T_0$ , для изотропного тела при сделанных предположениях максимально общим будет задание  $f^0$  в виде [58]

$$f^0 = \frac{\lambda}{2\rho} \epsilon_{(1)}^2 + \frac{\mu}{\rho} \epsilon_{(2)} - \frac{\alpha}{\rho} (3\lambda + 2\mu)(T - T_0)\epsilon_{(1)} - \frac{C_\epsilon}{2T_0} (T - T_0)^2 - s_0^0 (T - T_0) + \text{const.} \quad (3.12)$$

Отсюда на основании (3.9)

$$\sigma_{ij}^0 = \lambda \epsilon_{(1)} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$

$$s^0 = \frac{3\lambda + 2\mu}{\rho} \alpha \epsilon_{(1)} + \frac{C_\epsilon}{T_0} (T - T_0) + s_0^0, \quad (3.13)$$

где  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе,  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения,  $\epsilon_{(1)}, \epsilon_{(2)}$  — первый и второй инварианты тензора малых деформаций,  $s_0^0$  — энтропия в исходном состоянии,  $C_\epsilon$  — материальная константа (теплоемкость при постоянном объеме).

Перейдем теперь к модели простейшей линейной вязкоупругости с определяющим соотношением

$$\sigma = \sigma^0 + \mu_1 \dot{\epsilon}, \quad (3.14)$$

где  $\sigma^0$  определено соотношением (3.13),  $\mu_1$  — коэффициент вязкости. По правилу равноприсутствия

$$f = f(\epsilon, \dot{\epsilon}, T), \quad s = s(\epsilon, \dot{\epsilon}, T). \quad (3.16)$$

В этом случае неравенство диссипации приводится к виду

$$\left( \frac{\sigma^0}{\rho} - f_\epsilon \right) \dot{\epsilon} - (s + f_T) \dot{T} - f_{\dot{\epsilon}} \dot{\epsilon} + \frac{\mu_1}{\rho} \dot{\epsilon}^2 \geq 0. \quad (3.15)$$

Во-первых, коэффициент при  $\dot{\epsilon}$  для удовлетворения этого неравенства должен быть равным нулю, ибо остальные члены не зависят от  $\dot{\epsilon}$ , а последние произвольны. Значит, на самом деле  $f$

не зависит от  $\dot{\epsilon}$ \*. Далее поскольку (3.15) должно выполняться при любых  $\dot{\epsilon}$  и, в частности, как угодно малых, то (3.15) должно выполняться и при отброшенном последнем члене. Остается удовлетворить неравенство

$$\left( \frac{\sigma^0}{\rho} - f_\epsilon \right) \dot{\epsilon} - (s + f_T) \dot{T} \geq 0.$$

Поскольку  $f$  и  $\sigma^0$  не зависят от  $\dot{\epsilon}$ , а  $\sigma^0, f$  и  $s$  не зависят от  $T$ , последнее неравенство можно удовлетворить лишь требованием равенства нулю обеих скобок.

$$\sigma_{ij}^0 = \rho \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad s = - \frac{\partial f}{\partial T}, \quad (3.16)$$

$$f = f^0(\epsilon, T), \quad s = s^0(\epsilon, T).$$

При этом так же, как и в упругости, условие (3.5) выполняется.

Возвращаясь к (3.15), замечаем, что в левой части этого неравенства на основании (3.16) выпали все члены, за исключением последнего, который, как это следует из уравнения термодинамического баланса, представляет скорость некомпенсированного тепла. Следовательно, при линейной вязкости

$$q^* = \frac{\mu_1}{\rho} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \mu_1 \geq 0. \quad (3.17)$$

Отметим, что, как видно, для линейной вязкости свободная энергия и энтропия определяются как для упругого тела. Это положение, обычно принимаемое как гипотеза Гиббса, здесь получено как простое следствие принципа термодинамического согласования.

В связи с этим важным положением интересно отметить следующее обстоятельство. В упомянутой в § 2 одинаковости циклов при формулировке общего КПД тепловой машины имелась, очевидно, в виду одинаковая геометрия циклов в пространстве  $\epsilon, T$ , что же касается скорости прохождения таких циклов, то они в рамках выполнимости однородного процесса могут быть произвольны. И если в термоупругости в связи с выполнением условия (3.5) вопросов не возникало, то при линейной вязкости такой во-

\* Используемое до этого места правило равноприсутствия есть лишь максима, которая покрывает наше незнание вводимого объекта. Если же представляется возможность упростить объект для достижения поставленной цели, то в рамках принципа термодинамического согласования это оправдано. Кстати, рассматриваемый пример обнаруживает различие в степени определенности деформационных и температурных членов неравенства диссипации. Поэтому уравнение в правах  $\epsilon$  и  $T$  (оперирование объединенным множеством  $\lambda = \{\epsilon, T\}$  и соответствующими обобщенными силами  $\tau = \{\sigma, s\}$  (натяжениями), как это предлагается, например в [62]) хотя и упрощает внешний вид формул, но небезопасно в отношении скрытого протаскивания дополнительных предположений.

прос мог бы возникнуть. Однако то обстоятельство, что, несмотря на зависимость от  $\epsilon$  свободная энергия, как и в упругости, есть функция только  $\epsilon$  и  $T$ , условие (3.5) для  $N$  циклов, как и условие  $\Delta f_n \geq 0$ , для каждого отдельного цикла выполняется.

#### § 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Следуя вышенамеченному ряду повышения порядка вводимых в определяющее соотношение производных по времени от тензора деформаций, рассмотрим гипотетическое тело\*, определяющим соотношением для которого является

$$\sigma = \sigma^0 + \mu_1 \dot{\epsilon} + \mu_2 \ddot{\epsilon} + \mu_3 \dddot{\epsilon}, \quad (4.1)$$

где  $\sigma^0$  определено формулой (3.13),  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  — материальные константы.

Для нужного задания термодинамических параметров полезны наводящие соображения, следующие из формы представления члена  $\sigma \dot{\epsilon}$ , входящего в уравнение термодинамического баланса. Представим этот член на основании (4.1) в форме

$$\sigma \dot{\epsilon} = \sigma^0 \dot{\epsilon} + \frac{1}{2} [\mu_2 \dot{\epsilon}^2 + \mu_3 (\dot{\epsilon}^2)'] + \mu_1 \dot{\epsilon}^2 - \mu_3 \ddot{\epsilon}^2.$$

Теперь очевидно, что к удовлетворению неравенства диссипации может привести задание

$$f = f^0 + f^*, \quad f^* = \frac{1}{2\rho} [\mu_2 \dot{\epsilon}^2 + \mu_3 (\dot{\epsilon}^2)']. \quad (4.2)$$

Внося эти представления в (2.4), убеждаемся, что принцип термодинамического согласования действительно выполняется, если принять

$$s = -\frac{\partial f^0}{\partial T}, \quad q^* = \frac{1}{\rho} (\mu_1 \dot{\epsilon}^2 - \mu_3 \ddot{\epsilon}^2). \quad (4.3)$$

В силу независимости  $\epsilon$  и  $\dot{\epsilon}$  из последнего следует, что

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_3 \leq 0. \quad (4.4)$$

Нетрудно проверить, что эти результаты в точности следуют и из прямого анализа неравенства диссипации по типу того, что был проведен выше для линейной вязкости.

Условие (3.5) о неотрицательности общего прироста свободной энергии в  $N$  замкнутых по  $\epsilon$  и  $T$  циклах в данном случае совпадает с подобным требованием для отдельно взятого цикла

$$\mu_2 \Delta (\dot{\epsilon}^2) + 2\mu_3 \Delta (\dot{\epsilon} \ddot{\epsilon}) \geq 0. \quad (4.5)$$

\* Материально-застойное по Колеману (см., [4]).

Поскольку никаких условий на  $\epsilon$  и  $\dot{\epsilon}$  в таком цикле не накладывается, то приросты величин в скобках независимы и произвольны как по величине, так и по знаку, а это означает, что неравенство можно удовлетворить только требованием

$$\mu_2 = \mu_3 = 0. \quad (4.6)$$

При неудовлетворении этих условий тепловая машина с рабочим телом, следующим соотношению (4.1), могла бы выдавать КПД больший единицы. Заметим, что в классической термодинамике в силу тождества  $\Delta f = 0$  условия (4.6) отсутствуют и даже нет ограничения на знак  $\mu_2$ . Имеют место лишь условия (4.4), которых недостаточно, чтобы обезопасить теорию от парадоксов, один из которых сейчас будет продемонстрирован.

Рассмотрим колебания массы  $M$ , закрепленной к неподвижному основанию посредством невесомого стержня из материала (4.1).

Считаем стержень теплоизолированным и процесс, в нем происходящий, однородным.

Однородный процесс в теплоизолированном стержне является, очевидно, адиабатическим, для которого  $q^e = 0$ , и по первому закону термодинамики (3.2), с учетом того, что  $u = f + sT$ ,

$$\dot{u} = \dot{f} + s\dot{T} + \dot{s}T = \frac{1}{\rho} \sigma_1 \dot{\epsilon}_1,$$

где  $\sigma_1$  и  $\epsilon_1$  — осевые компоненты напряжения и деформации. Составления этого равенства и уравнения термодинамического баланса (3.4) приводит к заключению, что в данном процессе

$$T\dot{s} = q^*. \quad (4.7)$$

На основании формул (4.3) и задания  $f^0$  в виде, следующем из (3.12) в одномерном случае,

$$q^0 = \frac{E}{2\rho} \dot{\epsilon}_1^2 - \frac{1}{\rho} E\alpha(T - T_0)\epsilon_1 - \frac{C_\epsilon}{2T_0} (T - T_0)^2 - s_0^0(T - T_0) + \text{const}, \quad (4.8)$$

где  $E$  — модуль Юнга, уравнение (4.7) приводится к виду

$$E\alpha T_0 \dot{\epsilon}_1 + \mu_1 \dot{\epsilon}_1^2 - \mu_3 \ddot{\epsilon}_1^2 + C_\epsilon \rho \dot{T} = 0. \quad (4.9)$$

В линейном приближении вторым и третьим членом в этом уравнении можно пренебречь и таким образом получить

$$T - T_0 = -\frac{E\alpha T_0}{\rho C_\epsilon}, \quad (4.10)$$

где использовано условие, что в начальный момент при  $\epsilon = 0$  температура  $T = T_0$ .

Вспомним теперь, что  $\sigma_1^0 = \rho \partial f^0 / \partial \epsilon_1$ , и, пользуясь выражением (4.2) и формулой (4.10), на основании (4.1) получим

$$\sigma_1 = E_{ад} \epsilon_1 + \mu_1 \dot{\epsilon}_2 + \mu_2 \ddot{\epsilon}_2 + \mu_3 \epsilon_1, \quad (4.11)$$

где

$$E_{ад} = E \left( 1 + \frac{E \alpha^2 T_0}{\rho C_\epsilon} \right) \quad (4.12)$$

и носит название адиабатического модуля Юнга, в то время как  $E$  является модулем изотермическим.

Внося (4.11) в уравнение движения для описанной выше конструкции

$$M \ddot{u} + F \sigma_1 = 0, \quad (4.13)$$

где  $u$  — перемещение конца стержня,  $F$  — площадь его поперечного сечения, и полагая  $\epsilon_1 = u/l$ , получим

$$\mu_3 \ddot{u} + (\mu_2 + m) \dot{u} + \mu_1 u + E_{ад} u = 0, \quad (4.14)$$

где

$$m = \frac{Ml}{F}. \quad (4.15)$$

Очевидно, что  $E_{ад} > 0$ , для  $\mu_1, \mu_3$  выполняются условия (4.4), и выбором параметров  $l, F, M$  всегда можно добиться, чтобы  $\mu_2 + m \geq 0$ . А тогда характеристическое уравнение для (4.14) обязательно имеет один действительный и положительный корень. Нетрудно также установить (например, на основании формулы Кардана), что, во всяком случае при выполнении условия

$$\mu_2 + m \geq \frac{1}{4} \frac{\mu_1^2}{E_{ад}}, \quad (4.16)$$

остальные два корня будут комплексно-сопряженными. Следовательно, при нужном выборе параметров  $M, F, l$  решение уравнения (4.14) представляется в виде

$$u = c_1 e^{\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} (c_2 \sin \lambda_3 t + c_3 \cos \lambda_3 t), \quad (4.17)$$

где  $\lambda_i$  — действительные,  $\lambda_1 > 0$ .

В качестве начальных условий в рамках модели (4.1) требуется задание не только  $u, \dot{u}$ , но и  $u$ , например, если задать

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0, \quad \ddot{u} = v, \quad (4.18)$$

то, как легко проверить,

$$c_1 = \frac{2\lambda_2 v}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_3^2}. \quad (4.19)$$

Вырожденный случай  $\lambda_2 = 0$  исключается вне зависимости от (4.16) выбором параметров модели. А отсюда следует, что реше-

ние (4.17) содержит экспоненциально убывающий от положения равновесия член при как угодно малой начальной скорости  $v$ .

Подводя итог проведенному исследованию, связанному с соотношением (4.1), надо заключить, что с позиций термодинамики соотношения такого типа недопустимы и, по-видимому, в определяющие соотношения дифференциального типа, разрешенные относительно напряжений, вводить производные от деформаций по времени выше первого порядка нельзя\*.

## § 5. МАТЕРИАЛЫ СО СЛАБОЙ МГНОВЕННОЙ РЕАКЦИЕЙ

Рассмотренные выше примеры материалов не обладали памятью о том, что с ними произошло в конечно отдаленном прошлом. Вязкие и вообще материалы дифференциального типа обладают лишь памятью о бесконечно близком прошлом (инфинитезимальная память), а упругие не обладают даже такой памятью.

Перейдем теперь к рассмотрению материалов с конечным запоминанием предыстории. Возвращаясь к операторной форме записи термодинамических параметров, представим

$$\sigma = \sigma[\epsilon, T], \quad f = f[\epsilon, T], \quad (5.1)$$

$$s = s[\epsilon, T], \quad q^* = q^*[\epsilon, T],$$

где квадратные скобки, как это было принято ранее, означают операторную зависимость.

Будем полагать, что все рассматриваемые в дальнейшем функционалы, включая и (5.1), обладают свойством непрерывности справа (см. конец § 1), а для свободной энергии выполняется цепное правило (1.16)

$$\dot{f}(t) = f_\epsilon[\epsilon, T] \dot{\epsilon}(t) + f_T[\epsilon, T] \dot{T}(t) + \dot{f}[\epsilon, T]. \quad (5.2)$$

Напомним, что поскольку непрерывность справа функционала означает его слабую зависимость от изменения в текущий момент  $\epsilon$  и  $T$ , т. е. от  $\dot{\epsilon}$  и  $\dot{T}$ , то материалы, описываемые такими функционалами, естественно назвать материалами со слабой мгновенной реакцией\*\*.

Как мы убедимся в дальнейшем, класс таких материалов достаточно широк и его простейшим представителем являются термоупругие материалы. Однако все материалы того дифференциального типа, которые были рассмотрены выше, в этот класс не попадают. Можно предвидеть, что в класс материалов со слабой

\* Это, кстати, переключается с принятым в теоретической механике положением о зависимости сил только от перемещений и их скоростей.

\*\* Известный термин «мгновенно упругая реакция» [62] может явиться причиной незаконного сужения класса материалов, для которых будут справедливы результаты, основанные на (5.2).

мгновенной реакцией попадут все материалы, для определяющего соотношения которых выполняется условие

$$\dot{\sigma}(t) = a\dot{\epsilon}(t) + b\dot{T}(t), \quad (5.3)$$

где  $a[\epsilon, T]$ ,  $b[\epsilon, T]$  — не зависящие от  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{T}$  коэффициенты (тензоры, или скаляры).

Безотносительно к конкретной структуре определяющего соотношения на основании (5.2) для таких материалов неравенство диссипации (3.4) приводится к виду

$$\left(\frac{\sigma}{\rho} - f_{\epsilon}[\epsilon, T]\right)\dot{\epsilon}(t) - (s + f_T[\epsilon, T])\dot{T}(t) - f_t[\epsilon, T] = q^* \geq 0. \quad (5.4)$$

Отсюда в силу независимости коэффициентов при  $\dot{\epsilon}$  и  $\dot{T}$ , а также последнего члена левой части от самих  $\epsilon$  и  $T$  вытекает, что выражения в скобках должны быть равны нулю, а последний член слева в силу этого должен быть с обратным знаком и равен скорости некомпенсированного тепла. Таким образом, условие термодинамического согласования приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho f_{\epsilon}[\epsilon, T], \\ s &= -f_T[\epsilon, T], \\ q^* &= -f_t[\epsilon, T]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Как видно, для материалов со слабой мгновенной реакцией текущие значения напряжений и энтропии полностью определяются заданием свободной энергии соотношениями потенциального типа. Кроме того, легко заметить, что полная производная по времени от свободной энергии представляется в виде

$$\dot{f} = f_{\epsilon}\dot{\epsilon} + f_T\dot{T} - q^*, \quad (5.6)$$

так что если  $\dot{\epsilon} = \dot{T} = 0$  на каком-либо отрезке процесса, то

$$\dot{f} \leq 0, \quad (5.7)$$

т. е. в процессе-константе, в котором текущие значения  $\epsilon$  и  $T$  не изменяются, свободная энергия не возрастает. Отметим, что условие (5.7), как и понятие о процессе-константе, содержательно только для материалов, свойства которых зависят от масштаба времени. Для упругих и пластических тел при фиксированных  $\epsilon$  и  $T$  никакого процесса нет, а условие (5.7) вырождается в очевидное  $\dot{f} = 0$ .

Если весь процесс, происходящий с материалом, был процессом-константой (вечный процесс-константа), то во всей предыстории выполнялось условие (5.7) и предельное, при  $t \rightarrow \infty$ , значение  $f$  будет равно

$$f_0 = f(t)|_{t \rightarrow \infty} = \min f(t). \quad (5.8)$$

Ограничиваясь рассмотрением материалов, для которых выполнено условие (5.7)\*, мы вдобавок к этому наложим еще и дополнительное условие на свойства материала — затухающую память, состоящее в требовании, чтобы значение  $f_0$  достигалось не только вечным процессом-константой, но и в продолжении произвольного процесса процессом-константой начиная с  $t = t_0$ .

Отсюда немедленно следует [62] (теорема Колемана), что в текущий момент произвольного процесса значение свободной энергии не может быть меньше предельного  $f_0$ . Действительно, если бы в момент  $t$  произвольного процесса это было не так, то в продолжении процессом-константой, где выполняется условие (5.7), достигнуть значения  $f_0$  было бы невозможно.

Таким образом, для материала со слабой мгновенной реакцией, удовлетворяющего указанному выше условию затухающей памяти, из множества процессов, оканчивающихся в состоянии  $\epsilon, T$ , вечному процессу-константе отвечает минимальное значение  $f$ .

Следовательно, если теперь продолжить вечный процесс-константу каким-либо замкнутым циклом по  $\epsilon$  и  $T$ , то прирост свободной энергии в нем будет неотрицательным

$$\Delta f \geq 0, \quad (5.9)$$

так как указанный составной процесс — это один из возможных произвольных процессов, кончающихся в той же точке, что и вечный процесс-константа.

Очевидно, что приведенная аргументация действует и при любом количестве повторов указанных циклов, так что для материалов с затухающей памятью выполняется как классическое требование для КПД ( $\eta < 1$ ), так и требование (2.14)  $\bar{\eta} < 1$ .

Из условия (5.9) для изотермического цикла, когда  $\dot{T} = 0$ , и неравенства диссипации (3.4) следует, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \sigma \dot{\epsilon} dt \geq 0, \quad (5.10)$$

где  $t_1, t_2$  — время начала и конца замкнутого по  $\epsilon$  цикла. Это означает, что в изотермическом цикле, продолжающем вечный процесс-константу, работа внутренних сил неотрицательна.

Ценность полученных только что результатов, относящихся к широкому классу материалов (ползучесть, наследственность и др.), может показаться несколько ослабленной наличием среди необходимых условий вечного процесса-константы, проверить выполнение которого на всем бесконечном отрезке предыстории невозможно. Однако наложение указанного выше условия о затухающей памяти позволяет заменить вечный процесс-константу процессом, в котором на малом отрезке времени, вблизи  $t = 0$  (начало испытаний), достигаются нужные значения  $\epsilon$  и  $T$ , поддер-

\* Случай бесконечного падения величины свободной энергии практического значения не имеет.

живаемые далее постоянными. Если такой процесс-константа под- держивается достаточно долго, то материал забудет не только изменение  $\epsilon$ ,  $T$  вблизи  $t=0$ , но и всю предысторию до  $t=0$ .

Характерным примером сред, удовлетворяющим всем высказанным выше требованиям, в том числе и нетривиальному процес- су-константе, является так называемая наследственная упру- гость\* с определяющим соотношением типа Больцмана

$$S = \int_0^t R(t-\tau) d\mathcal{E}(\tau), \quad (5.11)$$

где в предположении об изотропии среды ядро  $R$  — скалярная, монотонно убывающая функция, удовлетворяющая условиям

$$R'(\theta) < 0, \quad R(0) = 2G, \quad \int_0^\infty R^2(\theta) d\theta \ll M < \infty; \quad (5.12)$$

$S$  и  $\mathcal{E}$  — девиаторы напряжений и деформаций,  $G$  — модуль упру- гого сдвига.

Нужно отметить, что множество всех предысторий деформаций и температуры образует гильбертово пространство, а по теореме Рисса [29], каждый ограниченный линейный оператор, имитирую- щий здесь какую-либо затухающую память, может быть представ- лен в форме (5.11).

Функция  $R$  может зависеть от температуры, но, чтобы не за- темнять существа дела, мы этот аргумент явным образом указы- вать не будем.

Зададим свободную энергию в виде [14]

$$f[\mathcal{E}, T] = \frac{1}{2\rho} \int_0^t \int_0^t P(t-\tau_1, t-\tau_2) d\mathcal{E}(\tau_1) d\mathcal{E}(\tau_2). \quad (5.13)$$

Очевидно, что в данном случае аналогично (1.17)

$$f_{\mathcal{E}} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} f[\mathcal{E}, t] = \frac{1}{2\rho} \int_0^t P(t-\tau_1, 0) d\mathcal{E}(\tau_1) + \\ + \frac{1}{2\rho} \int_0^t P(0, t-\tau_2) d\mathcal{E}(\tau_2) = \frac{1}{2\rho} \int_0^t [P(t-\tau, 0) + P(0, t-\tau)] d\mathcal{E}(\tau), \quad (5.14)$$

$$f_t = \frac{\partial}{\partial t} f[\mathcal{E}, t] = \frac{1}{2\rho} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} P(t-\tau_1, t-\tau_2) d\mathcal{E}(\tau_1) d\mathcal{E}(\tau_2).$$

В силу условий (5.5) из сравнения первого из них с (5.11) для функции  $P(x, y)$  получим уравнение

$$P(\xi, 0) + P(0, \xi) = 2R(\xi), \quad (5.15)$$

очевидным решением которого является

$$P(x, y) = \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(x) Q_{\alpha}(y), \\ \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(0) Q_{\alpha}(\xi) = R(\xi), \quad (5.16)$$

где не все  $Q_{\alpha}(0)$  обращаются в нуль.

В частности, можно положить

$$P(x, y) = Q(x)Q(y), \quad Q(\theta) = \frac{R(\theta)}{\sqrt{R(0)}} = \frac{R(\theta)}{\sqrt{2G}}. \quad (5.17)$$

Как видно, в этом случае свободная энергия и скорость неком- пенсированного тепла на основании (5.5) и (5.13) будут

$$f = \frac{1}{4\rho G} \left( \int_0^t R(t-\tau) d\mathcal{E}(\tau) \right)^2, \quad (5.18)$$

$$q^* = -\frac{1}{2\rho G} \int_0^t R(t-\tau) d\mathcal{E}(\tau) \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} R(t-\tau) d\mathcal{E}(\tau),$$

так что требование  $q^* \geq 0$  в силу первого из условий (5.12) выпол- няется. Этот результат сохраняется и для представления (5.16).

Отметим, наконец, среди обширных исследований по материа- лам с затухающей памятью один результат [75], касающийся ап- проксимации функционала типа (5.11) для замедленных движе- ний, что в математическом плане отвечает замене  $t \rightarrow \lambda t$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Этот результат состоит в том, что при таких движениях функцио- нал можно аппроксимировать определяющим соотношением диф- ференциального типа порядка  $n$  с ошибкой  $o(\lambda^n)$  (теорема Коле- мана — Нолла). В математическом плане это не вызывает опасе- ний. Но в плане физическом — это перевод соотношений из клас- са со слабой мгновенной реакцией в класс, этим свойством не об- ладающий и для которого, как это было показано в § 4, уже по- вышение порядка за  $n=1$  представляется недопустимым.

## § 6. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Упругопластическая среда по ряду качеств резко отлича- ется от рассмотренных выше. Во-первых, поведение такой среды инвариантно по отношению к масштабу времени: результат про-

\* Широко распространенный термин «линейная вязкоупругость», по крайней мере в принятой здесь классификации, непримлем, поскольку допускает опре- деляющие соотношения дифференциального типа.

цесса деформирования, геометрия которого фиксирована в пространстве деформаций, не зависит от скорости проведения процесса. Следовательно, для таких тел, как уже отмечалось, содержательность понятия процесса-константы теряется. Во-вторых, в связи с концепцией предельных поверхностей реакция на изменение направления процесса является специфической, а именно: коэффициенты  $a$  и  $b$  в соотношении типа (5.3) уже нельзя считать независимыми от  $\varepsilon$  ( $\delta\varepsilon$ ),  $T$  ( $\delta T$ ), как это видно, например, из формулы (4.23) гл. IV.

Однако несомненно, что пластичность — это идеализация свойств тел, обладающих свойством слабой мгновенной реакции. Малым изменением деформации нельзя вызывать большое изменение напряжений, и поэтому возможна разработка, обобщающая для пластичности результаты, полученные выше. Так, например, для изотермических процессов и сценарий, и роли, и результат представляются довольно очевидными. В основу действия надо положить сравнение, например, свободной энергии для пары процессов, один из которых максимально прост. А это (вместо процесса-константы) лучевой процесс из первоначально изотропного недеформированного состояния. По сравнению с другими процессами из этого же состояния он должен обладать экстремальными свойствами, и довольно трудно себе представить, что на нем свободная энергия не будет минимальной. А тогда для любого замкнутого по  $\varepsilon$  цикла, приведенного из конца указанного лучевого процесса, будет выполнено условие

$$\Delta f \geq 0. \quad (6.1)$$

Сложнее обстоит дело с выводом формул типа (5.5). Но мы не станем останавливаться на этом вопросе, поскольку и то, что можно здесь получить для «вязких» сред в отношении целей конкретизации формы определяющих соотношений, недостаточно и требует введения частных и разноплановых предположений\*. На успех в этой проблеме, скорее, надо рассчитывать, ориентируясь на следствия, вытекающие именно из поведения материала в циклах. Идея эта появилась давно, и первое ее математическое оформление Друккером [76] (см. гл. IV) преподносилось как гипотеза термодинамического толка, хотя затем и сам Друккер [6], и его последователи от такой трактовки отказались, по-видимому, из-за того, что «работа по Друккеру» не находила себе места среди обычных термодинамических объектов.

Но как бы там ни было, сейчас главным для нас будет то, что все рассмотренные до сих пор примеры сред либо удовлетворяют условию (6.1), либо благодаря ему становятся термодинамически допустимыми, как в примере § 4. Правда, там, где удастся доказать выполнимость (6.1), накладываются требования на вид процесса, предшествовавшего циклированию, и от этого ограничения

хотелось бы избавиться. Конечно, как это уже отмечалось в § 2, нельзя ожидать, что при циклировании из конца произвольного процесса в первом же цикле условие (6.1) будет обязательно выполняться, ибо в противном случае может быть нарушено условие (2.14), гарантирующее невозможность создания вечного двигателя второго рода с рабочим телом, свойства которого определяются лишь  $\varepsilon$  и  $T$ .

Теперь становится ясно, что для снятия ограничений на вид процесса, предшествовавшего циклированию, надо заменить условие (6.1) на условие (3.5). И хотя это последнее, а именно

$$\sum_{n=1}^N \Delta f_n \geq 0, \quad (6.2)$$

и является прямым следствием требования (2.14), и, надеемся, надежно подготовлено проведенным выше анализом свойств тел со слабой мгновенной реакцией, его, строго говоря, надо признать независимым постулатом термодинамики. Принятие в качестве такового (6.2) и есть та расплата за простоту устройства цикла тепловой машины, о которой предупреждалось в § 2.

Эффективность использования условия (6.2) для упрочняющей упругопластической среды сейчас будет продемонстрирована в предположении изотермичности процессов. Концепция предельных поверхностей, введенная в гл. IV, применительно к пространству деформаций означает существование в любой момент деформирования поверхности

$$\psi(\varepsilon, N^p) = 0, \quad (6.3)$$

ограничивающей все состояния, которые могут быть достигнуты из данного чисто упругим деформированием — пассивным процессом. В таком процессе операторы  $N^p$ , отражающие память о предыстории деформирования, остаются неизменными, а вместе с ними неизменна и форма поверхности (6.3). Выход состояния вне этой поверхности может быть совершен лишь активным процессом, сопровождающимся необратимой деформацией, изменением операторов  $N^p$  и самой предельной поверхности. Очевидно, что на любом отрезке активного процесса мгновенное состояние  $\varepsilon$  принадлежит изменяющейся (текущей) предельной поверхности и из любого такого состояния по целому пучку направлений можно произвести пассивный процесс — упругую разгрузку.

Рассмотрим процесс деформирования, состоящий из произвольного деформирования в состояние  $A$ , которому отвечает некоторое положение предельной поверхности  $\psi_A = 0$  (рис. 5.1), и последующего циклирования по замкнутому контуру  $ABCD A$ , включающему малый выход  $BC$  за пределы указанной выше поверхности. Этот малый выход изменяет предельную поверхность, отодвигает ее в новое положение  $\psi_C = 0$ , так что последующее циклирование по  $ABCD A$  будет проходить уже по чисто упругому закону, если, конечно, размах отрезка  $AB$  не слишком велик по срав-

\* В какой-то мере со спецификой этой проблемы можно ознакомиться по книге [58].

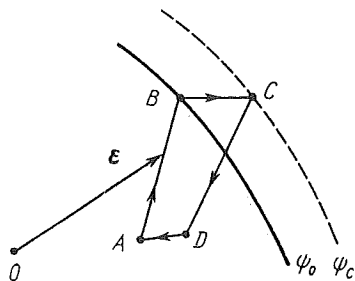


Рис. 5.1

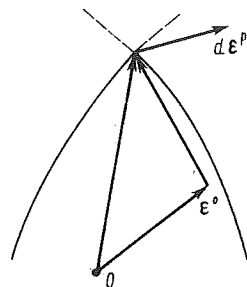


Рис. 5.2

нению, например, с расстоянием  $OA$  от исходного недеформированного состояния  $O$  до начальной точки  $A$  циклирования, а отрезок  $AD$  мал в той же мере, что и  $BC$ . Таким образом, для принятой формы цикла условие (6.2) сводится к условию (5.1) для первого цикла, а это с учетом изотермичности на основании неравенства диссипации (3.4) сводится к условию (5.10), которое для упругопластической среды ввиду инвариантности по отношению к масштабу времени удобнее записать в виде

$$\oint_{\epsilon} \sigma d\epsilon \geq 0. \quad (6.4)$$

Это условие совпадает с тем, что под наименованием постулата пластичности было предложено Ильюшиным [12], и, как теперь ясно, является прямым следствием условия (6.2) и, следовательно, термодинамики.

Возвращаясь к конкретному циклу  $ABCD$ , определим положение точки  $D$ , как состояние деформации, в котором напряжения оказываются равными тем, что были в начале цикла, т. е. так, чтобы процесс  $ABCD$  был замкнут по напряжениям. Очевидно, что невязка в деформациях в точках  $D$  и  $A$  связана только с той неупругой, т. е. пластической, деформацией, что была накоплена на отрезке  $BC$ . Если бы этой пластической деформации не было, то точки  $A$  и  $D$  совпали бы, и цикл, замкнутый по деформациям, был бы циклом, замкнутым по напряжениям. Следовательно, при принятом определении точки  $D$  требования об одинаковой мере малости отрезков  $DA$  и  $BC$  выполняются.

Представляя полную деформацию как сумму упругой  $\epsilon^e$  и пластической  $\epsilon^p$  частей

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p, \quad \epsilon^e = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \sigma = 2\Phi(\sigma), \quad (6.5)$$

где  $\Phi$  — упругий квадратичный потенциал, отвечающий линейной и изотропной связи  $\epsilon^e$  и  $\sigma$ , запишем условие (6.4) в виде

$$\oint_{\epsilon} \sigma d\epsilon = \int_{ABCD} \sigma d\epsilon = \int_{BC} \sigma d\epsilon^p + \int_{ABCD} \sigma d\epsilon^e + \int_{DA} \sigma d\epsilon^e \geq 0. \quad (6.6)$$

Но в силу (6.5)

$$\int_{ABCD} \sigma d\epsilon^e = \oint_{\sigma} d\Phi(\sigma) = 0, \quad (6.7)$$

а оставшиеся члены в (6.6) при малом  $BC$  (и, следовательно,  $DA$ ) по теореме о среднем можем представить в виде

$$\sigma_B^C \int_{BC} d\epsilon^p + \sigma_D^A \int_{DA} h\epsilon^e = \sigma_B^C \delta\epsilon^p + \sigma_D^A \delta\epsilon^e, \quad (6.8)$$

где  $\sigma_B^C$ ,  $\sigma_D^A$  суть некоторое среднее значение напряжений на отрезках  $BC$  и  $DA$  соответственно. Далее, в силу замкнутости цикла  $ABCD$  по деформациям должно быть

$$\delta\epsilon^e = -\delta\epsilon^p. \quad (6.9)$$

Следовательно, условие (6.4) для малых отрезков  $BC$  приводится к виду

$$(\sigma_B^C - \sigma_D^A) \delta\epsilon^p \geq 0, \quad (6.10)$$

а для бесконечно малых выходов за исходную предельную поверхность  $\psi_0 = 0$  (при  $BC \rightarrow 0$ ) это неравенство можно представить в более общей форме:

$$(\sigma - \sigma^0) d\epsilon^p \geq 0, \quad (6.11)$$

где  $\sigma$  — напряжения в произвольной точке предельной поверхности,  $d\epsilon^p$  — бесконечно малый прирост пластической деформации при бесконечно малом активном продолжении (догрузке) из этого состояния, а  $\sigma^0$  — произвольное напряжение внутри или на самой предельной поверхности. Таким образом, все входящие в неравенство (6.11) параметры, по существу, независимы, так как то малое, что связывает  $\sigma$  с  $d\epsilon^p$ , состоит лишь в указании точки ( $B$ ), из которой произведена догрузка, и роль такой указки вместо параметра  $\sigma$  с тем же успехом может выполнять параметр  $\epsilon$  [25]. А это означает, что неравенство (6.11) может быть представлено и в форме

$$(\epsilon - \epsilon^0) d\epsilon^p \geq 0, \quad (6.12)$$

где  $\epsilon$  — деформация в произвольной точке предельной поверхности,  $d\epsilon^p$  — результат догрузки из этой точки, а  $\epsilon^0$  — произвольное деформированное состояние внутри или на самой предельной поверхности.

Из неравенства (6.12) следует, что: а) текущая предельная поверхность не вогнута; б) в точке гладкости предельной поверхности вектор  $d\epsilon^p$  нормален к этой поверхности; в) в сингулярной точке  $d\epsilon^p$  лежит внутри конуса крайних нормалей к ней. Все эти важные положения хорошо известны и впервые получены Друккером в упомянутой выше работе, правда применительно к пространству напряжений, что, как будет видно несколько ниже, не меняет существа дела.



Указанные выше положения легко доказываются от противного. Например, пусть не выполняется пункт в), т. е. вектор  $d\varepsilon^p$  лежит вне конуса крайних нормалей (рис. 5.2). Тогда обязательно найдется такая точка  $\varepsilon^0$ , что скалярное произведение векторов  $\varepsilon - \varepsilon_0$  и  $d\varepsilon^p$  будет отрицательным, что противоречит (6.12). В силу того что внутри предельной поверхности действуют законы упругости, очевидно, что каждой предельной поверхности в пространстве деформаций отвечает единственная предельная поверхность

$$\varphi(\sigma, M^p) = 0 \quad (6.13)$$

в пространстве напряжений, за которой закрепилось наименование поверхности нагружения или, иногда, поверхности текучести. Значение оператора  $M^p$  легко восстанавливается по значениям оператора  $N^p$  в (6.3). Естественно, что все сказанное выше о свойствах поверхности  $\varphi = 0$  и ее связи с вектором  $d\varepsilon^p$  теперь уже на основании неравенства (6.11) полностью переносится на поверхность нагружения  $\varphi = 0$  и ее связь с  $d\varepsilon^p$ .

Для гладких предельных поверхностей из пункта б) следует, что

$$d\varepsilon^p = d\alpha \operatorname{grad} \varphi, \quad d\varepsilon^p = d\beta \operatorname{grad} \psi, \quad (6.14)$$

где градиенты берутся при фиксированных операторах памяти в представлениях для  $\varphi$  и  $\psi$ . Соотношения (6.14) выражают знаменитый закон градиентальности в регулярной пластичности. Если теперь воспользоваться тем обстоятельством, что малая догрузка вызывает малое изменение предельной поверхности, что является частным проявлением свойства слабой мгновенной реакции и что ранее было предложено в виде гипотезы в работе [89], то соотношения (6.14) дают возможность полностью связать приращение напряжений и деформаций заданием одной скалярной функции  $\varphi$  или  $\psi$ . Такие соотношения называются ассоциированными законами (см. гл. IV).

Пусть, например, уравнение текущей предельной поверхности в пространстве деформаций представляется в виде

$$\psi(\varepsilon, \varepsilon^p) = 0, \quad (6.15)$$

т. е. оператор  $N^p$  представляет набор  $\varepsilon_{ij}^p$ . Тогда при догрузке

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^p} d\varepsilon^p = 0, \quad (6.16)$$

а поскольку на основании первого из (6.14)

$$d\varepsilon^p = d\beta \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}, \quad (6.17)$$

то уравнение (6.16) дает возможность определить коэффициент  $d\beta$ , после чего для приращения пластической деформации получим

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{mn}} d\varepsilon_{mn}, \quad (6.18)$$

$$\lambda = - \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \right)^{-1},$$

а отсюда на основании (6.5) связь между приращениями напряжений и деформаций. Другие примеры ассоциированных законов можно найти в работах [9; 17]. Здесь же мы ограничимся рассмотрением лишь еще одного характерного примера, уже знакомого по гл. IV.

Пусть уравнение поверхности нагружения в пространстве девиатора напряжений имеет вид расширяющейся гиперболы

$$\varphi = p(r) - \kappa^p = 0, \quad r^2 = S_{ij} S_{ij}, \quad \kappa^p = \int \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}, \quad (6.19)$$

где  $S_{ij}$  — девиатор напряжений,  $\kappa^p$  — длина дуги пластического деформирования (параметр Одквиста). Для градиента  $\varphi$  в данном случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial S_{mn}} \frac{\partial S_{mn}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial S_{mn}} \left( \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{mn}} \delta_{ij} \right) = \\ &= p'(r) \frac{\partial r}{\partial S_{mn}} \left( \delta_{im} \delta_{jn} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{ij} \right) = p'(r) \frac{S_{ij}}{r}. \end{aligned}$$

Поэтому условие непрерывности изменения поверхности нагружения дает

$$p'(r) dr = d\alpha \sqrt{\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}}} = p'(r) d\alpha,$$

так что первое из соотношений (6.14) принимает вид

$$d\varepsilon^p = p'(r) (S/r) dr = d\varepsilon^p \quad (d\varepsilon_{kk}^p = d\varepsilon_{ij}^p = 0). \quad (6.20)$$

Это соотношение широко известной теории изотропного упрочнения обладает редким среди соотношений регулярной пластичности (ассоциированных законов) свойством, когда один вид механических параметров — в данном случае деформаций — выражается полностью через другой — напряжения. Вследствие этого соотношение (6.20) с учетом (6.5) можно представить в той же векторно-функциональной форме, что и в предыдущем параграфе:

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon^p, \quad \varepsilon^p = \varepsilon^p[\sigma, T] = \int_{r_0}^r p'(\lambda) \frac{S(\lambda)}{\lambda} d\lambda, \quad (6.21)$$

с той разницей, что деформации и напряжения поменялись местами и, естественно, возникла другая форма конструкции функционала. А это дает возможность дополнить (6.21) атрибутами термодинамики (диссипация, энтропия и др.) тем же путем, как это

проделано для соотношения типа Больцмана в предыдущем параграфе. Для этого нужно изменить принятую до сих пор систему постулатов термодинамики, переориентируя их на задание в качестве независимых аргументов не набора  $\varepsilon, T$ , а набора  $\sigma, T$ . Никаких особых усилий для этого не потребуется, надо лишь вместо свободной энергии  $f$  ввести так называемый потенциал Гиббса

$$\chi = f - \frac{1}{\rho} \sigma \varepsilon, \quad (6.22)$$

так что уравнения термодинамического баланса и неравенство диссипации будут теперь представляться соотношением

$$q^* = -\dot{\chi} - \frac{1}{\rho} \varepsilon \dot{\sigma} - s\dot{T} \geq 0, \quad (6.23)$$

где все входящие члены в качестве независимых аргументов имеют  $\sigma, T$ .

Главное различие (6.21) и (5.11) состоит, конечно, не в перемене мест напряжений и деформаций. Оно определяется двумя факторами: неопределенностью в выборе равноценного заменителя естественного времени в пластичности и тем, что в (6.21) представлена только активная часть пластического процесса (для пассивной  $q^* = 0$ ). Это, по крайней мере на данном этапе, не позволяет с той же мерой строгости, как это имеет место в наследственной упругости, определить на основе соотношения (6.23) параметры  $s$  и  $q^*$  заданием одного потенциала Гиббса. Пока в пластичности принято задавать независимо этот потенциал (или, чаще, свободную энергию) и некомпенсированное тепло (см., например, [57]).

## § 7. ТЕРМОДИНАМИКА НЕОДНОРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для того чтобы в какой-то мере завершить проблему о термодинамической согласованности определяющих соотношений, надо решить вопрос об условиях реального осуществления однородных процессов, рассмотренных выше. А этот вопрос можно решить только на основании более общего термодинамического подхода — теории неоднородных процессов, без которой, кроме того, не обойтись и при замыкании разрешающих уравнений краевых и начальных задач о деформации тел и конструкций.

Первое, что отличает неоднородный процесс от рассмотренных выше, — это явление перетока тепла от частицы к частице, вызванного неравным нулю градиентом температуры, т. е. возникновения нового термодинамического объекта — вектора потока тепла  $q$ . Если выделить в теле некоторый произвольный объем  $V$ , то при неоднородном температурном поле общая скорость подвода тепла будет осуществляться помимо действия массовых источников тепла с производительностью  $q$  еще потоком тепла  $q$  че-

рез поверхность  $\Sigma$ , замыкающую выделенный объем. Следовательно, общая скорость внешнего притока тепла  $Q^e$  теперь будет

$$Q^e = - \int_{\Sigma} q_i v_i d\Sigma + \int_V \rho q dV, \quad (7.1)$$

где  $q_i$  — компоненты вектора  $q$ ,  $v_i$  — как и прежде, компоненты внешней нормали к  $\Sigma$ . Знак минус перед первым членом в (7.1) отражает то, что  $q$  направлен в объем  $V$  извне. Преобразуя поверхностный интеграл в объемный, используя принятое выше условие аддитивности термодинамических объектов в виде (3.1) и произвольность объема  $V$ , в качестве первого закона термодинамики вместо (3.2) будем иметь

$$\dot{u} = w - \frac{1}{\rho} q_{i,i} + q. \quad (7.2)$$

Модернизируя второй закон (3.3) на случай неоднородных процессов, мы должны заметить, что в нем фигурируют не сами скорости притока тепла, а их отношение к абсолютной температуре, так сказать, нормированные потоки. Поэтому применительно к объему  $V$  второй закон термодинамики должен выглядеть как

$$\dot{S} = \int_V \rho \dot{s} dV = - \int_{\Sigma} \frac{q_i v_i}{T} d\Sigma + \int_V \rho \frac{q+q^*}{T} dV, \quad (7.3)$$

что для частицы среды означает

$$\dot{s} = - \frac{1}{\rho} \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} + \frac{q+q^*}{T}, \quad q^* \geq 0, \quad (7.4)$$

где, как и прежде,  $q^*$  — скорость некомпенсированного тепла, однако с другим, чем в однородных процессах, математическим представлением. Действительно, исключая из (7.4) массовые притоки тепла  $q$  с помощью (7.2) и вводя свободную энергию, обобщенное условие термодинамического баланса и неравенство диссипации получим в виде

$$q^* = w - \dot{f} - s\dot{T} - \frac{1}{\rho T} q_i T_{,i} \geq 0. \quad (7.5)$$

Но для тех материалов, которые рассматривались в предыдущих параграфах и для которых выполняется принцип локального действия, также имеет место неравенство (3.4), которое теперь можно переписать в виде

$$\delta = w - \dot{f} - s\dot{T} \geq 0, \quad (7.6)$$

где  $\delta$  — так называемая внутренняя диссипация, а само условие (7.6) применительно к неоднородным процессам носит название неравенства Планка.

Таким образом, для неоднородных процессов обобщенное неравенство диссипации (7.5) для рассматриваемого класса тел, названных выше простыми материалами, распадается на два отдельных: на неравенство внутренней диссипации (7.6) и неравенство

$$q_i T_{,i} \leq T \delta, \quad (7.7)$$

которое для совершенных тел ( $\delta=0$ ) совпадает с известным неравенством Фурье

$$q_i T_{,i} = q \text{grad } T \leq 0. \quad (7.8)$$

Последнее означает, что для совершенных сред, к которым относится, например, термоупругий материал, переток тепла от менее нагретой частицы к соседней, более нагретой, невозможен. В то же время для несовершенных сред такой переток в принципе возможен без нарушений требования термодинамики, и его интенсивность может быть тем выше, чем больше значение внутренней диссипации. Например, для вязкоупругих тел

$$q \text{grad } T \leq T \mu_1 \dot{\epsilon}^2. \quad (7.9)$$

Необычность такого результата рождает подозрение в справедливости принятого предположения о локальности действия, и прежде всего в той части, которая относится к термическим эффектам. Поэтому допустим, что в соотношении  $\sigma \sim \epsilon$  вместе с  $T$  присутствует и параметр  $\text{grad } T$ , хотя очевидно, что включение такого нелокального параметра сильно осложнило бы проблему экспериментального определения термомеханических характеристик материала, т. е. проблему установочного эксперимента. Применительно к линейной вязкоупругости таким обобщением (3.16) служит задание

$$\sigma = \sigma^0(\epsilon, T, g) + \mu_1 \dot{\epsilon}, f = f(\epsilon, \dot{\epsilon}, T, g), s = s(\epsilon, \dot{\epsilon}, T, g), \quad (7.10)$$

где введено обозначение

$$g = \text{grad } T. \quad (7.11)$$

Внося это в обобщенное неравенство диссипации (7.5), получим

$$\left( \frac{\sigma^0}{\rho} - f_{\epsilon} \right) \dot{\epsilon} - (s + f_T) \dot{T} - f_{\dot{\epsilon}} \dot{\epsilon} - f_{g_i} \dot{g}_i - \frac{1}{\rho} q g + \frac{\mu_1}{\rho} \dot{\epsilon}^2 \geq 0. \quad (7.12)$$

При произвольных  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{T}$ ,  $\dot{\epsilon}$  и  $\dot{g}$  выполнение неравенства возможно только при обращении в нули первых двух скобок и двух последующих членов, так что остаточное неравенство совпадает с (7.9), а  $\sigma^0$  и  $s^0$  выражаются через свободную энергию так же, как и в однородных процессах, т. е. по (3.16). Аналогичным качеством обладают и другие среды, и в частности материалы со слабой мгновенной реакцией.

Удостоверившись таким образом, что природа неравенства (7.7) не связана с предположением о локальности термодинами-

ческого действия, мы должны теперь отметить, что введенный выше поток  $q$  является новым объектом, в математическом плане подобным напряжению, и требует своего задания через систему независимых термодинамических параметров, которыми при неоднородных процессах являются  $\epsilon$ ,  $T$  и  $g$ . Таким образом, расширяя рамки механики до термомеханики, надо определять среду надлежащим заданием не только  $\sigma = \sigma[\epsilon, T]$ , но и заданием  $q = q[\epsilon, T, g]$ . Неодинаковость аргументов этих представлений отражают их разное отношение к однородности и неоднородности происходящих процессов. Если для  $\sigma$  в силу сказанного выше вид процесса не существен, но  $q$  только и возникает при неоднородности. Здесь же отметим и неравноправие по отношению к этим объектам требований термодинамики, которая, как это было видно из предыдущего, довольно сильно конкретизировала вид зависимости для  $\sigma$  и почти ничего, кроме условия (7.7), не накладывает на  $q$ .

Обычно в предположении термической изотропии используется закон Фурье

$$q_i = -\kappa g_i, \quad (7.13)$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности — вообще может зависеть от температуры. Этот закон хорошо описывает по крайней мере класс совершенных тел, для которых, как это следует из (7.8),

$$\kappa \geq 0. \quad (7.14)$$

Некоторые дополнительные сведения относительно связи термических параметров, возможно, удастся получить для рассматриваемых здесь простых материалов на основании уже отмеченного различия аргументов в силовых и термических объектах. Так, если с помощью (7.2) исключить из (7.6) мощность работы  $\dot{\omega}$ , то в получаемом представлении

$$\frac{1}{\rho} q_{i,i} + T \dot{s} = \delta + q \quad (7.15)$$

правая, а следовательно, и левая части не должны зависеть от градиента  $g_i$ . Поэтому при введении этого параметра кроме условия термодинамического согласования, так же, как и для совершенных тел, должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial}{\partial g_h} \left( T \dot{s} + \frac{1}{\rho} q_{i,i} \right) = 0. \quad (7.16)$$

При использовании (7.13) в случае  $\kappa = \text{const}$  ссылка на уравнение (7.15) приводит к классическому уравнению теплопроводности

$$\frac{\kappa}{\rho} T_{i,i} = T \dot{s} - \delta - q. \quad (7.17)$$

Специфические эффекты, которые обнаруживаются уже в рамках термоупругости при неоднородных процессах, можно продемонстрировать на простом примере продольных колебаний закрепленного по концам теплопроводящего стержня.

Будем считать этот упругий стержень теплоизолированным, так что потоков тепла ни с боковых поверхностей (что в рассматриваемом одномерном случае представлялось бы массовым параметром  $q$ ), ни с концов не возникает. Следовательно, имеем

$$\delta = q = 0, \quad T_{,x}|_{x=0} = T_{,x}|_{x=l} = 0, \quad (7.18)$$

где  $l$  — длина стержня.

Для энтропии воспользуемся заданием  $f = f^0$  в форме (4.8), на основании которого

$$s = s^0 = \frac{1}{\rho} E \alpha \varepsilon_1 + C_\varepsilon \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{1}{\rho} \left( E \alpha \varepsilon_1 + C_\varepsilon \rho \frac{T - T_0}{T_0} \right), \quad (7.19)$$

так что уравнение (7.18) при условии  $T - T_0 \ll T_0$  принимает вид

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = E \alpha T_0 \varepsilon_1 + \rho C_\varepsilon T. \quad (7.20)$$

Для напряжений аналогичным образом найдем

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 - E \alpha (T - T_0), \quad (7.21)$$

так что уравнение колебаний будет

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = E \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} - E \alpha \frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7.22)$$

где  $u = u(x, t)$  — продольное перемещение.

С учетом закрепления концов и отсутствия на них потоков тепла краевые условия для  $u$  и  $T$  будут

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (7.23)$$

$$T_{,x}(0, t) = T_{,x}(l, t) = 0.$$

Будем искать решения уравнений (7.20) и (7.22) в виде

$$u = \varphi(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad T = \psi(t) \cos \frac{\pi x}{l} + T_0. \quad (7.24)$$

удовлетворяющего условиям (7.23). При этом система уравнений для  $\varphi$  и  $\psi$  будет иметь вид

$$\frac{\pi^2}{l^2} \kappa \psi + \frac{\pi}{l} E \alpha T_0 \varphi + \rho C_\varepsilon \psi = 0, \quad (7.25)$$

$$E \alpha \psi - \rho \frac{l}{\pi} \ddot{\varphi} - \frac{\pi}{l} E \varphi = 0.$$

Отсюда для  $\varphi$  и  $\psi$  следуют одинаковые уравнения:

$$\frac{1}{\omega^3} \ddot{\Phi} + a \dot{\Phi} + b \Phi + \omega^2 \alpha \Phi = 0, \quad \Phi \equiv \{\varphi, \psi\}, \quad (7.26)$$

где

$$\omega^2 = \frac{\pi^2 E}{l^2 \rho}, \quad a = \frac{\kappa}{E C_\varepsilon}, \quad b = 1 + \gamma, \quad \gamma = \frac{E \alpha^2 T_0}{\rho C_\varepsilon} = \frac{E_{ад} - E}{E}. \quad (7.27)$$

Соответствующее кубическое характеристическое уравнение в предположении о малости  $\gamma$  ( $\gamma \ll 1$ ) легко решается, так что

$$\Phi = C_1 e^{-\lambda t} + e^{-\mu t} (C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t), \quad (7.28)$$

где

$$\lambda = a \omega^2 - \beta, \quad \beta = \frac{a \omega^2 \gamma}{1 + a^2 \omega^2}, \quad \mu = \frac{\beta}{2}. \quad (7.29)$$

При начальных условиях

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = v \sin \frac{\pi x}{l}, \quad T(x, 0) = T_0$$

для функций  $\varphi$  и  $\psi$  из (7.25) следует

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \quad \dot{\varphi}(0) = v, \quad \ddot{\varphi}(0) = 0, \\ \psi(0) &= 0, \quad \dot{\psi}(0) = -\frac{\pi}{l} \frac{v}{\alpha}, \quad \ddot{\psi}(0) = \frac{\pi}{l} \frac{\omega^2 a v}{\alpha}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Удовлетворяя этим условиям, получим

$$\Phi = C_3 e^{-\mu t} (\cos \omega t - e^{-(\lambda - \mu)t}) + C_2 e^{-\mu t} \sin \omega t, \quad (7.31)$$

где  $C_2$  и  $C_3$  для  $\varphi$  и  $\psi$  различны и принципиальное их отличие состоит в том, что для  $\psi$  и  $C_2$  и  $C_3$  пропорциональны малому параметру  $\gamma$ , а для  $\varphi$  таковым является только  $C_3$ , в то время как  $C_2$  имеет порядок единицы, поэтому для  $\varphi$  первым членом в (7.31) можно пренебречь.

Полученный результат еще раз подчеркивает различие в тепловом и механическом поведении тел. Отметим, что связь между механической и тепловой задачами возникает лишь при  $\gamma \neq 0$ , т. е. при учете различия адиабатического и изотермического модулей упругости.

Наконец, вопрос о реализации однородного процесса. В принципе он решается просто. Применительно к установочному эксперименту дополнительно к хорошо отработанной методике создания однородного деформированного состояния нужно предусмотреть надежную теплоизоляцию эталонного образца. При такой изоляции образец в тепловом отношении будет предоставлен самому себе, и единственное, что регулируется извне, — изменение во времени деформированного состояния, которое в силу

его однородности не может нарушить теплового равновесия его частиц и, следовательно, тепловых потоков. Можно сказать, что при однородном деформировании теплоизолированного тела процесс является адиабатическим в каждой частице.

В действительности надежную теплоизоляцию образца осуществить не просто, и обычно установочный эксперимент для определения деформативных свойств и прочности твердых тел производят без специальных мер по теплоизоляции. Для быстрых процессов такая беззаботность оправдана, так как в них отток тепла с поверхности образца происходит не успевает. Однако в таких процессах, не говоря уже о технических трудностях с измерениями [87], выявить свойства памяти весьма затруднительно, если вообще возможно. Для этого нужен набор процессов с широким диапазоном изменения скоростей деформаций, а в них без теплоизоляции обязательно должны возникать тепловые потоки, и только в очень медленном процессе можно рассчитывать на сохранение термической однородности в образце. Что же касается промежуточных между очень быстрым и очень медленным процессами, то, строго говоря, однородное деформирование образца будет сопровождаться неоднородностью напряжений и для расшифровки результатов установочного эксперимента, представляемых усредненными характеристиками напряжений, нужно как минимум иметь решение уравнения теплопроводности (7.15). Такое решение в принципе может быть получено (для обычных эталонных образцов задача теплопроводности является одномерной), если для данной среды известны энтропия и внутренняя диссипация. Имеющиеся к настоящему времени результаты по таким моделям тел, как упругость, линейная вязкость, наследственность, можно в качественном смысле охарактеризовать следующим образом: учет в правой части уравнения теплопроводности членов, содержащих малую деформацию  $\epsilon$ , дает относительно малый вклад в распределение температуры. А это, по крайней мере в первом приближении, позволяет говорить о несвязности термомеханической задачи: поле температур можно определять независимо от механических параметров\*, а применительно к эталонному образцу считать поле температуры однородным.

Это, конечно, не исключает существования условий деформирования, при которых влияние механических параметров в уравнении теплопроводности будет существенным. Так, например, будет при больших деформациях пластических тел (прокатка, прессование), возможно при резком изменении направления процесса, при соударении твердых тел. Поэтому указанным выше упрощением можно пользоваться только тогда, когда отсутствует заметный интегральный разогрев образца, а само это упрощение, конечно, не значит, что в механическом поведении таких материалов можно исключить зависимость от температуры. Более того,

именно такая зависимость позволила включить механику в термодинамику со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Завершая этот раздел, хотелось бы отметить, что автору не пришлось делать усилий, чтобы избежать использования таких терминов, как «обратимость» и «равновесность». И это может служить одним из аргументов того, что возникшие в последнее время споры физиков и механиков, связанные с этими понятиями, существа дела, по крайней мере в термомеханике, не касаются.

\* В этом плане эффекты, найденные выше при  $\gamma \neq 0$ , нужно признать вторичными.

Весь предыдущий материал был построен на предположении о малости деформаций, т. е. в рамках геометрически линейной механики твердого деформируемого тела. В качестве меры деформаций использовался тензор, представляемый через градиенты перемещения формулой

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

а напряженное состояние определялось тензором Коши  $\sigma_{ij}$ , который определялся через вектор напряжений  $T_i$  на площадке с нормалью  $\nu_j$  соотношением

$$T_i = \sigma_{ij} \nu_j.$$

Геометрически линейная механика дает достаточную точность при условии, что  $|u_{i,j}| \ll 1$ , и является максимально простой и удобной для расчетов, поскольку в ней уравнение равновесия (движения) записывается в сетке недеформированного состояния, так же как и краевые условия.

Важным обстоятельством является также то, что в такой теории тензор скоростей деформации  $e_{ij}$  является материальной производной по времени от тензора деформаций Коши

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Это обеспечивает простую расшифровку через тензоры  $\sigma_{ij}$  и  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  первого закона термодинамики, точнее выражения для элементарной работы внутренних сил

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} = \frac{1}{\rho_0} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij},$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность материала — известная функция координат (как правило, постоянная), что обеспечивает эвристичность уравнения баланса (неравенства диссипации), продемонстрированную в предыдущей главе, и указывает, что  $\sigma_{ij}$  и  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  представляют энергетическую пару и, следовательно, свойства материала полностью определяются связью между тензорами  $\sigma_{ij}$  и  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ , а также температуры.

При умеренных и больших градиентах перемещений такая теория непригодна. Нужны другие кинематические и статические параметры, а также возникает проблема, связанная с необходимостью

учета искривления начальной сетки координат, замороженной в деформируемое тело.

Если последняя проблема является чисто математической, то вопрос о новых кинематических и статических параметрах является и физическим. Среди конкурентов на роль, подобную  $\sigma_{ij}$  и  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ , в линейной теории могут претендовать только такие, которые составляют энергетическую пару\*.

Ниже, следуя этому требованию, мы рассмотрим элементы теории больших деформаций с использованием лишь декартовых координат\*\*.

### § 1. ТЕНЗОР-ГРАДИЕНТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ТЕНЗОР ПИОЛЫ

Движение сплошной среды будем изучать в неподвижной прямоугольной декартовой системе координат, причем начальное положение частиц будем обозначать параметрами  $a_i$  ( $a_1, a_2, a_3$ ), а текущее —  $x_i$  ( $x_1, x_2, x_3$ ) (рис. 6.1). Естественной формой задания движения является задание траектории движения во времени  $t$  каждой частицы, с фиксированной начальной координатой, т. е. представления

$$x_i = x_i(a_j, t). \quad (1.1)$$

Такое представление получило наименование лагранжева, а параметры  $a_j$  — лагранжевыми координатами движения. В представлении (1.1) эти параметры являются, по существу, метками частиц.

Очевидно, что задание (1.1) взаимно однозначно в отношении  $x_i$  и  $a_j$  и, следовательно, лагранжев якобиан для всех частиц  $a_q$  отличен от нуля:

$$I = \left| \frac{\partial x_p}{\partial a_q} \right| \neq 0, \quad (1.2)$$

и (1.1) может быть разрешено относительно параметров  $a_i$

$$a_i = a_i(x_j, t). \quad (1.3)$$

Это представление считается эйлеровым и имеет смысл регистрации движения частиц с метками  $a_i$  в пункте  $x_j$  неподвижной системы координат, а его аргументы  $x_j$  носят название координат Эйлера. Можно сказать, что представление Лагранжа (1.1) — слежение за

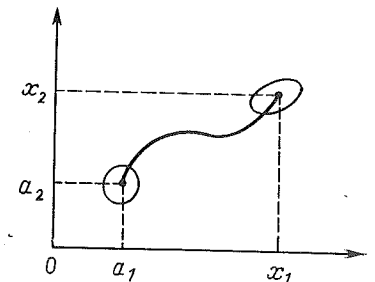


Рис. 6.1

\* К сожалению, нужно констатировать, что в большинстве учебной литературы по большим деформациям этот направляющий пункт явно не обозначен.

\*\* Бытует мнение, что изложение теории больших деформаций требует привлечения криволинейных координат, что, конечно, неверно и блестяще опровергнуто в книге Прагера [51], материал которой частично использован и в данной работе.

частицей, а представление Эйлера — слежение за ситуацией в фиксированной точке пространства. Эйлеров якобиан, очевидно, отличен от нуля

$$J = \left| \frac{\partial a_m}{\partial x_n} \right| \neq 0 \quad (1.4)$$

и является обратным по отношению к (1.2), так что

$$\frac{\partial a_m}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial a_n} = \delta_{mn}, \quad (1.5)$$

где  $\delta_{mn}$  — тензор Кронеккера.

Отметим, что использование эйлеровых переменных удобно для представления поля скоростей

$$v_i = v_i(x_j, t), \quad (1.6)$$

в то время как лагранжевы переменные и само задание (1.1) удобно для представления поля перемещений

$$u_i = x_i(a_j, t) - a_i, \quad (1.7)$$

необходимого для определения деформации среды.

Для отыскания энергетических пар тензоров  $\Sigma_{ij}$  и  $E_{ij}$ , представляющих напряженное и деформированное состояния среды соответственно, надо в связи со сказанным выше удовлетворить требованию, чтобы выражение мощности работы внутренних сил

$$w = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} e_{ij} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (1.8)$$

представлялось в виде

$$w = \frac{1}{\rho_0} \Sigma_{ij} \dot{E}_{ij}. \quad (1.9)$$

Простейший путь к разрешению этого вопроса состоит в попытке выразить тензор  $\partial v_i / \partial x_j$  через полную производную по времени от некоторого другого кинематического тензора.

Такую возможность дает формула, выражающая неизменность координаты  $a_m$  (метки частицы)

$$\dot{a}_m = \frac{\partial a_m}{\partial t} + \frac{\partial a_m}{\partial x_q} v_q = 0. \quad (1.10)$$

Отсюда для производной градиента  $\partial a_m / \partial x_p$  имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial a_m}{\partial x_p} \right)' &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial a_m}{\partial x_p} \right) + \frac{\partial}{\partial x_q} \left( \frac{\partial a_m}{\partial x_p} \right) v_q = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial a_m}{\partial x_p} \right) + \frac{\partial}{\partial x_p} \left( v_q \frac{\partial a_m}{\partial x_q} \right) - \frac{\partial a_m}{\partial x_q} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{\partial a_m}{\partial t} + \frac{\partial a_m}{\partial x_q} v_q \right) - \frac{\partial a_m}{\partial x_q} \frac{\partial v_q}{\partial x_p}. \end{aligned}$$

Скобка в последнем выражении в силу (1.10) равна нулю, так что

$$\left( \frac{\partial a_m}{\partial x_p} \right)' = - \frac{\partial a_m}{\partial x_q} \frac{\partial v_q}{\partial x_p}. \quad (1.11)$$

Разрешая это равенство относительно градиента скорости (умножением на  $\partial x_r / \partial a_m$  и пользуясь (1.5)), получим

$$\frac{\partial v_r}{\partial x_p} = - \frac{\partial x_r}{\partial a_m} \left( \frac{\partial a_m}{\partial x_p} \right)'. \quad (1.12)$$

Имеется и другая возможность выражения градиента скорости через полную производную по времени уже от градиента  $\partial x_r / \partial a_n$ , основанная на неизменности тензора Кронеккера  $\delta_{mn}$ :

$$\left( \frac{\partial a_m}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial a_n} \right)' = \delta_{mn}' = 0 = \left( \frac{\partial a_m}{\partial x_p} \right)' \frac{\partial x_p}{\partial a_n} + \frac{\partial a_m}{\partial x_p} \left( \frac{\partial x_p}{\partial a_n} \right)',$$

откуда с учетом (1.11) следует

$$\left( \frac{\partial x_p}{\partial a_n} \right)' \frac{\partial a_m}{\partial x_p} = \frac{\partial a_m}{\partial x_q} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial a_n}.$$

Умножая левую и правую части на  $\partial x_i / \partial a_m$  и  $\partial a_n / \partial x_j$ , получим с заменой немых индексов

$$\frac{\partial v_r}{\partial x_p} = \frac{\partial a_n}{\partial x_p} \left( \frac{\partial x_r}{\partial a_n} \right)'. \quad (1.13)$$

На основе последней формулы выражение (1.9) для  $w$  можно представить в виде

$$w = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{rp} \frac{\partial a_n}{\partial x_p} \right) \left( \frac{\partial x_r}{\partial a_n} \right)', \quad (1.14)$$

т. е. выявить одну из энергетических пар

$$\Sigma_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{jp} \frac{\partial a_i}{\partial x_p}, \quad E_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial v_i} + C_{ij}.$$

Здесь использовано сохраняемое и далее правило, что индексы у тензора-градиента идут в следующем порядке: первый индекс отвечает индексу дифференцирования; второй — индексу компоненты, а это в соответствии с (1.9) определяет значимые индексы и у тензора напряжений.

Поскольку в начальный момент  $x_i = a_i$ , то тензорная постоянная в выражении для  $E_{ij}$  должна быть положена равной с обратным знаком тензору Кронеккера и в силу (1.7)  $E_{ij}$  является тензором-градиентом перемещений  $\partial u_i / \partial a_i$ , в связи с чем будет переименован в  $\Gamma_{ij}$ . Тензор  $\Sigma_{ij}$  носит название тензора Пиолы и

будет переименован в  $\Pi_{ij}$ . Таким образом, первая энергетическая пара в новых обозначениях представится в виде

$$\Pi_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{jp} \frac{\partial a_i}{\partial x_p}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial a_i} - \delta_{ij}. \quad (1.15)$$

Оба эти тензора несимметричны, что затрудняет их практическое использование. Положительным же качеством этой пары является простой механический смысл тензора Пиолы, выявляемый в следующем параграфе, и линейность связи тензора-градиента с перемещениями.

## § 2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим тройку малых направленных отрезков  $da_i$ ,  $\delta a_j$ ,  $\Delta a_k$  в начальном состоянии, которые в текущем состоянии перейдут в тройку  $dx_i$ ,  $\delta x_j$ ,  $\Delta x_k$ . Объем параллелепипеда, натянутого, например, на отрезки в текущем состоянии, равен определителю

$$dV = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \delta x_1 & \delta x_2 & \delta x_3 \\ \Delta x_1 & \Delta x_2 & \Delta x_3 \end{vmatrix},$$

удобно представлять с помощью тензора Леви — Чевита

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{при четной подстановке индексов,} \\ -1 & \text{при нечетной подстановке индексов,} \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$dV = \epsilon_{ijk} dx_i \delta x_j \Delta x_k, \quad (2.1)$$

$$dV_0 = \epsilon_{ijk} da_i \delta a_j \Delta a_k,$$

а поскольку

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_p} da_p, \quad \delta x_j = \frac{\partial x_j}{\partial a_q} \delta a_q, \quad \Delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial a_r} \Delta a_r,$$

то

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_j}{\partial a_q} \frac{\partial x_k}{\partial a_r} = I \epsilon_{pqr},$$

$$dV = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_j}{\partial a_q} \frac{\partial x_k}{\partial a_r} da_p \delta a_q \Delta a_r = I \epsilon_{pqr} da_p \delta a_q \Delta a_r,$$

и, следовательно,

$$dV = I dV_0, \quad dV_0 = I dV. \quad (2.2)$$

Вектор площадки в исходном и текущем состояниях может быть представлен в виде

$$dS_i^0 = \epsilon_{ijk} \delta a_j \Delta a_k, \quad dS_i = \epsilon_{ijk} \delta x_j \Delta x_k,$$

откуда

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_p} dS_i^0 = \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_i}{\partial x_p} \frac{\partial a_j}{\partial x_q} \frac{\partial a_k}{\partial x_r} \delta x_q \Delta x_r = J dS_p. \quad (2.3)$$

Из закона сохранения масс

$$\rho dV = \rho_0 dV_0 \quad \text{или} \quad I = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{J}, \quad (2.4)$$

поэтому из (2.3) с заменой индексов следует:

$$dS_k = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dS_i^0. \quad (2.5)$$

В текущем состоянии усилие на площадке  $dS$  есть

$$dP_j = T_j dS = \sigma_{kj} \nu_k dS = \sigma_{kj} dS_k,$$

и с использованием (2.5) и (1.15) будем иметь

$$dP_j = \sigma_{kj} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dS_i^0 = \Pi_{ij} dS_i^0 = \Pi_{ij} \nu_i^0 dS^0.$$

Откуда следует, что

$$dP_j = T_j dS = T_j^0 dS^0, \quad (2.6)$$

где

$$T_j^0 = \Pi_{ij} \nu_i^0 \quad (2.7)$$

представляет вектор усилий на площадке с нормалью  $\nu_i^0$  в замороженном от деформации теле (рис. 6.2 а, б).

Массовая сила, действующая на частицу в текущем состоянии  $F_j = F_j(x_i, t)$ , в действительном движении  $x_i = x_i(a_j, t)$  может быть представлена как функция  $a_j, t: F_i = F_i^0(a_j, t)$  и в силу (2.4)

$$\int_V F_i \rho dV = \int_{V_0} F_i^0 \rho_0 dV_0,$$

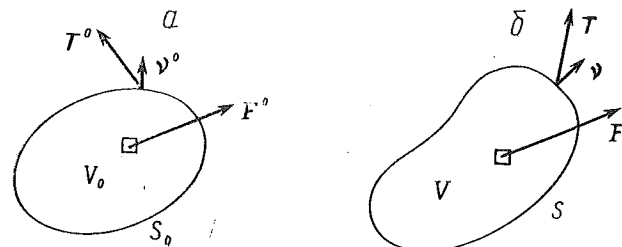


Рис. 6.2



а в силу (2.6)

$$\int_{S^0} T_j^0 dS = \int_S T_j dS.$$

Таким образом,

$$\int_S T_j dS + \int_V F_j \rho dV = \int_{S_0} T_j^0 dS + \int_{V_0} F_j^0 \rho_0 dV, \quad (2.8)$$

и условия динамического равновесия требуют, чтобы левая и правая части этого равенства были нулями. А тогда по теореме Гаусса — Остроградского

$$\int_{V_0} \left( \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial a_i} + \rho_0 F_j^0 - \rho_0 \frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2} \right) dV = 0, \quad (2.9)$$

где разделены внешние массовые  $F_j^0$  силы и силы инерции и учтено, что  $(d/dt)_{a=\text{const}} = \partial/\partial t$ . Ввиду произвольности  $V_0$  отсюда следует равенство нулю подынтегрального выражения

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial a_i} + \rho_0 F_j^0 = \rho_0 \frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

Это уравнение полностью повторяет уравнение движения с тензором Коши  $\sigma_{ij}$  в линейной механике, так же как и статические краевые условия (2.7) повторяют таковые с тензором  $\sigma_{ij}$ .

Кроме того, поскольку энергетической парой к тензору Пинолы  $\Pi_{ij}$  является тензор-градиент перемещений  $\Gamma_{ij}$ , то должна существовать связь этих тензоров. Однако здесь возникает одна проблема, связанная с тем, что тензор  $\Gamma_{ij}$  сам по себе не может быть мерой деформации, поскольку он реагирует на поворот тела как жесткого целого. Действительно, при жестком вращении тела около оси  $x_3$  будем иметь

$$x_1 = a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi, \dots$$

$$\Gamma_{11}' = \cos \varphi - 1 \neq 0, \dots$$

Поэтому предположение о том, что свободная энергия  $f$  является функцией (или функционалом)  $\Gamma_{ij}$ , может приниматься только в том случае, если этот тензор входит туда в такой комбинации, которая не зависит от жесткого поворота. Если так, то, например, для упругого тела по неравенству диссипации (3.8) предыдущей главы с заменой  $\varepsilon$  на  $\Gamma$ ,  $\sigma$  на  $\Pi$ ,  $\rho$  на  $\rho_0$  будем иметь

$$\Pi_{ij} = \rho_0 \frac{\partial f(\Gamma_{mn}, T)}{\partial \Gamma_{ij}}, \quad (2.11)$$

и краевая задача полностью замыкается в перемещениях  $u_i$  или переменных  $x_i = x_i(a_k, t)$ , если к статическим краевым условиям на части поверхности  $S_T$  добавить краевые условия

$$u_i|_{S_a^0} = U_i(a_k, t).$$

Комбинация  $\Gamma_{ij}$ , не имеющая указанного выше дефекта, может быть представлена следующим образом:

$$2\varepsilon_{ij}^0 = (\Gamma_{ik} + \delta_{ik})(\Gamma_{jk} + \delta_{jk}) - \delta_{ij}, \quad (2.12)$$

т. е. на основании (1.15)

$$2\varepsilon_{ij}^0 = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij}, \quad (2.13)$$

или с учетом (1.7) через перемещение

$$2\varepsilon_{ij}^0 = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j}. \quad (2.14)$$

Таким образом, данная комбинация есть не что иное, как известный тензор Грина, свойства которого излагаются в учебной литературе. Индекс «0» означает, что этот тензор вычисляется в координатах недеформированного состояния, т. е. в координатах Лагранжа.

Теперь можно проверить, годится ли для замыкания задачи в тензорах  $\Pi_{ij}$  и  $\Gamma_{ij}$  соотношение (2.11). Для этого представим

$$\frac{\partial f}{\partial \Gamma_{pq}} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^0} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^0}{\partial \Gamma_{pq}}$$

и вычислим на основании (2.12) тензор  $\partial \varepsilon_{ij}^0 / \partial \Gamma_{pq}$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \varepsilon_{ij}^0}{\partial \Gamma_{pq}} &= \delta_{ip} \delta_{jq} (\Gamma_{jk} + \delta_{jk}) + \delta_{jp} \delta_{iq} (\Gamma_{ik} + \delta_{ik}) = \\ &= \delta_{ip} \Gamma_{jq} + \delta_{jp} \Gamma_{iq} + \delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{jp} \delta_{iq}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \Gamma_{pq}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{pj}^0} \Gamma_{jq} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{pi}^0} \Gamma_{iq} \right) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{pq}^0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{pi}^0} \Gamma_{iq} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{pq}^0} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ip}^0} \frac{\partial x_q}{\partial a_i}. \end{aligned}$$

Забегаая несколько вперед, на основании формул (3.6), (3.9) получим

$$\frac{\partial f}{\partial \Gamma_{pq}} = \frac{1}{\rho_0} \sigma_{ip} \frac{\partial x_q}{\partial a_i} = \frac{1}{\rho_0} \Pi_{pq}. \quad (2.15)$$

Таким образом, формула (2.11) термодинамически обоснована, несмотря на дефекты тензора  $\Gamma_{ij}$  в отношении обычных требований к мере деформации.

В итоге с использованием тензоров  $\Pi_{ij}$  и  $\Gamma_{ij}$  приходим к следующей задаче об отыскании  $x_i = x_i(a_j, t)$ :

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial a_i} + \rho_0 F_j^0 = \rho_0 \frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2},$$

$$\Pi_{ij} = \rho_0 \frac{\partial f(\Gamma_{mn}, T)}{\partial \Gamma_{ij}}, \quad \Gamma_{mn} = \frac{\partial x_n}{\partial a_m} - \delta_{mn}. \quad (2.16)$$

$$\Pi_{ij} v_i^0 \Big|_{S_T^0} = T_j^0(a_k, t), \quad x_i \Big|_{S_u^0} = X_i(a_k, t).$$

Если  $f$  как функция  $\Gamma_{mn}$  и  $T$  задана, то в силу второго и третьего соотношений три уравнения движения, содержащиеся в первом соотношении, превращаются в три дифференциальных соотношения второго порядка для искомой функции  $x_i = x_i(a_j, t)$ , для которой на поверхности  $S^0 = S_T^0 + S_u^0$  заданы три краевых условия.

После того как на основании этих уравнений будет определено поле  $x_i = x_i(a_k, t)$  и, следовательно, тензор  $\Pi_{ij}(a_k, t)$ , обращением второй из формул (1.15) может быть определен тензор напряжений Коши (тензор истинных напряжений)

$$\sigma_{ih} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_h}{\partial a_j} \Pi_{ji}, \quad (2.17)$$

где в силу второй из формул (2.4)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{I(a_k, t)}. \quad (2.18)$$

Как видно, искомый результат был получен без включения традиционного раздела — теории деформаций — и даже на основе тензора  $\Gamma_{ij}$ , который не может служить принятой в классике мерой деформаций, поскольку, как уже показано, не равен нулю при повороте тела как жесткого целого.

Более того, без каких-либо изменений, нужный результат мог быть получен, если вместо тензора  $\Gamma_{ij}$  был бы взят за основу тензор

$$D_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial a_i}, \quad (2.19)$$

который обычно именуется (искажающим существо) термином «градиент деформаций» и который, очевидно, так же как и  $\Gamma_{ij}$ , составляет с тензором Пиолы энергетическую пару. Этот тензор не только реагирует на жесткие повороты тела, но и не обращается в нуль в исходном состоянии.

Важно отметить, что энергетический подход без каких-либо геометрических соображений указывает на главное качество кинематического тензора — его градиентальную природу, которая достаточна для замыкания задачи о больших деформациях при заданной свободной энергии или упругом потенциале.

### § 3. ТЕНЗОРЫ ГРИНА И КИРХГОФА

К тензору Грина мы могли бы прийти, если бы при поисках выражения для  $E_{ij}$  потребовали его симметрии. А этому требованию можно удовлетворить, беря в качестве исходного не градиент скоростей (1.13), а его симметричную часть, т. е. сам тензор скоростей

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial a_n}{\partial x_j} \left( \frac{\partial x_i}{\partial a_n} \right)' + \frac{\partial a_n}{\partial x_i} \left( \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \right)' \right]. \quad (3.1)$$

Отсюда следует

$$e_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial a_p} \frac{\partial x_i}{\partial a_q} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial x_l}{\partial a_q} \left( \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \right)' + \frac{\partial x_j}{\partial a_p} \left( \frac{\partial x_l}{\partial a_q} \right)' \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_i}{\partial a_q} \right),$$

а в силу постоянства тензора  $\delta_{ij}$

$$e_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial a_p} \frac{\partial x_i}{\partial a_q} = \varepsilon_{pq}^0, \quad (3.2)$$

или, разрешая это соотношение относительно тензора скоростей:

$$e_{mn} = \frac{\partial a_p}{\partial x_m} \frac{\partial a_q}{\partial x_n} \varepsilon_{pq}^0. \quad (3.3)$$

Теперь можно представить мощность внутренних сил в виде

$$\omega = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{mn} \frac{\partial a_p}{\partial x_m} \frac{\partial a_q}{\partial x_n} \right) \varepsilon_{pq}^0 \quad (3.4)$$

и, следовательно, определить новую энергетическую пару

$$\Sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_i}{\partial x_m} \frac{\partial a_j}{\partial x_n} \sigma_{mn}, \quad E_{ij} = \varepsilon_{ij}^0. \quad (3.5)$$

Тензор  $\sigma_{ij}^0$  носит название тензора Кирхгофа, является симметричным и, как следует из формулы (1.15), представляется через тензор Пиолы выражением

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{\partial a_l}{\partial x_m} \Pi_{lm}. \quad (3.6)$$

Если разрешить это выражение относительно тензора Пиолы

$$\Pi_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \sigma_{ki}^0 = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ki}^0 \frac{\partial u_j}{\partial a_k}, \quad (3.7)$$

то можно уравнения движения (2.10) и статические краевые условия (2.7) записать для тензора Кирхгофа

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ki}^0 \frac{\partial u_j}{\partial a_k} \right) + \rho_0 F_j^0 = \rho_0 \frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2},$$

$$\left( \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ki}^0 \frac{\partial u_j}{\partial a_k} \right) v_i^0 \Big|_{S_T^0} = T_j^0. \quad (3.8)$$

Тензор Грина  $\epsilon_{ij}^0$  отвечает всем требованиям к мере деформаций и может служить наряду с абсолютной температурой  $f$  полноправным аргументом в свободной энергии. Поэтому в затронутом выше случае упругости без оговорок справедливо соотношение

$$\sigma_{ij}^0 = \rho_0 \frac{\partial f(\epsilon_{mn}^0, T)}{\partial \epsilon_{ij}^0}. \quad (3.9)$$

Таким образом, при добавлении краевого условия на  $S_u^0$  и при заданной свободной энергии задача о больших деформациях в лагранжевых координатах для тензоров  $\sigma_{ij}^0$  и  $\epsilon_{ij}^0$  оказывается замкнутой. Отметим, что здесь и выше вопрос о начальной и тепловой задачах не затрагивается, поскольку, по существу, они ничем не отличаются от случая малых деформаций.

До сих пор мы полагали в основу выделения энергетических пар представление (1.13) и получили формулировку задачи о больших деформациях в координатах начального состояния. Аналогичным образом, пользуясь представлением (1.12), можно поставить эту задачу в координатах текущего состояния, т. е. в эйлеровых переменных  $x_i$ .

Ограничимся здесь выявлением энергетической пары симметричных тензоров. Для этого составим комбинацию (1.12), образующую тензор скоростей

$$2e_{pq} = \frac{\partial v_q}{\partial x_p} + \frac{\partial v_p}{\partial x_q} = -\frac{\partial x_q}{\partial a_m} \left( \frac{\partial a_m}{\partial x_p} \right)' - \frac{\partial x_p}{\partial a_n} \left( \frac{\partial a_n}{\partial x_q} \right)', \quad (3.10)$$

откуда

$$2 \frac{\partial a_m}{\partial x_q} \frac{\partial a_n}{\partial x_p} e_{pq} = -\frac{\partial a_n}{\partial x_k} \left( \frac{\partial a_m}{\partial x_k} \right)' - \frac{\partial a_m}{\partial x_k} \left( \frac{\partial a_n}{\partial x_k} \right)' = -\left( \frac{\partial a_m}{\partial x_k} \frac{\partial a_n}{\partial x_k} \right)'$$

Разрешая это уравнение относительно  $e_{ij}$ , получим

$$e_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_m}{\partial x_k} \frac{\partial a_n}{\partial x_k} \right)' \right]. \quad (3.11)$$

Теперь в представлении (1.9) можно положить

$$E_{mn} = \delta_{mn} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_m}{\partial x_k} \frac{\partial a_n}{\partial x_k}, \quad (3.12)$$

$$\Sigma_{mn} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \sigma_{ij}.$$

Используя представление

$$a_i = x_i - u_i, \quad u_i = u_i(x_j, t),$$

получим

$$E_{mn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \right). \quad (3.13)$$

Это известный тензор Альманси. Он обладает всеми качествами меры деформации и может в связи с этим быть полномочным представителем в виде аргумента для свободной энергии, так что в рамках упругости, на основании неравенства диссипации имеет место соотношение

$$\Sigma_{ij} = \rho_0 \frac{\partial t(E_{mn}, T)}{\partial E_{ij}}. \quad (3.14)$$

Разрешая второе соотношение из (3.12) относительно тензора напряжений Коши и используя уравнение движения для этого тензора в текущей системе координат, получим уравнение движения для тензора  $\Sigma_{ij}$  и аналогичным образом статические краевые условия.

Мы не станем выписывать эти уравнения, поскольку они не потребуются в дальнейшем. Вообще проблема больших деформаций в эйлеровых переменных мало приспособлена для обычной краевой задачи. Связано это с подвижностью границ тела в эйлеровых координатах, так что форма поверхности тела в текущий момент заранее неизвестна (в противоположность начальному состоянию), если, конечно, не вся поверхность тела является поверхностью  $S_u$ , т. е. если это не тот редкий случай, когда изменения границы предписаны краевыми условиями. Существуют и другие специальные случаи, где эффективнее оказывается эйлеров подход.

#### § 4. ПОЛУЛИНЕЙНЫЙ МАТЕРИАЛ

Как видно из предыдущего, задача о больших деформациях наиболее просто формулируется в терминах  $\Pi_{ij}$  и  $G_{ij}$ . Но установочный эксперимент, например по простому растяжению, выдает данные в терминах силы  $P$  удлинения  $\Delta l$ . И если при известном поперечном сужении данные о силе  $P$  могут быть представлены в виде компоненты тензора Коши  $\sigma_{ij}$ , то для пересчета в компоненты тензора Пиолы  $\Pi_{ij}$  опять требуются данные о кинематике. Только на этом этапе возникает необходимость в некоторых данных, которые являются частным следствием традиционного и пространно излагаемого раздела — теории деформаций.

Все, что нам потребуется отсюда, — это определение относительных удлинений (или коэффициентов длины) материальных элементов при их переходе из исходного в текущее состояние и скошении углов между ними.

Делается это элементарно. Обозначим через  $dr$  длину материального отрезка в текущем состоянии, а через  $dr_0$  — в исходном (рис. 6.3):

$$dr^2 = dx_k dx_k, \quad dr_0^2 = da_k da_k, \quad (4.1)$$

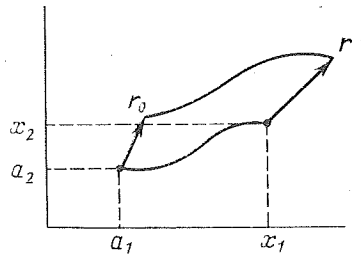


Рис. 6.3

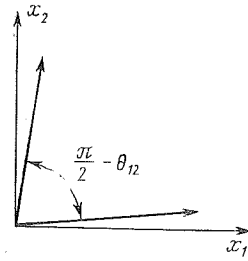


Рис. 6.4

Тогда

$$\begin{aligned} dr^2 - dr_0^2 &= dx_k dx_k - da_k da_k = \\ &= \left( \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) da_i da_j = 2\varepsilon_{ij}^0 da_i da_j, \end{aligned}$$

где на основании (2.13)  $\varepsilon_{ij}^0$  — тензор Грина, и, следовательно,

$$\left( \frac{dr}{dr_0} \right)^2 - 1 = 2\varepsilon_{ij}^0 \frac{da_i}{dr_0} \frac{da_j}{dr_0} = 2\varepsilon_{ij}^0 N_i^0 N_j^0. \quad (4.2)$$

Здесь  $N_i^0$  — вектор единичной нормали выделенного материального отрезка в исходном состоянии.

В результате для искомого относительного удлинения будем иметь

$$l_N = \lambda_N - 1, \quad (4.3)$$

где

$$\lambda_N = \frac{dr}{dr_0} = (1 + 2\varepsilon_{ij}^0 N_i^0 N_j^0)^{1/2} \quad (4.4)$$

— так называемый коэффициент длины.

Пусть теперь имеем два выходящих из одной точки под углом  $\theta_0$  материальных элемента  $da_i$  и  $\delta a_i$  в исходном состоянии. Аналогично предыдущему для скалярных произведений соответствующих векторов в исходном и текущем состояниях будем иметь

$$dx_i \delta x_i - da_i \delta a_i = dr \delta r \cos \theta - dr_0 \delta r_0 \cos \theta_0 = 2\varepsilon_{ij}^c da_i \delta a_j,$$

где  $\theta$  — угол между указанными материальными элементами в текущем состоянии. С использованием коэффициента длины последнее равенство приводится к виду

$$\lambda_{N_1} \lambda_{N_2} \cos \theta - \cos \theta_0 = 2\varepsilon_{ij}^0 N_i^0 N_j^0, \quad (4.5)$$

где  $N_1^0$  и  $N_2^0$  — единичные нормали отрезков в исходном состоянии. На основании этой формулы скошение материальных отрезков, ориентированных по координатам  $a_1, a_2$  ( $\cos \theta_0 = 0, \cos \theta =$

$= \cos \theta_{12} = \sin \varphi_{12}$   $\varphi_{12} = \pi/2 - \theta_{12}$ ), определяется равенством (рис. 6.4)

$$\sin \varphi_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}^0}{\lambda_{N_1} \lambda_{N_2}}. \quad (4.6)$$

Обратимся теперь к определению формы и аргументов свободной энергии. Ограничимся, как и выше, случаем упругого материала\*. Будем, кроме того, предполагать материал изотропным, а процесс деформирования изотермическим.

Для изотропного упругого материала свободная энергия  $f$  должна быть функцией инвариантов тензора  $\varepsilon_{ij}^0$  или трех главных его значений, представителями которых могут быть три главных коэффициента длины, которые на основании (4.4) представляются через главные значения тензора Грина  $\varepsilon_{ij}^0$  соотношениями

$$\lambda_N = \sqrt{1 + 2\varepsilon_N^0}, \quad N(I, II, III), \quad (4.7)$$

либо тремя главными относительными удлинениями

$$l_N = \sqrt{1 + 2\varepsilon_N^0} - 1. \quad (4.8)$$

Рассмотрим простейшую модель упругого тела — полуметаллический материал, для которого свободная энергия, или, что в оговоренном выше одно и то же, упругий потенциал, задается как

$$\rho_0 f = \frac{1}{2} \lambda (l_I + l_{II} + l_{III})^2 + \mu (l_I^2 + l_{II}^2 + l_{III}^2), \quad (4.9)$$

где  $\lambda, \mu$  — материальные константы, т. е. в форме, внешне повторяющей классическую теорию упругости, что заранее гарантирует совпадение результатов применения этой модели при малых деформациях с результатами классической упругости.

В эксперименте на простое растяжение призматического образца главные оси тензора деформации Грина совпадают с координатными ( $x_1$  — вдоль образца), т. е.

$$\varepsilon_N^0 = \frac{\partial u_N}{\partial a_N} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial a_N} \frac{\partial u_k}{\partial a_N} = \Gamma_{NN} + \frac{1}{2} \Gamma_{Nk} \Gamma_{Nk}. \quad (4.10)$$

Здесь и далее суммирование по  $N$  отсутствует. Следовательно, по (4.8)

$$l_N = \sqrt{1 + 2\Gamma_{NN} + \Gamma_{\alpha N} \Gamma_{\alpha N}} - 1, \quad (4.11)$$

\* Теория больших деформаций сложных сред находится в стадии становления. Сведения о соответствующих разработках можно получить в монографии [31].

и для входящих в определение тензора Пиолы параметров имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \Gamma_{pq}} = \frac{\partial f}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial \Gamma_{pq}} + \frac{\partial f}{\partial l_{II}} \frac{\partial l_{II}}{\partial \Gamma_{pq}} + \frac{\partial f}{\partial l_{III}} \frac{\partial l_{III}}{\partial \Gamma_{pq}},$$

$$\frac{\partial l_N}{\partial \Gamma_{pq}} = \frac{\delta_{Np} \delta_{Nq} + \Gamma_{Np} \Gamma_{Nq}}{1 + l_N} = \frac{\delta_{Np}}{1 + l_N} (\delta_{Nq} + \Gamma_{Nq}),$$

$$\rho_0 \frac{\partial f}{\partial l_N} = \lambda(l_1 + l_{II} + l_{III}) + 2\mu l_N.$$

Таким образом, на основании (2.11)

$$\Pi_{pq} = \rho_0 \frac{\partial f}{\partial \Gamma_{pq}} = [\lambda(l_1 + l_{II} + l_{III})_N + 2\mu l_N] \frac{\delta_{Np}(\delta_{Nq} + \Gamma_{Nq})}{1 + l_N}. \quad (4.12)$$

Здесь производится суммирование по  $N$ , для чего скобка  $(l_1 + \dots)$  отмечена индексом  $N$  (конечно:  $( )_I = ( )_{II} = ( )_{III}$ ). Всего в (4.12) будет сумма трех квадратных скобок с коэффициентами для трех значений  $N$ .

В рассматриваемом эксперименте  $\Gamma_{pq} = 0$ , кроме  $\Gamma_{II}$  и  $\Gamma_{22} = \Gamma_{33}$ . Поэтому все  $\Pi_{pq}$  при  $p \neq q$  обратятся в нуль, а  $\Pi_{II}$  будет представлено выражением

$$\Pi_{II} = [\lambda(l_1 + l_{II} + l_{III}) + 2\mu l_1] \frac{1 + \Gamma_{II}}{1 + l_1}, \quad (4.13)$$

и поскольку очевидно, что

$$l_1 = \Gamma_{II}, \quad l_{II} = l_{III} = -\nu l_1 = \Gamma_{22}, \quad (4.14)$$

то

$$\Pi_{II} = [\lambda(1 - 2\nu) + 2\mu] \Gamma_{II}, \quad (4.15)$$

$$\Pi_{22} = \Pi_{33} = [\lambda(1 - 2\nu) - 2\mu] \Gamma_{II}.$$

Поскольку боковые плоские поверхности образца свободны от усилий, то на них  $T_i^0 = 0$ , а по формуле (2.7) это означает, что  $\Pi_{22} = \Pi_{33} = 0$  и, следовательно,

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (4.16)$$

Как видно, для полулинейного материала связь тензоров Пиолы и тензора-градиента при простом растяжении является линейной, в то время как для сложного напряженного состояния эта связь нелинейна, что и послужило причиной несколько необычного наименования такого материала\*.

\* Полулинейный материал обладает замечательным качеством. Для него плоская краевая задача подобно линейной теории сводится к отысканию аналитических функций комплексного переменного, эффективные способы нахождения которых хорошо отработаны. В связи с этим качеством полулинейный материал называют еще гармоническим [40].

Обозначим, как и в линейной теории,

$$\Pi_{II} = E \Gamma_{II}, \quad E = \frac{\lambda(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (4.17)$$

Для случая простого растяжения ввиду однородности деформированного состояния и равенства  $\nu_i$  и  $\nu_i^0$  соотношения (2.6), (2.5) могут быть проинтегрированы и представлены в форме

$$P = \Pi_{II} S_1^0 = \sigma_{II} S_1, \quad (4.18)$$

где  $P$  — растягивающая сила,  $S_1^0$  и  $S_1$  — начальная и текущая площади поперечного сечения образца,  $\sigma_{II}$  — осевая компонента тензора истинных напряжений Коши.

На основании (4.18) зависимость  $P$  от  $l_1 = \Gamma_{II}$  отличается от зависимости  $\Pi_{II} \sim \Gamma_{II}$  только постоянным множителем и тоже линейна (рис. 6.5). В то же время зависимость  $\sigma_{II}$  от  $\Gamma_{II}$  нелинейна и, как легко на основании (4.18) и (4.17) представить,

$$\sigma_{II} = \frac{S_1^0}{S_1} E \Gamma_{II} = \frac{E \Gamma_{II}}{(1 - \nu \Gamma_{II})^2}. \quad (4.19)$$

При растяжении стержня из полулинейного материала существует предельное относительное удлинение

$$(l_1)_{\max} = (\Gamma_{II})_{\max} = \frac{1}{\nu}. \quad (4.20)$$

При этом стержень истончается до нуля, а истинные напряжения становятся бесконечными.

Коэффициент  $\nu$  подобен коэффициенту Пуассона в линейном случае, и, следовательно, предельное значение относительного удлинения порядка  $2 \sim 3$ . Высокоэластичные материалы не склонны к образованию шейки, например резина, могут растягиваться до значений  $l_1 = 10$  и выше, и для таких материалов полулинейная теория не годится.

Любопытно отметить, что в эксперименте на сжатие, для которого во всех приведенных формулах надо изменить знак  $l_1$  на обратный, при линейной диаграмме  $|P| \sim |l_1|$  диаграмма

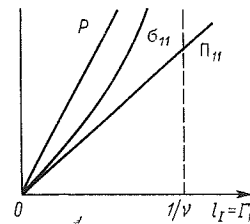


Рис. 6.5

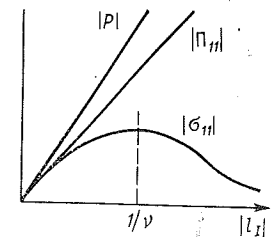


Рис. 6.6

$|\sigma_{11}| \sim |l_1|$  (рис. 6.6) имеет максимум при том же, что и в (4.20), значении

$$|l_1| = \frac{1}{\nu}$$

и содержит за этой точкой падающий участок. А поскольку его прохождение, как и всей диаграммы  $|\sigma_{11}| \sim |l_1|$ , требует увеличения сжимающей силы  $P$  и, следовательно, подкачки энергии, то этот падающий участок материала ведет себя устойчиво. Таким образом, полулинейный материал доставляет пример устойчивой падающей диаграммы, вокруг вопроса о которой в настоящее время ведется оживленная дискуссия.

Не останавливаясь на других представлениях упругого потенциала\*, отметим лишь, что при всяком его задании как функции  $l_N$  при одноосном растяжении — сжатии будет справедлива формула

$$\Pi_{pq} = \frac{\partial f}{\partial l_N} \frac{\delta_{Np}(\delta_{Nq} + \Gamma_{Nq})}{1 + l_N}, \quad \Gamma_{NN} = l_N, \quad (4.21)$$

с тем типом суммирования по  $N$ , который указан для формулы (4.12), а для компонентов тензоров Пиолы и Коши — формулы

$$\Pi_{11} = \frac{\partial f}{\partial l_1}, \quad \Pi_{22} = \Pi_{33} = 0, \quad (4.22)$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial f}{\partial l_1} (1 + l_1)^2, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0.$$

## § 5. К ВОПРОСУ О МЕТОДЕ ШАГОВ

В практике расчетов напряженно-деформированного состояния при больших деформациях широко используется метод шагов с использованием на каждом шаге определяющего соотношения для малых деформаций относительно изменившейся конфигурации тела.

Пусть в момент  $t$  деформация тела известна:

$$x_i = x_i(a_k, t), \quad (5.1)$$

и пусть в следующий малый отрезок времени  $\Delta t$  в результате действия внешних сил совершается малая деформация. Представляется естественным определить эту малую добавку  $\Delta \varepsilon_{ij}$ , так же как и в линейной теории — на основании линейного тензора деформации Коши

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij}(x_k, t) \Delta t. \quad (5.2)$$

\* Существующую на этот счет информацию можно получить в книгах [40; 71].

Решая краевую задачу в скоростях, что, кстати, удобно для неупругих тел, определим соответствующее поле добавочных перемещений  $\Delta u_i = \Delta x_i$ , новое поле

$$x'_i = x_i(a_k, t) + \Delta x_i(a_k, t)$$

и новую конфигурацию тела. Затем совершаем следующий шаг применительно к измененной геометрии тела. Если для каждого шага скорость деформации представить как функцию начальных координат  $a_k$ , то сумма таких шагов должна в пределе сводиться к интегралу

$$\int_0^t e_{ij} dt,$$

который должен бы представлять деформацию  $\varepsilon_{ij}^0$  тела.

Однако это не так. Действительно, рассмотрим проблему шагов целиком в рамках тензора Грина.

Пусть

$$x'_i = x_i + \Delta x_i \quad (\Delta x_i = \Delta u_i),$$

тогда при  $\Delta x_i \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij}^{0'} &= \frac{\partial x'_k}{\partial a_i} \frac{\partial x'_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} = \left( \frac{\partial x_k}{\partial a_i} + \frac{\partial \Delta x_k}{\partial a_i} \right) \left( \frac{\partial x_k}{\partial a_j} + \frac{\partial \Delta x_k}{\partial a_j} \right) - \delta_{ij} \cong \\ &\cong 2\varepsilon_{ij}^0 + \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial \Delta x_k}{\partial a_j} + \frac{\partial x_k}{\partial a_j} \frac{\partial \Delta x_k}{\partial a_i} = 2\varepsilon_{ij}^0 + 2\Delta \varepsilon_{ij}^0, \end{aligned}$$

где, как нетрудно показать,

$$2\Delta \varepsilon_{ij}^0 = \left( \frac{\partial \Delta x_k}{\partial x_m} + \frac{\partial \Delta x_m}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_m}{\partial a_j} = \left( \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial \Delta u_m}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_m}{\partial a_j},$$

т. е.

$$\Delta \varepsilon_{ij}^0 = e_{mn} \frac{\partial x_n}{\partial a_i} \frac{\partial x_m}{\partial a_j} \Delta t, \quad (5.3)$$

что не совпадает с (5.2) и при делении на  $\Delta t \rightarrow 0$  повторяет формулу (3.2).

Таким образом, заменить исходную задачу на пошаговую для скоростей деформаций можно, но только суммирование результатов шагов после пересчета скоростей в начальных координатах надо осуществлять по формуле

$$\varepsilon_{ij}^0 = \int_0^t \frac{\partial x_m}{\partial a_i} \frac{\partial x_n}{\partial a_j} e_{mn}(a_k, t) dt. \quad (5.4)$$

1. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Уругоупругая задача. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Батдорф С. Б., Будянский Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика. 1961. № 1. С. 134—155.
3. Генки Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений // Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. С. 114—135.
4. Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974.
5. Динариев О. Ю., Мосолов А. Б. О виде функционала пластичности в теории уругоупругих процессов // МТТ. 1989. № 1. С. 169—175.
6. Друккер Д. О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика. 1964. № 3. С. 115—128.
7. Екобори Т. Научные основы прочности и разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1978.
8. Ибрагимов В. А., Ключников В. Д. О некоторых характерных особенностях уругоупругих решений в теории трещин // МТТ. 1978. № 5. С. 122—131.
9. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория уругоупругого пластического тела // М.: Наука, 1971.
10. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948.
11. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // ПММ. 1954. Т. 18, вып. 6. С. 641—666.
12. Ильюшин А. А. О приращении пластической деформации и поверхности текучести // ПММ. 1960. Т. 24, вып. 4. С. 663—666.
13. Ильюшин А. А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 3—29.
14. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
15. Иосимира И. Замечания к теории скольжения Батдорфа и Будянского // Механика. 1960. № 1, С. 109—116.
16. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным уругоупругим // Укр. мат. журн. 1954. Т. 6, № 3. С. 314—325.
17. Кадашев Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. 1958. Т. 22, вып. 1. С. 78—89.
18. Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А. Основы экспериментальной механики разрушения. М.: Изд-во МГУ, 1989.
19. Ключников В. Д. О законах пластичности для частного класса путей нагружения // ПММ. 1957. Т. 21, вып. 4. С. 534—543.
20. Ключников В. Д. О возможном пути построения соотношений пластичности // ПММ. 1959. Т. 23, вып. 2. С. 282—291.
21. Ключников В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория // ПММ. 1959. Т. 23, вып. 4. С. 722—731.
22. Ключников В. Д. О крутильной потере устойчивости при пластических деформациях // ПМТФ. 1964. № 4, С. 91—93.
23. Ключников В. Д. Аналитическая теория пластичности // МТТ. 1965. № 2. С. 82—87.
24. Ключников В. Д. Поверхность нагружения и допуски при ее экспериментальном определении // ДАН СССР. 1975. Т. 221, № 2. С. 229—231.
25. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979.
26. Ключников В. Д. О допустимых формах соотношений пластичности // ДАН СССР. 1980. Т. 255. № 1. С. 57—59.
27. Ключников В. Д. Возможности макроопыта и форма определяющих соотношений // ДАН СССР. 1982. Т. 264, № 3. С. 578—580.
28. Ключников В. Д. Дефекты эндохронной теории пластичности // МТТ. 1989. № 1. С. 176—178.
29. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функциональный анализ. М.: Наука, 1981.
30. Крёнер Е. Общая теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965.
31. Левитас В. И. Большие уругоупругие деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка, 1987.
32. Ленский В. С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории уругоупругих деформаций // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 58—82.
33. Ленский В. С. Гипотеза локальной определенности в теории пластичности // МТТ. 1962, № 5. С. 154—158.
34. Ленский В. С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Уругость и неугругость. Вып. 5. Изд-во МГУ, 1978. С. 65—96.
35. Леонов М. Я. Элементы аналитической теории пластичности // ДАН СССР, 1972. Т. 205, № 2. С. 303—306.
36. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391—401.
37. Леонов М. Я., Швайко Н. Ю. О зависимости между напряжениями и деформациями в окрестности угловой точки траектории нагружения // ДАН СССР. 1966. Т. 71. № 2. С. 306—309.
38. Линь Т. Г. Физическая теория пластичности // Механика. Новое в зарубежной науке. Сер. 7, Проблемы теории пластичности. М.: Мир, 1976. С. 7—68.
39. Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории угругости для изотропного разномодульного тела // МТТ. 1978. № 6. С. 29—34.
40. Лурье А. И. Теория угругости. М.: Наука, 1970.
41. Малмейстер А. К. Уругость и неугругость бетона. Рига: Изд-во АН Латв. ССР, 1957.
42. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории угругости. М.: Наука, 1968.
43. Надаи А. Пластичность. М.: ОНТИ, 1937.
44. Новожилов В. В., Кадашев Ю. И. Микронапряжения в конструктивных материалах. Л.: Машиностроение, 1990.
45. Онат Е., Друккер Д. С. Неугругая потеря устойчивости в теории течения // Механика. 1955. № 3. С. 81—89.
46. Победря Б. Е. Механика композитных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984.
47. Попов Л. Г. Описание эффектов сложного деформирования соотношениями, основанными на модели Ю. Н. Работнова // МТТ. 1984. № 1. С. 48—56.
48. Попов М. М. Термометрия и калориметрия. М.; Л., 1934.
49. Прагер В. Уругение металла при сложном напряженном состоянии // Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948.
50. Прагер В. Теория пластичности: обзор новейших успехов // Прагер В., Ходж Ф. Теория идеальноупругих тел. М.: ИЛ, 1956.
51. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: ИЛ, 1963.
52. Пэжина П., Савчук А. Проблемы термодинамики // Новое в зарубежной науке. № 18. М.: Мир, 1979. С. 95—202.
53. Работнов Ю. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства уругоупругого пластического тела // ПММ. 1959. Т. 23, вып. 1. С. 164—169.
54. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
55. Рыхлевский Я. К. Математическая структура угругих тел. М.: Инст. проблем механики АН СССР, 1983.

56. Сандерс Дж. Соотношения между напряжениями и деформациями в пластической области, основанные на линейных функциях нагружения // Механика. 1956. № 3. С. 99—109.
57. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
58. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973.
59. Слепьян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981.
60. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.
61. Теория пластичности / Под ред. Ю. Н. Работнова. М.: ИЛ, 1948.
62. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
63. Хилл Р. Математическая теория пластичности // М.: ГИТТЛ, 1956.
64. Хилл Р. Некоторые основные принципы механики твердых тел при отсутствии влияния естественного времени // Механика. 1960. № 3. С. 75—93.
65. Хилл Р. Бифуркация и единственность в нелинейной механике сплошной среды // Проблемы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР, 1961. С. 448—457.
66. Хознемзер К., Прагер В. К. К механике пластического поведения стали // Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. С. 257—288.
67. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала // МТТ. 1974, № 2. С. 148—174.
68. Христианович С. А., Шемякин Е. И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении // МТТ. 1969. № 5. С. 138—149.
69. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде // ПММ. 1967. Т. 31, вып. 3. С. 476—488.
70. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
71. Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
72. Чикала П. О предельной (критической) нагрузке пластины, сжатой за пределы упругости // Механика. 1959. № 3. С. 141—145.
73. Швайко Н. Ю. Сложное нагружение и некоторые вопросы бифуркации упругопластического процесса // ПММ. 1977. Т. 41, вып. 5. С. 935—942.
74. Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление. М.: ГИТТЛ, 1952.
75. Coleman B. D., Noll W. Approximation theory for functionals, with applications incontinuum mechanics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1960. V. 6.
76. Drucker D. C. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations // Proc. of the first US Nat. Congr. of Appl. Mech. ASME. 1951.
77. Dudale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8, N 2.
78. Fracture / Ed. Liebowitz. New-York; London: Acad. Press, 1968. V. 1, 2. 1971.
79. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow insolids // Philos. Trans. of Roy Soc. of London. Ser. A. 1920. V. 221. P. 163—198.
80. Handelman G. H., Lin C. C., Prager W. On the mechanical behaviour of metals in the strain-hardening range // Quart. Appl. Math. 1947. V. 4. P. 397—407.
81. Irwin G. Fracture Dynamics // Fracture of Metals. ASM. Cleveland. 1948.
82. Irwin G. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. 1957. V. 24, N 3.
83. Irwin G. Fracture // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1958.
84. Klushnikov V. D. Stability of materials and structures // Plasticity and Failure Behaviour of Solids. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht (Boston) London, 1990. P. 201—211.
85. Koiter W. T. Stress-strain relations uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // Quart. Appl. Math. 1953. V. 11, N 3. P. 350—354.
86. Lin T. H. A proposed theory of plasticity based on slips // Proc. of the second US Nat. Congr. of Appl. Mech. 1954. P. 461—468.
87. Lindholm U. S. Some experiments in dynamic plasticity under combined stress // Symp. Mech. Behav. Mater. Dyn. Loads. 1967.
88. Orowan E. Fundamentals of brittle behaviour of metals // Fatigue and Fracture of Materials. N. Y., 1950.
89. Prager W. The stress-strain laws of the mathematical theory of plasticity — a survey of recent progress // J. Appl. Mech. 1948. V. 15. N 3. P. 226—233.
90. Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // J. Appl. Mech. Trans. ASME. V. 35. ser. E. 1968, N 2. P. 379—386.
91. Rivlin R. S. Some comments on the endochronic theory of plasticity // Int. J. Solid Structures. 1981. V. 17, N 2. P. 231—248.
92. Sneddon I. The distribution of stress neighbourhood of cracks in elastic solid // Proc. Roy. Soc. ser. A. 1946. V. 187.
93. Valanis K. C. A theory of viscoplasticity without a yield surface // Arch. Mech. Stasow. 1971. V. 23. N 4. P. 517—551.



Учебное издание

**КЛЮШНИКОВ**  
Владимир Дмитриевич

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ**

Зав. редакцией Л. А. Николова  
Редактор Л. О. Богданкевич  
Художественный редактор Ю. М. Добрянская  
Технический редактор Н. И. Матюшина  
Корректоры Л. С. Клочкова, В. И. Долина

ИБ № 7505

ЛР N040414 от 27.03.92.

---

Сдано в набор 26.05.94                      Подписано в печать 27.12.94  
Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.                              Бумага типографская № 2.  
Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 12.  
Уч.-изд. л. 10.84 Тираж 2000 экз. Заказ № 1000. Изд. № 2849.

---

Ордена «Знак Почета»  
издательство Московского университета  
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.  
Серпуховская типография  
Унрполиграфиздата Мособлисполкома

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

В 1995 ГОДУ ВЫЙДЕТ КНИГА:

**ПОБЕДРЯ Б. Е.**

**Численные методы в теории упругости и пластичности:**

Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.:  
Изд-во МГУ, 1995. — 22 л. (в пер.).

В учебном пособии (1-е изд. — 1981 г.) дается краткое оригинальное изложение основ механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Изложены основы современных эффективных численных методов решения физически линейных и нелинейных краевых задач МДТТ. Описаны разностные методы, метод конечных элементов, метод Монте-Карло, вариационные методы. Значительное место уделяется итерационным методам и способам улучшения их сходимости, а также методам решения краевых задач МДТТ со свойствами, зависящими от температуры и времени.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела.