Д.Д.Иваненко, П.И.Пронин, Г.А.Сарданашвили

КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

М.: Изд-во МГУ, 1985.— 144 с.

Излагается калибровочный подход к теории гравитационного взаимодействия с использованием современного математического аппарата расслоенных пространств, общего для теории гравитации и теории калибровочных полей. В рамках этого подхода теория гравитации трактуется как калибровочная теория со спонтанным нарушением симметрии, хиггс-голдстоуновским полем в которой служит эйнштейновское гравитационное поле. Анализируются основные калибровочные модели теории гравитации. Следствием калибровочной теории гравитации является обобщение ОТО на теорию гравитации с кручением, источником которого является спин материи. Излагаются основы теории гравитации с кручением, рассматривается взаимодействие классических и квантовых полей материи с полем кручения.

Книга предназначена для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области теории поля, гравитации и элементарных частиц.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория гравитации Эйнштейна — общая теория относительности (ОТО), придавшая геометрический смысл гравитации, связав ее с римановой кривизной пространства-времени, за 70 лет после своего установления (в конце 1915 г.) стала базой понимания пространства-времени, поля тяготения и «обычной» материи. Несмотря на наличие в ней ряда трудностей, признаваемых так или иначе практически всеми авторами (сингулярности, отсутствие общепризнанной трактовки энергии, невозможность учесть «Большие числа» Эддингтона—Дирака, связывающие космологические и квантовые атомные величины и др.), любые иные варианты моделей тяготения так или иначе учитывают ОТО и сравнивают свои результаты с ОТО, объяснившей и предсказавшей ряд эффектов в лабораторных, планетарных, звездных и космологических условиях вплоть до расширения наблюдаемой Вселенной. Вместе с тем наличие упомянутых трудностей и ряда невыясненных пунктов, а также необходимость построения квантовой гранд-единой теории всех взаимодействий и полей побуждают к более или менее существенному выходу за рамки стандартной ОТО; сюда относятся тенденции возврата в основном к пространству Минковского (А. А. Логунов и др.) или, напротив, исследование радикальных изменений уравнений Эйнштейна—Гильберта и самих концепций пространства-времени-тяготения и ряда основных законов физики в экстремальных планковских и запланковских условиях сверхвысоких энергий $\approx 10^{19}$ ГэВ, минимальных длин $\approx 10^{-33}$ см, реализуемых по всей видимости в области Большого взрыва, давшего начало ныне наблюдаемому расширению Вселенной практически общепризнанного Фридмановского общерелятивистского типа; экстремальные условия вероятно имеют место внутри элементарных частиц и кварков (кручение, дискретность пространства, дополнительные измерения, супергравитация и др.: Уилер, Бертотти, Реками, Дюрр, Вейцзеккер, Пенроуз, группа Тредера, группа Иваненко, группа Траутмана, группа Хеля и др.).

Целесообразно поэтому говорить, что вслед за ньютоновым этапом классической гравитации 17—19 вв. и краткосрочным периодом спецрелятивистской гравитации, предложенной Пуанкаре (в статьях 1905—1906 гг., где он параллельно с Эйнштейном устанавливал специальную теорию относительности (СТО), основанную на псевдоэвклидовом пространстве-времени, разработанном затем Минковским); после этого последовал этап ОТО, подготовлявшийся Эйнштейном с 1907 г. (в дальнейшем сотрудничестве с Марселем Гроссманом и учетом вклада Гильберта). Ныне мы вступили, примерно с середины 60-х годов, в своего рода особый пост-эйнштейновский период. Его главнейшим признаком является сближение гравитации с другими полями и построение единых теорий. Математическим формализмом, лежащим в основе современных квантовых теорий поля, является их трактовка как калибровочных, компенсирующих полей. Естественно поэтому применить тот же подход и к гравитации, чему посвящена настоящая книга, делающая ударение на учет кручения наряду с кривизной. За подробностями истории СТО и ОТО отсылаем к литературе [1, 2, 275, 277, 281—283, 286, 293—296, 298—300] и только коротко отмечаем другие видоизменения и расширения ОТО и уравнений поля Гильберта — Эйнштейна.

Уже вскоре после создания ОТО были предложены варианты единых теорий, пытавшихся вслед за геометризацией гравитации интерпретировать геометрически также электромагнитное поле и таким путем построить геометрическую картину всей известной тогда физической реальности. Для этого потребовалось обобщить риманову геометрию ОТО, т. е. еще дальше отойти от плоского бесконечного псевдоевклидова пространства специальной теории относительности. Первый вариант предложил Вейль в 1918 г., сделавший ударение на конформной симметрии и пришедший к изменению длины вектора при параллельном переносе. Эддингтон рассмотрел более общие не риман-эйнштейновские связности и квадратичные по кривизне лагранжианы. Картан в 1922 г., наряду с римановой кривизной, ввел кручение. Калуца в 1921 г. впервые предложил перейти к 5-мерному пространству, чтобы получить уравнения Эйнштейна и Максвелла.

Эйнштейн, относившийся сначала к варианту Вейля отрицательно, затем принял участие в разработке всех указанных вариантов единых теорий, предложив в 1928 г. теорию телепараллелизма. Позднее он начал разработку моделей пространств с несимметричной метрикой и все последние годы своей деятельности посвятил построению единых геометризованных теорий. В своей работе 1955 г., за две недели до кончины, Эйнштейн подчеркнул важное значение коэффициентов связности, не выражаемых через метрику, как в ОТО.

Единые теории 20-х годов не достигли поставленной цели и отошли далеко на второй план в годы построения квантовой механики и ядерной физики.

В настоящее время проблема связи теории гравитации и теории элементарных частиц вновь стала актуальной, стимулируемая всей современной программой объединения элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий. Базу всех моделей Большого объединения составляет теория калибровочных полей [3, 4]. Ее успехи общеизвестны. К ним относятся прежде всего модель электрослабых взаимодействий Вейнберга — Салама, подтвержденная открытиями предсказанных ею угла смешивания, нейтральных токов и наконец в 1983 г. промежуточных $W^{\pm}$-, Z-бозонов; глюонная модель взаимодействия кварков — квантовая хромодинамика. В теории поля введение калибровочных полей в качестве переносчиков взаимодействия, отвечающих данной группе симметрий, стало универсальным способом описания взаимодействия с самыми разными симметриями. Поэтому необходимым шагом на пути включения гравитации в единую картину фундаментальных взаимодействий является построение ее калибровочной теории, с которой связывают надежды на преодоление и некоторых внутренних трудностей теории гравитации.

Калибровочная теория в формализме расслоений [5, 6] фактически реализовала идею геометризации взаимодействий, положенную в основу единых теорий 20-х годов. Причиной их неудачи было то, что, как и гравитацию, взаимодействия с внутренними — не пространственно-временными — характеристиками эти теории пытались описать тоже в рамках геометрии пространства-времени, или, прибегая к терминологии расслоений, геометрии касательного расслоения над пространством-временем. Тогда как в калибровочной теории для описания этих взаимодействий применяются расслоения, слоями которых являются не касательные пространства, а пространства соответствующих внутренних характеристик полей и частиц — изоспина, гиперзаряда, «цвета» и др. Напротив, именно теория гравитации долгое время не поддавалась калибровочной трактовке, хотя первые работы по калибровочной теории гравитации появились сразу вслед за рождением самой калибровочной теории в 1954 г. [7].

Главная трудность, которая на протяжении более четверти века препятствовала построению калибровочной теории гравитации, состояла в том, что калибровочные поля — это связности, а эйнштейновское гравитационное поле является метрическим (тетрадным).

В первой калибровочной модели гравитации Утиямы 1956 г. [8], основанной на калибровочной теории группы Лоренца, тетрадное гравитационное поле вводилось дополнительно к калибровочным полям группы Лоренца (связностям геометрии Римана—Картана) для компенсации общековариантных преобразований, однако калибровочный статус этого поля оставался неясным. Этот недостаток пытались устранить в рамках калибровочной теории группы Пуанкаре, трактуя тетрадное гравитационное поле как калибровочное поле группы трансляций. Такой подход долгое время доминировал в калибровочной теории гравитации, но полностью удовлетворительного результата не дал.

В то же время в попытках представить гравитационное поле как калибровочное упускалось из виду, что в калибровочной теории, помимо калибровочных полей, в случае спонтанного нарушения симметрий возникают также хиггс-голдстоуновские поля. Полем именно такого типа и оказывается эйнштейновское гравитационное поле в калибровочной теории гравитации, если ее строить непосредственно из принципа относительности как калибровочного принципа и принципа эквивалентности, реформулируемого в духе геометрии инвариантов Ф. Клейна и приводящего к ситуации спонтанного нарушения симметрии [9—12]. Этой теорией является калибровочная теория группы Лоренца, в которой группа Лоренца точных симметрий расширена до группы $GL(4, R)$ спонтанно нарушенных симметрий.

Что дает калибровочная трактовка гравитации? Прежде всего исчезает обособленность теории гравитации, которая как калибровочная теория пространственно-временных симметрий, имеющая свою весьма существенную специфику, дополняет известную схему калибровочной теории внутренних симметрий и позволяет включить гравитацию в объединенную картину фундаментальных взаимодействий.

Вклад гравитации в наблюдаемые процессы взаимодействия элементарных частиц незначителен из-за чрезвычайной малости гравитационной константы, однако не следует игнорировать возможность учета еще саламовской «сильной» гравитации [13], «сильного» кручения, супергравитации [14]. Определенные возможности связи гравитации и элементарных частиц предоставляет вновь возродившаяся в модернизированном многомерном варианте теория Калуца—Клейна [15, 16]. В последнее время выявилась существенная связь между космологией и моделями Большого объединения [17]. Примером этого является зависимость гравитационной константы от констант в моделях единых теорий в подходе индуцированной гравитации [18, 286].

Что касается собственно гравитации, то ее калибровочная теория в первую очередь приводит к аффинно-метрическому обобщению эйнштейновской ОТО, динамическими переменными в котором являются метрика и связность. Причем связность, в отличие от ОТО, включает в себя и антисимметричную компоненту — поле кручения.

Теория гравитации с кручением начала развиваться как ближайшее обобщение ОТО с работ Картана 1922 г., но затем была оставлена, главным образом потому, что источник кручения — спин — тогда не был еще открыт. Она стала возрождаться в конце 40-х годов, но окончательное признание получила с развитием калибровочной теории гравитации, когда кручение оказалось неотъемлемой частью этой теории, причем во всех ее вариантах.

Как и ОТО, теория гравитации с кручением может быть построена непосредственно из принципов относительности и эквивалентности, а то, что источником поля кручения является спин (вторая, наряду с тензором энергии-импульса, пространственно-временная характеристика материи), делает существование кручения особенно правдоподобным. В макропределе при усреднении спин из-за своего дипольного характера исчезает и масса остается единственным источником гравитационного поля в ОТО. Иная ситуация может складываться при экстремальном состоянии материи, например в период Большого взрыва, когда спиновыми эффектами пренебречь нельзя и спин также становится динамическим источником гравитационного поля — кручения. Теория гравитации с кручением не противоречит ни одному из классических эффектов ОТО и в варианте теории Эйнштейна—Картана полностью совпадает с ОТО в пустоте. Вместе с тем она привлекла в последнее время большое внимание, так как в рамках этой теории открывается перспектива преодоления некоторых трудностей ОТО, например устранения сингулярностей.

К настоящему времени в целом построены кинематическая и динамическая схемы теории гравитации с кручением [19]. Однако она остается пока модельной теорией, поскольку продолжает стоять вопрос о существовании кручения. Ответ на него должен дать эксперимент. Возможным экспериментом по измерению кручения могут стать, например, опыты по движению спинирующих частиц, для которых предсказывается эффект прецессии спина [20, 21], либо опыты по нарушению CP-инвариантности в распадах частиц за счет кручения пространства-времени [22, 23]. Экспериментальные предсказания кручения осложняются тем, что неизвестна константа взаимодействия с полем кручения, которая, если следовать калибровочной теории, может быть отлична от гравитационной, например больше ее.

Важно дальнейшее выяснение физической природы поля кручения [24]. В частности, как мы показываем, оно может представлять собой коллективное поле фермионных пар. В этом случае поле кручения является только квантовым.

Заметим, что изучение релятивистских обобщений соотношений неопределенности Гейзенберга (см. А. А. Соколов и Д. Д. Иваненко, Квантовая теория поля, 1952) и исследование Бора—Розенфельда измеримости электромагнитного поля содействовали лучшему пониманию квантовой механики и теории поля. Следует ожидать, что построение квантовой теории гравитации с необходимостью должно включать и дальнейший анализ проблемы измерений (Г.-Ю. Тредер, Х. Борцесковски [276, 281] и др.; о ранних работах М. П. Бронштейна см. Г. Е. Горелик [280]). Исследование уравнений движения пробных частиц с классическим калибровочным зарядом, с учетом квантовомеханических соотношений неопределенности, показывает, что классическое неабелево калибровочное поле можно в принципе измерить точно, если калибровочный заряд пробных тел велик [279]. В частности, отсюда можно сделать вывод об измеримости поля кручения при использовании пробных тел с большим спином [275, 279].

Опишем вкратце содержание книги.

Глава I посвящена калибровочной теории внутренних симметрий. Излагается традиционная янг-миллсовская формулировка калибровочной теории, исследуется ситуация спонтанного нарушения симметрий в калибровочных моделях. Приводится реформулировка теории калибровочных полей на языке расслоений, опираясь на которую в следующей главе строится калибровочная теория гравитации.

В главе II гравитационное поле описывается в терминах расслоений и, исходя из анализа принципов относительности и эквивалентности и их реформулировки на языке расслоений, строится калибровочная теория гравитации, в которой метрическое гравитационное поле получает трактовку как поле хиггс-голдстоуновского типа, отвечающее спонтанному нарушению пространственно-временных симметрий.

Глава III посвящена анализу основных калибровочных моделей групп пространственно-временных симметрий. Ударение делается на калибровочных моделях группы Пуанкаре, как альтернативных хиггс-голдстоуновскому взгляду на гравитационное поле.

В главе IV приводится обзор классической теории гравитации с кручением в форме Эйнштейна—Картана. Описывается геометрия Римана—Картана гравитации с кручением. Рассматривается взаимодействие кручения со скалярным, электромагнитным и спинорным классическими полями, которое приводит, в частности, к появлению нелинейностей в уравнениях этих полей, в том числе спинорной нелинейности Иваненко—Гейзенберга в уравнении Дирака. Помимо материальных полей, в качестве источника кручения во многих моделях используется спиновая жидкость. Описывается ее гидродинамика в пространстве с кручением. В целом ряде случаев учет кручения сказывается в появлении дополнительных членов в правой части уравнений Эйнштейна для метрического гравитационного поля. Они, в частности, способны нарушать энергодоминантность тензора энергии-импульса материи и препятствовать формированию гравитационной сингулярности. В книге приводится космологическая модель такого типа.

В главе V исследуется взаимодействие квантовых материальных полей с классическим полем кручения. Основное внимание уделяется эффектам рождения частиц и поляризации вакуума в пространстве с кручением. Учет поляризации вакуума и условие перенормируемости теории существенно сужают неоднозначность в выборе лагранжиана поля кручения. Своего рода продолжением связи кручения со спинорной нелинейностью является описание кручения как коллективного поля фермионных пар, приводящее к ряду важных следствий, касающихся физической природы поля кручения.

Заключительная глава VI посвящена некоторым аспектам теории с динамическим кручением, лагранжиан которой отличается от гильберт-эйнштейновского лагранжиана ОТО и теории Эйнштейна—Картана и учитывает нужды квантования поля кручения.

Поскольку в книге повсеместно применяется язык расслоений, мы сочли необходимым снабдить ее глоссарием основных терминов и фактов из теории расслоенных пространств и дифференциальной геометрии. Некоторые вопросы вынесены в приложения. В этой связи отметим, что имеющиеся в тексте ссылки типа (Г.9) относятся к глоссарию, а ссылки типа (П1.7) к соответствующему приложению.

Глава I

ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

В этой главе рассматривается калибровочная теория групп только внутренних симметрий, т. е. не содержащих пространственно-временных преобразований.

В § 1 излагается традиционная янг-миллсовская (компенсационная) формулировка калибровочной теории, основанная на принципе локальной инвариантности. В § 2 обсуждается ситуация спонтанного нарушения симметрии в калибровочных моделях, неинвариантность вакуума в которых описывается посредством классических хиггс-голдстоуновских полей.

Математически наиболее корректную формулировку теория калибровочных полей получает, однако, в терминах расслоений. В § 3 показывается, что калибровочная теория непосредственно следует из формализации полевых систем расслоениями. При этом особое внимание уделяется анализу различных типов калибровочных преобразований и описанию хиггс-голдстоуновских полей в формализме расслоений.

§ 1. ТЕОРИЯ ЯНГА—МИЛЛСА

Исходным принципом теории калибровочных полей в ее традиционной формулировке, которая была дана в работах Янга—Миллса и Утиямы [7, 8] (см. русский перевод в [25]) и которая используется большинством авторов, не интересующихся геометрической трактовкой калибровочной теории, является принцип локальной инвариантности, называемый также калибровочным принципом. Он требует инвариантности функционала действия теории (для внутренних симметрий — лагранжиана) относительно локальных, т. е. зависящих от пространственно-временной точки, преобразований симметрий.

Задолго до Янга и Миллса калибровочный принцип фактически применил Вейль в 1918 г. в своей единой теории гравитации и электромагнетизма [26], когда, по аналогии с введением гравитационного поля для обеспечения инвариантности теории относительно общековариантных преобразований, введение электромагнитного поля связывалось с обеспечением инвариантности относительно масштабных преобразований (умножений на действительное число) [27, 28]. Однако теория Вейля 1918 г. привела не к описанию электромагнетизма, а к конформной теории гравитации и геометрии Вейля [28, 29], которые в современном калибровочном подходе получаются в рамках калибровочной модели группы $GL(4, R)$ (см. § 9).

Группой симметрии электромагнитного взаимодействия является группа локальных фазовых преобразований [30].

Пусть $\varphi(x)$ — волновая функция некоторого классического поля, лагранжиан которого инвариантен относительно группы $U(1)$ фазовых преобразований

$$U(1) \ni g : \varphi(x) \to (\exp i\alpha)\varphi(x).$$

Предположим теперь, что параметр этих преобразований α является некоторой функцией точки $x \in X$, т. е. рассмотрим локальные фазовые преобразования

$$g(x) : \varphi(x) \to (\exp i\alpha(x))\varphi(x). \tag{1.1}$$

Лагранжиан L поля φ в общем случае уже не будет инвариантен относительно таких преобразований, поскольку оператор $g(x)$, в отличие от оператора глобального преобразования g, не коммутирует с операторами частных производных ∂_μ:

$$\partial_\mu g(x) - g(x)\partial_\mu = \partial_\mu(g(x)).$$

Инвариантность L по $g(x)$ может быть обеспечена путем введения дополнительного векторного поля A_μ, интерпретируемого как электромагнитный потенциал, с законом локальных преобразований

$$g(x) : A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \tag{1.2}$$

и замены в L операторов частных производных ∂_μ на обобщенные (ковариантные, или компенсирующие) производные

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu. \tag{1.3}$$

Такой лагранжиан уже будет ковариантен как лагранжиан полей $\{\varphi\}$ и инвариантен как лагранжиан полей $\{\varphi, A\}$ относительно преобразований (1.1), (1.2), которые представляют собой известные калибровочные преобразования электродинамики.

Для электродинамики такой способ введения электромагнитного поля, однако, ничего существенно нового не давал, и ему не придали особого значения.

Решающий шаг в становлении калибровочной теории сделали Янг и Миллс в 1954 г. [7]. Они анализировали инвариантность взаимодействия нуклонов относительно вращений изоспина, которая приводит к закону сохранения изоспина и означает, что ориентация изоспина не имеет физического смысла и должна быть произвольной. Однако, если исходить из обычной (глобальной) симметрии, этот произвол ограничен тем, что, если ориентация изоспина задана в одной точке пространства-времени, свобода выбора ее в других пространственно-временных точках сразу пропадает. Но такое положение не совместимо хотя бы с основными принципами релятивизма. Это побуждает рассмотреть независимые вращения изоспина во всех точках пространства-времени и потребовать инвариантность теории относительно таких вращений.

Аналогичные рассуждения применимы к любым внутренним симметриям, и уже в следующей за [7], а также [31] работе Утиямы 1956 г. [8] была изложена общая схема калибровочной теории для групп внутренних симметрий. Статьи Салама и Уорда, Сакураи, Глэшоу и Гелл-Манна, Ю. Неемана в 1959—1961 гг. [33—36] (см. русский перевод в [25]) положили начало применению калибровочной теории к построению моделей взаимодействия элементарных частиц.

Пусть $\{\varphi^a(x)\}$ — мультиплет классических полей на пространстве-времени X с группой Ли G внутренних симметрий, описываемый лагранжианом $L(\varphi;\ \varphi_{,\mu})$. Применяя калибровочный принцип, потребуем, чтобы L был инвариантен относительно локальных преобразований симметрий, параметры которых зависят от точки $x \in X$. Эти преобразования образуют группу $G(X)$, которая называется локальной, или калибровочной группой.

Следует, однако, различать два рода калибровочных преобразований: преобразования системы отсчета (вращения базиса пространства) и преобразования самих полей при фиксированной системе отсчета. Как видно из приведенного выше обоснования Янгом и Миллсом принципа локальной инвариантности, последний требует инвариантности относительно калибровочных преобразований именно первого рода. Однако в случае внутренних симметрий для всякого преобразования полей $q \to q'$ можно найти преобразование системы отсчета $\Psi \to \Psi'$, такое, что q выглядит относительно Ψ' так же, как q' выглядит относительно Ψ, т. е. $\Psi' q = \Psi q'$. Обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому, будучи инвариантными относительно преобразований первого рода, лагранжиан и уравнения поля калибровочной теории оказываются инвариантными и относительно имеющих тот же вид калибровочных преобразований второго рода. Именно преобразования второго рода обычно понимаются под калибровочными преобразованиями в янг-миллсовской формулировке калибровочной теории.

Удобно ограничиться инифинитезимальными калибровочными преобразованиями

$$g(x): \varphi^a(x) \to \varphi^a(x) + \delta\varphi^a(x),\ \ \delta\varphi^a(x) = I^a_{mb}\varphi^b(x)\,\delta\omega^m(x), \qquad (1.4)$$

где I_m — генераторы группы G, образующие базис ее алгебры Ли $\mathfrak{G}$, $\delta\omega^m(x)$ — малые локальные параметры группы G.

Требование инвариантности лагранжиана $L(\varphi;\ \varphi_{,\mu})$ относительно преобразований (1.4) $\delta L = 0$ выражается тождествами (ПI.7) ($\varphi^a = q^a$, $b_m{}^{a\mu} = 0$) второй теоремы Нетер (см. Приложение I). При условии выполнения уравнений поля они имеют вид

$$\partial_\mu J_m{}^\mu = 0, \qquad (1.5)$$

$$J_m{}^\mu = 0, \qquad (1.6)$$

где

$$J_m^\mu = \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\mu}} I^a_{mb} \varphi^b \qquad (1.7)$$

ток симметрии (П1.3) полей φ. Тождество (1.5) совпадает с тождеством первой теоремы Нетер, выражающим инвариантность L относительно группы глобальных симметрий G, а специфика инвариантности L относительно локальных преобразований заключена в тождестве (1.6).

Тождества Нетер (1.5), (1.6) вместе с уравнениями поля

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^a} = \frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\mu}} = 0$$

можно рассматривать как функциональные уравнения на лагранжиан L, решение которых, однако, из-за тождества (1.6) всегда тривиально.

Нетривиальное решение для L получается, если предположить, что лагранжиан зависит от полей, закон локальных преобразований которых включает производные от параметров преобразований. Можно показать [36, 5], что такими полями с необходимостью являются векторные поля A_μ^m, принимающие значения в алгебре Ли $\mathfrak{G}$, с законом локальных преобразований

$$G(X) \ni g : A_\mu^m I_m \to g A_\mu^m I_m g^{-1} - g \partial_\mu g^{-1}, \qquad (1.8)$$

или в инфинитезимальном виде

$$I_m \delta\omega^m(x) : A_\mu^n \to c_{mk}^n A_\mu^k \delta\omega^m(x) + \partial_\mu \delta\omega^n(x), \qquad (1.9)$$

где $c_{mk}{}^n$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{G}$. В лагранжиан L эти поля должны входить в составе оператора обобщенной производной

$$D_\mu = \partial_\mu - A_\mu{}^m I_m \qquad (1.10)$$

или тензора

$$F_{\mu\nu}^m = \partial_\mu A_\nu^m - \partial_\nu A_\mu^m - c_{nk}^m A_\mu^n A_\nu^k, \qquad (1.11)$$

называемого тензором напряженности поля $A_\mu{}^m$.

В случае абелевой группы $G = U(1)$, имеющей единственный генератор $I = i$ и $c_{mk}{}^n = 0$, выражения (1.4), (1.9), (1,10) полностью совпадают с выражениями (1.1), (1.2), (1.3), а (1.11) — с тензором напряженности электромагнитного поля. Это дает основание рассматривать преобразования (1.4), (1.9) как обобщение калибровочных преобразований (1.1), (1.2) в электродинамике на неабелевы группы симметрий. Поэтому они тоже были названы калибровочными преобразованиями, а поля $A_\mu{}^m$ — калибровочными полями.

Более подходящим, хотя и получившим меньшее распространение, названием полей $A_\mu{}^m$ является, по нашему мнению, «компенсирующие поля». Оно прямо указывает на функцию, которую эти поля выполняют в составе обобщенной производной D_μ — компенсировать члены вида $\partial_\mu(g(x))$, $g\in G(X)$, возникающие при локальных преобразованиях полей под знаком производных.

$$\varphi'=g\varphi, \quad \partial_\mu\varphi'=g\partial_\mu\varphi+\partial_\mu(g)\varphi.$$

В результате для $D_\mu\varphi$ закон локальных преобразований имеет вид

$$D'_\mu\varphi=\partial_\mu\varphi'-A'^m_\mu I_m\varphi'=g\partial_\mu\varphi+\partial_\mu(g)\varphi-gA^m_\mu I_m\varphi-\partial_\mu(g)\varphi=gD_\mu\varphi$$

(сравните с $\partial_\mu\varphi'=g\partial_\mu\varphi$, когда $g\in G$). Отсюда следует, что $G(X)$-инвариантный лагранжиан L можно построить непосредственно из обычного G-инвариантного лагранжиана простой заменой в нем операторов частных производных ∂_μ на обобщенные D_μ. Последние поэтому иногда называют компенсирующими, а приведенный подход к построению калибровочной теории — компенсационным. Он аналогичен построению электродинамики, исходя из условия ее инвариантности относительно локальных фазовых преобразований [30].

Калибровочная теория создавалась ее авторами именно как обобщение электродинамики на неабелевы симметрии, так чтобы в частном случае $G=U(1)$ она полностью воспроизводила электродинамику.

Таким образом, для построения локально инвариантной теории мультиплет исходных полей $\{\varphi^a\}$, называемых обычно материальными полями, следует дополнить калибровочными полями $\{A_\mu{}^m\}$, отвечающими данной группе симметрий G, с законом калибровочных преобразований (1.8). Полная система полей $\{\varphi^a, A_\mu{}^m\}$ описывается лагранжианом

$$L=L_\varphi(\varphi, D_\mu\varphi)+L_A, \tag{1.12}$$

где лагранжиан материальных полей L_φ строится указанной выше заменой $\partial_\mu\to D_\mu$ из лагранжиана свободных полей $\{\varphi^a\}$, а L_A — лагранжиан калибровочных полей.

Последний, по аналогии с лагранжианом электромагнитного поля выбирается в виде

$$L_A=\frac{1}{\alpha}F^m_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_m, \tag{1.13}$$

где свертка по индексам m осуществляется относительно некоторой невырожденной G-инвариантной билинейной формы g_{mn} на алгебре Ли $\mathfrak{G}$. Например, если G полупроста, такой формой выбирается форма Киллинга $g_{mn}=c^b_{mk}c^k_{nb}$. Если группа G компактна, форма Киллинга является отрицательно определенной и существует базис алгебры Ли $\mathfrak{G}$, в котором она принимает вид $g_{mn}=-2\delta_{mn}$. Константу α в этом случае выбирают в виде $\alpha=8\varepsilon^2$. В калибровочной теории внутренних симметрий обычно ограничиваются моделями с компактными группами симметрий, поскольку отрицательная определенность формы Киллинга гарантирует положительную определенность гамильтониана калибровочных полей в таких моделях.

Вариация лагранжиана (1.12) по полям φ^a и $A_\mu{}^m$ приводит к следующим уравнениям поля

$$D_\mu \frac{\partial L_\varphi}{\partial D_\mu \varphi^a} - \frac{\partial L_\varphi}{\partial \varphi^a}\Bigg|_{D_\mu\varphi^a=\mathrm{const}} = 0, \qquad (1.14)$$

$$\frac{1}{\alpha} D_\nu F_m^{\mu\nu} + J_{m\varphi}^\mu = 0. \qquad (1.15)$$

Лагранжиан (1.12) и уравнения поля (1.14), (1.15) имеют вид лагранжиана и уравнений поля материальных полей φ^a, взаимодействующих посредством калибровочных полей $A_\mu{}^m$, источником которых, согласно уравнениям (1.15) (называемым уравнениями Янга—Миллса), являются токи симметрий $J_{m\varphi}{}^\mu$ полей φ^a. Это позволяет интерпретировать калибровочные поля $A_\mu{}^m$ как потенциалы некоторого взаимодействия с группой симметрий G и константой взаимодействия ε ($\varepsilon=|\alpha|$), которая переобозначением калибровочных полей $A_\mu^m \to \frac{1}{\varepsilon} A_\mu^m$ может быть убрана внутрь компенсирующей производной $D_\mu = \partial_\mu - \varepsilon A_\mu^m$. Причем, если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ разбивается на прямую сумму двух подалгебр, константа взаимодействия ε может быть выбрана различной для калибровочных полей, отвечающих разным подалгебрам.

Взаимодействие, потенциалами которого служат калибровочные поля, относится к так называемому минимальному типу взаимодействия, поскольку $A_\mu{}^m$ входит в лагранжиан материальных полей только в составе компенсирующих производных.

Отметим, что, в отличие от электродинамики, уравнения неабелевых калибровочных полей (1.15) и в отсутствие источников не становятся уравнениями свободных полей, а содержат нелинейности типа $\partial A \cdot A$ и A^3, т. е. калибровочные поля, подобно гравитационному полю, являются самодействующими.

Согласно второй теореме Нетер калибровочная инвариантность функционала действия калибровочной теории приводит к условиям связи (П1.6)

$$D_\mu (D_\nu F_m^{\mu\nu} + J_{m\varphi}^\mu) = 0 \qquad (1.16)$$

на уравнения поля (1.14), (1.15) калибровочной теории, которые тем самым не являются независимыми, и их решение при заданных начальных и граничных условиях неоднозначно. Оно включает в себя класс полей (φ, A), связанных между собой калибровочными преобразованиями и описывающих, как полагают, одно и то же физическое состояние системы. Чтобы практически работать с такими классами, в них выбирают представителей, наложив на поля A дополнительное калибровочное условие. Примеры этих условий известны из электродинамики.

Таким образом, калибровочная теория относится к теориям со связями [37, 38]. Описание таких теорий в гамильтоновой формулировке было дано Дираком [39—41]. Наличие связей существенно сказывается на процедуре квантования калибровочных полей. Она основывается на функциональных интегралах, и интегрирование в производящем функционале квантовой калибровочной теории осуществляется по представителям классов калибровочно эквивалентных полей [42].

Калибровочная инвариантность лагранжиана (1.12) приводит к следующим законам сохранения — тождествам второй теоремы Нетер (П1.7):

$$\partial_\mu (J^\mu_{m\varphi} + J^\mu_{mA}) = 0, \tag{1.17}$$

$$J^\mu_{m\varphi} + J^\mu_{mA} + \frac{\partial L}{\partial A^m_\mu} = 0, \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A^m_{\mu,\nu}} + \frac{\partial L}{\partial A^m_{\nu,\mu}} = 0, \tag{1.19}$$

где $J^\mu_{m\varphi}, J^\mu_{mA}$ — токи симметрий полей $\{\varphi^a\}$ и $\{A_\mu{}^m\}$. Тождества (1.18), (1.19), являются сильными, тогда как тождество (1.17) — слабое, т. е. выполняющееся только на экстремалях — полях, являющихся решениями полевых уравнений. Законы сохранения (1.17)—(1.19) не независимы, и тождество (1.17) может быть получено взятием дивергенции от тождества (1.18) с учетом уравнений поля и тождества (1.19).

Тождества (1.17) — (1.19) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$J^\mu_{n\varphi} \to c^k_{mn} J^\mu_{k\varphi} \delta\omega^m,$$

$I_m \delta\omega^m$:

$$J^\mu_{nA} \to c^k_{mn} J^\mu_{kA}\, \delta\omega^m + \frac{\partial L}{\partial A^k_{\nu,\mu}} c^k_{nm} \partial_\nu \delta\omega^m. \tag{1.20}$$

Причем, хотя закон сохранения (1.17) сам по себе не форм-инвариантен, он становится таковым с учетом тождества (1.18).

Заметим, что если материальные поля φ рассматриваются во внешнем калибровочном поле, то законы сохранения (1.17) — (1.19) сводятся к выражению

$$D_\mu J^\mu_{m\varphi} = 0. \tag{1.21}$$

Условие калибровочной инвариантности приводит к тому, что калибровочные поля, как и электромагнитное поле, не должны иметь массу, поскольку включение массового члена в лагранжиан L_A нарушало бы его калибровочную инвариантность. Безмассовость калибровочного поля была первоначально серьезным препятствием для построения реалистичных калибровочных моделей, поскольку взаимодействия элементарных частиц, кроме электромагнитного и гравитационного, короткодействующие, т. е. должны переносится массивными частицами. Правда, в современной модели сильных взаимодействий — хромодинамике — взаимодействие между кварками осуществляется тоже посредством безмассовых частиц — глюонов — калибровочных полей «цветной» группы $SU(3)$, но проблема, почему, несмотря на это, сильное взаимодействие имеет конечный радиус, а также почему не наблюдаются свободные кварки, остается до конца еще не выясненной.

В 1964 г. Хиггсом [43] был предложен механизм спонтанного нарушения симметрии, позволивший снабжать калибровочные поля массой и получать наблюдаемое расщепление масс в мультиплетах частиц без нарушения калибровочной инвариантности теории и сохраняя ее ренормируемость [44, 45] (см. русский перевод в [46]). В настоящее время в большинстве калибровочных моделей симметрия считается спонтанно нарушенной.

§ 2. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ

Согласно теореме Коулмена, доказываемой в рамках аксиоматической квантовой теории, нарушение симметрии в квантовой полевой системе всегда сопровождается нарушением симметрии ее вакуума [47—49]. Последнее называется спонтанным, если при этом сохраняется инвариантность (ковариантность) лагранжиана (гамильтониана) системы относительно преобразований нарушенных симметрий.

До недавнего времени доминировало представление о вакууме, как о некотором безчастичном состоянии с нулевыми физическими характеристиками. В квантовой теории поля таковым является фоковский вакуум. Однако оказалось, что фоковское представление алгебр канонических перестановочных и антиперестановочных соотношений описывает главным образом свободные частицы [50, 51]. В связи с этим возникло представление о «физическом» вакууме, близкое к понятию основного состояния. В отличие от «голого» фоковского вакуума, физический вакуум имеет ненулевые характеристики, тем самым он неинвариантен относительно соответствующих преобразований симметрий и с ним могут взаимодействовать поля и частицы.

Неинвариантность вакуума имеет место во многих моделях квантовой теории поля и статистики [50, 51]. Она является скорее правилом для систем с бесконечным числом степеней свободы, алгебры наблюдаемых которых допускают неэквивалентные неприводимые представления, а значит, и неэквивалентные вакуумы [51].

В калибровочных моделях спонтанное нарушение симметрии обычно моделируется введением так называемых хиггс-голдстоуновских полей, взаимодействие с которыми материальных и калибровочных полей интерпретируется как их взаимодействие с самим неинвариантным вакуумом [46]. Цель данного параграфа — показать, почему нарушение симметрии вакуума в квантовых моделях может описываться классическими полями, а также дать характеристики этих полей, имея в виду сопоставление с ними свойств гравитационного поля как хиггс-голдстоуновского поля в калибровочной теории пространственно-временных симметрий.

Хотя общепринятого корректного математического определения неинвариантного вакуума до сих пор не дано, можно, однако, установить основные признаки неинвариантности вакуума. Постараемся это сделать при минимальных ограничениях на операторные алгебры квантовых систем.

Всякая такая алгебра является инволютивной комплексной алгеброй, а общим для всех определений вакуума является то, что он должен быть циклическим (тотализирующим) вектором ее представления.

Пусть B — инволютивная алгебра с единицей и G — группа ее автоморфизмов (см. Приложение II). Воспользуемся тем, что всякое представление алгебры B с тотализирующим вектором может быть определено заданием некоторой положительной формы на B. Это соответствует заданию матрицы плотности квантовой системы и построению представления ее алгебры наблюдаемых методом Гельфанда, Наймарка, Сигала [51, 49]. Такой метод позволяет избежать явного описания гильбертова пространства представления и ограничиться рассмотрением только измеримых величин — операторных средних.

Пусть f — положительная форма на B. Определено действие группы G на форму f:

$$G \ni g : f(B) \to f_g(B) = f(g^{-1}(B)), \tag{2.1}$$

переводящее ее в некоторую другую положительную форму f_g на B. Формы f и f_g определяют представления π и π_g алгебры B с тотализирующими векторами $|\rangle$ и $|\rangle_g$ и пространствами представлений $H = \overline{B/N}$ и $H_g = \overline{B/g(N)}$.

Рассмотрим отображение

$$\tau_g : H \ni \eta(b) = b/N \to g(b)/g(N) = \eta_g(g(b)) \in H_g. \tag{2.2}$$

Оно получается факторизацией автоморфизма g алгебры B, который согласуется с факторизацией B по идеалам N и $g(N)$. Это отображение переводит вектор $|\rangle$ в вектор $|\rangle_g$, определяет изоморфизм гильбертовых пространств H и H_g и морфизм представлений

$$\pi(B) \to \pi_g(g(B)). \tag{2.3}$$

Возможны два случая.

1) Формы f и f_g для любого $g \in G$ определяют эквивалентные представления алгебры B. Тогда, поскольку g — автоморфизм B, то $f = f_g$, т. е. форма f является G-инвариантной. Если B — C^*-алгебра, это имеет место тогда и только тогда, когда $g \in G$ являются аппроксимативно внутренними автоморфизмами алгебры B. В этом случае отображение τ_g реализует непрерывное унитарное представление $\tau_g = \rho(g)$ группы G в H, такое, что $\eta(g(b)) = \rho(g)\eta(b)$ и $\pi(g(b)) = \rho(g)\pi(b)\rho^{-1}(g)$.

2) Форма f не является G-инвариантной, т. е. существуют такие элементы $b \in B$ и $g \in G$, что $f(b) \neq f_g(b) = f(g^{-1}(b))$, или, учитывая, что форма f линейна на B, $f(b) \neq 0$ для некоторого элемента $b \neq g(b)$. В этом случае представления π и π_g неэквивалентны и отображения (2.2), (2.3) есть операторы перехода от одного неэквивалентного представления к другому. В то же время обратные отображения $\tau_g^{-1} = \tau_{g^{-1}}$ позволяют все представления π_g, получаемые из данного представления π алгебры B в результате ее автоморфизмов, реализовывать как $\pi_g(B) = \pi(g^{-1}(B))$ в одном и том же гильбертовом пространстве H представления π. Но сама группа G не реализуется какими-либо операторами в H.

В реальных моделях в алгебре B действуют, как правило, две группы автоморфизмов — группа пространственно-временных симметрий G_{ex} и группа внутренних симметрий G_{in}. Если форма f G_{ex}-инвариантна, но G_{in}-неинвариантна и G_{ex} и G_{in} коммутируют, то форма f_g, $g \in G_{\mathrm{in}}$, также G_{ex}-инвариантна. Это не так, если эти группы не коммутируют между собой.

Важным примером таких групп являются группа трансляций $G_{\mathrm{ex}} = T$ и калибровочная группа $G_{\mathrm{in}} = G(T)$. Пусть форма f трансляционно инвариантна, но неинвариантна относительно элемента $g \in G(T)$, такого, что $dg - gd = d(g) \neq 0$, где d — генератор T. Тогда форма f_g оказывается уже T-неинвариантной, т. е. существует такой элемент $b \in B$, что

$$f_g(db) = f(g^{-1}(db)) = f(dg^{-1}(b)) - f(d(g^{-1})(b)) =$$
$$= -f(d(g^{-1})(b)) \neq 0.$$

Вместо этого форма f_g инвариантна относительно преобразований с генератором $D = d - g^{-1}dg$. В общем случае, когда f тоже T-неинвариантна, $D = d - A$, где A преобразуется относительно g как калибровочное поле. Действительно,

$$0 = f_g((d - A')(b)) = f(g^{-1}(d - A')(b)) =$$
$$= f((d - g^{-1}A'g + g^{-1}dg)(g^{-1}(b))) = f((d - A)(g^{-1}b)),$$

откуда, как и в (1.8), $A' = gAg^{-1} + dgg^{-1}$, т. е. A имеет смысл калибровочного поля.

Следующая теорема показывает, что степень нарушения симметрии никогда не бывает малой [52].

Теорема. Пусть B — C^*-алгебра с единицей, f и f' — состояния B, определяющие ее неприводимые представления π и π'. Если π и π' неэквивалентны, то существует такой элемент $b \in B$, что $|f(b^*b) - f'(b^*b)| \geqslant 2$.

Это указывает на то, что в физических системах нарушение симметрии по своему характеру должно быть аналогично фазовому переходу.

В заключение аксиоматического рассмотрения свойств неинвариантного вакуума приведем известную теорему Голдстоуна, которая в одном из вариантов формулируется так [113].

Теорема. В локальной трансляционно-инвариантной теории поля (с квазилокальными C^*-алгебрами наблюдаемых) с сохраняющимся локальным релятивистским 4-вектором тока $J_m{}^{\mu}(x)$ и вакуумом, неинвариантным относительно непрерывной группы симметрии, генераторами которой являются заряды $Q_m = \int J_m^0(x)\, d^3x$, обязательно имеются состояния, характеризуемые нулевой массой. Они получили название голдстоуновских.

В квантовых полевых моделях в качестве формы f на алгебре квантованных полей B естественно взять связные полные функции Грина Δ, а тотализирующий вектор $|\rangle$ интерпретировать как вакуум. Дело, однако, в том, что рассмотрение реальных квантовых полевых моделей приходится вести, как говорится, на физическом уровне строгости, поскольку уже алгебру операторов B таких моделей корректно определить не удается, а форма f, задаваемая на B функциями Грина, сингулярна. Тем не менее полученные выше свойства неинвариантного вакуума (кроме гильбертовой структуры на пространстве представления) остаются справедливыми и для этих моделей. В частности, корректно определен вакуумный вектор $|\rangle$, и применим критерий, что вакуум $|\rangle$ квантовой полевой модели неинвариантен относительно какого-либо преобразования g, если существует отличная от нуля функция Грина $\Delta(b) \neq 0$ такого элемента $b \in B$, что $gb \neq b$.

Исследуем это условие, воспользовавшись получившим сейчас широкое распространение (особенно в калибровочных моделях) представлением функций Грина в виде континуальных интегралов [53, 54, 42]. Корректное математическое обоснование такого представления до сих пор отсутствует [55—57], но на физическом уровне строгости континуальные интегралы используются как удобный способ записи теории возмущений [58]. Он основывается на том, что вакуумные средние T-произведений квантовых полей могут быть выражены через спаривания этих полей, рассматриваемых как точно коммутирующие или антикоммутирующие, т. е. классические, поля [59].

В таком подходе операторная алгебра квантовой полевой системы может быть заменена тензорной алгеброй $B = \overset{\infty}{\underset{0}{\oplus}} (\overset{n}{\otimes} Q)/J$, где Q — векторное пространство соответствующих классических полей, а J — идеал, порожденный элементами вида $q\otimes q'\mp q'\otimes q$ из бозонных/фермионных полей. Инволюция в B — это операция эрмитова сопряжения, а группой автоморфизмов B является группа G преобразований Q.

В континуальных интегралах функции Грина Δ и их производящий функционал Z имеют вид $\Delta(q_1 \dots q_n)=\delta Z[\eta]/\delta\eta_1 \dots \dots \delta\eta_n|_{\eta=0}$,

$$Z[\eta]=-i\ln[\int d\mu \exp iS(q,\ \eta)],\tag{2.4}$$

где $S(q,\ \eta)$ — функционал действия $S(q)$ классических полей q с источниками $L_{\text{ист}}=\eta q+\bar{q}\eta$, а $d\mu$ — некоторая мера на Q.

Преобразование (2.1) формы f, т. е. функций Грина Δ, под действием группы G записывается $G\ni g: q\to q'$, $\Delta\to\Delta_g$, где производящим функционалом для Δ_g является

$$Z_g[\eta]=-i\ln[\int d\mu' \, exp\, iS'(q',\ \eta]=Z[\eta].\tag{2.5}$$

Это равенство, вообще говоря, нетривиально и порождает определенные соотношения между функциями Грина Δ. Так, в калибровочной теории, будучи записанным для регуляризованных неперенормированных функций Грина, (2.5) приводит к обобщенным тождествам Уорда [42]. Для перенормированных функций Грина, если не существует инвариантной промежуточной регуляризации, для выполнения (2.5) могут понадобиться неинвариантные контрчлены, нарушающие первоначальную калибровочную инвариантность действия $S(q)$ (аномальные тождества Уорда). На практике это происходит, когда в процедуре ренормировки участвуют матрицы γ_5 [42].

В калибровочной теории возможны нарушения калибровочной инвариантности только из-за локального характера калибровочных преобразований. Чтобы их отличать, мы будем рассматривать нарушения инвариантности, вызванные только преобразованиями глобальных групп симметрий G.

Условие инвариантности функций Грина Δ относительно группы G запишется в виде

$$Z[g(\eta)]=-i\ln[\int d\mu \exp iS(q,\ g(\eta))]=Z(\eta).\tag{2.6}$$

Если действие $S(q)$ g-инвариантно (мера $d\mu$ считается инвариантной относительно глобальных преобразований), $Z[g(\eta)]$ можно привести к виду $Z[g(\eta)]=Z_{g^{-1}}[\eta]$, и условие инвариантности (2.6) выполняется в силу тождества (2.5). Отсюда следует, что нарушение инвариантности функций Грина возможно только при нарушении инвариантности действия $S(q)$.

Возможны два таких случая.

1) Динамическое нарушение симметрии, когда G-инвариантность классического действия S нарушается за счет появления G-неинвариантных контрчленов в некотором порядке теории возмущений.

2) Спонтанное нарушение симметрии, когда действие $S(q)$ G-ковариантно, но G-неинвариантно как функционал полей q.

Поскольку первый случай, по-видимому, ограничен в основном нарушением киральной γ_5-симметрии, сосредоточим внимание на втором варианте. Пример такого нарушения симметрии дает взаимодействие квантовых полей с внешним классическим полем. Это позволяет моделировать неинвариантность вакуума в квантовых полевых моделях введением соответствующего классического хиггс-голдстоуновского поля σ такого, что $G\sigma\neq\sigma$, причем удается задавать и учитывать такую неинвариантность уже на уровне классической модели.

Для этого в действие $S(q)$ включают соответствующие члены q—σ-взаимодействия, но в производящем функционале Z для функций Грина Δ интегрирование по полям σ не производится.

Приведем простой пример. Пусть $\{\varphi^a\}$ — дублет скалярных полей, реализующих действие некоторой группы G внутренних симметрий и описываемых лагранжианом свободных полей

$$L={}^1/_2(\partial_\mu\varphi^a)^2.$$

Считаем, что G оставляет инвариантной свертку $\varphi^1\varphi^1+\varphi^2\varphi^2$.

Производящий функционал Z для функций Грина такой системы имеет вид

$$Z[\eta]=-i\ln\left[\int[d\varphi]\exp i\int\left({}^1/_2\varphi^a(p)p^2\varphi^a(p')+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\eta(p)\varphi(p')\right)\delta(p+p')\,dp\,dp'\right],$$

и функции Грина

$$\langle\varphi^a(p)\,\varphi^b(p')\rangle=\frac{-1}{p^2}\delta^{ab}\delta(p+p') \qquad (2.7)$$

инвариантны относительно преобразований группы G.

Нарушим симметрию L, введя в него постоянное хиггс-голдстоуновское поле σ в составе матрицы $\widehat{\sigma}=\begin{pmatrix}0&\sigma\\ \sigma&0\end{pmatrix}$, входящей в член взаимодействия ${}^1/_2\varphi\widehat{\sigma}\varphi$. Производящий функционал $Z[\eta,\sigma]$ системы с нарушенной симметрией имеет вид

$$Z[\eta,\sigma]=-i\,ln\left[\int[d\varphi]\exp i\int\left({}^1/_2\varphi(p)\,(p^2+\widehat{\sigma})\,\varphi(p')+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\eta(p)\varphi(p')\right)\delta(p+p')\,dp\,dp'\right].$$

Тогда, используя свойства гауссовых интегралов (см. Приложение IV), получим функции Грина

$$\langle\varphi^a(p)\,\varphi^a(p')\rangle=\frac{-p^2}{p^4-\sigma^2}\delta(p+p'), \qquad (2.8)$$

$$\langle\varphi^a(p)\,\varphi^{b\neq a}(p)\rangle=\frac{\sigma}{p^4-\sigma^2}\delta(p+p'). \qquad (2.9)$$

Как видим, они отличаются от функций Грина (2.7) симметричной системы как изменением вида нормальных функций Грина (2.8), так и появлением ненулевых аномальных функций Грина (2.9), в результате чего они перестают быть инвариантными относительно группы G.

Введение классического поля σ в функционал действия S и производящий функционал Z как бы параметризует Z_σ, функции Грина Δ_σ и неэквивалентные вакуумы модели $|\rangle_\sigma$ [60].

Это подсказывает более общий способ описания спонтанного нарушения симметрии относительно группы G, включающей подгруппы точных симметрий H, когда поля q строятся реализующими некоторое индуцированное представление $H\uparrow G$ группы G (см. Приложение III). В этом случае они представляются функциями не только на координатном пространстве X, но и на факторпространстве G/H со значениями в некотором пространстве V представления группы H, т. е.

$$q=q(x,\sigma),\quad x\in X,\quad \sigma\in G/H,$$

и их значения зависят от вакуума $|\rangle_\sigma$. Однако в реальных моделях он почти не практикуется (см. § 10).

Присутствие внешнего поля σ порождает G-неинвариантность действия $S(q,\sigma)$ как функционала полей q, который, однако, будучи G-инвариантным по q и σ, является G-ковариантным по q. При этом возможны два варианта.

1) Поле σ нарушает первоначальную G-инвариантность S до G-ковариантности, например, когда σ выделяется как некоторая классическая составляющая самих полей q. Этот прием наиболее часто употребляется в калибровочных моделях [46, 42]. Проиллюстрируем его.

Пусть $G=SU(n)$, и поля q реализуют фундаментальное представление этой группы, т. е. $q=(q_1\ldots q_n)$. Выделим в q составляющую $q_0=(0\ldots\sigma)$, так что $q=q_0+q'$, и перепишем $SU(n)$-инвариантное действие $S(q)$ как действие $S(q')$, придав q_0 смысл внешнего хиггс-голдстоуновского поля. Действие $S(q')$ по полям q' будет уже только $SU(n-1)$-инвариантно, где $SU(n-1)q_0=q_0$, но $SU(n)$-ковариантно за счет $SU(n)$-преобразований $q\to q_0'$.

2) Поле σ поднимает H-инвариантность действия $S(q)$, где H — подгруппа точных симметрий группы G до его G-ковариантности. Примером таких полей являются так называемые классические голдстоуновские поля [61, 62]. Они были введены в рамках метода нелинейных реализаций групп (см. Приложение III), когда представление группы G строится на парах (v,σ) элементов v пространства V, реализующего линейное представление подгруппы H группы G, и элементов σ факторпространства G/H. Представление (ПIII.8) группы G на σ нелинейно. Это исключает появление массового члена $m^2\sigma^2$ в G-инвариантном функционале действия для полей σ, и их безмассовость побудила авторов этого подхода назвать их

голдстоуновскими по аналогии с безмассовыми голдстоуновскими состояниями в аксиоматической теории поля.

Несмотря на различное происхождение, картина спонтанного нарушения симметрии в обоих вариантах тем не менее одинакова. В этой картине хиггс-голдстоуновские поля σ принимают значения в некотором пространстве Σ, реализующем непрерывное действие группы G и содержащем H-инвариантные, но G-неинвариантные точки, которые образуют подпространство Σ_H такое, что $\Sigma = G(\Sigma_H)$, т. е. всякая точка $\sigma \in \Sigma$ может быть получена из некоторой точки $\sigma_H \in \Sigma_H$ действием элемента группы G. Примером такого пространства Σ является факторпространство G/H, где Σ_H сводится к одной точке — центру $1_G/H$ этого факторпространства.

В калибровочной теории внутренних симметрий существует всегда калибровка, в которой хиггс-голдстоуновское поле σ принимает значения только в подпространстве Σ_H. Она часто называется унитарной калибровкой, поскольку в ней S-матрица явно унитарна (хотя и отсутствует ее явная перенормируемость). В этой калибровке действие $S(q, \sigma)$ по полям q становится H-инвариантным.

В окрестности всякой точки $\sigma_0 \in \Sigma_H$ пространство Σ может быть представлено как прямое произведение $\Sigma = \Sigma_H \times G/H$ с координатами (σ_H, σ'). Обычно рассматривают малые отклонения σ от σ_0, поэтому можно записать

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_H + \sigma', \tag{2.10}$$

где $(\sigma_0 + \sigma_H) \in \Sigma_H$, а $(\sigma_0 + \sigma') \in G/H$. H-инвариантная составляющая $(\sigma_0 + \sigma_H)$ поля σ называется хиггсовским полем, а σ' — голдстоуновским полем. Причем по своему построению и действию на него группы G поле σ' совпадает с упоминавшимися выше классическими голдстоуновскими полями метода нелинейных реализаций. Однако в унитарной калибровке голдстоуновские поля σ' исчезают и хиггс-голдстоуновское поле σ сводится только к своей хиггсовской компоненте.

Для моделирования спонтанного нарушения симметрии хиггс-голдстоуновское поле достаточно ввести как внешнее поле. Однако естественно предположить, что неинвариантность вакуума полевой системы есть следствие каких-то свойств самой системы. Чтобы их учесть, поле σ вводят в схему калибровочной теории как кинематическую переменную наравне с материальными и калибровочными полями, добавляя к лагранжиану $L(\varphi, A, \sigma)$ лагранжиан L_σ поля σ и связывая с вакуумом классическую компоненту σ_0 поля σ, определяемую как решение уравнения поля $\delta L_\sigma / \delta\sigma = 0$, отвечающее минимуму энергии.

В классическом приближении в качестве L_σ обычно берут так называемый лагранжиан Хиггса

$$L_\sigma = {}^1\!/_2 (D_\mu \sigma)^2 - \lambda^2 (\sigma^2 - \mu^2)^2, \tag{2.11}$$

вакуумным решением которого в унитарной калибровке является постоянное поле σ_0 ($\sigma_0^2=\mu^2$, $(d-A_0)\sigma_0=0$), взаимодействие с которым приводит к появлению в лагранжиане $L(\varphi, A, \sigma)$ массовых членов материальных и калибровочных полей [46, 42]. Однако лагранжиан Хиггса не учитывает индивидуальных особенностей конкретной системы, в которой рассматривается спонтанное нарушение симметрии.

Такого учета можно добиться, если принять во внимание взаимодействие поля σ с квантовыми материальными полями φ. Сделать это позволяет метод динамического спонтанного нарушения симметрии [63—65]. Для этого к действию $S(\varphi, A, \sigma)$ добавляют некоторое затравочное действие S_σ поля σ и включают в производящий функционал Z интегрирование по классам калибровочно сопряженных полей σ, так что

$$Z=N^{-1}\int d\mu(\varphi, A, \sigma)\exp i(S(\varphi, A, \sigma)+S_\sigma). \qquad (2.12)$$

Интегрирование Z по материальным полям φ, в результате которого производящий функционал принимает вид

$$Z=N^{-1}\int d\mu(\sigma, A)\exp iS_{\mathrm{eff}}(\sigma, A),$$

приводит к эффективному действию S_{eff} для полей σ и A. Это интегрирование соответствует суммированию диаграмм σ—σ, σ—A, A—A по внутренним линиям материальных полей.

Классические компоненты полей σ и A отождествляются с решениями уравнений

$$\delta S_{\mathrm{eff}}/\delta\sigma=0, \qquad \delta S_{\mathrm{eff}}/\delta A=0,$$

которые в действительности имеют смысл только в рамках процедуры регуляризации и перенормировки.

Заметим, что в приближении малых импульсов поля σ лагранжиан L_{eff} воспроизводит лагранжиан Хиггса (2.11) с регуляризованными константами, зависящими от параметров φ—φ и φ—σ взаимодействия исходной системы [66, 67].

Метод построения эффективного действия используется не только в моделях со спонтанным нарушением симметрии. Он хорошо известен в квантовой электродинамике, где позволяет воспроизводить динамическим путем лагранжиан электромагнитного поля и нелинейные добавки к нему [68], в калибровочной теории [69], в теории гравитации [18]. В гл. V он будет применен для построения индуцированного лагранжиана поля кручения.

Моделирование неинвариантности вакуума квантовых полевых систем введением взаимодействия с классическим хиггс-голдстоуновским полем σ оставляет открытым вопрос об истинной физической природе как самого такого вакуума, так и поля σ.

В частности, были предприняты попытки связать голдстоуновские компоненты поля σ с голдстоуновскими состояниями из теоремы Голдстоуна [46—49]. Корректность их, однако, не совсем убедительна. Одной из трудностей, не позволяющей применить теорему Голдстоуна к калибровочным теориям со спонтанным нарушением симметрии, является трансляционная неинвариантность вакуума в таких теориях, в результате чего состояния в них вообще не могут характеризоваться определенным импульсом. Сложность возникает также с определением зарядов Q_m и как интегралов от локальных токов (см. § 3), и как генераторов группы преобразований. Имеются и другие трудности.

Наиболее перспективными на сегодняшний день, с нашей точки зрения, представляются попытки описать хиггс-голдстоуновское поле как коллективное поле связанных пар материальных полей (типа куперовских пар), а неинвариантность вакуума связать с образованием конденсата таких пар [70—74]. Вид взаимодействия материальных полей, приводящего к образованию такого конденсата, может быть восстановлен интегрированием производящего функционала (2.12) по полям σ. Как правило, это 4-фермионное контактное взаимодействие типа $(\bar{\psi}\tau\psi)^2$, где τ — некоторые матрицы. Этот подход восходит к работам Намбу и Иона-Ласинио [75], Вакса и Ларкина [76], Бьеркена [77], Салама [78, 79], Егучи [80], Енглерта [81] и основывается на близости лагранжианов, описывающих коллективные поля, хиггсовское поле и поле куперовских пар в теории Гинзбурга—Ландау. В теории элементарных частиц он, в частности, реализуется в модели «техницвета» [82]. В гл. V мы его применим к полю кручения.

§ 3. КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ В ФОРМАЛИЗМЕ РАССЛОЕНИЙ

Обобщенная производная $D_\mu = \partial_\mu - A^m_\mu I_m$, заменяющая в лагранжиане и уравнениях поля калибровочной теории частную производную ∂_μ, по своей структуре напоминает ковариантную производную в теории гравитации, а в теории Вейля она трактовалась именно как ковариантная производная в геометрии, в которой роль связности, как полагал Вейль, исполнял электромагнитный потенциал A_μ. В такой интерпретации лагранжиан (1.12) и уравнения поля (1.14), (1.15) выглядят как описывающие свободные материальные поля $\{\varphi^a\}$ в геометрии с ковариантными производными D_μ (за ними закрепилось это название, которое мы в дальнейшем и будем использовать). Этой геометрией является геометрия расслоенного пространства, задаваемая калибровочными полями $A_\mu{}^m$ как коэффициентами формы связности на расслоении [83—85]. Такая интерпретация D_μ и $A_\mu{}^m$ приводит к формулировке калибровочной теории в терминах расслоений [5, 86, 6, 87].

Применение аппарата расслоений (см. Глоссарий) в теории поля основывается на математическом определении классических полей как сечений векторных расслоений.

Пусть $\{\varphi^a(x)\}$ — некоторый мультиплет классических полей на многообразии X со значениями в векторном пространстве V, реализующим представление группы Ли внутренних симметрий G.

В формализме расслоений материальные поля $\{\varphi\}$ описываются как глобальные сечения дифференцируемого векторного расслоения $\lambda = (V; X, G, \Psi)$ (которое мы будем называть расслоением материальных полей) с базой X, типичным слоем V, структурной группой G и атласом расслоения $\Psi = \{U_\iota, \psi_\iota\}$, где U_ι, ψ_ι — области и морфизмы тривиализации расслоения λ. Атлас расслоения Ψ и атлас многообразия Ψ_X фиксируют систему отсчета и систему координат. По отношению к ним поле φ представляется набором V-значных функций $\{\varphi_\iota(x) = \psi_\iota\varphi(x),\ x \in U_\iota\}$ на областях тривиализации расслоения λ, а преобразования атласов Ψ и Ψ_X индуцируют соответственно калибровочные (первого рода) и координатные преобразования полевых функций $\varphi^\iota(x)$.

Преобразование атласа расслоения $\Psi = \{U_\iota, \psi_\iota\}$ — это переход к эквивалентному ему атласу $\Psi' = \{U_\iota, \psi'_\iota = g_\iota\psi_\iota\}$ путем умножения морфизмов тривиализации $\psi_\iota(x)$, $x \in U_\iota$, на некоторые элементы $g_\iota(x)$, $x \in U_\iota$, групп $G(U\ )$ непрерывных функций на U_ι со значениями в G, и $\{g_\iota\}$ — это функции перехода между картами (U_ι, ψ_ι) и (U_ι, ψ'_ι) атласов Ψ и Ψ' (см. Глоссарий. Расслоение).

Калибровочные преобразования полевых функций φ_ι, индуцируемые преобразованиями атласа Ψ, имеют вид

$$g_\iota : \varphi_\iota = \psi_\iota\varphi \rightarrow \varphi'_\iota = \psi'_\iota\varphi = g_\iota\psi_\iota\varphi = g_\iota\psi_\iota,\ x \in U_\iota. \qquad (3.1)$$

Они не преобразуют само сечение φ, но меняют его запись функциями $\{\varphi_\iota\}$. Преобразования атласа расслоения λ — калибровочные преобразования первого рода — образуют группу, которая изоморфна группе $G(X)$ сечений ассоциированного с λ главного расслоения λ_G.

Поскольку преобразования атласа расслоения Ψ представляют собой преобразования эквивалентности расслоения λ, требование инвариантности системы полей $\{\varphi\}$ относительно таких преобразований является вполне естественным. Таким образом, описание полей в формализме расслоений ведет непосредственно к калибровочной теории, а принцип локальной инвариантности выступает как своего рода принцип относительности.

Так же естественно в таком описании возникают и калибровочные поля. Они отождествляются с коэффициентами $A_\mu{}^m$ локальной 1-формы связности $A_\iota = A^m_\mu I_m dx^\mu$, $x \in U_\iota$, на расслоении λ, записанной относительно некоторого атласа Ψ. Введение связности на векторном дифференцируемом расслоении необходимо для определения операции дифференцирования на сечениях расслоения, поскольку сравнение векторов, принадлежащих слоям над разными точками базы расслоения, возможно только после параллельного переноса одного слоя в другой. Закон калибровочных преобразований

$$G(X)\ni g: A\to gAg^{-1}+dgg^{-1}$$

формы связности A (см. Глоссарий. Связность на главном расслоении) совпадает с законом калибровочных преобразований (1.8), а в инифинитезимальной форме с (1.9).

Операция дифференцирования сечений расслоения задается внешним ковариантным дифференциалом D, который в локальной записи относительно атласа расслоения Ψ имеет вид

$$D_\iota=\psi_\iota D\psi_\iota^{-1}=d-A_\iota=D_\mu dx^\mu=(\partial_\mu-A_\mu^m I_m)\,dx^\mu,$$

где оператор D_μ идентичен компенсирующей производной (1.10) в калибровочной теории.

В свою очередь, коэффициенты 2-формы кривизны

$$F=DD=F_{\mu\nu}^m I_m dx^\mu\wedge dx^\nu$$

совпадают с тензором напряженности (1.11) калибровочного поля.

Материальные поля φ и калибровочные поля A составляют набор кинематических переменных системы полей $\{\varphi\}$ с группой симметрий (ненарушенных) G в описании ее расслоениями. Функционал действия S этой системы может быть задан на любой относительно компактной области U многообразия X. При этом калибровочно инвариантный лагранжиан L (1.12), выраженный через формы φ, $D\varphi$, F и являющийся вещественной 4-формой на X^4, может быть записан безотносительно к какой-либо системе отсчета. Однако применение вариационного принципа, когда оператор вариации δ перестановочен с операторами частных производных ∂_μ, но не ковариантных производных D_μ, требует уже выбора системы отсчета — некоторого атласа Ψ, и калибровочно инвариантная система полевых уравнений (1.14), (1.15), получаемая вариацией L, записывается отдельно на каждой карте атласа Ψ.

Как указывалось в § 1, инвариантность лагранжиана L и уравнений поля относительно калибровочных преобразований первого рода обусловливает их инвариантность относительно калибровочных преобразований второго рода. К последним относятся такие морфизмы эквивалентности $(F,\ f=IdX)$ расслоения λ, что для всякого его атласа $\Psi=\{U_\iota,\ \psi_\iota\}$ послойное отображение F тотального пространства $t\lambda$ расслоения λ удовлетворяет условию $\psi_\iota F\neq g_\iota\ \ \psi_\iota$ на $\pi^{-1}(U_\iota)$, где $g_\iota\in G(U_\iota)$. Это означает, что в атласе Ψ отображение F выглядит как калибровочное преобразование первого рода, что обеспечивает инвариантность относительно него лагранжиана L и уравнений поля. Такое отображение F можно задать следующим образом.

Пусть λ_G — главное расслоение, ассоциированное с λ, и

F — послойное отображение тотального пространства $\mathrm{tl}\lambda_G$ расслоения λ_G, тождественное на базе X и сохраняющее правое действие G на $\mathrm{tl}\,\lambda_G$. Оно должно удовлетворять условию $F(pg)=F(p)g$, $p\in\mathrm{tl}\,\lambda_G$, и может быть представлено в виде $F(p)=p\gamma(p)$, где γ — некоторая G-значная функция на $\mathrm{tl}\,\lambda_G$ такая, что $\gamma(pg)=g^{-1}\gamma(p)g$. Воспользуемся определением тотального пространства $\mathrm{tl}\,\lambda$ расслоения λ как фактор-пространства $(\mathrm{tl}\,\lambda_G\times V)/G$ относительно действия $G\ni g:(p,\ v)\to\to(pg,\ g^{-1}v)$ (см. Глоссарий. Расслоение ассоциированное). Отображение F индуцирует послойное отображение

$$F:(p,\ v)/G\to(p\gamma,\ v)/G=(p,\ \gamma v)/G$$

тотального пространства $\mathrm{tl}\,\lambda$. Пусть $\Psi=\{U_\iota,\ \psi_\iota\}$ — некоторый атлас расслоения λ, которому отвечает семейство $\{z_\iota\}$ сечений расслоения λ_G, таких, что $\psi_\iota=[z_\iota]^{-1}$. Тогда при ограничении на $\pi^{-1}(U_\iota)$ отображение F имеет вид $F=[z_\iota\gamma(z_\iota)]\,[z_\iota]^{-1}$ или $\psi_\iota F=\gamma^{-1}(z_\iota)\psi_\iota$ на U_ι.

Таким образом, в заданном атласе Ψ отображение F принимает вид перехода к новому атласу Ψ' с морфизмами тривиализации $\psi'_\iota=\gamma^{-1}(z_\iota)\psi_\iota$ и, в силу свойства функции γ, с теми же функциями перехода, что и Ψ. Соответствующее преобразование F полевых функций φ_ι и формы связности A сводится к калибровочному преобразованию первого рода

$$\varphi_\iota=\psi_\iota\varphi\to\varphi'_\iota=\psi'_\iota\varphi'=\psi_\iota F\varphi=\gamma^{-1}(z_\iota)\,\psi_\iota\varphi=\gamma^{-1}(z_\iota)\varphi_\iota,$$

$$A=\omega T(z_\iota)\to A'=\omega T(F(z_\iota))=\omega T(z_\iota\gamma(z_\iota))$$

(см. Глоссарий. Связность на главном расслоении), но которое, в отличие от (3.1), вызвано изменением не системы отсчета, а самих полевых функций. Лагранжиан L и уравнения поля, записанные в атласе Ψ, инвариантны относительно F, и оно представляет собой калибровочное преобразование второго рода.

Существует взаимно однозначное соответствие между G-значными функциями γ на $\mathrm{tl}\,\lambda_G$, задающими отображение F, и глобальными сечениями ассоциированного с λ и λ_G расслоения $\tilde{\lambda}_G$, типичным слоем которого является тоже группа G, но в котором, в отличие от главного расслоения, она действует не левыми сдвигами, а по присоединенному представлению $g:G\to gGg^{-1}$. Это определяет группу калибровочных преобразований второго рода как группу глобальных сечений расслоения $\tilde{\lambda}_G$. Как видим, она отлична от группы $G(X)$ калибровочных преобразований первого рода, но для данного атласа Ψ изоморфна подгруппе $G(X)$, включающей преобразования атласа Ψ, сохраняющие его функции перехода.

В янг-миллсовской формулировке калибровочной теории калибровочные преобразования первого и второго рода, как правило, не различают, а при формализации ее расслоениями часто определяют в качестве калибровочных преобразований или калибровочные преобразования только первого рода [87], или только второго рода [6].

Калибровочная инвариантность лагранжиана L системы полей $\{\varphi, A\}$ приводит к законам сохранения (1.17)—(1.19), записанным в некотором атласе Ψ. В обычной теории поля из дифференциального закона сохранения (1.17) следует, как известно, интегральный закон сохранения заряда $Q_m=\int J_m d^3x$. В неабелевой калибровочной теории решение вопроса, приводит или не приводит равенство (1.17) к интегральному закону сохранения, является своего рода водоразделом между двумя точками зрения на калибровочную теорию и геометризованные теории вообще.

Если строго придерживаться геометрической трактовки калибровочной теории, то ответ на этот вопрос будет отрицательным, поскольку интегрирование дифференциальных форм со значениями в расслоениях, имеющих неплоскую связность, не имеет смысла без параллельного переноса всех этих значений в одну точку, который, однако, зависит от пути и тем самым неоднозначен, т. е. уже сам заряд Q_m как интеграл от локального тока не может быть определен.

Если рассматривать калибровочные и другие геометризованные поля как обычные поля в плоском пространстве, как это и делали первые авторы калибровочной теории, то интегральные законы сохранения могут быть сформулированы. Однако при этом приходится отказаться от геометрической трактовки калибровочных полей, а следовательно, и от корректного введения и полной классификации всех топологических чисел и зарядов в калибровочной теории [87—90], которых мы в данной работе почти не касаемся (см. § 4), но которые уже прочно вошли не только в классическую (солитоны, монополи, инстантоны), но и в квантовую калибровочную теорию [91].

Рассмотрим теперь ситуацию спонтанного нарушения симметрии в формализме расслоений. В этом случае лагранжиан L материальных полей φ и калибровочных потенциалов A G-неинвариантен, но $G(X)$-ковариантен и, помимо полей φ и A, в калибровочной теории присутствуют хиггс-голдстоуновские поля σ.

$G(X)$-ковариантность лагранжиана L обеспечивает его существование как вещественной 4-формы на всем многообразии X^4.

Хиггс-голдстоуновские поля в формализме расслоений представляются глобальными сечениями ассоциированного с λ расслоения λ_Σ на пространства Σ (определенные в § 2), орбиты группы G в которых представляют собой однородные пространства G/H, где H — подгруппа точных симметрий.

В отличие от векторного расслоения λ, глобальное сечение σ расслоения λ может существовать не всегда. Достаточным, а если H — замкнутая подгруппа группы Ли G, то и необходимым условием этого является редукция структурной группы

G расслоения λ_Σ (λ) к подгруппе H (см. Глоссарий. Расслоение). Это означает существование такого атласа Ψ^σ расслоения λ, все функции перехода которого сводятся к элементам калибровочной группы $H(X)$, а поле σ принимает значения в подпространстве H-инвариантных точек Σ_H пространстве Σ (в центре фактор-пространств G/H). В атласе Ψ^σ лагранжиан L становится $H(X)$-инвариантным.

Таким образом, редукция структурной группы расслоения материальных полей является непременным условием описания спонтанного нарушения симметрии в формализме расслоений [92—94]. Существует соответствие между различными такими редукциями и сечениями σ фактор-расслоения $\lambda_{G/H}$ [95].

Редукция структурной группы расслоения λ не приводит к ограничениям на связность A на λ. В то же время если связность A на λ и ассоциированном с ним главном расслоении сводится к подгруппе $H\subset G$, т. е. ее группа голономии $K=H$, то структурная группа G этих расслоений редуцирована к H (см. Глоссарий. Связность на расслоении). При этом если σ — сечение фактор-расслоения $\lambda_{G/H}$ (Σ), оределяемое этой редукцией, то σ переносится связностью A параллельно самому себе, т. е. σ и A связаны условием $D\sigma=0$, и в атласе Ψ^σ локальная 1-форма связности A принимает значения в алгебре Ли подгруппы H.

Приведем теперь пример хиггс-голдстоуновских полей, которые присутствуют почти во всех калибровочных моделях внутренних симметрий. Это эрмитовы метрики. Действительно, большинство групп внутренних симметрий являются унитарными подгруппами групп $GL(n, C)$. Следовательно, расслоение λ материальных полей с такой группой симметрий имеет структурную группу $GL(n, C)$, которая всегда редуцирована к своей максимальной компактной подгруппе $U(n)$. Тогда в такой калибровочной модели, помимо материальных и калибровочных полей, должно присутствовать хиггс-голдстоуновское поле, представляющее собой глобальное сечение ассоциированного с λ расслоения с типичным слоем — фактор-пространством $GL(n, C)/U(n)$, которое изоморфно пространству эрмитовых метрик в C^n. Таким образом, этим хиггс-голдстоуновским полем является эрмитова метрика, с помощью которой осуществляется свертка внутренних индексов полей $\{\varphi^a\}$ при построении лагранжиана L. Хиггсовской компонентой эрмитовой метрики является единичная матрица, а отклонения от нее играют роль голдстоуновских полей. Однако эрмитова метрика не образует какого-либо динамического поля в калибровочной теории внутренних симметрий, поскольку всегда может быть приведена калибровкой к постоянной единичной матрице.

Совсем другая ситуация возникает в калибровочной теории пространственно-временных симметрий и гравитации, к рассмотрению которой мы переходим в следующей главе.

Глава II
КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Как уже отмечалось, построение калибровочной теории гравитации в рамках компенсационного подхода столкнулось с большими трудностями. В то же время на примере полей с внутренними симметриями видно, что калибровочная теория естественно возникает при их описании расслоениями. Поэтому, учитывая, что калибровочная теория гравитации должна содержать в себе эйнштейновскую ОТО, можно пытаться строить ее как и ОТО, исходя из принципов относительности и эквивалентности, реформулируя их в терминах расслоений [12].

Необходимое для этого описание гравитационного поля в формализме расслоений дается в § 4. На содержащиеся в нем определения метрического и тетрадного гравитационных полей, условия их существования и другие математические факты мы будем неоднократно опираться при калибровочной реформулировке теории гравитации и анализе ее различных вариантов. Мы сочли также полезным привести топологические характеристики многообразий, допускающих гравитационное поле, которые хотя давно установлены, но мало известны.

В § 5 показывается, что принцип относительности формулируется в терминах расслоений как калибровочный принцип. При этом особое внимание уделяется определению и анализу различных типов калибровочных преобразований в теории гравитации. Именно неясность в этом вопросе была причиной неудачи компенсационного подхода к построению калибровочной теории гравитации. Оказывается, что в случае пространственно-временных симметрий калибровочный принцип требует введения не только калибровочных полей, но и метрического поля.

Принцип эквивалентности, формулируемый в § 6 в терминах геометрии инвариантов, устанавливает, что вводимые принципом относительности калибровочные поля должны быть лоренцевскими, а метрика — иметь минковскую сигнатуру. Как обсуждается в § 7, он приводит в теории гравитации к ситуации типа спонтанного нарушения симметрии, роль хиггс-голдстоуновского поля в которой играет метрическое гравитационное поле.

§ 4. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ В ФОРМАЛИЗМЕ РАССЛОЕНИЙ

В теории гравитации пространство-время обычно предполагается 4-мерным паракомпактным дифференцируемым ориентируемым многообразием X^4 без границы [96, 97].

В формализме расслоений эйнштейновское гравитационное поле на X^4 определяется как глобальное сечение g расслоения B псевдоевклидовых билинейных форм в касательных пространствах над X^4. Расслоение B ассоциировано с касательным расслоением $T(X^4)$, структурной группой которого является группа $GL^+(4, R)$, и изоморфно расслоению Σ на фактор-пространства $GL^+(4, R)/L$, где $L=SO(3, 1)$ — группа Лоренца. Отсюда следует (см. Глоссарий. Расслоение), что необходимым и достаточным условием существования глобального сечения расслоения B (т. е. гравитационного поля на X^4) является редукция структурной группы $GL^+(4, R)$ касательного расслоения $T(X^4)$ к группе Лоренца L. Это означает, что имеется такой атлас $\Psi^g=\{U_\iota, \psi_\iota^g\}$ расслоения $T(X^4)$, все функции перехода которого — элементы группы $L(X^4)$, а функции $g_\iota=\psi_\iota g$ метрического поля g сводятся к метрике Минковского $g\ (x)=\mathrm{const}=\eta$ во всех картах атласа Ψ^g. Атлас Ψ^g определен неоднозначно, с точностью до калибровочных преобразований из группы $L(X^4)$.

Глобальное сечение h фактор-расслоения Σ, изоморфное g, описывает гравитационное поле в тетрадной форме. Изоморфизм g и h выражается в том, что в атласе Ψ^g функции $h_\iota=\psi_\iota h$ тетрадного поля h принимают значения в центре фактор-пространства $GL^+(4, R)/L$. Отсюда тетрадное поле h можно задать семейством локальных сечений ассоциированного с $T(X^4)$ главного $GL^+(4, R)$-расслоения, определенных с точностью до их умножения справа на элементы калибровочной группы Лоренца $L(X^4)$. Эта неоднозначность связана с неоднозначностью атласа Ψ^g (см. Глоссарий. Расслоение главное). В атласе Ψ^g функции поля $h_\iota=\psi_\iota h$ принимают значения в единице группы $GL^+(4, R)$. Тогда в произвольном атласе Ψ тетрадные функции h_ι имеют вид $h_\iota=\psi_\iota(\psi_\iota^g)^{-1}$ и могут быть представлены как матричные функции, действующие в типичном слое касательного и ассоциированного с ним расслоений и осуществляющие калибровочные преобразования от атласа Ψ^g к атласу $\Psi=\{U_\iota, \psi_\iota=h_\iota\psi_\iota^g\}$. Отсюда, в частности, следует известное выражение

$$g_\iota=h_\iota(\eta) \tag{4.1}$$

функции метрического поля g_ι в атласе Ψ через метрику Минковского и тетрадные функции h_ι.

Тетрадные функции h_ι могут быть представлены так же, как матричные функции, действующие в касательных пространствах и осуществляющие переход от базиса $\{t^g(x)\}=(\psi_\iota^g)^{-1}(x)\{t\}$, определяемого атласом Ψ^g (см. Глоссарий. Расслоение касательное) к базису $\{t_\iota(x)\}=\psi_\iota^{-1}(x)\{t\}$, определяемому атласом Ψ (в индексной форме $t_\mu(x)=h_\mu{}^a(x)t_a(x)$). В частности, соотношение (4.1) принимает привычный вид

$$g_{\mu\nu}(x)=h_\mu^a(x)\,h_\nu^b(x)\,\eta_{ab}. \tag{4.2}$$

Обычно атлас касательного расслоения выбирается голономным и $\{t_\mu\}=\{\partial_\mu\}$ (см. Глоссарий. Расслоение касательное).

Имеет место следующая диаграмма редукции структурных групп касательного расслоения $T(X^4)$ над многообразием X^4, допускающим гравитационное поле:

$$
\begin{tikzcd}
 & SO(4) \arrow[dr] & \\
GL^+(4, R) \arrow[ur] \arrow[dr] & & O(3) \\
 & SO(3, 1) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad (4.3)
$$

Ее поддиаграмма

$$GL^+(4,\ R) \to SO(3,\ 1), \qquad (4.4)$$

как отмечалось, определяет некоторое гравитационное поле g на X^4. Существует взаимно однозначное соответствие между полями g на X^4 и различными вариантами редукции (4.4).

Из редукции структурной группы касательного расслоения к группе Лоренца следует ее редукция и к группе пространственных вращений $O(3)$ как максимальной компактной подгруппе группы Лоренца (см. Глоссарий. Расслоение). Редукция

$$SO(3,\ 1) \to O(3) \qquad (4.5)$$

обусловливает существование на X^4 неособого ковекторного поля (1-формы) ω как глобального сечения ассоциированного с $T(X^4)$ расслоения с типичным слоем — фактор-пространством $SO(3,\ 1)/O(3)$, которое гомеоморфно гиперболоиду $\{v^2=1,\ v_0>>0\}$ в пространстве Минковского M.

Всегда имеет место редукция (см. Глоссарий. Римановы и псевдоримановы пространства)

$$GL^+(4,\ R) \to SO(4). \qquad (4.6)$$

Она определяет некоторую риманову метрику g^R на X^4.

Объединение диаграмм (4.4)—(4.6) в диаграмму (4.3) устанавливает связь между полями g, ω, g^R на X^4, выражаемую следующей теоремой.

Теорема. 1) Пусть g — гравитационное поле на X^4. Существуют неособая 1-форма ω и риманова метрика g^R на X^4 такие, что

$$g=-g^R+2\omega\otimes\omega/|\omega|^2, \qquad (4.7)$$

где $|\omega|^2=g^R(\omega,\ \omega)=g(\omega,\ \omega)$.

2) Обратно, пусть g^R — риманова метрика, и ω — неособая 1-форма на многообразии X^4. Тогда существует псевдориманова метрика g такая, что величины $(g,\ \omega,\ g^R)$ удовлетворяют соотношению (4.7).

3) Для всякого набора полей $(g,\ \omega,\ g^R)$ на X^4, удовлетворяющих соотношению (4.7), существует атлас Ψ^g такой, что их полевые функции g_ι, g^g, $\omega_\iota/|\omega|$ постоянны и принимают вид,

соответственно, метрики Минковского η, евклидовой метрики η^E, 1-формы с координатами (1, 0, 0, 0) относительно Ψ^g.

Из последнего следует, что форма $\omega/|\omega|$ совпадает с тетрадной формой $h^\perp$, определяемой в голономном атласе как $h^\perp = h^0_\mu dx^\mu$. Тем самым формы ω и ω', связанные с данным гравитационным полем g посредством соотношения (4.7), отличаются друг от друга калибровочными преобразованиями Лоренца и растяжений. Следовательно, они не могут быть противоположно направленными, т. е. $\omega(x) \neq -\omega'(x)$ ни в одной точке $x \in X^4$, и являются гомотопными как сечения ассоциированного с $T(X^4)$ расслоения на 3-сферы S^3 [98]. При этом соответствующие римановы метрики g^R и $g^{R'}$ могут быть неэквивалентны (если есть точки, где $h^\perp$ и $h^{\perp'}$ отличаются на сколь угодно большой лоренцевский поворот), но определяют одну и ту же метрическую топологию на X^4, согласованную со структурой многообразия на X^4.

То, что с гравитационным полем можно связать некоторую риманову метрику на пространстве-времени, часто упускают из виду. В результате структура стандартного многообразия, приписываемая пространству-времени, кажется никак не связанной с псевдоримановой метрикой на нем. Это стимулировало, в частности, попытки заменить локально евклидову топологию пространства-времени топологией Александрова, топологией путей, обобщающими топологию Зимана в пространстве Минковского (базис которой составляют внутренности световых конусов) [99—101]. В пространстве-времени с сильной причинностью [97] эти топологии совпадают с локально евклидовой топологией. Однако в общем случае они обладают целым рядом недостатков, в них нельзя построить содержательную дифференциальную геометрию.

Пара (ω, g^R), связанная с данным гравитационным полем g соотношением (4.7), определяет (3+1)-разложение касательного расслоения $T(X^4)$ в сумму Уитни $T(X^4) = T^\parallel(X^4) \oplus T^\perp(X^4)$ 3-мерного подрасслоения $T^\parallel(X^4)$, определяемого уравнением $\omega = 0$, и его ортогонального (относительно римановой метрики g^R) дополнения $T^\perp(X^4)$. Метрики g и g^R совпадают друг с другом на подрасслоении $T^\parallel(X^4)$ и индуцируют на нем риманову пространственную метрику γ так, что

$$g = -\gamma + h^\perp \otimes h^\perp, \quad g^R = \gamma + h^\perp \otimes h^\perp. \tag{4.8}$$

Определено также дуальное $h^\perp$ (относительно g^R и g) времениподобное (относительно g) неособое векторное поле τ на X^4, которое представляет собой поле направлений слоев расслоения $T^\perp(X^4)$. Эти направления можно интерпретировать как направления локального времени в каждой точке $x \in X^4$, а само (3+1)-разложение — как задание на многообразии X^4 определенной пространственно-временной структуры, согласованной с данным гравитационным полем g.

В терминах (3+1)-разложений приведенная выше теорема может быть переформулирована следующим образом.

Для всякого гравитационного поля на многообразии X^4 существует согласованное с ним (3+1)-разложение касательного расслоения $T(X^4)$. Обратно, если расслоение $T(X^4)$ допускает (3+1)-разложение, то на X^4 существует гравитационное поле, с которым оно согласовано [102, 103].

В отличие от римановой метрики, псевдориманова метрика — гравитационное поле — может быть задано не на всяком многообразии X^4.

Гладкое ориентируемое многообразие X^4 характеризуется следующими характеристическими классами своего касательного расслоения: классом Понтрягина p_1 и классом Эйлера e, являющимися элементами группы когомологий $H^4(X^4, Z)$ многообразия X^4, и классами Штифеля—Уитни $w_i \in H^i(X^4, Z_2)$, $i=1, \ldots, 4$ [104, 87, 103]. При этом $w_1=0$ в силу ориентируемости X^4.

Поскольку имеет место вложение (по модулю кручения) групп когомологий $H^*(X^4, Z)$ в группы когомологий де Рама вещественных дифференциальных форм на X^4, классы p_1 и e могут быть представлены когомологическими классами характеристических форм Эйлера и Понтрягина

$$p_1 = -(1/8\pi^2)\,\mathrm{tr}\, R \wedge R, \quad e = (1/32\pi^2)\, \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}, \tag{4.9}$$

где R — 2-форма кривизны связности на $T(X^4)$. Эти классы не зависят от выбора связности, но форму Эйлера (4.9) следует вычислять, используя R, принимающие значения только в алгебре $so(4-k, k)$, в частности когда R — кривизна гравитационного поля или гравитационного поля с кручением. Если X^4 компактно, определены числа Понтрягина и Эйлера

$$P_1 = \int_{X^4} p_1, \quad \chi = \int_{X^4} e. \tag{4.10}$$

Причем последнее, согласно теореме Гаусса — Бонне, совпадает с эйлеровой характеристикой $\chi(X^4)$ многообразия X^4 [105, 98].

Необходимым и достаточным условием существования гравитационного поля на многообразии X^4 является равенство нулю класса Эйлера его касательного расслоения $T(X^4)$ [98]. К таковым относятся все некомпактные многообразия ($H^4(X^4, Z)=0$) и компактные многообразия с нулевой эйлеровой характеристикой.

Поскольку в теории гравитации помимо гравитационного поля рассматриваются также и материальные поля, необходимо учесть условия, обеспечивающие задание над X^4 соответствующих расслоений. Это относится, в частности, к спинорным расслоениям, структурная группа которых $SL(2, C)$ является двулистным накрытием группы Лоренца $SO(3, 1)$, и их существование обусловлено возможностью расширения $SO(3, 1)$-расслоения, ассоциированного с $T(X^4)$, до $SL(2, C)$-расслоения. Такое расширение имеет место, т. е. многообразие X^4 допускает спинорную структуру, если класс Штифеля—Уитни w_2 многообразия X^4 равен нулю [106, 107].

Естественно также требовать выполнения тех или иных условий причинности пространственно-временной структуры ($(3+1)$-разложения $T(X^4)=T^{\perp}(X^4)\oplus T^{\parallel}(X^4)$), определяемой гравитационным полем на многообразии X^4. Минимальным из них является ориентируемость линейного расслоения $T^{\perp}(X^4)$, а следовательно, и $T^{\parallel}(X^4)$, т. е. структурная группа касательного расслоения должна быть редуцирована к ортохронной группе Лоренца $SO^+(3, 1)$. Такое многообразие называется пространственно ориентируемым.

Условия существования гравитационного поля, спинорной структуры на многообразии X^4, его пространственной ориентируемости накладывают жесткие ограничения на топологию X^4, а именно [107]: всякое такое некомпактное многообразие должно иметь тривиальное касательное расслоение [108], а компактное многообразие — быть почти параллелизуемым [109]. Последнее означает, что если рассматривать X^4 вложенным в пространство R^{m+4} для достаточно большого целого m, нормальное расслоение $N(X^4-x)$ к X^4-x для произвольной точки $x\in X^4$ тривиально. Такое компактное многообразие характеризуется числом Понтрягина P_1, делящимся на 48 [103, 107].

Поскольку число Понтрягина P_1 согласно (4.9) может быть выражено через кривизну гравитационного поля, допустимо рассмотреть классификацию гравитационных полей по значениям числа P_1, которое в этом случае играет роль, аналогичную «топологическим» числам в калибровочной теории внутренних симметрий. Например, было показано (А. Авез, 1964 г.), что для статических гравитационных полей и гравитационных полей третьего типа по классификации А. Петрова $P_1=0$ [103].

Заметим, что гораздо более богатую классификацию допускает риманова гравитация, инстантонные решения в которой могут рассматриваться как фон в квантово-гравитационных моделях. Полевой функцией для такой гравитации служит не псевдориманова, а риманова метрика. Если локально переход от теории гравитации к теории римановой гравитации сводится к обычным приемам евклидизации [110], то глобальные свойства римановой и псевдоримановой метрик могут быть существенно различными. Примером является то, что риманова метрика существует на любом многообразии, и число Эйлера, нулевое для псевдоримановой гравитации, существенно участвует в классификации инстантонных решений в римановой гравитации [111, 112, 87].

Принцип относительности в ОТО формулируется как требование эквивалентности систем отсчета и, следовательно, инвариантности теории (функционала действия, уравнений движения, уравнений поля) относительно преобразований систем отсчета. Разные авторы по-разному оценивают его значение как одного из основополагающих принципов теории гравитации [113] вплоть до того, что он «не возможен и не нужен» [114] или является следствием принципа эквивалентности [115]. Мы не будем углубляться здесь в эту дискуссию. Из дальнейшего станет ясна роль принципа относительности и принципа эквивалентности как принципов калибровочной теории гравитации.

Формулировка принципа относительности непосредственно связана с понятием систем отсчета, определение которых само по себе продолжает оставаться одной из трудностей теории гравитации.

Эйнштейн первоначально подчеркивал важную роль систем отсчета. В дискуссии с Абрагамом еще до установления ОТО он развил идею, что гравитацию следует описывать как необходимый переход от инерциальных систем отсчета к неинтегрируемым неинерциальным системам отсчета. Фактически эта идея реализуется в тетрадной формулировке теории гравитации. Однако сам Эйнштейн какого-либо определения систем отсчета не дал, и до середины 50-х годов проблеме систем отсчета не уделялось достаточного внимания. Многие авторы и сейчас продолжают отождествлять системы отсчета с системами координат.

Наиболее глубокий анализ проблема систем отсчета получила в рамках тетрадной формулировки ОТО, метода $(3+1)$-разложения и его вариантов [116—118]. В этой формулировке тетрады, восстанавливаемые в каждой точке пространства-времени, рассматриваются как определяющие локальные системы отсчета. Однако проблема реализации этих систем отсчета теми или иными физическими величинами или приборами еще далека от окончательного решения.

Следуя общей схеме формализации полевых систем расслоениями, система отсчета в теории гравитации может быть определена как фиксация атласа $\Psi=\{U_\iota, \psi_\iota\}$ касательного и ассоциированных с ним расслоений над многообразием X^4, а группа преобразований систем отсчета совпадает с калибровочной группой $GL^+(4, R)(X^4)$.

Это определение близко к определению систем отсчета в тетрадной формулировке ОТО. Если атлас $\Psi=\{U_\iota, \psi_\iota\}$ касательного расслоения задан, репер $\{t_\iota(x)\}=\psi_\iota^{-1}(x)\{t\}$, где $\{t\}$ — базис типичного слоя R^4 расслоения $T(X^4)$, может быть восстановлен в любой точке многообразия X^4. Репер $\{t^i(x)\}$ образует базис касательного пространства T_x к X^4 в точке $x\in X^4$, а функции $\{t_\iota(x)\}$, $x\in U$, представляют собой семейство локальных сечений ассоциированного с $T(X^4)$ реперного расслоения LX^4, отвечающих данному атласу Ψ (см. Глоссарий. Расслоение реперов). Обратно, если $\{U_\iota\}$ — покрытие многообразия X^4, то задание семейства реперных полей $\{t_\iota(x)\}$, $x \in U_\iota$, такое, что $t_\iota(x) = t_\varkappa(x)\rho_{\varkappa\iota}(x)$, $x \in U_\iota \cap U_\varkappa$ и $\rho_{\iota\varkappa}\rho_{\varkappa\varepsilon} = \rho_{\iota\varepsilon}$ на $U_\iota \cap \cap U_\varkappa \cap U_\varepsilon$, фиксирует атлас Ψ касательного расслоения $T(X^4)$. Изменение атласа расслоения

$$\Psi = \{U_\iota,\ \psi_\iota\} \to \Psi' = \{U_\iota,\ \psi'_\iota = g_\iota \psi_\iota\}$$

сопровождается преобразованием реперов

$$t'_a(x) = (\psi'_\iota)^{-1}(t_a) = \psi_\iota^{-1}((g_\iota^{-1})^b_a t_b) = (g_\iota^{-1})^b_a t_b(x),\ x \in U_\iota.$$

Отметим, что, если расслоение $T(X^4)$ нетривиально, не существует непрерывного реперного поля, глобально определенного на X^4. Однако для многообразий X^4, допускающих гравитационное поле, за исключением некоторого класса компактных пространств (см. § 4), такое поле существует, т. е. локальные системы отсчета могут быть заданы во всех точках пространства-времени.

Обычная общековариантная формулировка ОТО соответствует специальному случаю голономных систем отсчета, когда выбор атласа Ψ касательного расслоения коррелирует с выбором координатного атласа $\Psi_X = \{U_\iota,\ \chi_\iota\}$ многообразия X^4, т. е.

$$\psi = \{u_\iota \psi_\iota = T(\chi_\iota)\} \qquad (5.1)$$

(см. Глоссарий. Расслоение касательное), и такие корреляции поддерживаются при всех преобразованиях систем отсчета и систем координат. В частности, базисные реперы $\{t_\mu(x)\}$, определяемые таким атласом в касательных пространствах к X^4, образованы касательными векторами $\{\partial_\mu\}$ к координатным линиям $\chi_\iota^{-1}(x^\mu)$ в X^4, а согласованные преобразования координатного и голономного атласов имеют привычный вид общековариантных преобразований

$$x^\mu \to x^{\mu'}(x),\ t_\mu(x) \to t'_\mu(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} t_\nu(x). \qquad (5.2)$$

Переходы между голономными атласами образуют подгруппу голономных преобразований калибровочной группы $GL^+(4, R)(X^4)$.

Таким образом, на языке расслоений принцип относительности в теории гравитации может быть сформулирован как требование инвариантности теории относительно калибровочной группы $GL^+(4, R)(X^4)$, и в таком виде он идентичен калибровочному принципу в калибровочной теории группы пространственно-временных симметрий $GL^+(4, R)$. Следовательно, теория гравитации может строиться из принципа относительности непосредственно как калибровочная теория.

Преобразования атласа расслоения относятся к калибровочным преобразованиям первого рода. Однако, в отличие от калибровочной теории внутренних симметрий, в случае пространственно-временных симметрий существует два типа таких преобразований, а именно: преобразования атласа расслоения материальных полей λ (как и в случае внутренних симметрий) и преобразования атласа касательного расслоения $T(X^4)$, действующие на операторы частных производных ∂_μ как на вектора касательных пространств. Атласы обоих расслоений эквивалентны, но могут не совпадать, а их преобразования не обязаны коррелировать. Например, структурной группой спинорного расслоения λ может быть только группа Лоренца, но не $GL^+(4, R)$, и λ допускает атласы лишь с лоренцевскими функциями перехода и только лоренцевские калибровочные преобразования. В то же время базисные векторы касательных пространств $\{\partial_\mu\}$ имеют смысл операторов частных производных только в голономном атласе (когда $[\partial_\nu, \partial_\mu]=0$), который в общем случае не является лоренцевским, а его голономные преобразования — лоренцевскими калибровочными преобразованиями.

По-разному обеспечивается и инвариантность теории относительно разных типов калибровочных преобразований. Относительно калибровочных преобразований первого типа, как и в случае внутренних симметрий, введением калибровочных полей — связности A на расслоении λ; относительно преобразований второго типа введением метрического поля g (без фиксации его сигнатуры) или изоморфного ему тетрадного поля h (как это было отмечено еще в первой работе Утиямы [8]). При этом атлас расслоений B и Σ, сечениями которых являются g и h, выбирается обычно совпадающим с голономным атласом касательного расслоения, поскольку функционал действия гравитационного поля инвариантен только относительно одновременных преобразований атласов расслоений $T(X)$ и B (или Σ). На расслоениях B и Σ также задана связность A.

В результате функционал действия S в калибровочной теории гравитации зависит от следующих величин: материальных полей φ, связности A, метрического поля g или тетрадного поля h. Калибровочные преобразования первого типа действуют на полевые функции материальных полей φ, связность A на расслоении λ, справа на h (преобразуют индексы a тетрадных функций $h_\mu{}^a$, отвечающие атласу, в котором записаны материальные поля). Преобразования второго типа действуют на g, слева на h (преобразуют индексы μ тетрадных функций $h_\mu{}^a$, отвечающих голономному атласу касательного расслоения), на связность A на расслоениях B и Σ, на индексы μ операторов ковариантных производных.

Отметим, что калибровочные преобразования первого и второго типа тетрадных функций — это известные B- и A-градуировки в тетрадной теории гравитации [116].

Функционал действия S инвариантен порознь относительно калибровочных преобразований первого и второго типа. В результате разные типы калибровочных преобразований первого рода приводят также и к разным законам сохранения (см. § 8).

В калибровочной теории внутренних симметрий инвариантность функционала действия относительно калибровочных преобразований первого рода обусловливает существование калибровочных преобразований второго рода (см. § 3). В калибровочной теории пространственно-временных симметрий такими преобразованиями должны быть послойные отображения тотального пространства расслоения материальных полей λ. Они преобразуют материальные поля φ и калибровочные поля A, действующие на φ, что, в свою очередь, должно сопровождаться преобразованием калибровочных полей A, действующих на метрическое поле g, и, следовательно, преобразованием самого g. Но, поскольку функционал действия гравитационного поля инвариантен только относительно одновременных преобразований гравитационного поля и операторов частных производных ∂_μ, последние тоже должны меняться как вектора касательных пространств.

Однако $\{\partial_\mu\}$ не являются какими-либо фиксированными векторами пространств $T_x(X^4)$, а представляют собой прообразы $\partial_\mu = \psi_\iota^{-1}(t_\mu)$ базисных векторов типичного слоя R^4 касательного расслоения относительно морфизмов тривиализации ψ_ι некоторого голономного атласа расслоения $T(X^4)$. Поэтому преобразования $\{\partial_\mu\}$ не могут быть порождены каким-либо послойным отображением касательного расслоения, т. е. калибровочным преобразованием второго рода, а только преобразованием атласа расслоения $T(X^4)$, т. е. являются всегда преобразованиями первого рода.

Действительно, даже если $T(f)$ — послойное отображение касательного расслоения $T(X^4)$, индуцированное диффеоморфизмом f многообразия X^4, соответствующее преобразование репера $\{t(x)\} = \{\partial_\mu\}$ вызвано не отображениями слоев $T_x \to T_{f(x)}$, а переходом от системы отсчета $\psi_\iota^{-1}(x)\{t\}$ в слое T_x к системе отсчета $\psi_\iota^{-1}(f(x))\{t\}$ в слое $T_{f(x)}$. В частности, всегда можно так подобрать системы координат в окрестностях x и $f(x)$, что преобразование $\{\partial_\mu\}$ будет тождественным.

Возвращаясь теперь от преобразований $\{\partial_\mu\}$ назад к преобразованиям g и материальных полей φ, мы получим, что калибровочная теория пространственно-временных симметрий в общем случае не допускает калибровочных преобразований второго рода.

Принцип относительности как калибровочный принцип оказывается, однако, недостаточным для построения калибровочной теории гравитации. Он допускает общую аффинную связность, не фиксирует минковскую сигнатуру метрического поля g, а тем самым не может быть определена пространственно-временная структура на многообразии X^4. Остается неясным статус метрического поля в рамках такой калибровочной теории. Хотя оно и вводится для обеспечения инвариантности относительно одного из типов пространственно-временных калибровочных преобразований, но не является связностью и не может трактоваться как какое-либо калибровочное поле.

Все это делает необходимым привлечения для построения калибровочной теории гравитации принципа эквивалентности.

§ 6. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Как и принцип относительности, принцип эквивалентности продолжает оставаться предметом дискуссий [113—115]. Например, различают «слабый» и «сильный» принципы эквивалентности, предлагаются и более тонкие его градации [113]. Общим для всех формулировок и оценок роли принципа эквивалентности в теории гравитации является одно — он призван гарантировать переход от ОТО к специальной теории относительности (СТО) в некоторой системе отсчета. Трудность возникает с тем, что следует понимать под переходом к СТО.

Принято считать, что физический закон или уравнение приведены к спецрелятивистской форме, если они имеют такой же вид, как и в отсутствии гравитационного поля, т. е. критерием перехода к СТО в некоторой системе отсчета считается устранение в ней гравитационного поля. Однако, во-первых, такой критерий не применим к теории самого гравитационного поля, которую нужно уметь строить независимо от того, рассматриваются ли в ней какие-либо материальные объекты. Во-вторых, никаким выбором системы отсчета нельзя обратить в нуль тензор кривизны гравитационного поля даже в одной точке.

По этой причине требования принципа эквивалентности, как правило, ослабляют и рассматривают только законы, которые не содержат вторые и выше производные гравитационного поля («среднесильный» принцип эквивалентности [115]). Таковым, в частности, является закон движения пробных тел (характеризуемых только массой), для которого формулируется «слабый» принцип эквивалентности, требующий существования такой системы отсчета (называемой локально-инерциальной), в которой в данной точке уравнение движения пробных тел принимает спецрелятивистский вид. «Слабый» принцип эквивалентности считается подтвержденным экспериментально (проверкой равенства инертной и гравитационной масс).

Из «слабого» принципа эквивалентности обычно выводят принцип тождественности гравитационного и метрического полей, хотя такой вывод признается не всеми, а ряд авторов считают последний принцип самостоятельным (если не главным) принципом ОТО [114]. «Слабый» принцип эквивалентности фиксирует минковскую сигнатуру метрического гравитационного поля, но допускает произвольную аффинную связность, поскольку пробные тела, характеризуемые только массой, в произвольной аффинной геометрии движутся не по геодезическим, а по наикратчайшим — геодезическим в псевдоримановой геометрии, определяемым только собственно гравитационной составляющей (символами Кристоффеля) полной связности.

Мы не ставим здесь целью дать исчерпывающий анализ принципа эквивалентности, но хотим обратить внимание на трудности, с которыми сталкиваются его существующие формулировки. Не пригодны они и для целей калибровочной формулировки теории гравитации. Поэтому вернемся к бесспорной части принципа эквивалентности — он призван гарантировать переход к СТО в некоторой системе отсчета.

В геометрическом аспекте СТО можно характеризовать как геометрию инвариантов группы Лоренца (в духе эрлангенской программы Ф. Клейна). Тогда принцип эквивалентности может быть сформулирован в рамках калибровочной теории как требование существования лоренцевских инвариантов и их сохранения относительно параллельных переносов в некоторой системе отсчета.

Математически это требование означает, что связность на касательном расслоении $T(X^4)$ над многообразием X^4 должна быть лоренцевской, т. е. существует такой атлас Ψ_L касательного расслоения, что форма связности принимает значения в алгебре Ли группы Лоренца, и группой голономии этой связности является группа Лоренца. Это ведет, в свою очередь, к редукции структурной группы $GL^+(4, R)$ касательного расслоения к группе Лоренца (см. Глоссарий. Связность на расслоении), т. е. функции перехода атласа Ψ_L являются лоренцевскими (элементами калибровочной группы $L(X^4)$), и на X^4 могут быть глобально определены лоренцевские инварианты. В частности, непосредственным следствием этого принципа эквивалентности является существование псевдориманова метрического поля на X как глобального сечения g расслоения B, полевые функции которого в атласе Ψ_L сводятся к лоренцевскому инварианту — метрике Минковского η, т. е. $\Psi_L=\Psi^g$ (см. § 4).

В рамках калибровочной теории, определяемой принципом относительности как калибровочным принципом, принцип эквивалентности обусловливает сведение калибровочных полей A пространственно-временных симметрий к калибровочным полям группы Лоренца и существование псевдоримановой метрики g с минковской сигнатурой. При этом калибровочное поле A и метрика g оказываются связанными условием метричности

$$(d-A)g=0. \tag{6.1}$$

Поскольку ничто не требует симметричности коэффициентов формы связности A, она не сводится к символам Кристоффеля метрики g, а включает также компоненты тензора кручения (см. Глоссарий. Связность в псевдоримановом пространстве).

Интерпретируя теперь поле g в голономной системе отсчета как гравитационное поле, получаем обычные постулаты принципа эквивалентности в ОТО. Существует голономная система отсчета, в которой метрическое гравитационное поле g становится минковским, а его символы Кристоффеля исчезают в данной пространственно-временной точке. Однако полная связность, содержащая компоненты кручения не обращается в нуль. Существует, однако, голономная система отсчета (нормальные координаты), в которой и вся связность исчезает, но метрика остается неминковской в данной точке.

Справедливы также равенства инертной массы, пассивного и активного гравитационного зарядов тел. Они следуют из того, что и левая и правая части уравнений движения и правая часть уравнений Эйнштейна получаются вариацией одного и того же функционала действия пробного тела $S = -mc\int ds$.

Принцип эквивалентности в калибровочной теории гравитации задает своего рода геометрию Клейна—Чженя [98] лоренцевских инвариантов на многообразии X^4. При этом, поскольку редукция структурной группы $GL^+(4, R)$ касательного расслоения к группе Лоренца приводит также к ее редукции к группе $O(3)$, на многообразии X^4 могут быть заданы и $O(3)$-инварианты. Ненулевые времениподобные направляющие векторы подрасслоения $T^\perp(X^4)$ пространственно-временного $(3+1)$-разложения дают пример таких $O(3)$-инвариантов. Таким образом, существование пространственно-временной структуры на многообразии X^4 тоже обусловлено принципом эквивалентности.

Для целей построения калибровочной теории гравитации особенно важно отметить, что принцип эквивалентности приводит в теории гравитации к ситуации спонтанного нарушения симметрии и описанию гравитационного поля как хиггс-голдстоуновского.

§ 7. ГРАВИТАЦИЯ КАК ПОЛЕ ХИГГС-ГОЛДСТОУНОВСКОГО ТИПА

В § 3 были выделены следующие признаки спонтанного нарушения симметрии в калибровочной теории в описании его расслоениями:

а) редукция структурной группы G расслоения материальных полей и ассоциированных с ним расслоений к подгруппе H точных симметрий;

б) наличие хиггс-голдстоуновского поля как глобального сечения ассоциированного факторрасслоения $\lambda_{G/H}$ с типичным слоем — фактор-пространством G/H;

в) G-неинвариантность, $G(X)$-ковариантность лагранжиана материальных полей и существование систем отсчета, в которых он $H(X)$-инвариантен.

В теории гравитации расслоение материальных полей ассоциировано с касательным расслоением $T(X^4)$ над многообразием X^4. Принцип эквивалентности, как показано в предыдущем параграфе, требует сведения связности Γ на расслоении $T(X^4)$ к группе Лоренца и устанавливает (в согласии с пунктом (а)) редукцию структурной группы $GL^+(4, R)$ этого и ассоциированных с ним расслоений к группе Лоренца.

Это ведет к существованию глобального сечения h, ассоциированного с $T(X)$ фактор-расслоения Σ с типичным слоем $GL^+(4, R)/L$ (тетрадного гравитационного поля) и глобального сечения g изоморфного Σ расслоения B псевдоевклидовых билинейных форм (метрического гравитационного поля) (см. § 4). Причем, поскольку редукция структурной группы обусловлена сведением связности Γ на $T(X^4)$ к группе Лоренца, связность Γ и поле g связаны условием (3.2)

$$(d-\Gamma)g=0,$$

которое представляет собой условие метричности (6.1).

Присутствие гравитационного поля в функционале действия материальных полей S нарушает его L-инвариантность, но обеспечивает $GL^+(4, R)(X)$-ковариантность действия S. При этом S, будучи записанным в атласах Ψ^g, остается инвариантным относительно преобразований калибровочной группы Лоренца $L(X)$, осуществляющих переходы между этими атласами (учитывая, что $h=hL(X)$).

Таким образом, налицо возникновение в калибровочной теории гравитации ситуации спонтанного нарушения симметрии, в которой роль хиггс-голдстоуновских полей играет метрическое (тетрадное) гравитационное поле. Это нарушение симметрии относится ко второму случаю спонтанного нарушения симметрии (см. § 2), когда L-инвариантность действия S восстанавливается до его $GL^+(4, R)(X)$-ковариантности, а гравитационное поле может быть построено методом нелинейных реализаций группы $GL^+(4, R)$ (см. § 9).

Как и в случае внутренних симметрий, в хиггс-голдстоуновском поле g может быть выделена хиггсовская компонента — метрика Минковского, являющаяся L-неподвижной точкой фактор-пространства $GL^+(4, R)/L$; а отклонения от нее играют роль голдстоуновских полей. Эти отклонения отождествляются с гравитационным полем, которое тем самым выступает как поле голдстоуновского типа.

Аналогом метрического поля g как хиггс-голдстоуновского поля в случае внутренних симметрий являются эрмитовы метрики (см. § 3). Однако, в отличие от голдстоуновских полей внутренних симметрий, гравитационное поле не может быть убрано какой-либо калибровкой. Причина состоит в том, что калибровочные преобразования пространственно-временных симметрий действуют так же на операторы частных производных ∂_μ, как на вектора касательных пространств $\partial_\mu \leftrightarrow \tau_\mu =$

$=\psi_\iota^{-1}t_\mu$ (см. § 4). Однако, обратно, вектора $\tau=\psi_\iota^{-1}t$ имеют смысл частных производных только в голономном атласе Ψ. В неголономной системе отсчета, когда метрика g становится метрикой Минковского $g_\iota=\psi_\iota^{-1}g=\eta$, вектора $\tau_a=h_a{}^\mu\partial_\mu$ содержат тетрадные функции $h_a{}^\mu$, описывающие гравитационное поле в тетрадной форме, т. е. гравитационное поле в такой калибровке не исчезает, а переходит из «метрической» в «тетрадную» форму.

Это, в частности, означает, что гравитационное поле в общем случае не сводимо к хиггсовскому полю ни в какой системе отсчета и хиггсовским вакуумом в теории гравитации может быть в действительности неминковская метрика. Последнее мотивирует трактовку эйнштейновского гравитационного поля как поля не только голдстоуновского, но и хиггс-голдстоуновского типа.

Впервые идея о том, что нарушение лоренцевской симметрии из-за искривления пространства-времени ведет к концепции гравитона как голдстона, была высказана в середине 60-х годов Иваненко и Гейзенбергом при обсуждении возможной связи космологических и вакуумных асимметрий [119].

Она была возрождена в 70-е годы в связи с применением метода нелинейных реализаций групп [61, 120] в качестве наиболее подходящего аппарата для описания спонтанного нарушения симметрий. То обстоятельство, что метрическое гравитационное поле возникает при построении нелинейных реализаций группы $GL(4, R)$, было впервые отмечено в работах [121, 122]. В плане спонтанного нарушения симметрии группы $GL(4, R)$ и трактовки гравитационного поля как голдстоуновского этот вопрос подробно исследовался Ю. Нееманом с соавторами [123—125]. Однако эта трактовка основывалась только на изоморфизме пространства псевдоримановых билинейных форм в R^4 и фактор-пространства $GL(4, R)/L$, игнорируя геометрические аспекты гравитации.

С позиций геометрической формулировки калибровочной теории на хиггс-голдстоуновскую природу гравитационного поля было указано нами [126, 9—12] и А. Траутманом [127]. При этом мы исходим непосредственно из принципов относительности и эквивалентности, реформулируемых в терминах калибровочной теории и расслоений.

Возможность трактовки гравитационного поля как хиггс-голдстоуновского с точки зрения квантовой теории подсказывается также работами по индуцированной гравитации [18], приводящей к построению эффективного функционала действия гравитационного поля, как следствие поляризации вакуума материальных полей. Предпринимаются попытки представить гравитационное поле и как коллективное [128], но они носят пока предварительный характер. Поэтому здесь мы не будем подробно на них останавливаться, лишь коротко затронув некоторые из этих вопросов в последующих главах.

Глава III

КАЛИБРОВОЧНЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Дадим в этой главе обзор некоторых основных калибровочных моделей гравитации. Приведем таблицу пространственно-временных групп, чьи калибровочные теории претендуют на описание гравитации,

$$
\begin{tikzcd}
SO(3,1) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & SO(4,1) \arrow[dd] \\
& P \arrow[ur, dashed] \arrow[d] & \\
GL(4,R) \arrow[r] & GA(4,R) \arrow[r, dashed] & GL(5,R)
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1

P обозначает группу Пуанкаре.

Калибровочные модели линейных групп $SO(3,1)$, $GL(4,R)$ основываются на их реализации как структурных групп и групп голономии связности на касательном расслоении $T(X)$. В число своих кинематических переменных все они включают псевдориманову метрику, но различаются связностями, приводя соответственно к геометрии Римана — Картана и Вейля — Эддингтона (§ 9).

Калибровочные модели аффинных групп P, $GA(4,R)$ предполагают рассмотрение аффинных расслоений. От калибровочных моделей линейных групп они отличаются тем, что гравитационное тетрадное поле в них строится как калибровочное поле группы трансляций (§ 10). Вариантами аффинных калибровочных теорий гравитации являются и калибровочные модели линейных групп $SO(4,1)$, $GL(5,R)$ на векторных расслоениях, но сведение которых к калибровочной теории группы Пуанкаре требует соответствующих условий редукции и приводит к появлению добавочных полей.

В этой главе основное внимание уделяется кинематике калибровочных теорий пространственно-временных симметрий. Некоторые динамические конструкции в калибровочной модели группы Пуанкаре будут рассмотрены в гл. VI.

§ 8. КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Первая калибровочная трактовка гравитации, предложенная Утиямой [8] (сразу вслед за работой Янга и Миллса) и Д. Иваненко с сотрудниками [129], основывалась на калибровочной теории группы Лоренца. При этом в [129], в отличие от стандартной схемы калибровочной теории, рассматривались неинфинитезимальные лоренцевские преобразования, а калибровочные потенциалы брались в специальном виде картановских связностей $\Gamma = -gdg^{-1}$, имеющих нулевую кривизну.

Оказалось, что калибровочная теория группы Лоренца [130—133] описывает геометрию Римана — Картана и приводит к теории гравитации с кручением, которой посвящены гл. IV—VI книги. Поэтому в этом параграфе мы остановимся лишь на специфических аспектах этой теории как калибровочной.

В калибровочной теории группы Лоренца, как и во всякой калибровочной теории пространственно-временных симметрий, существуют два типа калибровочных преобразований — калибровочные преобразования группы Лоренца атласов расслоения материальных полей и калибровочные преобразования группы $GL(4, R)$ атласов касательного расслоения (см. § 5).

Утияма первый отметил этот факт и вводил тетрады как операторы калибровочных преобразований атласа касательного расслоения. Они же обеспечивали в его калибровочной схеме инвариантность функционала действия относительно этих преобразований. Инвариантность относительно калибровочных преобразований атласа расслоения материальных полей обеспечивалась, как обычно в калибровочной теории, введением калибровочных полей группы Лоренца. Тем не менее в работе Утиямы оставался открытым вопрос о калибровочном статусе эйнштейновского гравитационного поля. Дело в том, что компенсационная формулировка калибровочной теории, из которой исходили Утияма и последующие авторы, не предсказывает и не объясняет наличия двух типов пространственно-временных калибровочных преобразований. Они естественным образом возникают в калибровочной теории в формализме расслоений, в которой эйнштейновское гравитационное поле, как мы показали, приобретает смысл хиггс-голдстоуновского поля.

В калибровочной теории группы Лоренца преобразования материальных полей приводят к обычному для калибровочных теорий типу законов сохранения (1.17)—(1.19), где роль нетеровского тока (1.7) $J_m{}^\mu$ играет спиновый ток материальных полей (канонический тензор спина (см. § 12)). Этот ток, как и в случае внутренних симметрий в уравнениях (1.14), (1.15), является источником, но не всей связности, а только ее компоненты — тензора конторсии.

В то же время инвариантность лагранжиана материальных полей относительно калибровочных преобразований атласа касательного расслоения ведет к известному закону сохранения $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ тензора энергии-импульса этих полей (см. § 12), который является слабым относительно материальных полей, но сильным относительно гравитационного поля. Таким образом, тензор энергии-импульса материи можно рассматривать как ток, соответствующий симметрии, определяемой группой калибровочных преобразований $GL(4,R)(X^4)$ тетрад и метрического поля, чьим источником этот тензор является.

Необходимо указать, что лоренцевская связность Γ выглядит как калибровочное поле группы $GL(4,R)$ в произвольной системе отсчета, например, в голономном атласе, и принимает вид калибровочного поля группы Лоренца только в атласе Ψ^g касательного расслоения, где метрическое поле g, такое что пара (Γ, g) удовлетворяет условию метричности (6.1), принимает вид постоянной метрики Минковского $g_\iota = \eta$. В общем случае этот атлас не является голономным, т. е. связанным с какой-либо системой координат на X^4. Тем не менее рассмотрение таких систем отсчета в калибровочной теории группы Лоренца необходимо, поскольку существуют ассоциированные с $T(X^4)$ расслоения, например спинорные расслоения, которые допускают атласы, функциями переходов которых являются только операторы локальной группы Лоренца и только лоренцевские связности.

Фок, Иваненко, Вейль были первыми, кто фактически рассмотрел спинорные расслоения в ОТО, и сегодняшние лоренцевские калибровочные поля, если они без кручения, в действительности воспроизводят известные коэффициенты Фока — Иваненко 1929 г. [134, 135], которые описывали параллельный перенос спиноров в ОТО.

В голономном атласе коэффициенты лоренцевской связности даются выражением (Г.9), если в нем положить равной нулю компоненту неметрического переноса B.

Отметим, что выделение в связности — калибровочном поле — компоненты кручения является специфичным только для калибровочных теорий групп пространственно-временных симметрий, генераторы которых могут действовать на вектора касательных и кокасательных пространств, каковыми являются и операторы ∂_μ и dx^μ. В результате может быть определена форма кручения (см. Глоссарий. Связность на касательном расслоении) и следующие свертки коэффициентов формы кривизны

$$R_{\nu\sigma} = R^{ab}{}_{\mu\nu} I_{ab}{}^{\nu}{}_{\sigma}, \qquad R = R^{ab}{}_{\mu\nu} I_{ab}{}^{\mu\nu}. \tag{8.1}$$

Выражения (8.1) представляют собой известные тензор Риччи и скаляр кривизны. Подобные свертки невозможны в калибровочной теории внутренних симметрий.

Величины $R_{\nu\sigma}$ и R, даваемые выражением (8.1), ведут себя соответственно как тензор и скаляр относительно голономных калибровочных преобразований, и они обеспечивают дополнительную свободу выбора лагранжиана в калибровочной теории гравитации, в сравнении с теорией Янга — Миллса, в которой лагранжиан калибровочного поля может иметь только максвелловский вид.

Заметим также, что, в отличие от эйнштейновской теории, нуль кривизны не означает тривиальность геометрии Римана — Картана, поскольку, чтобы плоское по кривизне пространство совпадало с пространством Минковского, необходимо обращение в нуль также тензора кручения. Это условие — нулевые значения кривизны и кручения — является также достаточным. Такая ситуация контрастирует со случаем внутренних симметрий и обусловлена тем, что плоское пространство Минковского является аффинным пространством. Его аффинная кривизна представляет собой сумму линейной кривизны и формы кручения, и оба эти члена должны обращаться в нуль в пространстве Минковского (см. § 10). Например, можно рассмотреть пространство с метрикой Минковского, но с ненулевым кручением; с неминковской метрикой и ненулевым кручением, но нулевой кривизной [136, 137].

Связь пространства Римана — Картана U^4 со своими предельными случаями может быть проиллюстрирована диаграммой

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & V^4 & & \\
 & \overset{Q=0}{\nearrow} & & \overset{R=0}{\searrow} & \\
U^4 & & & & M^4 \\
 & \underset{R=0}{\searrow} & & \underset{Q=0}{\nearrow} & \\
 & & T^4 & &
\end{array}
$$

Рис. 2

где T^4 — пространство телепараллелизма, V^4 — пространство эйнштейновского ОТО, M^4 — пространство Минковского.

В калибровочной теории группы Лоренца ничто не заставляет тензор кручения обращаться в нуль. Тем не менее тот факт, что эйнштейновская гравитация в калибровочном подходе не возникает в одиночку долгое время не удовлетворял ряд авторов. В первой своей работе по калибровочной теории Утияма, например, просто положил равными нулю антисимметричные компоненты связности (в отличие от работы Д. Иваненко [129]). И позднее Утияма и некоторые его последователи предприняли ряд попыток построения калибровочной теории только гравитации на основе калибровочных моделей группы трансляций, но все они в той или иной форме содержали симметризацию связности.

Калибровочная теория группы Лоренца представляет собой минимальную калибровочную модель, включающую в себя эйнштейновскую теорию гравитации. Эта модель дает адекватную калибровочную картину теории гравитации с кручением. Она является достаточной для описания как теории гравитации, так и пространственно-временных симметрий частиц, поскольку учитывает обе их пространственно-временных характеристики — спин и тензор энергии-импульса. Ее первоначальная неудача была следствием недостаточности самого компенсационного подхода в применении к калибровочным теориям пространственно-временных симметрий. Эта неудача стала причиной возникновения альтернативных вариантов калибровочной теории гравитации, базирующихся в основном на калибровочных моделях группы $GL(4, R)$ и группы Пуанкаре.

§ 9. КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ОБЩЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

Группа $GL(4, R)$ является наиболее общей линейной группой симметрий в теории гравитации, а ее калибровочные поля представляют собой самый общий вид связности в касательном расслоении. Однако в большинстве случаев калибровочную модель группы $GL(4, R)$ можно встретить в литературе как составную часть калибровочной модели аффинной группы $GA(4, R)$ [138—141, 125].

Часто калибровочные преобразования группы $GL(4, R)$ ошибочно отождествляют с координатными преобразованиями, что дало повод некоторым авторам называть $GL(4, R)$ пассивными симметриями, локализация которых не имеет никакого отношения к общепринятой схеме калибровочной теории. Эти вопросы обсуждались, например, Ф. Хелем, Чо и др. [142], а исчерпывающий ответ дает их рассмотрение в терминах расслоений.

Группа $GL(4, R)$ является структурной группой касательного расслоения над пространственно-временным многообразием X^4, и в калибровочной теории гравитации калибровочные преобразования группы $GL(4, R)$ имеют обычный калибровочный смысл преобразований атласа Ψ касательного и ассоциированных с ним расслоений, тогда как общие координатные преобразования меняют атлас Ψ_X многообразия X^4. Таким образом, координатные и калибровочные преобразования не коррелируют между собой. Такая корреляция, однако, может быть осуществлена специально, если ограничиться рассмотрением только голономных систем отсчета. В этом случае координатный атлас Ψ_X и атлас расслоения Ψ связаны согласно (5.1) и преобразуются одновременно таким образом, что координатные преобразования $x^\mu \to x^{\mu'}(x)$ сопровождаются калибровочными преобразованиями (5.2) $\partial_\mu \to \partial_{\mu'} = (\partial x^\nu / \partial x^{\mu'}) \partial_\nu$ касательного расслоения. Эти преобразования образуют голономную подгруппу калибровочной группы $GL(4, R)(X^4)$.

Мы подробно остановились на этом вопросе, поскольку аналогичное смешивание координатных и калибровочных преобразований встречается и в калибровочной теории группы Пуанкаре (см. § 10).

Группа $GL(4, R)$ может быть разложена на однопараметрическую группу растяжений D и группу $SL(4, R)$ преобразований, сохраняющих величину объема. Последняя имеет подгруппу Лоренца $SO(3, 1)$ преобразований углового момента и спина с генераторами L_{ab}, $a, b = 0, ..., 3$, где $L_{ab} = -L_{ba}$, и еще девять симметричных генераторов I_{ba}, a, $b=0, ..., 3$, т. е. $I_{ab}=I_{ba}$ и $\mathrm{tr}\, I=0$. Коммутационные соотношения алгебры $sl(4, R)$ даются известными коммутационными соотношениями алгебры Лоренца и следующими выражениями

$$[L_{ab}, I_{cd}] = \eta_{ad}I_{bc}+\eta_{bc}I_{ad}-\eta_{ac}I_{bd}-\eta_{bd}I_{ac},$$
$$[I_{ab}, I_{cd}] = \eta_{ac}L_{bd}+\eta_{ad}L_{bc}+\eta_{bc}L_{ad}+\eta_{bd}L_{ac}. \qquad (9.1)$$

Применимость калибровочной теории группы $GL(4, R)$ к описанию гравитации основывается на том факте, что мировые векторы и тензоры — сечения ассоциированных с $T(X^4)$ расслоений тензоров (см. Глоссарий) — классифицируются по конечномерным линейным представлениям этой группы. Трудность, однако, состоит в физической интерпретации спинорных представлений группы $GL(4, R)$, которые сводятся к бесконечным мультиплетам обычных $SO(3)$-спиноров [143—145, 125] (связь с физикой адронов см. в [141, 123, 146]).

В то же время общеизвестна физическая роль спинорных представлений подгруппы Лоренца группы $GL(4, R)$. Это побудило ряд авторов искать физически приемлемые спинорные представления $GL(4, R)$ в классе нелинейных представлений этой группы (см. Приложение III), индуцируемых спинорными линейными представлениями группы Лоренца [144, 125], которая является картановской подгруппой, как это видно из коммутационных соотношений (9.1). Отметим, что представления $GL(4, R)$ совпадают (поскольку генератор дилатаций D коммутирует со всеми другими генераторами) с представлениями группы $SL(4, R)$, на которых действие генератора растяжений может быть задано произвольно.

Нелинейные представления $SL(4, R)$ в инфинитезимальной форме строятся согласно общей схемы Приложения III. Обозначая параметры генераторов группы Лоренца L и оставшихся генераторов I группы $SL(4, R)$ соответственно $\{u_{ab}\}$ и $\{\sigma_{ab}\}$, мы можем записать всякий элемент g из окрестности единицы группы $SL(4, R)$ в виде

$$g=\exp(\sigma I)\exp(uL). \qquad (9.2)$$

Будем строить нелинейное представление $SL(4, R)$ на пространстве произведения $V=V_L\times SL(4, R)/L$, где V_L — пространство некоторого линейного, например спинорного, представления группы Лоренца. Малые элементы V могут быть представлены парой (σ, v), где σ обозначает левый смежный класс $SL(4, R)$ по модулю L, так что групповой элемент $\exp(\sigma I)$ из выражения (9.2) является представителем в смежном классе σ.

Левые сдвиги группы $SL(4, R)$, действующие в пространстве смежных классов, могут быть перенесены на их представители:

$$g\sigma=\sigma', \quad g\exp(\sigma I)=\exp(\sigma' I)\exp(u' L), \qquad (9.3)$$

где L-значный остаток $\exp(u'L)$, ненужный для закона преобразования σ, может быть использован для определения действия на пространстве представления группы Лоренца V_L. Таким образом, полное представление группы $SL(4, R)$ на пространстве V принимает вид

$$g: (\sigma, v) \to (\sigma', v' = \exp(u'L)v), \tag{9.4}$$

где σ' и u' определяются из уравнения (9.3).

Поскольку фактор-пространство $SL(4, R)/L$ изоморфно пространству псевдоримановых билинейных форм g_{ab} на R^4 (с $\det g = -1$), пространство представления V может быть представлено как пространство спин-метрических или спин-гравитационных комплексов, образованных элементами (g_{ab}, v), где

$$g_{ab} = (\exp(\sigma l)\eta)_{ab},$$

а операторы $\exp(\sigma l)$ представляют собой тетрадные коэффициенты h.

Впервые подобный спин-гравитационный комплекс был сконструирован в работе [122], и мы его уже обсуждали в плане описания спонтанного нарушения пространственно-временных симметрий и трактовки гравитации как голдстоуновского поля.

Однако такое представление группы $SL(4, R)$ в форме (9.4) построено только для инифинитезимальных операторов этой группы, т. е. фактически для алгебры Ли $sl(4, R)$ и предела слабого гравитационного поля. Обычно инфинитезимальный предел нелинейных представлений всех вполне удовлетворяет, но в данном случае он недостаточен, поскольку гравитационное поле, будучи геометрическим, зависит от глобальной структуры пространства-времени и не обязано быть малым.

Поэтому необходимо использовать глобальную схему для построения индуцированных представлений, приводящих к спин-гравитационному комплексу. Эта процедура устанавливает, что представления группы $SL(4, R)$, индуцируемые некоторым представлением ее лоренцевской подгруппы, ищутся на пространстве V_L-значных функций на групповом пространстве $SL(4, R)$, которые удовлетворяют условию

$$\varphi(g, l) = l^{-1}\varphi(g), \qquad l \in L.$$

Это условие фактически сводит функции $\varphi(g)$ на групповом пространстве к функциям $\varphi(\sigma)$ на фактор-пространстве $SL(4, R)/L$ или на множестве представителей смежных классов $\{\sigma_r\}$, поскольку $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma_r)$. Тогда индуцированное представление группы $SL(4, R)$ на этих функциях имеет вид

$$(g\varphi)(\sigma_r) = (g^{-1}\sigma)_r^{-1}(g^{-1}\sigma_r)\,\varphi(g^{-1}\sigma_r), \tag{9.5}$$

и конкретная форма представления (9.5) зависит от конкретного выбора представителей классов смежности (см. Приложение III). Выражение (9.2) дает пример такого выбора в окрестности единицы группы. В общем случае семейство представителей σ_r определяется как некоторое глобальное сечение главного расслоения $SL(4,R)\rightarrow SL(4,R)/L$ со структурной группой Лоренца. Поскольку это расслоение тривиально, оно имеет глобальное сечение.

В свою очередь, V_L-значные функции $\{\varphi\}$ представляют собой глобальные сечения расслоения над базой $SL(4,R)/L$ с типичным слоем V_L. Если такое расслоение тоже тривиально, можно выбрать постоянные функции φ, т. е. задать пару (σ, φ), как и в случае инфинитезимального представления (9.4).

Таким образом, спин-гравитационное представление (g_{ab}, φ) группы $SL(4,R)$ может быть распространено на все преобразования группы и на все псевдоримановы метрики g_{ab}.

Мировые тензоры тоже могут быть записаны в виде индуцированных представлений группы $SL(4,R)$. В частности, мировой вектор a_μ отождествляется с парой $(h_\mu{}^a, a_a)$ тетрадного коэффициента $h_\mu{}^a$ и лоренцевского вектора $a_a = h_a{}^\mu a_\mu$.

Действие генератора растяжений D группы $GL(4,R)$ на представлениях группы $SL(4,R)$ может быть задано произвольно, например на мировых векторах или как растяжение, сохраняющее длину вектора:

$$D: a^\mu \rightarrow k a^\mu, \qquad a_\mu \rightarrow k^{-1} a_\mu,$$

или как конформное преобразование

$$D: a^\mu \rightarrow k a^\mu, \quad a_\mu \rightarrow k a_\mu, \quad a^2 \rightarrow k^2 a^2.$$

Последний случай, однако, сводится к предыдущему умножением a_μ на скалярную плотность s:

$$a^\mu \rightarrow a^\mu, \quad a_\mu \rightarrow s^{-1} a_\mu,$$

которая подчиняется закону преобразований $D: s \rightarrow k^2 s$.

Как следует из приведенного здесь рассмотрения представлений группы $GL(4,R)$, именно индуцированные представления и представления на мировых тензорах составляют основную часть физически значимых представлений этой группы. Таким образом, расслоения, которые могут фигурировать в калибровочной теории группы $GL(4,R)$, представляют собой или всевозможные тензорные произведения касательного и кокасательного расслоений, или расслоения на пространства $V_L \times GL(4,R)/L$ индуцированных представлений $GL(4,R)$. Но в последнем случае для существования глобального сечения такого расслоения, а именно для существования гравитационной части спин-гравитационного комплекса, должна иметь место редукция структурной группы $GL(4,R)$ этого расслоения к группе Лоренца. Это воспроизводит ситуацию, которая возникает благодаря принципу эквивалентности в лоренцевской калибровочной теории гравитации. Но здесь она обусловлена требованием, чтобы спинорные поля могли быть определены в произвольной системе отсчета, в частности в голономной системе отсчета.

Таким образом, гравитация расширяет лоренцевскую симметрию спинорных полей до спонтанно нарушенной $GL(4,R)$-симметрии.

Рассмотрим теперь связности $GL(4,R)$-геометрии. Калибровочные поля группы $GL(4,R)$ содержат компоненты, отвечающие генераторам L, I, D этой группы. В сравнении с калибровочными полями группы Лоренца, которые содержат символы Кристоффеля и тензор конторсии, $GL(4,R)$-связности включают также коэффициенты неметрического переноса B, отвечающие генераторам I, D группы $GL(4,R)$. На касательном расслоении поле B определяется из выражения

$$D_\mu g_{\nu\sigma} = -2B_{\nu\sigma\mu},$$

и полная $GL(4,R)$-связность принимает вид (Г.9). Эта связность представляет собой наиболее общий тип связности на касательном расслоении и описывает геометрию Эддингтона на пространстве-времени.

Вейль был первым [26], кто предпринял попытку обобщить гравитационную теорию учетом неметричности в частном случае, когда

$$B_{\nu\sigma\mu} = B_\mu g_{\nu\sigma}$$

является калибровочным полем дилатаций D.

В то же время, несмотря на более чем 60-летнюю историю, неметрическое обобщение эйнштейновской гравитации не получило столь широкого распространения, как, например, теория гравитации с кручением. По нашему мнению, главная причина этого состоит в том, что отсутствуют какие-либо наблюдаемые физические источники, которые могли бы быть отождествлены с нетеровскими токами, соответствующими генераторам I и D (они получили название токов гипермомента [140, 141]), и которые могли бы порождать соответствующие калибровочные поля, подобно тому как спиновый ток порождает кручение. К тому же такие калибровочные поля не сохраняют лоренцевские инварианты и тем самым в $GL(4,R)$-калибровочной теории нарушается принцип эквивалентности.

§ 10. АФФИННЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Другим естественным обобщением группы Лоренца пространственно-временных симметрий является группа Пуанкаре. Но получилось так, что калибровочная теория группы Пуанкаре стала не обобщением, а конкурентом калибровочной теории группы Лоренца.

Калибровочная теория гравитации, основанная на группе Пуанкаре, возникла сразу за работой Утиямы с целью устранить неясность в калибровочной интерпретации гравитационного поля, которому не находилось места внутри стандартной калибровочной схемы [147, 148, 36]. Подход, основанный на группе Пуанкаре, ставил своей целью представить тетрадное поле как калибровочное поле трансляций, исходя из совпадения тензорных рангов тетрадного поля $h_\mu{}^a$ и трансляционного калибровочного поля $A_\mu{}^a$. Но интерес к калибровочной модели группы Пуанкаре был вызван не только этим.

Пространством-временем СТО является аффинное пространство Минковского, и группа Пуанкаре, будучи группой движения этого пространства, представляет собой фундаментальную динамическую группу СТО, чьи унитарные представления описывают свободные частицы в СТО. Поэтому, для того чтобы калибровочная теория элементарных частиц была полной, казалось необходимым дополнить калибровочную теорию внутренних симметрий и спина калибровочной теорией группы Пуанкаре.

Однако на этом пути возникли трудности, которые были вызваны именно динамическим характером группы Пуанкаре. Динамические симметрии можно характеризовать как описывающие пространственное распределение и временную эволюцию системы и которые реализуются дифференциальными операторами, действующими в функциональном пространстве. Волновые функции частиц дают пример реализации представления группы Пуанкаре в СТО как динамической группы с генераторами, выраженными дифференциальными операторами

$$P_\mu = \partial_\mu, \; L_{\mu\nu} = L^{\text{orb}}_{\mu\nu} + L^{\text{sp}}_{\mu\nu}. \qquad (10.1)$$

Причем именно орбитальная часть L^{orb} генераторов группы Лоренца L приводит к выполнению коммутационных соотношений группы Пуанкаре как полупрямого произведения трансляций и группы Лоренца

$$[L_{\mu\nu}, P_\sigma] = [L^{\text{orb}}_{\mu\nu}, P_\sigma] = \eta_{\nu\sigma}P_\mu - \eta_{\mu\sigma}P_\nu.$$

В отличие от внутренних симметрий и лоренцевских преобразований спина, которые меняют волновую функцию в точке, преобразования группы Пуанкаре с дифференциальными генераторами (10.1) могут интерпретироваться, с одной стороны, как координатные преобразования, а с другой — как переходы от точки к точке. Обе эти интерпретации совпадают в плоском пространстве, но различаются в пространстве со связностью.

Авторы первых работ по калибровочной теории группы Пуанкаре [147, 36, 149] следовали координатной интерпретации операторов (10.1). Они объединяли локализации спиновых лоренцевских преобразований и преобразований координатных трансляций $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$. При этом фактически рассматривалась не группа Пуанкаре, а прямое произведение группы Лоренца

L и группы трансляций T. Локализация лоренцевских спиновых преобразований приводит к стандартной схеме калибровочной теории группы Лоренца. Локализация координатных трансляций $x^\mu \to x^\mu + a^\mu(x)$ воспроизводит группу общих координатных преобразований, которая индуцирует, в свою очередь, голономную подгруппу калибровочной группы $GL(4, R)(X)$ преобразований атласа касательного расслоения, как это уже неоднократно обсуждалось. Генераторами таких согласованных преобразований координат и $GL(4, R)$-калибровочных преобразований являются производные Ли, а инвариантность лагранжиана материальных полей относительно этих преобразований, как и в модели Утиямы, является условием введения тетрадных полей. Последние тем самым не могут рассматриваться ни как имеющие какое-либо отношение к группе Пуанкаре, ни тем более как калибровочные поля этой группы.

Процедура локализации преобразований группы Пуанкаре, основанная на интерпретации генераторов (10.1) как переходов между точками была предложена Ф. Хелем и др. [150, 19]. Эта процедура не ограничивается локализацией групповых параметров, как обычно, а включает модификацию самих генераторов группы трансляций путем замены обычных производных в (10.1) на ковариантные

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu, \tag{10.2}$$

где $\Gamma_\mu = \Gamma_\mu{}^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}$ — некоторая лоренцевская связность. Тогда локализация преобразований группы Пуанкаре

$$P = \exp[\sigma^\mu \partial_\mu + \omega^{\alpha\beta}(L^{\mathrm{orb}}_{\alpha\beta} + L^{\mathrm{sp}}_{\alpha\beta})]$$

принимает нетрадиционный вид

$$P(x) = \exp[\sigma^\mu(x) D_\mu + \omega^{\alpha\beta}(x)(L^{\mathrm{orb}\prime}_{\alpha\beta} + L^{\mathrm{sp}}_{\alpha\beta})], \tag{10.3}$$

где $L^{\mathrm{orb}\prime}$ получаются из L^{orb} подстановкой (10.2).

Замена (10.2) кажется вполне естественной как обобщение трансляций в плоском пространстве на трансляции в искривленном пространстве. Но в то же время она нарушает коммутационные соотношения группы Пуанкаре: например, генераторы трансляций перестают коммутировать

$$[D_\mu, D_\nu] = R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} L_{\alpha\beta},$$

и преобразования (10.3) не образуют калибровочную группу трансляций в обычном смысле.

К тому же инвариантность лагранжиана материальных полей относительно преобразований вида (10.3) сводится на экстремалях к обычной инвариантности относительно лоренцевских спиновых преобразований и голономных преобразований из калибровочной группы $GL(4, R)$, что мы уже наблюдали в предыдущих калибровочных моделях, и они ведут к тем же лоренцевским калибровочным полям и тетрадному полю.

Таким, образом, оказывается, что обе обсуждаемые калибровочные модели группы Пуанкаре лежат вне традиционной калибровочной схемы и не обеспечивают тетрадное гравитационное поле статусом калибровочного поля группы трансляций вопреки первоначальным декларациям. С нашей точки зрения, это является следствием общего положения, что применение калибровочной теории к динамическим группам не имеет смысла. Динамические симметрии характеризуют конкретную динамику системы, являющуюся следствием уже имеющегося в системе взаимодействия, в том числе порождаемого теми или иными калибровочными полями. Например, группа Пуанкаре в теории поля — это группа динамических симметрий, как правило, свободных систем, когда взаимодействие в системе вообще отсутствует. В теории гравитации примером динамических групп служат группы движений.

Стандартная техника калибровочной теории может быть применена к локализации группы Пуанкаре, если на время забыть о ее роли как динамической группы и рассматривать ее как некоторую абстрактную структурную группу и группу голономии на расслоении [151, 139, 152—155].

Структурная группа Пуанкаре P-расслоения (над паракомпактной базой) всегда редуцирована к группе Лоренца. Это является следствием того, что ассоциированной факторрасслоение $\lambda_{P/L}$, типичный слой которого — фактор-пространство P/L — гомеоморфен $T=R^4$, всегда допускает глобальное сечение σ. В калибровочной теории пространственно-временных симметрий естественно предположить тогда, что рассматриваемое расслоение ассоциировано с касательным расслоением $T(X^4)$ над многообразием X^4. Таковыми являются главное расслоение AX аффинных реперов и аффинное касательное расслоение $AT(X^4)$, которыми мы без потери общности в дальнейшим и ограничимся.

Расслоения AX и $AT(X^4)$ отличаются от линейных расслоений LX и $T(X^4)$ аффинным типичным слоем $V\times T$, где V обозначает типичный слой расслоения $T(X)$ или $L(X)$. Действие группы Пуанкаре на $V\times T$ имеет вид

$$P\ni g=(g_L, g_T):(v, t)\to(g_L v, g_L t+g_T).$$

Расслоения $AT(X^4)$ и AX ассоциированы с $T(X^4)$ и LX, и структурная аффинная группа $GA(4, R)$ этих расслоений редуцирована к линейной группе $GL(4, R)$.

Локальная 1-форма связности A группы Пуанкаре на P-расслоении расщепляется на две компоненты $A=A_L+A_T$, где A_L обозначает лоренцевскую связность, а $A_T=A^a_{T\mu}T_a dx^\mu$ представляет собой R^4-значную форму связности, чьи коэффициенты играют роль калибровочных полей подгруппы трансляций. Связность A_T, поскольку существует глобальное сечение σ факторрасслоения $\lambda_{P/L}$, можно, в свою очередь, разложить на две составляющие

$$A_T = A_\sigma + \Theta, \tag{10.4}$$

где A_σ определяется из условия

$$(D+A_\sigma)\sigma \equiv 0, \quad D = d - A,$$

и имеет вид $(A_\sigma)^a = (D\sigma)^a$, так что (10.4) переписывается в форме

$$A_T = (D\sigma)^a + \Theta^a T_a. \tag{10.5}$$

Легко убедиться, что именно компонента A_σ ответственна за неоднородный закон преобразований связности A_T относительно локализованных трансляций, тогда как Θ остается инвариантной относительно этих преобразований и преобразуется по линейному закону относительно калибровочной группы Лоренца. Всегда имеется трансляционная калибровка, в которой неоднородная часть A_σ связности группы трансляций A_T становится равной нулю и A_T совпадает с Θ. Например, можно осуществить сведение $A_T \to \Theta$ во всех атласах Ψ^σ аффинного расслоения, функции перехода которых принадлежат только линейной калибровочной группе и относительно которых σ совпадает с нулевой функцией.

Пусть такая трансляционная калибровка выбрана. Тогда возвращаясь к рассмотрению расслоений $AT(X^4)$ и AX, мы можем использовать известные теоремы, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между общей аффинной связностью A на AX и парами (A_L, Θ) линейной связности A_L на LX и R^4-значной 1-формы Θ на tl (LX), которая на X представляется тензорным, один раз ковариантным и один раз контравариантным полем $\breve{\theta}$. Следствие имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_L & \Theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} R_L & D\Theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.6}$$

где общая аффинная связность A и ее форма кривизны F представляются (5×5)-матрицами, действующими на столбцы $\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in R^4$, а D и R_L обозначают ковариантный дифференциал и форму кривизны линейной связности A_L.

В рамках обсуждаемой калибровочной теории группы Пуанкаре A_L является лоренцевской связностью, чьи коэффициенты представляют собой лоренцевские калибровочные поля, а компоненты поля $\hat{\theta}$ являются однородными составляющими калибровочного поля группы трансляций.

Заметно сходство тензорных рангов калибровочных полей трансляций $\widehat{\theta}_\mu{}^\nu$ и тетрадных функций $h_\mu{}^a$. Однако есть и различие, которое состоит в том, что у поля $\widehat{\theta}$ оба индекса, что называется, координатные, а у h один координатный, а другой тетрадный. Опишем это различие строго:

Напомним, что тетрадное гравитационное поле h определяется как глобальное сечение ассоциированного с $T(X^4)$ расслоения Σ на факторпространства $GL^+(4, R)/L$ (см. § 4). Однако h, будучи представленным семейством локальных сечений $\{h_\iota\}$ главного $GL(4, R)$-расслоения, которые рассматриваются с точностью до действующих на них справа лоренцевских калибровочных преобразований, может быть описано как семейство матричных полей $\{h_\mu{}^a(x)\}$, действующих в типичном слое расслоения $T(X^4)$. Они представляют собой операторы калибровочных преобразований между данным атласом Ψ касательного расслоения и атласом Ψ^g, в котором метрическое гравитационное поле g, изоморфное h, выглядит как постоянная метрика Минковского, т. е. $\psi_\iota = h_i\ \psi_i{}^g$. Здесь $\psi_i{}^g$ и ψ_i — морфизмы тривиализации атласов Ψ^g и Ψ. Преобразования атласа Ψ ведут к калибровочным преобразованиям тетрадного поля

$$h \to gh\,(h^a_\mu \to h^a_{\mu'}). \tag{10.7}$$

Тензорное поле $\widehat{\theta}$, отвечающее однородной составляющей связности группы трансляций T, определяет линейное отображение на себя $\widehat{\theta} : T_x \to T_x$ касательных пространств в каждой точке $x \in X^4$. Относительно атласа касательного расслоения Ψ поле $\widehat{\theta}$ тоже представляется семейством матричных функций $\{\theta_i = \psi_i \widehat{\theta}\}$, действующих в R^4. Но при калибровочном преобразовании Ψ закон преобразования поля θ

$$\widehat{\theta}_\iota \to g_\iota \widehat{\theta}_\iota g_\iota^{-1}\ \ (\widehat{\theta}^\nu_\mu \to \widehat{\theta}^{\nu'}_{\mu'}) \tag{10.8}$$

отличается от закона преобразований (10.7) тетрадного поля h_i; именно это отличие делает невозможным отождествление этих полей.

В самом деле, предположим, что тетрадное гравитационное поле, которое представляется относительно некоторого атласа Ψ матричными функциями $h_\mu{}^a(x)$ совпадает с полем $\widehat{\theta}_\mu{}^\nu$. Пусть Ψ — атлас Ψ^g. Тогда всегда можно найти карту (U_i, ψ_i), что $h_\mu{}^a(x)$, $x \in U_i$, будут матрицами тождественного преобразования R^4. В этом случае трансляционное поле $\widehat{\theta}_i$, совпадающее по предположению с h, должно сводится к канонической форме θ (см. Глоссарий. Внешние дифференциальные формы) на X^4. Но тогда в силу закона калибровочных преобразований (10.8) такое поле будет совпадать с канонической формой во всех других картах, т. е. на всем многообразии X^4 и во всех атласах Ψ, чего нельзя сказать об h^i.

Иногда калибровочные преобразования поля $\widehat{\theta}$ сопоставляют с лоренцевскими преобразованиями тетрадных функций h справа. Они интерпретируются как калибровочные преобразования второго рода. В § 5 было показано, что калибровочные преобразования второго рода в теории гравитации не могут существовать из-за условия инвариантности функционала действия гравитационного поля (их следует отличать от преобразований атласа Ψ^g). Но если пренебречь этим условием и рассмотреть такие преобразования, они будут тоже иметь разный вид для полей $\widehat{\theta}$ и h. Калибровочные преобразования второго рода, записанные в атласе, должны иметь тот же вид, что и калибровочные преобразования первого рода. Поэтому у поля $\widehat{\theta}_i$ при таких преобразованиях будут меняться оба индекса, тогда как у h_i только один — тетрадный.

Отождествлению гравитационного тетрадного поля h и калибровочного поля трансляций $\widehat{\theta}$ препятствует также то, что поле $\widehat{\theta}$ может обращаться в нуль, а h нет; $\widehat{\theta}$ определено однозначно, h — с точностью до лоренцевских преобразований.

Невозможность использования трансляционных калибровочных полей для описания гравитации ставит вопрос об их физической интерпретации.

В аффинных касательном и реперном расслоениях подгруппа трансляций группы Пуанкаре реализуется сдвигами касательных векторов

$$T_a: t_b \to t_b + \delta^a_b a_a, \quad t_b \in T_x.$$

Некоторые авторы [156, 152, 159] рассматривали индуцированные представления группы Пуанкаре на функциях, которые зависят не только от пространственно-временной точки x, но также от касательного вектора t, т. е. обладают своего рода аффинными внутренними симметриями, и, например, предлагалось связать эти симметрии с симметриями адронов.

Частным случаем такого подхода является рассмотрение волновых функций, которые принимают значения в пространстве $V_L \times T_x$ некоторого нелинейного представления группы Пуанкаре, где V_L является пространством представления группы Лоренца, а касательное аффинное пространство T_x играет роль пространства значений голдстоуновских полей, отвечающих подгруппе трансляций. Тогда группа трансляций действует только на голдстоуновские поля, которые могут быть убраны калибровкой, но трансляционная связность при этом останется, хотя ее физический и геометрический (в рамках линейной геометрии) смысл неясен.

Действительно, обобщенная аффинная связность A на расслоении аффинных реперов AX определяет линейную связность A_L и R^4-значную форму Θ на расслоенном пространстве линейных реперов, а аффинная кривизна связности A представляет собой сумму линейной кривизны и линейной ковариантной производной $D\Theta$ формы Θ. Однако только в случае, когда связность Θ сводится на X^4 к канонической форме Θ, ковариантная производная $D\Theta$ имеет известный геометрический смысл 2-формы кручения в линейной геометрии.

Этот факт побудил ряд авторов ограничить рассмотрение лишь аффинными связностями, совпадающими с канонической формой θ [157, 133]. Однако такое совпадение имеет место только, если главное подрасслоение линейной группы аффинного расслоения совпадает с расслоением на линейные реперы, но в этом случае каноническая форма представляет собой стандартный атрибут всех линейных расслоений и не несет какой-либо информации, индивидуализирующей их.

Отметим, что, используя результаты калибровочной теории группы $GL(4, R)$, калибровочная модель группы Пуанкаре легко обобщается до калибровочной теории аффинной группы $GA(4, R)$, [151, 159, 149, 152, 153].

При построении динамики калибровочных теорий аффинных групп сталкиваются, однако, с трудностью задания инвариантной билинейной формы на их алгебрах Ли [160]. Это, а также ряд других соображений побудило рассмотреть вложение P в линейные группы, в частности в группу де Ситтера $SO(4, 1)$, евклидизация которой при построении квантовой теории приводит к компактной группе $SO(5)$ [161—165, 159]. Однако редукция этой группы к группе Пуанкаре сопровождается появлением еще новых дополнительных полей Θ^{r}, физический смысл которых тоже остается неясным.

Глава IV

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С КРУЧЕНИЕМ

Теория гравитации с кручением в последнее время привлекает большое внимание, хотя и остается пока моделью, не доступной современному эксперименту. Это можно объяснить рядом достоинств этой теории по сравнению с эйнштейновской теорией гравитации.

Во-первых, теория гравитации с кручением с необходимостью следует из калибровочной теории гравитации, что позволяет надеяться на возможность включения ее в единую теорию фундаментальных физических взаимодействий, объединяющую на основе калибровочного принципа все четыре типа взаимодействия.

Во-вторых, она учитывает обе независимые пространственно-временные характеристики материи — массу (тензор энергии-импульса) и спин в качестве источников поля тяготения. При этом учет спиновых свойств материи приводит к необходимости введения дополнительной, по сравнению с псевдоримановой, структуры на пространственно-временном многообразии — кручения.

В-третьих, теория гравитации с кручением, как и ОТО, удовлетворяет принципу относительности и по крайней мере «слабому» (а в нашей формулировке полному) принципу эквивалентности. Приведенное в работе [166] доказательство обобщенной теоремы Биркгофа о единственности решения Шварцшильда в случае сферической симметрии для теории гравитации с кручением и квадратичными по кривизне лагранжианами указывает также на то, что такая теория не должна противоречить ни одному из классических эффектов ОТО.

Таким образом, теорию гравитации с кручением можно рассматривать как непосредственное обобщение эйнштейновской теории тяготения, а на микроуровне и в экстремальных состояниях материи, например при коллапсе либо на ранних стадиях эволюции Вселенной, где возрастает роль спиновых эффектов, и как конкурента ОТО.

Теория гравитации с кручением имеет длительную историю развития. Однако аппарат теории и ее основные положения претерпевают в настоящее время существенные изменения. Пересматриваются кинематическая и динамическая схемы теории [167—169], разрабатывается квантовая теория кручения, на основе которой предсказываются новые эффекты [22], предпринимаются попытки иным образом трактовать само поле кручения — как конденсат пар фермионов, что позволяет значительно приблизить эту теорию к физике элементарных частиц [171, 172].

Эти и другие перспективные стороны теории гравитации с кручением, а также ее проникновение в другие области теоретической физики (теорию сильных взаимодействий [173], статистическую физику [174], физику твердого тела [175]) побудило нас уделить ей в книге особое внимание. Центральное место в нашем изложении занимает наиболее разработанный вариант теории гравитации с кручением — теория Эйнштейна — Картана (ТЭК) и особенно ее квантовые аспекты.

ТЭК начала развиваться с работы Э. Картана 1922 г. [176], где он предложил рассматривать в качестве модели пространства-времени четырехмерное дифференцируемое многообразие с метрическим полем и несимметричной метрической связностью $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \neq \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$. В этой же работе, чтобы обосновать термин «кручение», Картан привел пример трехмерного пространства, в котором рассмотрел винтовое движение в выбранном направлении как движение по геодезической, задаваемое метрической связностью, не содержащей в себе символов Кристоффеля (равных нулю), т. е. зависящей только от поля кручения.

Продолжая исследования, начатые в 1922 г., Картан в последующих работах [177—179] предположил, что тензор кручения связан с плотностью внутреннего углового момента материальной среды.

Однако идеи Картана не получили в те годы должного понимания и развития. Это, вероятно, объясняется тем, что в то время еще не был известен спин, открытый и введенный в физику Уленбеком и Гоудсмитом в 1925 г.

Идеи Картана стали возрождаться в конце сороковых годов. Сначала Штукельберг [180] для согласования теоретических расчетов с экспериментами по изучению сверхтонкой структуры атомов водорода и дейтерия предложил ввести кручение пространства-времени, обеспечивающее спин-спиновое взаимодействие элементарных частиц. Затем Эйнштейн в своих работах по единой теории поля использовал несимметричную связность, полагая, что она связана с электромагнитными свойствами материи [181]. Параллельно такая же теория была разработана Шредингером [182]. Уравнения теории Эйнштейна — Шредингера, полученные с помощью вариационного принципа Палатини [183], в первом приближении приводили к уравнениям Максвелла в ОТО, а в последующих приближениях — к нелинейным электромагнитным законам. На сегодняшний день имеется ряд работ, написанных в самое последнее время, в которых эта программа продолжает разрабатываться [184, 185].

Важным этапом становления теории гравитации с кручением стала калибровочная трактовка гравитационного поля Утиямой [8], Шиамой [148], Иваненко — Бродским — Соколиком [129], Кибблом [147], Б. Фроловым [36] и развитие тетрадного формализма Вейлем [186], В. Родичевым [136], Д. Иваненко [187]. Калибровочная теория не только обосновала необходимость кручения, но и строго доказала, что источником поля кручения является спин материальных полей.

Математический аппарат теории пространств с кручением был в значительной степени создан именно в работах самого Картана [177—179, 188]. В § 11 мы приведем основные сведения о геометрии пространств с кручением, сосредоточив основное внимание на различиях между псевдоримановыми пространствами и пространствами Римана — Картана U^4.

Важное место в ТЭК занимает исследование самогравитирующих волновых полей со спином в пространствах с кручением, приводящее, в частности, к геометрической интерпретации нелинейных теорий поля. Этим вопросам посвящен § 12 данной главы.

В § 13 исследуется так называемая спиновая жидкость в теории гравитации с кручением, которая используется часто в качестве источника гравитационного поля с кручением в космологических моделях.

Космология со спином и кручением оказалась именно той моделью Вселенной, в которой впервые была решена проблема предотвращения сингулярности и предсказана возможность нарушения теорем о сингулярностях как в общем случае, так и для ряда частных вариантов. Рассмотрению этих вопросов посвящен § 14 данной главы.

§ 11. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ РИМАНА—КАРТАНА

Пространством Римана — Картана или U^4-пространством, называется четырехмерное многообразие X^4, независимыми характеристиками которого являются псевдориманова метрика $g_{\mu\nu}(x)$ и кручение $Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}$, равное антисимметричной части объекта связности

$$Q_{\mu\nu}{}^{\lambda} = {}^1/_2\,(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}{}^{\lambda}). \qquad (11.1)$$

В U^4-пространствах выполняется условие метричности (6.1), где полная связность $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ есть сумма символов Кристоффеля и тензора конторсии $K^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ (см. Глоссарий. Связность в псевдоримановом пространстве):

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \{^{\lambda}{}_{\mu\nu}\} + K^{\lambda}{}_{\mu\nu},$$
$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = Q^{\lambda}{}_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}{}^{\lambda} + Q_{\nu\mu}{}^{\lambda}. \qquad (11.2)$$

Кручение, согласно формуле (11.1), является тензором относительно общековариантных преобразований. Тензор кручения имеет 24 независимые компоненты и может быть разложен на сумму трех неприводимых частей

$$Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\tilde{Q}^{\lambda}{}_{\mu\nu}+{}^{1}/_{3}(\delta_{\mu}{}^{\lambda}Q_{\nu}-\delta_{\nu}{}^{\lambda}Q_{\mu})+\varepsilon_{\sigma\mu\nu\alpha}g^{\sigma\lambda}\check{Q}^{\alpha}, \qquad (11.3)$$

где $\tilde{Q}$ — бесследовая часть тензора кручения, Q_{ν} — след тензора кручения

$$Q_{\nu}=Q^{\lambda}{}_{\nu\lambda}, \qquad (11.4)$$

а $\check{Q}_{\alpha}$ — псевдослед тензора кручения

$$\check{Q}_{\alpha}=(1/3!)\,\varepsilon_{\alpha\mu\nu\sigma}Q^{\mu\nu\sigma}. \qquad (11.5)$$

С помощью формул (11.2)—(11.5) тензор конторсии тоже можно представить в виде суммы аналогичных неприводимых частей

$$K^{\lambda}_{\mu\nu}=\tilde{K}^{\lambda}_{\mu\nu}+\frac{1}{3}(\delta^{\lambda}_{\mu}K_{\nu}-\delta^{\lambda}_{\nu}K_{\mu})+\varepsilon_{\sigma\mu\nu\alpha}g^{\sigma\lambda}\check{K}^{\alpha},$$

где $\tilde{K}^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\tilde{Q}^{\lambda}{}_{\mu\nu}+\tilde{Q}^{\lambda}{}_{\mu\nu}+\tilde{Q}^{\lambda}{}_{\nu\mu}$ — бесследовая часть тензора конторсии, $K_{\nu}=2Q_{\nu}$ — след тензора конторсии и $\check{K}^{\alpha}=\check{Q}^{\alpha}$.

Рассмотрим тензор кривизны пространства U^{4}. Из определения тензора кривизны (Г.6) и выражения для коэффициентов связности (11.2) получаем

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}(\Gamma)=R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}(\{\})+K^{\alpha}{}_{\beta\nu;\mu}-K^{\alpha}{}_{\beta\mu;\nu}+K^{\alpha}{}_{\mu\sigma}K^{\sigma}{}_{\beta\nu}-K^{\alpha}{}_{\nu\sigma}K^{\sigma}{}_{\beta\mu}. \qquad (11.6)$$

Точка с запятой здесь и в дальнейшем означает инвариантную производную по символам Кристоффеля

$$A^{\alpha}{}_{;\mu}=\partial_{\mu}A^{\alpha}+\{^{\alpha}{}_{\nu\mu}\}A^{\nu}.$$

Свертывая тензор кривизны (11.6) по индексам α и μ, получим тензор Риччи

$$R_{\beta\nu}(\Gamma)=R_{\beta\nu}(\{\})+K^{\mu}{}_{\beta\nu;\mu}-K^{\mu}{}_{\beta\mu;\nu}+K^{\mu}{}_{\mu\sigma}K^{\sigma}{}_{\beta\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\sigma}K^{\sigma}{}_{\beta\mu}, \qquad (11.7)$$

который, в отличие от случая псевдориманова пространства, несимметричен

$$R_{\beta\nu}(\Gamma)\neq R_{\nu\beta}(\Gamma).$$

Тождества Бианки в геометрии Римана — Картана имеют вид

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu;\lambda}+R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda;\mu}+R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu;\nu}=$$
$$=2\{Q^{\rho}{}_{\mu\nu}R^{\alpha}{}_{\beta\rho\lambda}+Q^{\rho}{}_{\nu\lambda}R^{\alpha}{}_{\beta\rho\mu}+Q^{\rho}{}_{\lambda\mu}R^{\alpha}{}_{\beta\rho\nu}\}, \qquad (11.8)$$

$$Q^{\alpha}{}_{\mu\nu;\lambda}+Q^{\alpha}{}_{\nu\lambda;\mu}+Q^{\alpha}{}_{\lambda\mu;\nu}+{}^{1}/_{2}(R^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda}+R^{\alpha}{}_{\nu\lambda\mu}+$$
$$+R^{\alpha}{}_{\lambda\mu\nu})=2(Q^{\rho}{}_{\mu\nu}Q^{\alpha}{}_{\rho\lambda}+Q^{\rho}{}_{\nu\lambda}Q^{\alpha}{}_{\rho\mu}+Q^{\rho}{}_{\lambda\mu}Q^{\alpha}{}_{\rho\nu}). \qquad (11.9)$$

Проводя в них суммирование по индексам α и μ, получим следующие свернутые тождества Бианки:

$$R_{\beta\nu;\lambda}-R_{\beta\lambda;\nu}+R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda;\alpha}=2\{Q^{\rho}{}_{\alpha\nu}R^{\alpha}{}_{\beta\rho\lambda}-R_{\beta\rho}Q^{\rho}{}_{\nu\lambda}+Q^{\rho}{}_{\lambda\alpha}R^{\alpha}{}_{\beta\rho\nu}\}, \qquad (11.10)$$

$$Q^{\alpha}{}_{\nu\lambda;\alpha}=2\left(Q_{\rho}Q^{\rho}{}_{\nu\lambda}+Q^{\rho}{}_{\mu\nu}Q^{\mu}{}_{\rho\lambda}+Q^{\rho}{}_{\lambda\mu}Q^{\mu}{}_{\rho\nu}\right), \qquad (11.11)$$

которые в § 12 будут использованы для вывода законов сохранения энергии-импульса и спина.

Рассмотрим теперь особенности параллельного переноса в U^4. В терминах ковариантного дифференцирования 2-формы кручения Q и кривизны R могут быть выражены так:

$$Q(\tau, \tau')=D_{\tau}\tau'-D_{\tau'}\tau-[\tau, \tau'], \qquad (11.12)$$

$$R(\tau, \tau')\tau''=[D_{\tau}, D_{\tau'}]\tau''-D_{[\tau,\tau']}\tau'', \qquad (11.13)$$

где τ, τ', τ'' — векторные поля на X^4.

В локальной системе координат параллельный перенос в U^4 может быть представлен как параллельный перенос в $R^4=\psi_{\iota}(U^4)$. Пусть τ, τ' — поля вдоль координатных линий (прямых в R^4), т. е. $[\tau, \tau']=0$. Тогда, согласно (11.12), перенос вектора $\tau(A)$ вдоль поля τ' из точки A в точку E, и перенос $\tau'(A)$ вдоль τ из точки A в точку B (см. рис. 3) приводят к

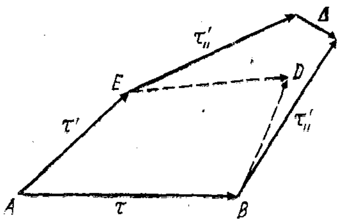

Рис. 3

тому, что концы полученных в результате этих переносов векторов $\tau_{\parallel}$ и $\tau'_{\parallel}$ не совпадают, как это имело бы место в пространстве без кручения (отмечено пунктиром), и возникает размыкание четырехугольника $DEAB$, обязанное кручению $\Delta=Q(\tau, \tau')$.

Кручение дает вклад и в параллельный перенос по замкнутому контуру. Проиллюстрируем это выводом соотношения (11.13) в индексной форме. Для этого вычислим параллельный перенос τ''вдоль поля τ, а затем вдоль поля τ'. Результат будет следующим:

$$D_{\tau'}D_{\tau}=(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\tau''_{\nu})\,d\tau'^{\alpha}d\tau^{\beta}=d\,(D_{\tau}\tau''_{\nu})-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}D_{\tau}\tau''_{\alpha}d\tau'^{\mu}.$$

Если поменять местами D_{τ} и $D_{\tau'}$, то получим

$$D_{\tau}D_{\tau'}=(\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\tau''_{\nu})\,d\tau'^{\alpha}d\tau^{\beta}=d\,(D_{\tau'}\tau''_{\nu})-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}D_{\tau'}\tau''_{\alpha}d\tau^{\mu}.$$

Коммутатор $[D_{\tau'}, D_{\tau}]\tau''_{\nu}$ после изменения порядка суммирования во втором члене будет равен

$$[D_{\tau'}, D_{\tau}]=\{\Gamma^{\sigma}{}_{\nu[\alpha,\beta]}+\Gamma^{\lambda}{}_{\nu[\alpha|}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda|\beta]}\}\,\tau''_{\sigma}\,d\tau'^{\alpha}d\tau^{\beta}+$$
$$+\,2Q^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}\tau''_{\nu}d\tau'^{\alpha}d\tau^{\beta}.$$

Здесь

$$R^{\sigma}{}_{\nu\beta\alpha} = \Gamma^{\sigma}{}_{\nu[\alpha,\beta]} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu[\alpha|}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda|\beta]}$$

тензор кривизны пространства U^4, и тогда

$$[D_{\tau'}, D_{\tau}]\,\tau''_{\nu} = \{R^{\sigma}{}_{\nu\beta\alpha}\tau''_{\sigma} + 2Q^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}\tau''_{\nu}\}\,d\tau'^{\alpha}d\tau^{\beta}.$$

Наличие кручения приводит к тому, что в геометрии Римана — Картана геодезические кривые (в ТЭК их называют автопараллелями) не совпадают с наикратчайшими.

Наикратчайшими, или экстремалями, называются кривые, имеющие экстремальную длину относительно метрики псевдориманова пространства, т. е. минимизирующие функционал

$$S = -\int ds,$$

где $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\,dx^{\mu}dx^{\nu}$. Такие кривые свпадают с геодезическими псевдориманова пространства V^4 и подчиняются уравнению

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0.$$

Это уравнение отличается от уравнения автопараллели, которое при том же выборе аффинного параметра ds имеет вид

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0. \qquad (11.14)$$

Подставляя выражение для связности (11.2) в (11.14), получим

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \left[\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + (Q_{\mu\nu}{}^{\alpha} + Q_{\nu\mu}{}^{\alpha})\right]\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0, \qquad (11.15)$$

откуда очевидно, что кручение существенным образом влияет на вид автопараллели в U^4, которая отличается от экстремалей и совпадает с ними, только если кручение выражается через псевдослед.

В общем случае, после исключения из рассмотрения псевдоследа, остается двадцать компонент тензора кручения. Проинтегрировать систему уравнений (11.15) в общем виде не удается уже в псевдоримановом пространстве, тем более эта задача усложняется для пространств Римана — Картана. Однако уравнения сильно упрощаются, если пространство допускает группу движений, что задает первые интегралы уравнений автопараллелей в пространствах с кручением. Группа движений пространства U^4 определяется как группа диффеоморфизмов X^4, сохраняющих метрику и кручение. Поскольку нас интересует прежде всего сам факт отличия автопараллелей от экстремалей, мы будем считать, что векторы Киллинга ξ_{α} (векторы фундаментальных полей, определяемых диффеоморфизмами группы движений (см. Глоссарий. Векторные поля)) псевдориманова пространства будут также векторами Киллинга пространства Римана — Картана. Это означает, что равны нулю производные Ли

$$\mathop{\mathfrak{L}}_{\xi} g_{\mu\nu}(x) = 0, \tag{11.16}$$

$$\mathop{\mathfrak{L}}_{\xi} Q^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \tag{11.17}$$

относительно векторов ξ_α, удовлетворяющих соотношениям

$$\xi_{\nu;\alpha} - \xi_{\alpha;\nu} = 0.$$

Рассмотрим подробнее наиболее простой случай центрально-симметричного статического пространства U^4. Для него векторами Киллинга являются

$$\begin{gathered} \underset{(0)}{\xi} = \{1,\ 0,\ 0,\ 0\},\quad \underset{(2)}{\xi} = \{0,\ 0,\ -\cos x^3,\ \operatorname{ctg} x^2 \sin x^3\}, \\ \underset{(1)}{\xi} = \{0,\ 0,\ \sin x^3,\ \operatorname{ctg} x^2 \cos x^3\},\quad \underset{(3)}{\xi} = \{0,\ 0,\ 0,\ -1\}. \end{gathered} \tag{11.18}$$

Условию (11.16) с векторами (11.18) удовлетворяет статическая сферическая метрика (в обозначениях $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$)

$$ds^2 = \exp(-\lambda(r))\, dt^2 - \exp(\lambda(r))\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Для тензора кручения нетрудно получить из (11.17) следующие ограничения:

$$\partial Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma}/\partial\varphi = 0, \qquad \partial Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma}/\partial t = 0,$$

$$Q^{\alpha}{}_{2\nu}\delta^3_\beta - Q^{\alpha}{}_{2\beta}\delta^3_\nu - Q^{3}{}_{\beta\nu}\delta^{\alpha}_2 + \sin^{-2}\theta\,[Q^{2}{}_{\beta\nu}\delta^{\alpha}_3 - Q^{\alpha}{}_{3\nu}\delta^2_\beta - Q^{\alpha}{}_{\beta 3}\delta^2_\nu] = 0,$$

$$\partial Q^{\alpha}{}_{\beta\nu}/\partial\theta - \operatorname{ctg}\theta\,(Q^{\alpha}{}_{3\nu}\delta^3_\beta - Q_{\beta 3}{}^{\alpha}\delta^3_\nu - Q^{3}{}_{\beta\nu}\delta^{\alpha}_3) = 0.$$

После учета этих соотношений остаются лишь восемь независимых компонент тензора кручения, а именно: Q_{101}, Q_{202}, Q_{001}, Q_{313}, Q_{032}, Q_{123}, Q_{230}, Q_{321}. Если ограничиться рассмотрением плоскости $\theta = \pi/2$, то придем еще к следующему соотношению:

$$\partial Q^{\alpha}{}_{\mu\nu}/\partial\theta = 0.$$

Тогда перечисленные независимые компоненты будут функциями только расстояния от начала системы координат.

В работах [189, 190] были рассмотрены автопараллели в статических сферически симметричных пространствах с кручением, где все возможные компоненты кручения, за исключением $Q_{313} = q(r)$, равны нулю. В этом случае первыми интегралами автопараллелей будут

$$\exp(-\lambda + {}^2/_3 q(r))\, dt/ds = J_1, \quad r^2 \exp({}^2/_3 q(r))\, d\varphi/ds = J_2. \tag{11.19}$$

Далее способом, аналогичным изложенному в [191], получается уравнение автопараллели

$$(d^2u/d\varphi^2)^2 = J_1/J_2 + (2mu + 1)\,(\exp({}^4/_3 q(u))/J_2 + u^2), \quad u = r^{-1}. \tag{11.20}$$

Решим уравнение (11.20) приближенно, представляя u в виде $u=u_0+v$; где $u_0=(1+\varepsilon\cos\varphi)/p$ — эллипс; ε — эксцентриситет эллипса; v — малая поправка, которая в случае римановой геометрии приводит к размыканию эллипса на величину

$$\delta\varphi=J_2/p,$$

а в данном случае на величину

$$\delta\varphi=J_2/p+\pi a_1 p/\varepsilon,$$

где a_1 зависит от конкретного вида $q(r)$ и для случая $q(r)=\ln(1+\beta/r)$ будет $a_1=2\beta\varepsilon/3pJ_2^2$.

Рассмотрим теперь изотропные автопараллели, удовлетворяющие уравнению (11.14) с дополнительным условием

$$\frac{dx_\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}=0,$$

где λ —параметр вдоль кривой.

Нетрудно увидеть, что только бесследовая часть тензора кручения влияет на изотропные кривые в U^4. Действительно, если $\tilde{Q}^\alpha{}_{\mu\nu}=0$, то, переопределяя параметр $\lambda_1=\lambda_1(\lambda)$, можно привести уравнение (11.15) к уравнению для геодезической псевдориманова пространства. Поэтому мы исследуем лишь вариант статических сферически-симметричных пространств с кручением, представленным бесследовой частью. В этом случае также будут два первых интеграла уравнений автопараллелей

$$r^2\,d\varphi/ds=J_2,\quad \frac{Q_{03}{}^2(r)}{Q_{13}{}^2(r)}\frac{dt}{ds}=J_1,$$

что накладывает определенную связь на компоненты кручения и делает их зависимыми. В полярных координатах автопараллель будет задаваться уравнением $r=B/\varphi$.

Таким образом, автопараллели в U^4-пространствах существенным образом отличаются от наикратчайших, которые, однако, как и в псевдоримановых пространствах, являются траекториями движения бесспиновых пробных частиц в U^4 [192].

§ 12. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА—КАРТАНА

Одним из главных следствий калибровочного подхода к гравитационному полю, как мы установили в гл. II, является выход за рамки эйнштейновской гравитации и доказательство того, что гравитационное взаимодействие описывается двумя независимыми динамическими переменными — метрикой и связностью. Такая теория получила название аффинно-метрической теории гравитации, частным случаем которой является теория гравитации с кручением.

Источником метрического гравитационного поля и поля кручения служит материя, которая характеризуется тензором энергии-импульса и спином. В плоском пространстве-времени лагранжиан материи зависит от полевых переменных и их производных $L_m(\varphi, \partial\varphi)$. При переходе к аффинно-метрическому пространству необходимо согласно принципу минимальности взаимодействия, следующему из калибровочного принципа (см. § 1), сохранив форму лагранжиана материи, заменить обычные производные ковариантными

$$\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu,$$

а метрику Минковского на псевдориманову $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$. Тогда

$$d^4x \to \sqrt{-g}\, d^4x,$$

$$L_m(\varphi, \partial\varphi) \to L(\varphi, \overset{\Gamma}{\nabla}\varphi, g). \tag{12.1}$$

Полный лагранжиан будет суммой материального лагранжиана и лагранжиана гравитационного поля. В качестве последнего в ТЭК выбирается скаляр кривизны аффинно-метрического пространства

$$L_g = R(g, \Gamma). \tag{12.2}$$

Подчеркнем, что гравитационный лагранжиан в виде гильбертовского скаляра кривизны R без тщательного учета граничных вкладов (см. С. Хокинг, Л. И. Седов [277], А. Цейтлин и др.), как выяснилось, неудовлетворителен по ряду причин: соответствующая вариационная задача является некорректной; невозможно строго определить производящий функционал в квантовой теории; не говоря уже о том, что решения уравнений поля содержат сингулярности, что является главным недостатком ОТО (см. статью Д. Иваненко в сб. «Проблемы физики: классика и современность» [275]).

Исходя из калибровочной концепции, наилучшим выбором лагранжиана гравитационной теории является

$$L = \Lambda + \alpha\tilde{R} + \beta\tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{R}^{\alpha\beta\mu\nu},$$

плюс, возможно, квадратичные вклады от кручения и неметричности (обсуждение этой теории см. в [275]). Укажем, что в этой модели существуют несингулярные космологические решения (А. В. Минкевич и др.), она перенормируема на римановом фоне (Ю. Н. Обухов и Е. А. Назаровский, 1984), допускает инстантонные конфигурации (см. тезисы VI Советской гравитационной конференции) [279].

Пространства Римана — Картана, рассмотренные в предыдущем параграфе, принадлежат к специальному виду аффинно-метрических пространств, в которых выполняется условие метричности (6.1) $\overset{\Gamma}{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} = 0$. Это условие можно разрешить заранее, до вывода уравнений поля, и, подставив выражение для связности (11.2) в (12.1) и (12.2), описывать гравитационное поле двумя тензорными полями — метрикой и кручением. Тогда независимыми полевыми переменными, по которым следует варьировать полный лагранжиан, будут метрика, кручение и материальные поля.

Другой подход предполагает введение условия метричности в лагранжиан с неопределенными множителями Лагранжа [168, 193]. Рассмотрим оба этих случая, так как в первом из них окончательные уравнения поля получаются сразу, однако для вывода законов сохранения требуется дополнительно использовать тождества Бианки [194]; второй важен, поскольку является общим для аффинно-метрических теорий гравитации, приобретших в последние годы большое значение в связи с программой объединения теории относительности с квантовой теорией.

Функционал действия, описывающий взаимодействие метрического, торсионного (поля кручения) и материальных полей с учетом (11.2), после отбрасывания полной дивергенции будет

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\{R(g)-[4Q_\alpha Q^\alpha+2Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\beta\gamma\alpha}-$$

$$-Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\alpha\beta\gamma}]-2\varkappa L_m(\varphi,\overset{\Gamma}{\nabla}\varphi,g)\}. \tag{12.3}$$

Проварьировав этот функционал по независимым динамическим переменным, получим следующие уравнения поля:

$$\delta g^{\mu\nu}:\ R_{\mu\nu}-{}^1\!/_2g_{\mu\nu}R+4B^{[\alpha}{}_{\beta\mu}B^{\beta]}{}_{\alpha\nu}+2B_{\beta\alpha\mu}B_\nu{}^{\beta\alpha}-B_{\mu\beta\alpha}B_\nu{}^{\beta\alpha}-$$

$$-{}^1\!/_2g_{\mu\nu}(4B_\alpha{}^\rho{}_{[\lambda}B^{\alpha\lambda}{}_{\beta]}+B_{\alpha\beta\gamma}B^{\alpha\beta\gamma})=\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{12.4}$$

$$\delta Q_\lambda{}^{\mu\nu}:\ B^\lambda{}_{\mu\nu}+B^\lambda{}_{\nu\mu}+B^\lambda{}_{\mu\nu}=\varkappa(s^\lambda{}_{\mu\nu}+s_{\mu\nu}{}^\lambda+s^\lambda{}_{\mu\nu}), \tag{12.5}$$

$$\delta\varphi:\frac{\partial L}{\partial\varphi}+(\overset{\Gamma}{\nabla}_\lambda-2Q_\lambda)\frac{\partial L}{\partial\overset{\Gamma}{\nabla}_\lambda\varphi}=0, \tag{12.6}$$

где $T_{\mu\nu}=\dfrac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\,L_m)$ — тензор энергии-импульса материи, $s^\lambda_{\mu\nu}=\delta L_m/\delta Q_\lambda^{\mu\nu}$ — канонический тензор спина,

$$B^\lambda{}_{\mu\nu}=Q^\lambda{}_{\mu\nu}+\delta_\mu{}^\lambda Q_\nu-\delta_\nu{}^\lambda Q_\mu.$$

Уравнение (12.5) можно преобразовать к виду

$$Q^\lambda{}_{\mu\nu}+\delta_\mu{}^\lambda Q_\nu-\delta_\nu{}^\lambda Q_\mu=\varkappa s^\lambda{}_{\mu\nu}. \tag{12.7}$$

Из уравнений (12.4) — (12.6) и тождеств Бианки (11.8), (11.9) получаются следующие законы сохранения тензора энергии-импульса и тензора спина:

$$(\overset{\Gamma}{\nabla}_\mu-2Q_\mu)t^\mu_\sigma-Q^\lambda{}_{\mu\sigma}t^\mu_\lambda+s^\lambda{}_{\mu\rho}R^{\mu\rho}{}_{\lambda\sigma}(\Gamma)=0, \tag{12.8}$$

$$(\overset{\Gamma}{\nabla}_\lambda-2Q_\lambda)s^\lambda{}_{\mu\nu}-2t_{[\mu\nu]}=0. \tag{12.9}$$

где $t^\mu_\sigma = \delta^\mu_\sigma L_m - (\partial L_m/\partial \varphi_{,\alpha}) \nabla_\alpha \varphi$ — канонический тензор энергии-импульса.

Рассмотрим второй способ варьирования — варьирование по Палатини [168]. Запишем действие в виде

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{R(g, \Gamma) + \Lambda^\sigma{}_{\alpha\beta} (\nabla_\sigma g^{\alpha\beta}) - 2\varkappa L_m (\varphi, \overset{\Gamma}{\nabla}\varphi, g)\}. \quad (12.10)$$

Уравнения поля, получаемые варьированием действия (12.10) по метрике, связности, материальным полям и неопределенным множителям, будут

$$\delta g^{\mu\nu} : R_{\mu\nu}(\Gamma) - 1/2 g_{\mu\nu} R(\Gamma) - \left[\overset{\Gamma}{\nabla}_\alpha - \left(\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda} - \left\{ {\lambda \atop \alpha\lambda} \right\}\right)\right] \Lambda^\alpha{}_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}; \quad (12.11)$$

$$\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} : A_\alpha{}^{\mu\nu} + \delta^\nu_\alpha B^\mu + \Lambda_\alpha{}^{\mu\nu} + \Lambda_\alpha{}^{\nu\mu} + \delta L/\delta \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0,$$

$$A_\alpha{}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\alpha\rho} - \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} g^{\sigma\mu} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha} g^{\sigma\nu} - \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})_{,\alpha}, \quad (12.12)$$

$$B^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g}\, g^{\mu\lambda})_{,\lambda} + g^{\beta\alpha} \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha};$$

$$\delta\varphi : \partial L/\partial\varphi - \left[\overset{\Gamma}{\nabla}_\mu - \left(\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} - \left\{ {\lambda \atop \mu\lambda} \right\}\right)\right] \partial L/\partial (\overset{\Gamma}{\nabla}_\mu \varphi) = 0; \quad (12.13)$$

$$\delta \Lambda^\alpha{}_{\mu\nu} : \quad \nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0. \quad (12.14)$$

Уравнение (12.12) с учетом (12.13) распадаются на два. Одно из них это (12.7), а второе

$$\Lambda^\alpha{}_{\mu\nu} = -\varkappa \frac{\delta(\sqrt{-g}\, L_m)}{\delta \Gamma_\alpha(\mu\nu)}. \quad (12.15)$$

Кроме того, из (12.13) непосредственно следует выражение для связности (11.2). После подстановки (12.15) в (12.11) придем к уравнениям поля (12.4)—(12.6).

Уравнение (12.7) реализует основную идею Картана о спине как источнике поля кручения. В выбранном нами лагранжиане гравитационного поля отсутствуют кинетические члены поля кручения. Вследствие этого уравнение (12.7), которое мы будем называть уравнением Палатини, осуществляет алгебраическую связь между спином материального поля и кручением пространства-времени.

После того как построены общие динамические уравнения теории, рассмотрим основные типы классических полей — скалярное, электромагнитное, спинорное — в теории гравитации с кручением Эйнштейна — Картана.

Скалярное поле.

Поле нулевого спина — скалярное поле — со связностью, а тем самым и с кручением пространства-времени не взаимодействует. Однако включение в его лагранжиан неминимального взаимодействия Q—φ приводит к интересным результатам.

Рассмотрим «скалярно-метрико-торсионную» теорию, описываемую функционалом действия

$$S_0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \xi R(g, Q) \varphi^2 - U(\varphi) \right\}, \quad (12.16)$$

где $U(\varphi) \geqslant 0$ для любых значений φ. Например, выбираем

$$U(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$$

(в отсутствие кручения, если $m=0$ и $\xi = 1/6$, функционал S_0 будет конформно инвариантным).

Динамическими переменными в такой теории являются φ, $g_{\mu\nu}$, $Q^\lambda{}_{\mu\nu}$. Выпишем только уравнение Палатини

$$Q^\lambda{}_{\mu\nu} + \delta^\lambda_\mu Q_\nu - \delta^\lambda_\nu Q_\mu = \varphi^{-1} [\delta^\lambda_\mu \partial_\nu \varphi - \delta^\lambda_\nu \partial_\mu \varphi].$$

Откуда немедленно следует

$$Q_{\nu\lambda\mu} = (2\varphi)^{-1} [g_{\nu\mu} \partial_\lambda \varphi - g_{\lambda\nu} \partial_\mu \varphi]. \quad (12.17)$$

После подстановки (12.17) в (12.16) и некоторых преобразований получаем

$$S = \int d^4x (-g)^{1/2} \{ (1/2 - 27\xi/4) \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \xi R(g) \varphi^2 - U(\varphi) \}. \quad (12.18)$$

Переобозначим $\varphi \to (1 - 27\xi/2)^{-1/2} \tilde{\varphi}$. Тогда (12.18) примет вид

$$S = \int d^4x (-g)^{1/2} \{ {}^1\!/_2 \partial_\mu \tilde{\varphi} \partial^\mu \varphi - \xi_1 R(g) \tilde{\varphi}^2 - \tilde{U}(\tilde{\varphi}) \},$$

где

$$\xi_1 = \frac{2\xi}{2 - 27\xi}, \quad \tilde{U}(\tilde{\varphi}) = \frac{\tilde{m}^2}{2} \tilde{\varphi}^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{4!} \tilde{\varphi}^4,$$

$$\tilde{m}^2 = \frac{2m^2}{2 - 27\xi}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{4\lambda}{(2 - 27\xi)^2}. \quad (12.19)$$

Особый интерес представляет случай $\xi > 2/27$, когда в ренормированной за счет Q—φ-взаимодействия теории при $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ возникает условие для спонтанного нарушения симметрии, так как в этом случае $\tilde{m}^2 < 4$, а $\tilde{\lambda} > 0$, и $\tilde{U}(\tilde{\varphi})$ будет обладать двумя ненулевыми устойчивыми минимумами.

Электромагнитное поле.

На взаимодействие гравитационного и электромагнитного полей в аффинно-метрической теории существуют две точки зрения. Дело в том, что замена обычной производной на ковариантную $\partial_\mu \to \overset{\Gamma}{\nabla}_\mu$ приведет в данном случае к появлению в выражении для напряженности электромагнитного поля членов взаимодействия

$$F_{\mu\nu} = \overset{\Gamma}{\nabla}_\mu A_\nu - \overset{\Gamma}{\nabla}_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + 2Q^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda, \qquad (12.20)$$

нарушающих $U(1)$-калибровочную инвариантность лагранжиана электромагнитного поля.

Поскольку принцип калибровочной инвариантности является одним из основных в теории поля, ряд авторов [195, 19, 196], желая сохранить его, предположили, что кручение не взаимодействует с калибровочными полями типа электромагнитного и янг-миллсовского и поэтому следует считать, что взаимодействие «кручение — вектор-потенциал» отсутствует. Это же следует из определения $\tilde{F}_{\mu\nu} = [\partial_\mu - \Gamma_\mu - A_\mu,\ \partial_\nu - \Gamma_\nu - A_\nu]$ как тензора кривизны, в котором связность не действует на свои координатные индексы.

С другой стороны, имеет смысл обсудить возможность одновременной модификации принципа минимальности взаимодействия и принципа калибровочной инвариантности таким образом, чтобы в этой новой схеме сохранилась калибровочная инвариантность и Q—A-взаимодействие. Такая программа была реализована в работах [197—199]. В этом случае обычные калибровочные преобразования (1.2) вектор-потенциала заменяются на

$$A_\mu \to A_\mu' = A_\mu + \exp(\Phi(x))\,\Lambda_{,\mu},$$

а тензор кручения и поле Φ связаны соотношением

$$Q^\lambda{}_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu \Phi_{,\mu} - \delta^\lambda_\mu \Phi_{,\nu}. \qquad (12.21)$$

Кроме этого, в члене взаимодействия электромагнитного поля A, например, с заряженным скалярным полем, появляется дополнительный множитель

$$(\partial_\mu - iqA_\mu)\varphi \to (\partial_\mu - iq\exp(-\Phi(x))A_\mu)\varphi. \qquad (12.22)$$

Этот подход особенно интересен, поскольку в нем раскрывается еще один аспект природы кручения. Из (12.21) следует

$$\Phi = \frac{1}{3}\oint_c Q_\mu dx^\mu.$$

Тогда видно, что в заданном пространстве с кручением экспонента в формуле (12.22) будет представлять собой объект типа вильсоновской петли

$$W[c] = \exp\left[\frac{1}{3}\oint_c Q_\mu dx^\mu\right].$$

При определенном выборе Q_μ значение $W[c]$ может быть конечным, и тогда, перенормировав заряд $q \to q' = W[c]q$, мы будем в состоянии оценить не только влияние кручения на электромагнитное взаимодействие, но и радиус, на котором это влияние существенно и который, фактически, будет равен диаметру петли.

В обсуждаемом подходе электромагнитное поле взаимодействует с кручением, однако не является его источником. Оно становится источником поля кручения, если пожертвовать калибровочной инвариантностью [200].

Функционал действия, описывающий взаимодействие аффинно-метрического гравитационного и электромагнитного полей, можно выбрать следующим:

$$S = \int d^4x\,(-g)^{1/2}\left\{\frac{1}{16\pi G}R(g, Q) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}, \qquad (12.23)$$

где $F_{\mu\nu}$ определяется формулой (12.20). Варьирование функционала (12.23) по независимым переменным приводит к системе уравнений

$$\delta g^{\mu\nu} : R_{\mu\nu}(g, Q) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(g, Q) = 8\pi G T_{\mu\nu};$$

$$\delta A^{\mu} : \overset{\{\}}{\nabla}_{\alpha} F^{\alpha\mu} + 2Q^{\mu}{}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0,$$

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_{\mu}F_{\alpha\beta} + \overset{\Gamma}{\nabla}_{\alpha}F_{\beta\mu} + \overset{\Gamma}{\nabla}_{\beta}F_{\mu\alpha} - 2Q^{\lambda}{}_{[\mu\alpha\beta]\lambda} = 0;$$

$$\delta K_{\lambda}{}^{\mu\nu} : Q^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\dot{Q}_{\nu} - \delta^{\lambda}_{\nu}Q_{\mu} = 8\pi G S^{\lambda}{}_{\mu\nu},$$

где $T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$,

$$s^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[A_{\mu}F_{\nu}{}^{\lambda} - A_{\nu}F_{\mu}{}^{\lambda}\right]$$

— тензор спина электромагнитного поля.

Разрешим эту систему относительно тензора кручения

$$Q^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 2\delta^{\lambda}{}_{[\mu}Q_{\nu]} + 2GA_{[\mu}F_{\nu]}{}^{\lambda} + 4GA^{\lambda}A_{[\mu}Q_{\nu]}, \qquad (12.24)$$

где

$$Q_{\nu} = G\hat{F}_{\nu\alpha}A^{\alpha}/2(1+GA^2),\quad A^2 = A_{\mu}A^{\mu},\quad Q_{\mu}A^{\mu} = 0,\quad \hat{F}_{\mu\alpha} = \partial_{\mu}A_{\alpha} - \partial_{\alpha}A_{\mu}.$$

Подставляя (12.24), получим систему, описывающую взаимодействие гравитационного поля с нелинейным векторным в рамках римановой геометрии

$$R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(g) = 8\pi G T^{\text{нел}}_{\mu\nu}, \qquad (12.25)$$

$$(-g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left((-g)^{1/2}F^{\alpha\beta}_{\text{нел}}\right) = -GF^{\alpha\beta}_{\text{нел}}F^{\text{нел}}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}, \qquad (12.26)$$

$$F^{\text{нел}}_{\mu\nu} = \hat{F}_{\mu\nu} + \frac{2GA_{[\mu}\hat{F}_{\nu]}{}^{\gamma}A_{\gamma}}{1+GA^2}, \qquad (12.27)$$

$$T^{\text{нел}}_{\mu\nu} = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}(g)^{-1/2}L_{\text{нел}}, \qquad (12.28)$$

$$L_{\text{нел}} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{\text{нел}} F_{\text{нел}}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F_{\gamma\beta}^{\text{нел}} F_{\text{нел}}^{\gamma\alpha} A_\alpha A^\beta. \qquad (12.29)$$

Таким образом, исходная система уравнений в пространстве U^4 может быть сведена к системе уравнений Эйнштейна и нелинейного векторного поля. Решения таких уравнений в пространстве Минковского изучались в работе [200] и в случае $A_\mu = \{\varphi(r, t), 0, 0, 0\}$ приводились к решению уравнения синус-Гордона для функции $\varphi(r, t)$.

Спинорное поле.

Спинорные поля в U^4 вводятся точно таким же образом, как и в римановой геометрии [201, 202].

Пусть в точке $p \in U^4$ определен ортогональный базис $\{t_a\}$ такой, что псевдориманова метрика $g_{ab} = \eta_{ab}$. В таком ортогональном базисе зададим спинор $\psi(p)$ и γ-матрицы Дирака

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\eta^{ab}.$$

Определим другой, голономный, базис $\{t_\mu\}$ в точке $p \in U^4$. Переход от $\{t_a\}$ к $\{t_\mu\}$ осуществляется с помощью неголономных преобразований $t_a = h_a{}^\mu t_\mu$, задаваемых тетрадными функциями $h_a{}^\mu$ (см. § 4).

Пусть p и p' — две точки, находящиеся на инфинитезимальном расстоянии друг от друга в U^4. При параллельном переносе ортогонального базиса из p в p' вдоль некоторой линии тетрадные коэффициенты и заданное спинорное поле изменяются на величину

$$\delta h_a^\mu = dx^\nu \nabla_\nu h_a^\mu = dx^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} h^\beta{}_a,$$

$$\delta\psi \overset{\text{def}}{=} \psi'(p') - \psi(p) = dx^\nu \overset{\Gamma}{\nabla}_\nu \psi,$$

где $\overset{\Gamma}{\nabla}_\nu$ — ковариантная производная от спинора. В том случае, если $p' \to p$, эти приращения можно получить с помощью преобразований Лоренца с зависящими от координат коэффициентами

$$dh^\alpha{}_a = d\omega^\alpha{}_\beta h^\beta{}_a, \quad d\psi = d\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\psi.$$

Откуда сразу следует

$$d\omega_{\alpha\beta} = -dx^\nu \Gamma_{\alpha\beta\nu}.$$

Поскольку $\psi'(p') - \psi(p) = dx^\alpha \partial_\alpha \psi + \delta\psi$, где $\delta\psi$ — приращение функции, не зависящее от преобразования координат, мы можем приравнять

$$\delta\psi = d\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}\psi = -dx^\nu \Gamma_{\alpha\beta\nu}\sigma^{\alpha\beta}\psi.$$

Таким образом, ковариантная производная от спинора $\overset{\Gamma}{\nabla}_\alpha \psi$ принимает вид

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_\alpha \psi = (\partial_\alpha - \Gamma_{ab\alpha}\sigma^{ab})\psi.$$

Для сопряженного спинора

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_\alpha \bar{\psi} = (\partial_\alpha + \Gamma_{ab\alpha}\sigma^{ab})\,\bar{\psi}.$$

Связность Г определяется формулой

$$\Gamma_{ab\alpha} = \omega_{ab\alpha} + K_{ab\alpha}, \tag{12.30}$$

$$\omega_{abc} = {}^1/_2\,(C_{abc} + C_{bca} - C_{cab}), \tag{12.31}$$

$$C_{abc} = h^\mu{}_b h^\nu{}_c\,(h_{a\mu,\nu} - h_{a\nu,\mu}). \tag{12.32}$$

В отсутствие кручения эти выражения воспроизводят известные спинорные коэффициенты Фока — Иваненко — Вейля [134, 203, 204].

Взаимодействие спинорного и гравитационного полей в ТЭК описывается с помощью функционала действия

$$S = \int d^4x\,(-g)^{1/2}\left\{\frac{1}{16\pi G}R(g,Q) - \frac{i}{2}\,(\bar{\psi}\gamma^\mu \overset{\Gamma}{\nabla}_\mu\psi - \overset{\Gamma}{\nabla}_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\right\}, \tag{12.33}$$

построенного в соответствии с принципом минимального взаимодействия. Уравнения поля, получаемые из него с помощью вариационной процедуры, имеют вид

$$R_{\mu\nu}(g,\ Q) - {}^1/_2 g_{\mu\nu}R\,(g,\ Q) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{12.34}$$

$$Q^\lambda{}_{\mu\nu} + \delta^\lambda{}_\mu Q_\nu - \delta^\lambda_\nu Q_\mu = 8\pi G\bar{\psi}\gamma^{[\lambda}\gamma_\mu\gamma_{\nu]}\psi, \tag{12.35}$$

$$\{\gamma^\mu\,[\partial_\mu - \omega_{ab\mu}\sigma^{ab}] + K_{ab\mu}\cdot\gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{\mu]}\}\psi = 0, \tag{12.36}$$

где

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\{\overset{\Gamma}{\nabla}_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi + \overset{\Gamma}{\nabla}_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma_\mu\overset{\Gamma}{\nabla}_\nu\psi - \bar{\psi}\gamma_\nu\overset{\Gamma}{\nabla}_\mu\psi\}.$$

Используем известное соотношение

$$\gamma_\mu\gamma_5 = \frac{1}{3!}\,\varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda.$$

Уравнения (12.34) — (12.36) легко преобразуются к виду

$$Q_{\lambda\mu\alpha} = \varepsilon_{\lambda\mu\nu}\check{Q}^\nu{}_\alpha, \quad \check{Q}_\alpha = 2\pi G\bar{\psi}\gamma_\alpha\gamma_5\psi; \tag{12.37}$$

$$\gamma^\mu\,(\partial_\mu + i\omega_{ab\mu}\sigma^{ab} + \check{Q}_\mu\gamma^5)\,\psi = 0. \tag{12.38}$$

Таким образом, спинорное поле взаимодействует только с псевдоследом тензора кручения $\check{Q}_\mu$. Подставляя выражение для псевдоследа (12.37), порожденного спинорными полями, в уравнения (12.34), (12.35) и в выражение для тензора энергии-импульса спинорного поля в U^4, мы получим систему взаимодействующих гравитационного и нелинейного спинорного полей в рамках теории гравитации Эйнштейна

$$\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - 3\pi G\,(\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma_5\psi)\,\gamma_\alpha\gamma_5\psi = 0, \tag{12.39}$$

$$R_{\mu\nu}(g) - {}^1/_2 g_{\mu\nu}R\,(g) = 8\pi G\{\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi + \nabla_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi -$$

$$-\bar{\psi}\gamma_\mu\nabla_\nu\psi-\bar{\psi}\gamma_\nu\nabla_\mu\psi+(-s_\mu s_\nu+g_{\mu\nu}s_\alpha s^\alpha)\},$$
$$s_\alpha=\bar{\psi}\gamma_\alpha\gamma_5\psi. \tag{12.40}$$

Уравнение (12.40) впервые было получено В. И. Родичевым [136] в пространстве Минковского с кручением, а затем рядом авторов обобщено на случай произвольного пространства Римана — Картана [205, 206]. Этот результат позволяет придать геометрический смысл известной спинорной нелинейности Иваненко — Гейзенберга, а с другой стороны, позволяет развить статистическую интерпретацию поля кручения и явления спонтанного искривления пространства-времени [207, 208].

Сформулируем теорему, которая является прямым следствием системы уравнений (12.38), (12.39) [206].

Теорема. Взаимодействие дираковского нейтрино с гравитационным полем в пространстве с кручением полностью описывается динамикой самогравитирующего нелинейного спинорного поля типа Иваненко — Гейзенберга в римановом пространстве.

Решения уравнения Дирака в пространстве с кручением имеют ряд особенностей. Так, в качестве фундаментального волнового уравнения спинорного поля, как указывалось, следует принять уравнение Иваненко — Гейзенберга, и динамика классического спинорного поля будет определяться решением этого уравнения. Впервые решения солитонного типа для такого уравнения были получены в случае сферической симметрии [209]. Затем в двумерном случае целым рядом авторов [210, 211]. Такой подход приводит к существованию частицеподобных конфигураций полуцелого спина.

Изучение динамики спинорного поля в заданном пространстве U^4 (несамосогласованная задача) также интересно, поскольку приводит к предсказанию эффектов, на основании которых возникает возможность измерения кручения. Так, в работах [212, 213] были найдены плосковолновые решения уравнений Дирака в пространстве Минковского — Картана с постоянным кручением. Влияние кручения должно приводить к смещению линий электрона в атоме и дополнительному расщеплению их по сравнению с электромагнитным. Однако предсказания теории лежат пока за пределами экспериментальных возможностей.

Нелинейности в уравнении Дирака, подобно другим уравнениям, возникают благодаря квантовым эффектам, однако целесообразно рассмотреть спинорное уравнение с затравочной, для начала простейшей кубической нелинейной добавкой и предложить его, в частности, в качестве уравнения пра-материи (НСТ), из которой строятся реальные частицы и кварки, следуя в некотором смысле идеям «слияния» де Бройля. Символически запишем $D\psi+\lambda(\psi^3)=0$. Это уравнение и программа нелинейной единой теории (Иваненко, 1938 [288] были развиты Гейзенбергом [290, 291], проквантовавшим праматерию, введя вырожденный вакуум, что привело его, Дюрра и других к довольно удовлетворительному спектру масс адронов и константам связи, в ряде пунктов улучшенных нами, в частности, учетом унитарной, а не изоспиновой симметрии (Курдгелаидзе, Наумов, Нгуен Зао, Данилюк), например, $\alpha \approx 1/115$—$1/120$, что близко к $1/137$ [275, 289].

Следующий шаг связан с геометрической интерпретацией нелинейного псевдовекторного члена, возникающего с необходимостью в пространстве Эйнштейна — Картана с кручением (Родичев, 1961; Перес, Хель, Кречет, Пономарев [285] и др.). Дилатации Вейля индуцируют нелинейность, но векторного типа (наши выводы с Сарданашвили и Кречетом). Подчеркнем, что учет кручения (и дилатаций) требуется калибровочной гравитации, так же как супергравитацией. Использование «сильной» гравитации приводит любопытным образом к нелинейной константе требуемого эмпирически порядка, согласно расчетам единой теории (Синха — Сиварам, Иваненко). Сильная гравитация, возрождая иерархические модели, подсказывает трактовку частиц как микро-Вселенных (Реками (275), наши с Аманом, Романа и др. гипотезы, М. А. Марков, К. П. Станюкович, В. Н. Мельников) [281].

НСТ приводит к решениям типа оолитонов (Тирринг, Р. Финкельстейн, Раньада, Сметанин в нашей группе и др.). Интересно, что группа симметрий нелинейных спинорных уравнений меняется при квантовании (Желнорович [287, 292]).

Учитывая необходимость объединения всех полей, притом возможность также с самим 4-пространством в (за)-планковской области длин, сверхвысоких энергий ($\approx 10^{-33}$ см; $\approx 10^{19}$ ГэВ) и т. д., когда многие обычные концепции, по-видимому, потеряют смысл (ввиду интенсивных флуктуаций метрики и взаимных превращений частиц — гравитонов-тордионов-дилатонов и т. д.), можно попытаться учесть для описания довзрывного состояния (пра-материя + пра-геометрия) нелинейный пра-спинор (как простейший физический, математический и логический в смысле высказываний «да-нет» объект), используя, например вместе с Сарданашвили, симметрию группы Кокстера, фазовые переходы от которой должны привести к наблюдаемым симметриям хромо-электро-астенодинамики; в ряде отношений это близко к программам Уилера, Пенроуза, Д. Финкельстейна, представляя собой перспективное направление в духе надежд единых теорий Эйнштейна, Гейзенберга. Не останавливаясь на подробностях усиленно разрабатываемой ныне супергравитации, являющейся локализацией группы суперсимметрий, объединяющей бозоны и фермионы, важно подчеркнуть их предсказание здесь наряду с гравитоном спина 2 суперпартнера — «гравитино» спина 3/2, возможно играющего роль также и в новейшей космологии [297].

§ 13. ГИДРОДИНАМИКА В ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА—КАРТАНА

Описание эволюции самогравитирующих объектов на основе решения уравнений Эйнштейна встречает ряд трудностей. Одной из таких трудностей является проблема описания состояния материи гравитирующего объекта. Дело заключается в том, что любая звезда состоит из громадного числа частиц, участвующих, кроме гравитационного, в сильном, слабом и электромагнитном взаимодействиях. Понятно, что точно описать движение частиц материи в этом случае невозможно. Поэтому вместо реального вещества звезды или Вселенной рассматривается некая модельная среда, обладающая в микропределе нужными свойствами.

Многие физические модели могут рассматриваться как идеальная несжимаемая жидкость. Под такой жидкостью понимают обычно сплошную среду, каждый элемент которой обладает импульсом p и энергией ε. При этом наблюдатель, движущийся вместе с жидкостью, воспринимает ее как изоэнтропическую. Идеальная жидкость как источник гравитационного поля и как модель вещества, заполняющего Вселенную, играет ключевую роль в космологических моделях [214].

Примером, подтверждающим моделирование реальной материи идеальной жидкостью, является аппроксимация бесконечно протяженной ядерной материи, участвующей в электромагнитном и юкавском взаимодействиях, вещественной изотропной жидкостью [215]. Необходимым условием для такого моделирования оказывается достаточно высокая плотность барионов. Тогда удается найти соответствие между плотностью барионов ρ, плотностью ядерного конденсата σ, средней массой барионов M_* и макроскопическими характеристиками жидкости — энергией ε и давлением P, выразив $P=P(\rho, \sigma, M_*)$ и $\varepsilon=\varepsilon(\rho, \sigma, M_*)$, а скорость жидкости u_μ связать с током барионов J_μ, положив $J_\mu=\varepsilon u_\mu/c^2$ [216].

В число характеристик барионов, как известно, входит спин. Поэтому, чтобы построить гидродинамическую модель ядерного вещества с учетом спиновых свойств, необходимо ввести в рассмотрение так называемую спиновую жидкость Вейсенкоффа — Раабе [217].

Под спиновой жидкостью мы подразумеваем жидкость, каждый элемент которой обладает, кроме импульса, также определенным внутренним угловым моментом (отличным от нуля в системе отсчета, в которой данный элемент жидкости покоится), пропорциональным объему элемента. Плотность тензора спина такой жидкости будет

$$s_{\lambda\mu\nu}=u_\lambda s_{\mu\nu}, \tag{13.1}$$

где через u_λ обозначена 4-скорость частицы жидкости и через $s_{\mu\nu}$ — внутренний угловой момент этой жидкости. Компоненты бивектора спина

$$s_{\mu\nu}=\{s_{23},\ s_{13},\ s_{21}\},\quad s_{\mu\nu}=-s_{\nu\mu},$$

не исчезают в системе отсчета, в которой выбранный нами элемент жидкости покоится. Пространственно-временные компоненты в системе покоя частицы зануляются. Объединить эти два условия можно с помощью введения дополнительной связи

$$s_{\mu\nu}u^{\nu}=0. \tag{13.2}$$

Соответствие между такой жидкостью и ядерной материей можно установить, положив вектор

$$s_{\lambda}={}^{1}/_{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}u^{\mu}s^{\nu\alpha}$$

равным среднестатистическому спину элемента ядерного вещества,

$$s_{\lambda}=\langle\bar{\psi}\gamma_{\lambda}\gamma_{5}\psi\rangle,$$

который можно связать с макроскопическими характеристиками ядерных систем — температурой, плотностью ρ и химическим потенциалом. Подробно это будет обсуждено в § 18.

Для наших целей пока достаточно макроскопического понятия плотности спина $s_{\mu\nu}$, введенного впервые в работе [217] и детально описанного в [218].

Для определения классического спина введем ортонормированный репер $a_{(i)}{}^{\mu}$, где μ — контравариантный тензорный индекс, а i — номер, различающий вектора ортонормированного репера. Три вектора этого репера пространственноподобны, четвертый — времениподобен. Мы выберем его следующим образом:

$$a_{(0)}{}^{\mu}=u^{\mu}.$$

Описывать классический спин частицы жидкости удобно с помощью методики, предложенной Тульчиевым [219]. Тензор энергии-импульса частицы разлагается по мультипольным моментам, каждый из которых характеризует степень отклонения частицы от пробной точечной

$$T^{\alpha\beta}=\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{t^{\alpha\beta}\delta(x-y)+\nabla_{\gamma}(\tau^{\gamma\alpha\beta}\delta^{4}(x-y))+\dots$$
$$\dots+\frac{(-1)^{n}}{n}\nabla_{\gamma_{1}\dots\gamma_{n}}(\tau^{\gamma_{1}\dots\gamma_{n}\alpha\beta}\,\delta^{4}(x-y))\Big\}\,d^{4}x.$$

Очевидно, что $t_{0}{}^{0}=-\rho(x)$ — плотность жидкости. В выбранной нами системе отсчета

$$\tau^{\gamma\alpha\beta}=u^{\gamma}s^{\alpha\beta}. \tag{13.3}$$

Кроме того, если потребовать, чтобы вектор спина

$$s_{\alpha}={}^{1}/_{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}\tau^{\beta\gamma\lambda} \tag{13.4}$$

был связан с ортонормированной тетрадой соотношением

$$s_\alpha = \rho k a_{\alpha(3)}, \tag{13.5}$$

то наиболее удобной и адекватной формой тензора спина будет следующая

$$s^{\nu\alpha} = \rho k \left(a^{\nu}_{(1)} a^{\alpha}_{(2)} - a^{\nu}_{(2)} a^{\alpha}_{(1)}\right). \tag{13.6}$$

Введенный таким образом вектор спина удовлетворяет условиям (13.2)—(13.5).

Наиболее удобным для описания физических теорий является лагранжев формализм. Можно построить лагранжиан и для спиновой идеальной жидкости. Однако, поскольку существует ряд законов, например сохранения тока жидкости, которые не могут быть выведены из полевого лагранжиана, мы введем их в полный лагранжиан в качестве связей.

Впервые лагранжев подход к описанию динамики спиновой жидкости был разработан Рэйем и Смолли в статье [220], которой мы будем следовать в дальнейшем изложении.

Лагранжиан спиновой жидкости обычно записывается в форме [218, 220]

$$L_{ж} = (-g)^{1/2}\{F(\rho,\ \varepsilon,\ s) - T_{сп}\}, \tag{13.7}$$

где $F(\rho,\ \varepsilon,\ s) = -\rho(1+\varepsilon(\rho))$; ρ — плотность жидкости, ε — внутренняя энергия малого объема жидкости, $T_{сп} = s_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}/2$ — кинетическая энергия спинового движения частиц жидкости,

$$\omega^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\dot{a}^{\mu}_{(i)} a^{\nu(i)} - a^{\mu}_{(i)} \dot{a}^{\nu(i)}\right),\quad \dot{a}^{\mu}_{(i)} = \overset{\Gamma}{\nabla}_\alpha a^{\mu}_{(i)} u^{\alpha}.$$

Кроме того, следует дополнить лагранжиан (13.7) законами сохранения, которые вводятся феноменологически [214], а именно:

условием непрерывности линий тока жидкости $(\rho u^{\alpha})_{;\alpha} = 0$,
законом сохранения энтропии $s_{,\nu}u^{\nu} = 0$,
условием на вращение линий тока $X_{,\nu}u^{\nu} = 0$,
нормировкой четырехвектора скорости $u_\alpha u^\alpha = 1$,

условием ортонормированности векторов собственной системы отсчета $g_{\mu\nu}a^{\mu}_{(i)} a^{\nu}_{(j)} = \eta_{ij}$.

Тогда полный лагранжиан примет вид

$$\begin{aligned} L_{ж} = {} & (-g)^{1/2}\{F(\rho,\ \varepsilon,\ S) + \lambda_1(g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} - 1) + \lambda_2(\rho u^{\alpha})_{;\alpha} + \\ & + \lambda_3 X_{,\sigma}u^{\sigma} + \lambda_4 S_{,\alpha}u^{\alpha} - \rho k g_{\mu\nu}a^{(1)\mu}a^{(2)\nu} + \lambda^{11}(g_{\mu\nu}a^{(1)\mu}a^{(1)\nu} - \\ & - 1) + \lambda^{22}(g_{\mu\nu}a^{(2)\nu}a^{(2)\mu} - 1) + 2\lambda^{12}g_{\mu\nu}a^{(1)\mu}a^{(1)\nu} + \\ & + 2\lambda^{14}g_{\alpha\beta}a^{(1)\alpha\beta} + 2\lambda^{24}g_{\mu\nu}a^{(2)\mu}u^{\nu}. \end{aligned} \tag{13.8}$$

Независимыми вариационными переменными будут ρ, $a^{\mu}{}_{(i)}$, u_β, λ^i, $\lambda_{\mu\nu}$, за исключением $a^{(3)\alpha}$ и λ^4, поскольку варьирование по этим переменным приведет к уже известным тождествам $u^2 = 1$ и $\lambda^{34} = 0$.

Спиновая жидкость является источником гравитационного поля в теории Эйнштейна—Картана [19]. Систему уравнений Эйнштейна—Картана получают из лагранжиана

$$L = (-g)^{1/2} \frac{1}{16\pi G} R(g, Q) + L_{ж}. \tag{13.10}$$

Выпишем только те из них, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$\delta a^{(1)\mu}: -\rho k \dot{a}^{(2)}_{\mu} + 2\lambda^{11} a_{(1)\mu} + 2\lambda^{12} a_{(2)\mu} + 2\lambda^{14} u_{\mu} = 0, \tag{13.11}$$

$$\delta a^{(2)\mu}: \rho \dot{k} a^{(1)}_{\mu} + k\rho \dot{a}^{(1)}_{\mu} + 2\lambda^{22} a_{(2)\mu} + 2\lambda^{12} a_{(1)\mu} + 2\lambda^{24} u_{\mu} = 0, \tag{13.12}$$

$$\delta Q^{\lambda\mu\nu}: Q_{\lambda\overline{\mu\nu}} = 8\pi G u_{\lambda} s_{\mu\nu}, \tag{13.13}$$

$$\delta u^{\mu}: \lambda^{1} u_{\mu} - \lambda_{2,\mu}\rho + \lambda_{2} k^{\lambda}{}_{\mu\lambda} + \lambda_{3} x_{,\mu} + \lambda_{4} s_{,\mu} - \frac{1}{2} s_{\mu\rho} a^{(i)}{}_{\beta}{}^{;\rho} a^{\beta}{}_{(i)} = 0. \tag{13.14}$$

Варьируя (13.11) по $\delta a_{\beta}{}^{(2)}$, а (13.12) по $\delta a_{\mu}{}^{(1)}$, получим следующие выражения для неопределенных множителей Лагранжа:

$$\lambda^{14} = \rho k a^{(2)}_{\mu} \dot{u}^{\mu}/2, \ \lambda^{11} = \rho k a^{(1)\mu} \dot{a}^{(2)}_{\mu}/2 = \lambda^{22},$$

$$\lambda^{24} = -\rho k a^{(1)}_{\mu} \dot{u}^{\mu}/2, \ \lambda^{12} = 0, \ k = \text{const}.$$

Сворачивая (13.11) с $a_{\mu}{}^{(1)}$, а (13.12) с $a_{\mu}{}^{(2)}$ и складывая, получим уравнение движения спина частицы жидкости

$$\frac{Ds^{\mu\nu}}{ds} + \frac{Ds^{\mu\alpha}}{ds} u_{\alpha} u^{\nu} + \frac{Ds^{\nu\alpha}}{ds} u_{\alpha} u^{\mu} = 0, \tag{13.15}$$

которое совпадает с обобщенным уравнением Матиссона—Папапетру [221, 222].

Это уравнение приводит к интересному эффекту прецессии спина вокруг направления вектора кручения, впервые предсказанному в работе [223]. Действительно, в пределе $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, сворачивая (13.15) с $\varepsilon_{\alpha\mu\nu\beta} u^{\beta}$, получим

$$\frac{Ds^{\alpha}}{ds} + u^{\alpha} \dot{u}^{\lambda} s_{\lambda} = 0, \tag{13.16}$$

которое при выполнении условия (13.1) в собственной системе отсчета $u^{\lambda} = \{1, 0, 0, 0\}$, $ds = dt$, будет

$$\frac{ds}{dt} = [Q \times s], \tag{13.17}$$

где $s = \{s_{23}, s_{31}, s_{12}\}$, $Q = \{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3\}$.

Подчеркнем, что этот эффект получен для пробной частицы со спином.

Варьирование полного лагранжиана по $g_{\mu\nu}$ и $K^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ приводит к уравнениям поля ТЭК [194], а именно:

$$R_{\mu\nu}(g, Q) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(g, Q) - \overset{\Gamma}{\nabla}_{\alpha} (B^{\alpha}{}_{\nu\mu} + B^{\alpha}{}_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}{}^{\alpha}) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{13.18}$$

$$Q_{\lambda\mu\nu}=8\pi G s_{\mu\nu} u_\lambda, \tag{13.19}$$

где $s_{\mu\nu}$ определяется из (13.6), а $B_{\alpha\nu\mu}=\overset{*}{Q}_{\alpha\nu\mu}+g_{\alpha\nu}Q_\mu-g_{\alpha\mu}Q_\nu$.

С учетом второго закона термодинамики, после подстановки (13.19) в (13.18), мы получим уравнение Эйнштейна, в правой части которого будет стоять тензор энергии-импульса спиновой жидкости, имеющий вид

$$T^{\text{эфф}}_{\mu\nu}=u_\mu u_\nu(\rho+P-2s^2)-g_{\mu\nu}(P-s^2), \tag{13.20}$$

где $s^2=s_{\mu\nu}s^{\mu\nu}$. Впервые это выражение было получено эвристическим путем Хелем [221] и Траутманом [222].

Рассмотренная нами модель спиновой жидкости имеет важное значение для исследования космологических моделей со спином и кручением.

§ 14. КОСМОЛОГИЯ С УЧЕТОМ СПИНА И КРУЧЕНИЯ

Проблема космологической сингулярности и начального состояния Вселенной является одной из центральных в современной астрофизике и вообще в теории гравитации. Вопрос о причинах появления сингулярности стоит давно, и сначала казалось, что сингулярность обусловлена выбором симметрии пространства-времени. Согласно современным представлениям наша Вселенная расширяется однородным и изотропным образом и с большой степенью вероятности описывается моделью Фридмана. Рядом авторов были предприняты попытки найти наиболее общее решение уравнений Эйнштейна, свободное от сингулярности [224—226]. Однако они оказались неудачными (теорию пульсирующего коллапса см. у М. Е. Герценштейна [299]).

Более того, в 60-х годах Пенроузом, Хокингом, Герочем были сформулированы теоремы [97], которые составляют мало возможностей для существования несингулярных физически содержательных решений в эйнштейновской теории гравитации. Они основываются на обязательном существовании сопряженных точек времени — подобных геодезических, если тензор кривизны U^4-пространства удовлетворяет условию

$$R_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu\leqslant 0, \tag{14.1}$$

где η^μ — направляющие векторы геодезических (требуется выполнение также определенного условия причинности). Для гравитационных полей — решений уравнений Эйнштейна — условие (14.1) приводит к сильному энергетическому условию

$$T_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu\leqslant {}^1/_2 T_\lambda{}^\lambda \tag{14.2}$$

для любого времениподобного вектора η^α.

Поиски решений, свободных от сингулярностей, как правило, связывают с нарушением тем или иным способом условия энергодоминантности (14.2). В рамках эйнштейновской теории сделать это трудно, что стало одним из главных стимулов обращения к неэйнштейновским теориям гравитации, а с другой стороны, привело к ряду попыток модифицировать источники гравитационного поля.

Так, в теории гравитации с квадратичными по кривизне добавками к гильберт-эйнштейновскому действию (когда связь между (14.1) и (14.2) перестает быть прямой) было получено целое семейство регулярных решений [227]. Появление таких членов в лагранжиане обусловлено, в частности, квантовыми поправками поляризации вакуума материальных полей и рождения частиц внешним гравитационным полем в рамках ОТО [60, 228, 229].

В фридмановской космологии, рассматривая идеальную жидкость, авторы работы [230] показали, что в ряде случаев можно избежать сингулярности. Однако возникающие при этом гипотетические силы отталкивания многими считаются недостаточно физически обоснованными.

Модификация уравнений Эйнштейна введением так называемого космологического Λ-члена,

$$R_{\mu\nu}(g) - {}^1\!/_2 g_{\mu\nu} R(g) + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

также может приводить к несингулярным решениям. Действительно, нетрудно заметить, что при достаточно большом положительном Λ-члене энергетическое условие теорем Пенроуза—Хокинга может нарушаться. Поскольку величина $\Lambda \approx 10^{-57}$ см$^{-2}$ оказывается недостаточной для этого, то делались попытки достигнуть необходимого значения Λ либо за счет сильной гравитации [13], либо учитывая скрытые массы [231]. В то же время космологический член с необходимостью возникает в квантовой гравитации и существен при построении единых теорий и супергравитации; имеются основания считать, что Λ в начале расширения имел большое значение. Так, решением уравнений Эйнштейна с Λ-членом в отсутствие материи является метрика де Ситтера, преобретшая в последнее время важное значение в связи с моделями так называемой инфляционной Вселенной [232, 233].

Подчеркнем, что космологический член (КЧ) Λ был сперва ошибочно опущен как Гильбертом, так и Эйнштейном при установлении уравнений гравитационного поля (ноябрь 1915 г.), но затем введен Эйнштейном при построении первой космологии ОТО — замкнутой статической Вселенной (1917), а также использован де Ситтером (1917) в космологии «раздувающейся» Вселенной при отсутствии обычной материи. Космология нынешней расширяющейся Вселенной Фридмана (1922) не требовала наличия КЧ, что дало повод Эйнштейну и вслед за ним ряду авторов (Уилер, Ландау—Лифшиц) отбросить этот член. Со своей стороны квантовая теория гравитации, как и вариант индуцированной гравитации с необходимостью вводят КЧ, который приобрел ныне смысл энергии вакуума. Правдоподобная с нынешних позиций «инфляционная» де Ситтеровская пред-фридмановская фаза Вселенной непосредственно опирается на наличие эффективного КЧ в уравнениях и лагранжиане. Объяснение малого значения КЧ и его сопоставления с планковской длиной является ныне одной из главных проблем гранд-единой теории [1, 2, 275, 278, 285, 294]. Для простоты записи мы опускаем в ряде случаев принципиально, конечно, необходимый КЧ в уравнениях поля и лагранжианах, поскольку это не нарушает смысла доказательств.

Со своей стороны мы неоднократно указывали на то, что вблизи гравитационной сингулярности материя находится в экстремальном состоянии, характеризующимся большой плотностью частиц, и потому весьма важным становится учет спин-спинового гравитационного взаимодействия, которое последовательно описывается в рамках теории гравитации с кручением. Оказывается, что учет спин-торсионного взаимодействия приводит к предотвращению сингулярности и возможности построить регулярные решения уравнений Эйнштейна—Картана. Это является следствием нарушения энергетического условия теорем Пенроуза—Хокинга за счет кручения. В теории Эйнштейна—Картана нарушение энергодоминантности происходит довольно естественным путем. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Уравнения ТЭК (12.11)—(12.13) перепишем в виде

$$R_{\mu\nu}(g)-{}^1/_2 g_{\mu\nu}R(g)=8\pi GT_{\mu\nu}+K_\mu K_\nu+K_{\mu\alpha\beta}K^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta}+K_{\alpha\mu\beta}K^{\beta\alpha}{}_{\nu}+$$
$$+K_{\alpha\beta\mu}K_\nu{}^{\alpha\beta}-{}^1/_2 g_{\mu\nu}(K_\lambda K^\lambda+K_{\lambda\mu\nu}K^{\nu\lambda\mu}). \qquad (14.3)$$

Подставим в (14.3) выражение для тензора конторсии

$$K_{\mu\alpha\beta}=s_{\mu\alpha\beta}+s_{\alpha\beta\mu}+s_{\beta\alpha\mu}+g_{\beta\alpha}s_\mu-g_{\mu\beta}s_\alpha.$$

Тогда уравнение (14.3) примет вид

$$R_{\mu\nu}(g)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(g)=8\pi GT_{\mu\nu}{}^{\text{эфф}}. \qquad (14.4)$$

Тензор энергии-импульса, стоящий в правой части уравнения (14.3), включает дополнительные, по сравнению с ОТО, слагаемые типа s^2, входящие $T_{\mu\nu}{}^{\text{эфф}}$ с отрицательным знаком. Очевидно, что будут иметь место случаи, при которых условие энергодоминантности нарушается, т. е.

$$T_{\mu\nu}{}^{\text{эфф}}\eta^\mu\eta^\nu\geqslant\frac{1}{2}T^{\text{эфф}}{}_\lambda{}^\lambda. \qquad (14.5)$$

Пусть в качестве источника гравитационного поля выбрана спиновая жидкость, заполняющая Вселенную. Воспользуемся результатами предыдущего параграфа, положив дополнительно $\nabla_\beta s_\mu{}^\beta=0$. Из (13.20) немедленно следует, что

$$-T^{\text{эфф}}{}_\lambda{}^\lambda=\rho-3P+2s^2,$$

где ρ, как уже указывалось, плотность жидкости, P — давление и $s^2 = s_k s^k$, $s_k = \varepsilon_{k\lambda\mu\nu} u^\lambda s^{\mu\nu}$. Нетрудно заметить, что если давление $P = 0$, то условие (14.5) будет выполняться всегда. Именно при таких предположениях в работе [234] было получено несингулярное решение для космологической модели с метрикой

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1, -a^2(t), -b^2(t), c^2(t)\}.$$

В этом случае уравнения поля сводятся к одному уравнению

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{M_0}{R} + \frac{\mu_0}{6R^4} = 0, \qquad (14.6)$$

где $M_0 = 4/3\pi\rho R^3$ — масса вещества Вселенной, $R^3 = (abc)$, μ_0 — функция от s^2. Вселенная остается регулярной при любых конечных временах, как это следует из решения уравнения (14.6)

$$R^3 = \mu/3M_0 + c_0 \exp(3M_0 t)$$

при условии конечности массы вещества во Вселенной. Предотвращение сингулярности в данном случае является следствием возникновения отрицательного эффективного давления за счет спин-спинового взаимодействия.

Куховичем был дан полный анализ космологических моделей со спином и кручением, заполненных спинирующей жидкостью, основанный на классификации Бианки пространственно-однородных геометрий [235, 236].

Хороший пример несингулярной космологии, справедливый в квазиклассическом приближении и основанный на гидродинамической аналогии между ядерным веществом и спиновой жидкостью, приводится в работах [237, 238].

Глава V

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА—КАРТАНА

Одной из важнейших задач современной теоретической физики является построение квантовой теории гравитации и включение тяготения в схему единой теории фундаментальных физических взаимодействий. Однако эта проблема чрезвычайно сложна в силу нелинейности теории и геометрической природы поля тяготения. Имеющиеся на сегодняшний день варианты квантовой теории тяготения [239—242] далеки от совершенства. В настоящее время наиболее перспективной считается теория супергравитации, простейший вариант которой оказался перенормируемым в двухпетлевом приближении [243, 244] за счет взаимного сокращения вкладов в расходимости от бозонов и фермионов. Однако объединение супергравитации с сильным и электрослабым взаимодействиями (так называемая $N=8$ супергравитация) в единую перенормируемую теорию потребует еще много усилий, поскольку в ней присутствует большое число дополнительных полей, не получивших пока физического истолкования. К тому же сам аппарат квантовой теории поля в приложении к гравитационному взаимодействию требует, по-видимому, серьезной модификации. Ответ на вопрос — какой именно модификации — возможно удастся получить после тщательного изучения особенностей квантовой теории в пространствах, отличающихся от пространства Минковского, — в пространствах аффинной связности с псевдоримановой метрикой.

Такая задача является первым приближением к разрешению проблем квантовой гравитации и предполагает, что материя квантована, а гравитационное поле классическое и может быть рассмотрено как внешнее фоновое поле. Уже на этом этапе выявляется ряд принципиально новых черт как в самом аппарате квантовой теории поля в искривленном пространстве [245], так и в эволюции гравитирующих объектов с квантовой материей в качестве источника тяготения. Предсказанные на этом пути эффекты рождения частиц [60, 228, 229] и испарения черных дыр [246, 247] позволили с новых позиций рассмотреть ряд вопросов астрофизики и космологии [248, 249].

В этой главе мы обсудим эффекты, характерные для взаимодействия кручения с квантовыми материальными полями. Исследование взаимодействия геометрического поля кручения с квантовой материей не сводится к простому обобщению случая псевдоримановой геометрии. Возникает ряд специфических эффектов (см. § 16, 17), а также удается продвинуться в понимании природы поля кручения в теории Эйнштейна—Картана и гравитационного взаимодействия в целом.

Поскольку нас интересует вклад собственно поля кручения, мы исследуем здесь модели с фиксированной метрикой.

Первый параграф главы посвящен изложению основ квантовой теории поля в кривом пространстве.

В § 16 исследована проблема рождения скалярных и спинорных частиц полем кручения, а в § 17 проводится построение эффективного лагранжиана поля кручения, учитывающего поляризацию вакуума материальных полей.

Последний параграф главы посвящен важному вопросу — установлению материальной природы геометрического поля кручения как коллективного поля фермионных пар. Показано, что в такой модели среднее постоянное поле кручения равно нулю (т. е. отсутствует космологическое кручение), но отлично от нуля среднее квадрата поля кручения, дающее вклад в уравнения Эйнштейна.

§ 15. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Построение квантовой теории поля в искривленном пространстве включает в себя задачи определения вакуумного состояния, корпускулярной интерпретации поля и вычисления физических наблюдаемых, таких как тензор энергии-импульса и плотность числа частиц, рождаемых гравитационным полем. Специфика квантования полей на фоне искривленного пространства заключается в том, что уравнения поля, обобщенные ковариантным образом, имеют переменные коэффициенты при старших производных, которые суть компоненты псевдоримановой метрики, а в пространстве Римана—Картана появляется новый тип взаимодействия — «спин—связность». При этом теория возмущений применима лишь в асимптотически плоских пространствах. Вычисление физических наблюдаемых связано с расчетом средних по вакууму от билинейных комбинаций полевых операторов, которые всегда будут содержать расходимости. Для придания смысла таким величинам обычно используют процедуру регуляризации (или вычитания). В искривленном пространстве последняя приводит к появлению в эффективном действии дополнительных слагаемых, что оправдывается с помощью процедуры перенормировки констант взаимодействия в общем лагранжиане поля, включающем в себя гравитационные части. Строгое описание методов регуляризации и конструкции контрчленов можно найти в работах [60, 228, 239, 245].

В нашу задачу не входит анализ имеющихся способов регуляризации и построения вакуумного состояния в искривленном пространстве. Поэтому в этом параграфе мы лишь кратко напомним основные положения квантовой теории поля в искривленном пространстве [60, 245].

В искривленном пространстве лагранжиан свободных материальных полей выбирается в соответствии с принципом минимальности взаимодействия в виде $L(\varphi, \nabla_\mu\varphi, R, g)$. Напомним, что для скалярных полей дополнительно вводится член $R(g, Q)\varphi^2$, который необходим для конформной инвариантности лагранжиана безмассового скалярного поля в отсутствие кручения. Из лагранжиана L варьированием по φ получаются уравнения поля

$$F\varphi = 0, \tag{15.1}$$

где F — некоторый линейный дифференциальный оператор.

В плоском пространстве-времени уравнения свободного поля инвариантны относительно преобразований из группы Пуанкаре, и решения уравнения (15.1) могут быть представлены в виде суммы положительно частотного и отрицательно частотного решений f_j и f_j^*. При этом такое разбиение на положительно- и отрицательно-частотные части сохраняется во времени. Решение f_j пропорционально плосковолновому решению $\exp\{i(\mathbf{kx} - \omega t)\}$, где $\omega = (k^2 + m^2)^{1/2}$, или равно суперпозиции таких решений. Множество $\{f_j, \overset{*}{f}_j\}$ образует полный ортонормированный набор классических решений для данного волнового поля:

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij},\ (\overset{*}{f}_i, \overset{*}{f}_j) = \delta_{ij},\ (f_i, \overset{*}{f}_j) = 0.$$

Здесь (,) означает соответствующее скалярное произведение.

Таким образом, любое решение уравнения (15.1) в плоском пространстве представимо в виде разложения

$$\varphi = \sum_i (a_i^{(-)} f_i + a_i^{(+)} \overset{*}{f}_i),$$

где при переходе к квантовому полю φ коэффициенты $a_i^{(-)}$ и $a_i^{(+)}$ приобретают смысл операторов уничтожения и рождения, не зависящих от времени и пространственных координат и подчиняющихся следующим коммутационным (антикоммутационным для фермионов) соотношениям

$$[\overset{*}{a}{}_i^{(-)}, a_j^{(+)}]_\pm = [a_i^{(-)}, \overset{*}{a}{}_j^{(+)}]_\pm = \delta_{ij}.$$

Вакуумное состояние $|0>$ определяется как основное состояние, удовлетворяющее уравнению $a_j^{(-)}|0\rangle = 0$ для всех j.

Выбрав периодические граничные условия в кубе с ребром L, так что $k_j = 2\pi n_j L^{-1}$, где n_j — целые числа, перейдем в импульсное представление к операторам $\overset{*}{a}{}_\mathbf{k}^{(+)}, a_\mathbf{k}^{(-)}$ рождения и уничтожения частиц импульса $\mathbf{k}$. В этом представлении оператор

$$N_\mathbf{k} = \overset{*}{a}{}_\mathbf{k}^{(+)} a_\mathbf{k}^{(-)} \tag{15.2}$$

это оператор числа частиц с импульсом $\mathbf{k}$ в объеме L^3, а

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}\{\overset{*}{a}{}_{\mathbf{k}}^{(+)}a_{\mathbf{k}}^{(-)}+\overset{*}{a}{}_{\mathbf{k}}^{(-)}a_{\mathbf{k}}^{(+)}\} \tag{15.3}$$

оператор Гамильтона в представлении вторичного квантования.

В отличие от плоского пространства, в искривленном пространстве-времени невозможно инвариантным образом разбить решение уравнения (15.1) на положительно- и отрицательно-частотные части. Даже если это и сделать в какой-либо момент времени, то в последующие моменты времени эти частоты перемешиваются [245], что интерпретируется как рождение частиц [60].

Говорить о рождении частиц имеет смысл после того, как строго введено понятие частицы во внешнем поле. Мы будем здесь следовать методу, впервые предложенному в работе [249] и основанному на процедуре диагонализации мгновенного гамильтониана $\hat{H}(t)$. Он применим, если пространство допускает времениподобный вектор Киллинга.

Зададим гамильтониан, соответствующий данному полю, описываемому лагранжианом $L(\varphi, \nabla\varphi, R, g)$, в форме

$$H=\int_{\Omega}T_{\mu\nu}\xi^{\mu}d\sigma^{\nu}, \tag{15.4}$$

где

$$T_{\mu\nu}=\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\,L(\varphi, \nabla\varphi, R, g) \tag{15.5}$$

метрический тензор энергии-импульса рассматриваемого поля, ξ — поле времениподобного вектора Киллинга, $d\sigma$ — элемент гиперповерхности Ω, перпендикулярной ξ. В этом случае H будет оператором энергии, если время задается как параметр вдоль траекторий поля ξ.

Предполагается, что в некоторый момент времени $t=t_0$ можно ввести не зависящие от пространственных координат и времени операторы рождения и уничтожения $a_{\mathbf{k}}^{(-)}$ и $a_{\mathbf{k}}^{(+)}$ и стационарный вакуум $|0>$, $a_{\mathbf{k}}^{(-)}|0\rangle=0$. В терминах этих операторов гамильтониан (15.4) будет диагонален, т. е. будет иметь вид (15.3), среднее по вакууму от него является энергией системы в данный момент времени, а оператор числа частиц будет таким же, как (15.2).

В другой момент времени $t\neq t_0$ гамильтониан уже не будет диагонален в терминах операторов $a^{(-)}$ и $a^{(+)}$. Однако его можно диагонализовать с помощью преобразования Боголюбова

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^{(+)}&=\alpha^{*}A_{\mathbf{k}}^{(+)}+\beta^{*}A_{-\mathbf{k}}^{(-)},\\ a_{\mathbf{k}}^{(-)}&=\alpha A_{\mathbf{k}}^{(-)}+\beta A_{-\mathbf{k}}^{(+)} \end{aligned} \tag{15.6}$$

в терминах операторов $A^{(-)}$ и $A^{(+)}$. Преобразования Боголюбова (15.6) сохраняют коммутационные и антикоммутационные соотношения, и операторы $A^{(-)}$ и $A^{(+)}$ могут рассматриваться как операторы рождения и уничтожения некоторых квазичастиц с новым вакуумом $|0'>$, $A^{(-)}|0'>=0$, который, вообще говоря, не эквивалентен вакууму $|0>$. Условие диагонализации гамильтониана определяет зависимость коэффициентов преобразования (15.6) от координат, которые в момент $t=t_0$ полагаются

$$\alpha=1,\ \beta=0.$$

Такой подход позволяет вычислять число частиц, тензор энергии-импульса, их зависимость от времени в терминах однажды заданного фоковского пространства. Например, число частиц, рожденных в каждой моде за время, прошедшее с момента t_0, определяется как среднее от оператора числа квазичастиц $n(\mathbf{k}, t)=\overset{*}{A}{}_{\mathbf{k}}^{(+)}A_{\mathbf{k}}^{(-)}$ по начальному вакууму $|0>$. В результате получим

$$n(\mathbf{k},\ t)=|\beta(\mathbf{k},\ t)|^2. \qquad (15.7)$$

Аналогичным образом вычисляется тензор энергии-импульса рожденных частиц.

Отметим, что вышеизложенная схема особенно удобна для исследования космологических моделей, так как она не требует, чтобы пространство было асимптотически плоским. В этой схеме корпускулярная интерпретация проводится в терминах квазичастиц, т. е. частиц, для которых гамильтониан приобретает диагональную форму в данный момент времени. Отметим, что в любой момент времени можно указать такой набор операторов поля, который будет соответствовать свободным квазичастицам, и только пересчет к начальному состоянию позволяет установить факт рождения новых частиц. Преимущество излагаемого метода, по сравнению с другими, например S-матричным, заключается в возможности выбрать начальное состояние безотносительно к асимптотике пространства-времени. В асимптотически плоском пространстве-времени результаты, полученные методом диагонализации мгновенного гамильтониана, совпадают с результатами полученными в рамках адиабатической регуляризации Паркера [229] и с помощью вычислительной процедуры Зельдовича—Старобинского [228].

§ 16. РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ ПОЛЕМ КРУЧЕНИЯ

Исследуем проблему рождения безмассовых частиц геометрическим полем кручения. Хорошо известен факт, что в псевдоримановых пространствах с конформно-плоской метрикой безмассовые частицы не рождаются [60]. Это относится к фотонам, нейтрино и скалярному полю с конформной связью. Иная ситуация складывается при наличии поля кручения.

Пусть лагранжиан безмассового скалярного поля выбран в виде

$$L=(-g)^{1/2}\left\{\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi+\frac{1}{12}R(g,Q)\varphi^{2}\right\},\tag{16.1}$$

где $R(g, Q)$ определяется (11.7).

Уравнения поля, получаемые варьированием (16.1) по полю φ, имеют вид

$$(-g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}((-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\varphi)-\frac{1}{6}\{R(g)+$$

$$+2K^{\lambda}{}_{\alpha\lambda}{}^{;\alpha}+K^{\lambda}{}_{\mu\lambda}K^{\mu}{}_{\sigma}{}^{\sigma}-K_{\lambda\mu\sigma}K^{\sigma\lambda\mu}\}\varphi=0.\tag{16.2}$$

Для упрощения мы не будем рассматривать кручение, представленное своим следом, источники которого к тому же не достаточно хорошо изучены. Тогда $K^{\alpha}{}_{\lambda\alpha}=K^{\mu}{}_{\sigma}{}^{\sigma}=0$. Метрический тензор энергии-импульса скалярного поля будет

$$T_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}{}^{(0)}+\frac{1}{6}\left\{K_{\mu\lambda\sigma}K^{\sigma}{}_{\nu}{}^{\lambda}+K_{\alpha\mu\sigma}K^{\sigma\alpha}{}_{\nu}+\right.$$

$$\left.+K_{\alpha\lambda\mu}K_{\nu}{}^{\alpha\lambda}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}K_{\alpha\lambda\beta}K^{\beta\alpha\lambda}\right\}\varphi^{2},\tag{16.3}$$

где

$$T^{0}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi-g_{\mu\nu}\left(\partial_{\alpha}\varphi\partial^{\alpha}\varphi+\frac{R(g)}{6}\varphi^{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{6}(R_{\mu\nu}(g)+g_{\mu\nu}\Box-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu})\varphi^{2}\tag{16.4}$$

и $\nabla_{\mu}=\partial_{\mu}-\{\cdot_{\mu}\}$, $\Box=g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}$.

Теперь перейдем к квантованию скалярного поля, описываемого уравнением (16.2), во внешнем гравитационном поле однородной конформно-плоской модели Вселенной с кручением. Метрика такой модели задается в виде

$$ds^{2}=R^{2}(\eta)(d\eta^{2}-dx^{2}-dy^{2}-dz^{2}),\tag{16.5}$$

где η связано с физическим временем соотношением $dt=R(\eta)d\eta$. Если источниками поля кручения являются фермионы либо идеальная спиновая жидкость (см. § 13), то свертка тензора конторсии в обоих случаях будет зависеть только от времени.

Напомним, что для спиновой жидкости

$$Q_{\lambda\mu\nu}=8\pi Gu_{\lambda}s_{\mu\nu}$$

и соответственно

$$Q_{\lambda\mu\nu}Q^{\lambda\mu\nu}=(8\pi G(-g)^{-1/2})^{2}s^{2}R^{2}(\eta),\tag{16.6}$$

где s^2 — квадрат спина единичного элемента жидкости [235].

Кручение, индуцированное спинорными полями, было получено в работе [251] (более подробно мы обсудим этот вопрос в § 17),

$$Q_{\lambda\mu\nu}=\varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}\tilde{Q}^{\alpha}, \quad \tilde{Q}^{\alpha}=\{0,\ 0,\ 0,\ (-g)^{-1/2}s\},$$

$s=16\pi GN_p$, N_p — плотность спинорной материи.

В силу выделенной зависимости от времени оператор вторично квантованного поля бозонов представим в виде разложения в ряд Фурье

$$\varphi(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}R(\eta)}\int d^3k\,\{u_{\mathbf{k}}^{+}(\eta)\,a^{(+)}(\mathbf{k},\eta)\exp(i\mathbf{kx})+$$
$$+u_{\mathbf{k}}^{-}(\eta)\,a^{(-)}(\mathbf{k},\eta)\exp(-i\mathbf{kx})\},$$

где функции $u_k(\eta)$ с учетом (16.5) удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2u_{\mathbf{k}}(\eta)}{d\eta^2}+[k^2+s^2R^{-4}(\eta)]\,u_{\mathbf{k}}(\eta)=0. \qquad (16.7)$$

Уравнение (16.7) с переменной массой $\omega_{\mathbf{k}}(\eta)$ существенно зависит от выбора функции кручения. Пусть кручение задано как в работе [252], $Q^2(\eta)=-s^2_0/R^6(\eta)$. Тогда мы получим уравнение второго порядка для $u_{\mathbf{k}}(\eta)$, в котором

$$\omega_{\mathbf{k}}(\eta)=k^2+s_0^2/R^4(\eta).$$

Таким образом, возможны два случая: а) при $|\mathbf{k}|^2<s_0^2R^{-4}(\eta)$ уравнение (16.7) превращается в уравнение для затухающей волны и рождения частиц не будет; б) при $|\mathbf{k}|^2>s_0^2R^{-4}(\eta)$ в каждой моде в данный момент времени будут рождаться частицы лишь определенной энергии (массы), а именно: $m\simeq s_0R^{-2}(\eta)$. Отсюда видно, что частицы с наибольшей массой рождаются на ранних стадиях развития Вселенной, с меньшей — на более поздних.

На функцию $u_{\mathbf{k}}(\eta)$ наложим следующие условия в некоторый момент времени $\eta=\eta_0$

$$\dot{u}_{\mathbf{k}}(\eta_0)=i(\omega_{\mathbf{k}}(\eta_0)/2)^{1/2}, \quad u_{\mathbf{k}}(\eta_0)=(2\omega_{\mathbf{k}}(\eta_0))^{-1/2}, \qquad (16.8)$$

которые приводят к диагональности гамильтониана в этот момент времени.

Используя соотношения (16.3), (16.7), (16.8), запишем выражение для гамильтониана в терминах операторов рождения и уничтожения скалярного поля

$$H(\eta)=\int d^3k\omega_{\mathbf{k}}(\eta)\{[a^{(+)}(\mathbf{k},\eta)\,a^{(-)}(\mathbf{k},\eta)+$$
$$+a^{(-)}(\mathbf{k},\eta)\,a^{(+)}(\mathbf{k},\eta)]\,E(\mathbf{k},\eta)+a^{(+)}(\mathbf{k},\eta)\,a^{(+)}(-\mathbf{k},\eta)\,F(\mathbf{k},\eta)+$$
$$+a^{(-)}(\mathbf{k},\eta)\,a^{(-)}(-\mathbf{k},\eta)\,F^{*}(-\mathbf{k},\eta)\}, \qquad (16.9)$$

где

$$E(\mathbf{k},\eta)=[2\omega_{\mathbf{k}}(\eta)]^{-1}\,[\,|\dot{u}_{\mathbf{k}}|^2+\omega_{\mathbf{k}}^2|u_{\mathbf{k}}|^2],$$

$$F(\mathbf{k},\eta)=[2\omega_{\mathbf{k}}(\eta)]^{-1}\,[\,|\dot{u}_{\mathbf{k}}|^2-\omega_{\mathbf{k}}^2|u_{\mathbf{k}}|^2].$$

Гамильтониан (16.9) недиагонален в произвольный момент времени по операторам рождения и уничтожения, что должно привести к рождению частиц из вакуума (см. § 15).

Предположим, что в момент времени $\eta=\eta_0$ скалярное поле находилось в вакуумном состоянии, тогда $u_\mathbf{k}(\eta_0)$ и $\dot{u}_\mathbf{k}(\eta_0)$ определяются формулами (16.8) и недиагональные члены в гамильтониане в этот момент времени отсутствуют, поскольку

$$F(\eta_0)=F^*(\eta_0)=0,\ E_\mathbf{k}(\eta_0)=1,\ \omega_\mathbf{k}(\eta_0)=k^2+s_0^2R^{-4}(\eta_0).$$

Мы не можем в качестве начального момента времени выбрать точку $\eta_0=0$, так как, во-первых, она — сингулярная точка пространства Фридмана (конформно-плоского), во-вторых, она — сингулярная точка уравнения (16.8) (для физически интересных случаев $R(\eta)\sim\eta^p$, где $0<p<1$). Поэтому будем выбирать η_0 сколь угодно близко к нулю, но не в самом нуле.

Преобразуем операторы $a^{(+)}(\mathbf{k},\eta)$, $a^{(-)}(\mathbf{k},\eta)$ таким образом (см. § 15), чтобы гамильтониан (16.9) стал диагональным в новых операторах $A^{(+)}(\mathbf{k})$, $A^{(-)}(\mathbf{k})$. Положим

$$\begin{aligned} a^{(+)}(\mathbf{k},\eta)&=\alpha^*(\mathbf{k},\eta)A^{(+)}(\mathbf{k})+\beta^*(\mathbf{k},\eta)A^{(-)}(-\mathbf{k}),\\ a^{(-)}(\mathbf{k},\eta)&=\alpha(\mathbf{k},\eta)A^{(-)}(\mathbf{k})+\beta(\mathbf{k},\eta)A^{(+)}(-\mathbf{k}). \end{aligned}\tag{16.10}$$

Подставив (16.10) в гамильтониан (16.9) и потребовав равенство нулю коэффициентов при недиагональных членах, будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{gathered} E^2(\mathbf{k},\eta)-F^2(\mathbf{k},\eta)=1/4,\qquad \beta/\alpha=(E-1/2)/F,\\ |\beta|^2=(1/2\omega)\,[\dot{u}^2+\omega^2u^2-\omega],\qquad |\alpha|^2=(1/2\omega)\,[\dot{u}^2+\omega^2u^2+\omega]. \end{gathered}\tag{16.11}$$

После диагонализации гамильтониан (16.9) будет гамильтонианом ансамбля квазичастиц, в каждой моде обладающих энергией

$$\omega_k(\eta)=k^2s_0{}^2R^{-4}(\eta).$$

Тензор энергии-импульса необходимо взять в нормально упорядоченной форме, т. е. вычесть бесконечные части вакуумных средних

$$NT_\mu{}^\nu(x)=T_\mu{}^\nu(x)-\langle{}_\eta0|\,T_\mu{}^\nu\,|0_\eta\rangle.$$

Эта процедура упорядочивания была предложена в [253] и дает при вычислении конечные выражения для $T_\mu{}^\nu$.

Плотность числа частиц, рожденных от момента η_0 до момента η находится по формуле (15.7)

$$n(\eta)=\frac{1}{4\pi R^3(\eta)}\int dkk^2\,|\beta(\mathbf{k},\eta)|^2.\tag{16.12}$$

Энергия и давление родившихся частиц будут

$$\varepsilon=\frac{1}{4\pi^2R^4(\eta)}\int dkk^2\omega_\mathbf{k}(\eta)\,|\beta(\mathbf{k},\eta)|^2,\tag{16.13a}$$

$$P_\alpha = \frac{1}{12\pi^2 R^4(\eta)} \int dk k^2 \omega_{\mathbf{k}}(\eta) \{ |\beta(\mathbf{k}, \eta)|^2 - \delta_{k_\alpha} \}, \ \alpha = 1, 2, \quad (16.13б)$$

$$P_3 = \frac{1}{12\pi^2 R^4(\eta)} \int dk k^2 \omega_{\mathbf{k}}(\eta) \{ |\beta(\mathbf{k}, \eta)|^2 - \delta_{k_3} + \delta_Q \}, \quad (16.13в)$$

где

$$\delta_{k_\alpha} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2(\eta) - 3k_\alpha^2}{\omega_{\mathbf{k}}(\eta)} \{ (u_{\mathbf{k}}(\eta))^2 - (2\omega_{\mathbf{k}}(\eta))^{-1} \}, \ \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\delta_Q = 3Q^2 (\omega_{\mathbf{k}}(\eta))^{-1} \{ (u_{\mathbf{k}}(\eta))^2 - (\omega_{\mathbf{k}}(\eta))^{-1} \}.$$

Уравнение состояния рожденных частиц имеет вид

$$\varepsilon = P_1 + P_2 + P_3.$$

Для конкретных численных оценок найдем решение уравнения (16.7) с начальными данными (16.8). Представим его в виде

$$\frac{d^2 u_{\mathbf{k}}(\eta)}{d\eta^2} + \omega_{\mathbf{k}}(\eta_0) u_{\mathbf{k}}(\eta) = \{ Q^2(\eta_0) - Q^2(\eta) \} u_{\mathbf{k}}(\eta).$$

Такое уравнение можно записать в эквивалентной ему форме интегрального уравнения типа Вольтерра

$$u_{\mathbf{k}}^{\pm}(\eta) = (2\omega_{\mathbf{k}}(\eta_0))^{-1} \exp(\pm i\omega_0(\eta - \eta_0)) +$$

$$+ \omega_{\mathbf{k}}^{-1}(\eta_0) \int_{\eta_0}^{\eta} [Q^2(\eta_0) - Q^2(\xi)] \sin \omega_{\mathbf{k}}(\eta_0)(\eta - \xi) u_{\mathbf{k}}^{\pm}(\xi) d\xi,$$

которое решается методом итераций при разложении $u_{\mathbf{k}}^{\pm}(\eta)$ в ряд по степеням малости

$$u_{\mathbf{k}}^{\pm}(\eta) = \overset{(0)}{u}{}_{\mathbf{k}}^{\pm}(\eta) + \ldots + \overset{(n)}{u}{}_{\mathbf{k}}^{\pm}(\eta) + \ldots,$$

где

$$\overset{(0)}{u}{}_{\mathbf{k}}^{\pm}(\eta) = (2\omega_0)^{-1} \exp\{\pm i\omega_0(\eta - \eta_0)\}, \ \omega_0 \doteq \omega_{\mathbf{k}}(\eta_0),$$

$$\overset{(n)}{u}{}_{\mathbf{k}}^{\pm}(\eta) = \frac{1}{\omega_0} \int_{\eta_0}^{\eta} [Q^2(\eta_0) - Q^2(\xi)] \sin \omega_0(\eta - \xi) \overset{(n-1)}{\nu}{}_{\mathbf{k}}^{\pm}(\xi) d\xi.$$

Для оценки пределов применимости разложения $u_{\mathbf{k}}^{\pm}(\eta)$ в ряд учтем, что наше приближенное разложение справедливо в интервале

$$\eta - \eta_0 \ll Q^{-1}(\eta_0). \quad (16.14)$$

Если $\eta \simeq \eta_{\text{планк}}$, то при степенной зависимости $R(\eta) \sim \eta^p$, где $0 < p < 1$, $(\eta - \eta_0)$ — порядка ядерных времен 10^{-10} с; в наше время при той же степенной зависимости $(\eta - \eta_0)$ — порядка космологического времени существования Вселенной.

Вблизи сингулярности можно предположить степенной закон изменения $R(t)=a_0 t^q$, где $0<q<1$. Тогда в силу зависимости $dt=R(\eta)\,d\eta$ следует, что

$$R(\eta)=a_1\eta^{q/(1-q)},\quad a_1=a_0^{1/(1-q)}(1-q)^{q/(1-q)}.$$

В выражениях для числа частиц, энергии-импульса мы сохраним только первые два члена ряда, вклад которых в интервале $(\eta-\eta_0)$ будет значительно больше всех остальных членов ряда. Введем обозначения $B=a_1/s$, $p=q(1-q)^{-1}$. Тогда зависимости плотности числа частиц, энергии и давления от времени будут следующими:

$$n(\eta)\simeq(4\pi a_1^6 B^3)^{-1}\eta^{-3p}(\eta_0^{2p}-\eta^{2p})^2(\eta_0^{2p}+\eta^{2p}),$$

$$\varepsilon(\eta)\simeq(32\pi^2 a_1^6 B^2)^{-1}(\ln(\eta_0^{4p}a_1^{-2}B^{-2}))\,\eta^{-4p}(\eta_0^{4p}-\eta^{4p}),$$

$$P_1=P_2=P(\eta)\simeq(96\pi^2 a_1^6 B^2)^{-1}\{(\ln(\eta_0^{4p}a_1^{-2}B^{-2}))\,\eta^{-4p}(\eta_0^{4p}-\eta^{4p})-$$

$$-\eta^{4p}a_1^{-2}B^{-2}\ln(\eta/\eta_0)\},$$

$$P_3(\eta)\simeq(96\pi^2 a_1^6 B^2)^{-1}\eta^{-4p}\{\ln(\eta_0^{4p}a_1^{-2}B^{-2})(\eta_0^{4p}-\eta^{4p})+$$

$$+2\eta^{4p}\bar{a}_1^{2}B^{2}\ln(\eta/\eta_0))^{-1}\}.$$

Из выражений для $P_{1,2,3}$ следует анизотропия давления родившихся частиц, причиной которой является выделенность направления спина. Однако надо подчеркнуть, что на классическом уровне асимметрия пространства не сказывается. Необходим квантовый эффект рождения частиц, чтобы скрытая асимметрия стала явной. В этом смысле его можно трактовать как эффект спонтанного нарушения пространственно-временной симметрии.

Таким образом, в конформно-плоской модели Вселенной с кручением происходит рождение скалярных безмассовых частиц, и максимум рождения достигается во времена порядка планковских 10^{-44} с.

Другой пример рождения частиц полем кручения был рассмотрен в работах [254—256], в которых изучалось рождение массивных спинорных частиц в пространстве с метрикой Минковского и кручением. Кручение, представленное своим псевдоследом, в данном случае выбирается в виде ступеньки, а именно:

$$\check{Q}^{\mu}=\begin{cases}0, & x^3<0,\\ \check{Q}^0_{\mu}, & x^3>0,\end{cases}$$

где $\check{Q}^0_{\mu}=\{0,0,0,-n\}$. Тогда уравнение Дирака в области $x^3>0$ будет иметь вид

$$\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-n\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & -\sigma_3\end{pmatrix}-m\right]\psi(x,t)=0.$$

Его решение, соответствующее определенным значениям энергии и проекций импульса E, k_1, k_2, ищется в виде

$$\psi_{E,k_1,k_2}(x, t) = (2\pi)^{3/2} \exp(-i[Et - k_1 x^1 - k_2 x^2]) \chi^+(x^3) +$$
$$+ \text{ эрмитово сопряженное слагаемое.}$$

Задача рождения частиц решается в S-матричном подходе. Показано, что плотность рожденных частиц во всех модах в единицу времени

$$N \simeq n^3$$

для больших значений n.

Можно показать, что безмассовые спинорные частицы тоже будут рождаться внешним полем кручения

§ 17. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ С КРУЧЕНИЕМ

Продолжим рассмотрение системы «квантовые материальные поля — классическое поле кручения». В § 16 было продемонстрировано, как присутствие классического поля кручения сказывается на квантовых материальных полях. В этом параграфе мы рассмотрим обратное действие квантовых полей на классическое кручение. Оно связано с поляризацией вакуума материальных полей, которая приводит к дополнительному вкладу в лагранжиан системы. Анализ дополнительных слагаемых указывает на интересную возможность получить действие гравитационного поля с кручением за счет поляризации вакуума. Аналогичные расчеты были сделаны для электромагнитного поля (впервые Эйлером и Гейзенбергом [68]), для янг-миллсовского поля [258].

В рамках эйнштейновской теории такой способ построения действия гравитационного поля (получивший название индуцированной гравитации) был впервые применен в работе Утиямы и де Витта [259] (см. обзор [18]). Однако это не привело к каким-либо качественно новым результатам, поскольку набор геометрических инвариантов не выше второго порядка по кривизне, из которых конструируется действие, в псевдоримановой геометрии сводится к четырем.

Иная ситуация складывается в теории гравитации с кручением, где число таких инвариантов превышает сто пятьдесят. Поэтому выбор того или иного набора таких инвариантов в качестве действия можно попытаться обосновать, исходя из метода, аналогичного методу индуцированной гравитации.

Мы сначала рассмотрим случай безмассовых спинорных полей в пространстве с метрикой Минковского и кручением, а затем приведем обобщение этих результатов для случая псевдоримановой метрики.

Лагранжиан взаимодействия поля кручения с фермионами в метрике Минковского имеет вид

$$L=(i/2)\{\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\}+g_0\bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\psi\tilde{Q}^{\mu}. \qquad (17.1)$$

Рассмотрим производящий функционал связных функций Грина

$$Z(\eta,\bar{\eta},\tilde{Q}^{\mu})=N\int D\bar{\psi}D\psi\,\exp\{i\int d^4x\,[L+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta]\}. \qquad (17.2)$$

После интегрирования по фермионным полям в (17.2) получается эффективное действие для поля кручения

$$S=\int d^4x L_{\mathrm{eff}}(\tilde{Q})=\int d^4x\,[-i\,\mathrm{tr}\ln(\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-g_0\gamma_{\mu}\gamma_5\tilde{Q}^{\mu})]. \qquad (17.3)$$

Отличный от нуля вклад в выражение (17.3) дают только диаграммы порядка g_0^{2n}. Во втором порядке после взятия фейнмановских интегралов с помощью размерной техники получим

$$L_{\mathrm{eff}}=-z\cdot{}^1/_4(\partial_{\mu}\tilde{Q}_{\nu}-\partial_{\nu}\tilde{Q}_{\mu})(\partial^{\mu}\tilde{Q}^{\nu}-\partial^{\nu}\tilde{Q}^{\mu}), \qquad (17.4)$$

где $z=(2\pi)^{-2}((n-4)^{-1}-\ln(p^2/\mu^2)-c+1)$. После ренормировки $z^{1/2}\tilde{Q}_{\nu}\to\tilde{Q}_{\nu}$, $g_0\to gz^{-1/2}$ полный лагранжиан примет вид

$$L_{\text{пол}}=(i/2)(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)+g\bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\psi\tilde{Q}^{\mu}-{}^1/_4(\partial_{\mu}\tilde{Q}_{\nu}-\partial_{\mu}\tilde{Q}_{\mu})^2. \qquad (17.5)$$

В сравнении с лагранжианом (17.1), в (17.5) присутствует лагранжиан свободного поля кручения

$$L(Q)=\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu},\quad G_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\tilde{Q}_{\nu}-\partial_{\nu}\tilde{Q}_{\mu},$$

обусловленный поляризацией вакуума материальных полей и имеющий, в отличие от лагранжиана ТЭК, янг-миллсовский вид. Заметим, что подобный лагранжиан уже предлагался в теории гравитации с кручением некоторыми авторами.

Рассмотрим теперь поляризационные эффекты массивных спинорных полей в произвольном гравитационном поле с кручением [258]—[260]. Эффективный лагранжиан поля кручения в формализме собственного времени выражается интегралом

$$L=-\frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s}\langle x,s|x,0\rangle,$$

где s — параметр собственного времени Швингера — де Витта, а $<x,\ s|x,\ 0>$ — амплитуда перехода «вакуум—вакуум», связанная с функцией Грина соотношением

$$G(x,x')=i\int_0^{\infty}[-g(x)]^{-1/4}\langle x,s|x',0\rangle[-g(x')]^{-1/4}ds. \qquad (17.6)$$

Уравнение для функции Грина спинорного поля получается обобщением уравнения в плоском пространстве на случай U^4, а именно:

$$(i\gamma^{\mu}\overset{\Gamma}{\nabla}_{\mu}-m)S(x,x')=[-g(x)]^{-1/4}\delta^4(x,x')[-g(x')]^{-1/4}, \qquad (17.7)$$

где $\overset{\Gamma}{\nabla}_\mu$ — ковариантная производная в U^4 (см. § 12). Квадрируем (17.7), представив фермионную функцию Грина в форме

$$S(x, x') = (i\gamma^\mu \overset{\Gamma}{\nabla}_\mu + m) G(x, x'),$$

где $G(x, x')$ будет иметь вид (17.6) и подчиняется уравнению

$$(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + G^{\alpha\beta}Q^\mu{}_{\alpha\beta} + X) G(x, x') = \\ = [-g(x)]^{-1/4}\,\delta(x, x')\,[-g(x')]^{-1/4}, \qquad (17.8)$$

$$X = \frac{1}{8} G^{\alpha\beta}G^{\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}(g, Q) - G^{\alpha\beta}\overset{\Gamma}{\nabla}_\alpha Q_\beta - \overset{\Gamma}{\nabla}_\mu Q^\mu + Q_\mu Q^\mu + m^2.$$

Амплитуда перехода «вакуум—вакуум» удовлетворяет уравнению типа Шредингера

$$i\,\frac{\partial}{\partial s}\langle x, s \,|\, x', 0\rangle = (g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + G^{\alpha\beta}Q^\mu_{\alpha\beta} + X)\,\langle x, s\,|\,x', 0\rangle, \qquad (17.9)$$

решение которого удобно искать в виде

$$\langle x, s\,|\,x', 0\rangle = -i(4\pi i s)^{-2} D(x, x')\,[-im^2 s - \\ - i\sigma(x, x')/2s] \times \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, x')\,(is)^n, \qquad (17.10)$$

где

$$D(x, x') = -\det[-\overset{\Gamma}{\nabla}_\mu \overset{\Gamma}{\nabla}_\nu \sigma(x, x')]$$

детерминант Ван-Флека—Моретта, $\sigma(x, x')$ — мировая функция Синга. После подстановки (17.10) в (17.9) получим следующие выражения для коэффициентов разложения

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = -\frac{1}{12}R + \frac{9}{2}\check{Q}_\alpha\check{Q}^\alpha + \frac{1}{4}\nabla_\alpha\check{Q}^\alpha,$$

$$a_2 = \frac{1}{144}R^2 - \\ - \frac{1}{90}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{7}{720}R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{48}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}. \qquad (17.11)$$

Окончательное выражение для эффективного лагранжиана

$$L_{\text{eff}} = \mathrm{tr}\,[I_0 a_0 + I_1 a_1 + I_2(a_2 + {}^1/_2 a_1^2)],$$

где

$$I_j = (32\pi^2)^{-1}\int_0^\infty dt\, t^{j-3}\exp(-m^2 t)$$

расходящиеся интегралы, $t = -is$.

Эти расходимости можно устранить включением в затравочный лагранжиан теории слагаемых вида (17.11) и перенормировкой соответствующих констант, что, с другой стороны, накладывает искомое ограничение на выбор лагранжиана гравитационного поля с кручением.

§ 18. КРУЧЕНИЕ КАК КОЛЛЕКТИВНОЕ ПОЛЕ

В рамках классической теории Эйнштейна—Картана в § 12 мы привели теорему, устанавливающую соответствие между ТЭК и нелинейной спинорной теорией в псевдоримановых пространствах. Согласно этой теореме геометрическое поле — кручение — представляется парой спинорных материальных полей (уравнение Палатини (12.37)) и может быть исключено из рассмотрения переходом к лагранжиану, включающему нелинейное четырехфермионное взаимодействие. Это указывает на возможную материальную природу кручения пространства-времени как коллективного поля.

Исследуем этот вопрос на квантовом уровне.

Рассмотрим систему, описываемую лагранжианом

$$L_0 = -(16\pi G)^{-1} R(g) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + \frac{\lambda_0}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2. \tag{18.1}$$

Производящий функционал связных функций Грина будет

$$Z(\eta, \bar{\eta}, t_{\mu\nu}) = N\int Dg^{\mu\nu} D\bar{\psi} D\psi \exp\{i\int d^4x(-g)^{1/2}(L_0 + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + t_{\mu\nu}g^{\mu\nu})\}.$$

Линеаризуем четырехфермионное взаимодействие с помощью дополнительного интегрирования по псевдовекторному полю $\check{Q}_\mu$:

$$\int D\bar{\psi}D\psi \exp\left\{i d^4x(-g)^{1/2}\frac{\lambda_0}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2\right\} =$$

$$= \int D\bar{\psi}D\psi D\check{Q}_\mu \exp\left\{i\int d^4x(-g)^{1/2}\left(g_0\check{Q}_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi - \frac{m_0^2}{2}Q_\mu Q^\mu\right)\right\},$$

где $\lambda_0 = g_0^2/m_0^2$. Такая линеаризация (сопровождающаяся переопределением нормировочной константы $N \to N'$) является удобным способом развить приближенную схему хартри-фоковского типа для квантования четырехфермионного взаимодействия. Поле $\check{Q}_\mu$ называется коллективным полем.

В результате линеаризации производящий функционал, в котором введены источники поля $\check{Q}_\mu$, будет уже описывать связные функции Грина взаимодействующих гравитационного, фермионного и коллективного полей

$$Z(\bar{\eta}, \eta, t_{\mu\nu}, j_\mu) = N'\int Dg_{\mu\nu}D\bar{\psi}D\psi D\check{Q} \exp\{i\int d^4x(-g)^{1/2}[L_1 + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + g^{\mu\nu}t_{\mu\nu} + j_\mu\check{Q}^\mu + L_\text{к} + L_\text{д}]\}, \tag{18.2}$$

где $L_\text{к}$, $L_\text{д}$ — лагранжианы калибровочных и духовых полей. Лагранжиан

$$L_1 = -(16\pi G)^{-1} R(g) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) +$$

$$+ g_0 (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi) \check{Q}^\mu - \frac{m_0^2}{2} \check{Q}_\mu \check{Q}^\mu \qquad (18.3)$$

отличается от лагранжиана ТЭК константами g_0 и m_0, не совпадающими с гравитационной.

Выбор константы взаимодействия фермионного поля с кручением, равной ньютоновской гравитационной, является дополнительным ограничением, для которого нет априорных оснований, поскольку последовательная калибровочная трактовка гравитационного поля как аффинно-метрического позволяет ввести в теорию два независимых заряда — ньютоновскую постоянную тяготения G и неизвестную пока константу взаимодействия «спин—кручение» g_0.

Следующее из лагранжиана (18.3) уравнение

$$\check{Q}_\mu = \frac{g_0}{m_0^2} \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$$

является квантовым аналогом уравнения Палатини (см. § 12) и выражает основную идею о спине как источнике поля кручения. В этом уравнении необходимо разделить классическое кручение и квантовые флуктуации, представляющие собой базисные состояния, возникающие в теории с четырехфермионным взаимодействием, и учесть для классического кручения эффект поляризации вакуума материальных полей.

Представим коллективное поле $\check{Q}_\mu$ в виде

$$\check{Q}_\mu = \check{Q}_\mu{}^0 + \check{q}_\mu, \qquad (18.4)$$

где $\check{Q}_\mu{}^0$ — классическое поле кручения, $\check{q}_\mu$ — квантовые флуктуации.

Величину $\check{Q}_\mu{}^0$ можно получить методом среднего поля, в основе которого лежит идея о квантовании взаимодействующих полей на фоне некоторого решения самосогласованных уравнений, описывающих среднее состояние коллективного поля (в нашем случае $\check{Q}_\mu$) и одновременно поляризацию вакуума [71]. Учет влияния такого среднего поля на эволюцию системы полей является непертурбативным эффектом теории самодействующих полей. Таким методом в квантовой теории поля был рассмотрен целый ряд моделей [69, 74—80].

Уравнение для среднего поля $\check{Q}_\mu{}^0$ получается из условия минимизации эффективного потенциала поля кручения, учитывающего поляризацию вакуума материальных полей. Он находится интегрированием функционала (18.2) по фермионным полям. Результатом такого интегрирования будет

$$\exp\{iW(\eta, \bar{\eta}, g_{\mu\nu}, Q)\} = \int Dg_{\mu\nu} D\check{Q}_\nu \exp\left\{\{id^4x\,(-g)^{1/2} \times\right.$$

$$\times \left\{-(16\pi G)^{-1} R(g) - \bar{\eta} G \eta - i(-g)^{-1/2} \operatorname{tr} \ln ((-g)^{1/2} (i\gamma^\mu \nabla_\mu -\right.$$

$$- \gamma_\mu\gamma_5\breve{Q}^\mu g_0)) - \left(\frac{m_0^2}{2}\right)\breve{Q}_\mu Q^\mu + j_\mu\breve{Q}^\mu + t_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\Big\}\Big\}. \quad (18.5)$$

Откуда

$$V_{\text{eff}}(\breve{Q}_\mu, g_{\mu\nu}) = \int d^4x(-g)^{1/2}\Big\{-(16\pi G)^{-1}R(g) - i(-g)^{-1/2}\times$$

$$\times \operatorname{tr}\ln((-g)^{1/2}(i\gamma^\mu\nabla_\mu - g_0\gamma_\mu\gamma_5\breve{Q}^\mu)) - \frac{m_0^2}{2}\breve{Q}_\mu\breve{Q}^\mu\Big\}$$

и уравнение для среднего поля Q_μ^0 имеет вид

$$m_0^2\breve{Q}_\mu^0 = -i\operatorname{tr}\int d^4xG(x, x')\,\delta G^{-1}/\delta\breve{Q}_\mu^0,$$

$$G^{-1}(x-y) = (i\gamma^\mu\nabla_\mu - g_0\gamma^\mu\gamma^5\breve{Q}_\mu)\,\delta^4(x-y). \quad (18.6)$$

При этом, поскольку нас пока не интересует квантование метрического поля и для того чтобы выделить собственно эффекты кручения, положим $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$.

Рассмотрим постоянное решение уравнения (18.6), которое при этом сводится к уравнению

$$m_0^2\,\breve{Q}_\mu^0 = -(2\pi)^{-4}\,g_0^2\operatorname{tr}\int\frac{d^4k}{k_\alpha\gamma^\alpha - g_0\breve{Q}_\alpha^0\,\gamma^\alpha\gamma_5}. \quad (18.7)$$

Интеграл в правой части (18.7) может быть вычислен с помощью размерной техники.

Оказывается, что единственным решением уравнения (18.7) является $\breve{Q}_\mu{}^0=0$ и этот результат распространяется и на случай неминковской внешней метрики.

Таким образом, квантовое рассмотрение взаимодействия кручения с фермионами приводит к тому, что коллективное поле кручения представляет собой чисто квантовые флуктуации над нулевым фоном.

Построим эффективный лагранжиан такого поля кручения, для чего найдем все однопетлевые вклады в действие

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x\left[-i\operatorname{tr}\ln(i\gamma^\mu\partial_\mu - g_0\gamma^\mu\gamma_5\breve{q}_\mu) + \frac{m_0^2}{2}\breve{q}_\mu\breve{q}^\mu\right] \quad (18.8)$$

и получим в первом порядке по константе g_0^2

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu\breve{q}_\nu - \partial_\nu\breve{q}_\mu)^2 - \frac{m_0^2}{2}\breve{q}_\mu\breve{q}^\mu\right]. \quad (18.9)$$

Лагранжиан (18.9) отличается от эффективного лагранжиана (17.4), являющегося следствием поляризации вакуума материальных полей в U^4, наличием массового члена.

Пропагатор коллективного поля кручения имеет вид

$$\Delta_{\mu\nu}(k) = \frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}}{k^2 - m^2}$$

и содержит член порядка g_0^2, отсутствующий в пропагаторе фермионного поля. Это является следствием того, что в затравочном лагранжиане нет кинетических членов кручения и связь «спин—кручение» — алгебраическая.

Наличие только нулевого постоянного решения уравнения (18.6) представляется физически вполне оправданным, поскольку отличное от нуля постоянное классическое поле кручения означало бы существование выделенного направления в пространстве-времени. Вместе с тем в теории возможны ненулевые решения уравнения (18.6) типа уединенной волны. Мы их не будем здесь приводить.

Значительно более важным представляется тот факт, что, хотя среднее поле кручения равно нулю, среднее квадрата поля кручения $\langle \breve{Q}_\mu \breve{Q}^\mu \rangle$ может быть отлично от нуля. Именно член $\langle \breve{Q}_\mu \breve{Q}^\mu \rangle$ входит в скаляр кривизны гравитационного поля и дает главный вклад в уравнение Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = m_0^2 4\pi G (-g)^{-1/2} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \langle (-g)^{1/2} \breve{Q}_\mu \breve{Q}^\mu \rangle, \quad (18.10)$$

получаемое из эффективного действия (18.5) в пределе нулевого классического фона и в пренебрежении членами порядка G^2 от поляризации вакуума спинорных полей. Учет этого вклада позволяет оценить влияние непертурбативных эффектов на эволюцию гравитирующих объектов в теории гравитации с кручением.

Из вида эффективного лагранжиана (18.5) можно лишь предположить, что среднее квадрата поля кручения отлично от нуля, однако дать его точное ренормированное значение удобнее, перейдя к другой эквивалентной системе взаимодействующих полей. Такая возможность появляется вследствие того, что четырехфермионное аксиально-векторное взаимодействие с помощью преобразований Паули—Фирца разлагается на сумму трех типов четырехфермионных взаимодействий, которые с учетом антиперестановочности полей ψ имеют вид

$$(\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2 = 2[(\bar\psi\psi)^2 + (\bar\psi i\gamma_5\psi)^2] + (\bar\psi\gamma_\mu\psi)^2.$$

Исходя из этого разложения, линеаризуем исходное четырехфермионное взаимодействие посредством введения интегрирования по трем вспомогательным полям σ, π и ω_μ:

$$\int D\bar\psi D\psi \exp\left\{ i \int \frac{\lambda_0}{2} \left[2(\bar\psi\psi)^2 + 2(\bar\psi i\gamma_5\psi)^2 + (\bar\psi\gamma_\mu\psi)^2\right] d^4x = \right.$$

$$= \int D\bar\psi D\psi D\sigma D\pi D\omega_\mu \exp\left\{ i \int d^4x g_0 \left[\bar\psi\psi\sigma + \bar\psi i\gamma_5\psi\pi + \frac{1}{2}\bar\psi\gamma_\mu\psi\omega^\mu - \right.\right.$$

$$-\frac{m_0^2}{2g_0}(\sigma^2+\pi^2+\omega_\mu\omega^\mu)\Big]\Big\}.$$

В низшем древесном приближении можно положить

$$\langle \check{Q}_\mu \check{Q}^\mu\rangle = \langle 2(\sigma^2+\pi^2)+\omega_\mu\omega^\mu\rangle. \tag{18.11}$$

Представим поля σ, π, ω_μ в виде, аналогичном (18.4):

$$\sigma=\sigma_0+\sigma', \quad \sigma_0=\langle\sigma\rangle,$$
$$\pi=\pi_0+\pi', \quad \pi_0=\langle\pi\rangle,$$
$$\omega_\mu=\omega_\mu{}^0+\omega_\mu{}', \quad \omega_\mu{}^0=\langle\omega_\mu\rangle,$$

где σ_0, π_0 и $\omega_\mu{}^0$ — средние поля, уравнения для нахождения которых имеют вид, подобный (18.7):

$$m_0^2 = i\,\frac{g_0^2}{4\pi^2}\,\mathrm{tr}\int\frac{d^4k}{\Delta_0^2-(k-n)^2}, \tag{18.12а}$$

$$m_0^2 n_\mu = i\,\frac{g_0^2}{8\pi^4}\,\mathrm{tr}\int\frac{d^4k((k-n)^\alpha\gamma_\alpha-\Delta_0)\gamma_\mu}{\Delta_0^2-(k-n)^2}, \tag{18.12б}$$

где $\Delta_0^2=g_0^2(\sigma_0^2+\pi_0^2)$, $\qquad n_\mu=g_0\omega_\mu^0/\sqrt{2}$.

Решением уравнения (18.12б), как и (18.7), является $\omega_\mu{}^0=0$. В то же время из (18.12а) после вычисления интеграла с помощью размерной техники получим уравнение для

$$\frac{m_0^2}{g_0^2}=\frac{\Delta_0^2}{4\pi^2}\left(\frac{2}{n-4}-\ln\frac{\Delta_0^2}{\mu^2}-c+1\right),$$

которое имеет ненулевое решение. Подставив это решение в выражение (18.11), найдем

$$\langle\check{Q}_\mu\check{Q}^\mu\rangle = 2\Delta_0^2 + \text{радиационные поправки},$$

т. е. среднее квадрата поля кручения отлично от нуля.

Ограничиваясь членом $2\Delta_0^2$, подставим полученное значение $\langle\check{Q}_\mu\check{Q}^\mu\rangle$ в уравнение Эйнштейна (18.10). Его решение будет описывать пространство де Ситтера с постоянной положительной кривизной $R=2\pi m_0^2\Delta_0^2 G$, которая определяется средним значением квадрата поля кручения. Это говорит о том, что при низких энергиях теория гравитации с кручением вблизи точки минимума энергии системы эквивалентна эйнштейновской теории гравитации с космологическим членом, который есть следствие спин-спинового гравитационного взаимодействия. В области высоких энергий начинают появляться волны кручения, и эффективной геометрией будет геометрия Римана—Картана.

В заключение отметим, что, описывая кручение как коллективное поле, необходимо выяснить, к какому из двух типов коллективных квазичастиц — плазмонам или куперовским парам — принадлежат кванты поля кручения — тордионы. Хотя проследить явно динамику образования связанных состояний не удается, а именно построение такой динамики и было бы ответом на поставленный вопрос, можно косвенными методами установить по наличию фазового перехода второго рода в нашей модели, что коллективное поле кручение будет образовывать конденсат типа конденсата куперовских пар. Это позволяет надеяться, что в теории взаимодействия кручения с фермионами можно ожидать появления вихрей кручения, явления типа сверхпроводимости и аналога эффекта Мейснера, что уже качественно обсуждалось в работах [24, 238].

Глава VI

МОДЕЛИ С ДИНАМИЧЕСКИМ КРУЧЕНИЕМ

На примере поляризации вакуума спинорного поля в пространстве U^4 мы убедились, что наиболее общий гравитационный лагранжиан должен включать члены, квадратичные по кривизне и четвертой степени по кручению. Соответствующие уравнения поля будут уравнениями четвертого порядка для компонент метрического тензора и, в отличие от теории Эйнштейна—Картана, дифференциальными уравнениями второго порядка для компонент тензора кручения, т. е. взаимодействие «спин—кручение» — динамическое.

Модели теории тяготения, лагранжиан которых содержит квадрат тензора кривизны, в рамках эйнштейновской теории появились впервые для разрешения проблемы сингулярностей [223—225], поскольку рядом авторов [248, 227, 226] была высказана гипотеза, что такого рода члены могут дать условия регулярного перехода от сжатия к расширению. Указанные добавки к гильберт-эйнштейновскому действию можно также обосновать за счет квантового эффекта поляризации вакуума на фоне классической метрики, как мы уже подчеркивали в § 17.

В калибровочной трактовке гравитационного поля появление лагранжианов, квадратичных по кривизне, вполне естественно, поскольку независимыми динамическими переменными в такой теории, как мы уже отмечали, являются тетрады и коэффициенты связности. Напряженностями этих полей будут 2-форма кривизны

$$F_{\mu\nu ab}=\partial_\mu\Gamma_{\nu ab}-\partial_\nu\Gamma_{\mu ab}+\Gamma_{\mu ac}\Gamma_\nu{}^c{}_b-\Gamma_{\nu ac}\Gamma_\mu{}^c{}_b \tag{VI.1}$$

и 2-форма кручения

$$Q_{a\mu\nu}=\partial_\nu h_{\mu a}-\partial_\mu h_{\nu a}+\Gamma_{\mu ab}h^b_\nu-\Gamma_{\nu ab}\,h^b_\mu\,. \tag{VI.2}$$

Поэтому понятно, что в формализме первого порядка (т. е. если $h_\mu{}^b$ и $\Gamma_{\mu ab}$ независимы) динамические уравнения для тетрад и связности можно получить только из лагранжианов типа F^2 и Q^2. Теория Эйнштейна—Картана, в которой в качестве гравитационного лагранжиана выбран скаляр кривизны пространства U^4, является в этом смысле вырожденной теорией и в качестве минимального калибровочного расширения ОТО неудовлетворительна с точки зрения подхода к связности гравитационного поля как к янг-миллсовскому потенциалу [155]. Однако скаляр кривизны необходимо включать в общий лагранжиан для того, чтобы обеспечить соответствие с эйнштейновской гравитацией.

Наличие различных подходов в калибровочной теории гравитации (см. гл. III), а также неоднозначность в выборе лагранжиана (последняя связана с большим набором скалярных величин типа F^2, Q^2 и Q^4) требуют сопоставления различных вариантов теории и отыскания такой теории, которая приводила бы к наиболее удовлетворительным физическим следствиям.

Во главу угла анализа различных вариантов необходимо, по нашему мнению, поставить следующие принципы.

1. В отсутствие частиц со спином теория должна соответствовать ОТО, по крайней мере в некотором порядке постньютоновского приближения.

2. В теории должны отсутствовать сингулярности или существовать условия для остановки коллапса.

3. Теория должна быть ренормируемой и унитарной.

Заранее скажем, что нам пока не известна какая-либо модель, которая полностью удовлетворяла бы этим требованиям.

Здесь мы обсудим точные решения в моделях с динамическим кручением и спектр частиц в них. Последнее важно для нахождения калибровочных условий, которые приводили бы к отсутствию нефизических состояний в теории.

Рассмотрим точное вакуумное решение пуанкаре-калибровочной теории гравитации предложенной Хелем с сотрудниками [146]. Лагранжиан такой теории был выбран в виде

$$L_g = h\left\{\Lambda + \frac{1}{l^2}\left[\frac{d}{2\chi}F + \frac{1}{4}Q_{\gamma\alpha\beta}\left(d_1Q^{\gamma\alpha\beta} + d_2Q^{\alpha\beta\gamma} + d_3g^{\gamma\beta}Q^{\lambda\alpha}_{\lambda}\right)\right] + \frac{1}{4k}F_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[F^{\alpha\beta\gamma\delta} + f_1F^{\alpha\gamma\beta\delta} + f_2F^{\gamma\delta\alpha\beta} + f_3g^{\alpha\delta}F^{\beta\gamma\mu}_{\mu} + f_4g^{\alpha\delta}F^{\gamma\beta\mu}_{\mu} + f_5g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]\right\}, \qquad \text{(VI.3)}$$

где $h=\det(h_\mu{}^a)$, $F=h^{\mu a}h^{\nu b}F_{\mu\nu ab}$; χ, l, Λ, k, d_i и f_j — произвольные константы. Этот лагранжиан в пространстве абсолютного параллелизма эквивалентен гильберт-эйнштейновскому, если $d=1/2$, $d_2=-1$, $d_3=2$, Λ и все f_j равны нулю, и приводит с точностью до четвертого порядка в постньютоновском приближении к результатам эйнштейновской теории, если $d_2=0$, а все остальные константы такие же, как и в предыдущем случае.

Выпишем лагранжиан, соответствующий последнему случаю, поскольку он наиболее близок к янг-миллсовскому виду

$$L = -\frac{1}{4k}F_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{8l}\left[-Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\alpha\beta\gamma} + 2Q^{\lambda}_{\alpha\lambda}Q^{\sigma\alpha}_{\sigma}\right]. \qquad \text{(VI.4)}$$

При равном нулю кручении этот лагранжиан переходит в лагранжиан с квадратичными по кривизне пространства V^4 членами, который в квантовой гравитации оказывается ренормируемым, но не унитарным [241].

Уравнения поля, получаемые варьированием (VI.4) по тетрадам и кручению с учетом (VI.2), имеют вид

$$\frac{1}{8l^2}\Big[\nabla_\chi Q_\alpha{}^{\beta\chi} + \nabla_\alpha Q^\lambda{}_\lambda{}^\beta + \frac{1}{2}Q^\beta{}_{\mu\nu}Q_\alpha{}^{\mu\nu} - Q^{\nu\mu\beta}Q_{\nu\mu\alpha} -$$

$$- Q\,{}_{\gamma\nu}Q_\alpha{}^{\beta\nu} - \delta^\beta{}_\alpha\nabla_\nu Q^\lambda{}_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4}\delta^\beta_\alpha Q^{\sigma\mu\nu}Q_{\sigma\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha Q^\nu{}_{\lambda\nu}Q^\mu{}_\mu{}^\lambda +$$

$$+ \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\delta^\beta_\alpha F^{\mu\nu\sigma\gamma}F_{\mu\nu\sigma\gamma} - F^{\sigma\chi\mu\beta}F_{\sigma\chi\mu\alpha}\right)\Big] = 0, \qquad \text{(VI.5)}$$

$$-\frac{2}{k}(\nabla_\nu F_{\alpha\beta}{}^{\gamma\nu} - \frac{1}{2}Q^\gamma{}_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} - Q^\lambda{}_{\lambda\nu}F_{\alpha\beta}{}^{\gamma\nu}) +$$

$$+ \frac{1}{2l^2}Q_\alpha{}^\gamma{}_\beta - Q_\beta{}^\gamma{}_\alpha - Q^\lambda{}_{\alpha\lambda}\delta^\gamma_\beta + Q^\lambda{}_{\lambda\beta}\delta^\gamma_\alpha) = 0, \qquad \text{(VI.6)}$$

где $\nabla = \partial - \{\ \}$.

Если положить в (VI.4)—(VI.6) кручение равным нулю, то лагранжиан (VI.4) совпадет с эддингтоновским лагранжианом [261], но уравнения (VI.5, 6) не будут тождественны уравнениям, полученным из эддингтоновского лагранжиана, а именно:

$$F^{\alpha\mu\nu\sigma}(g)F_{\alpha\mu\nu\lambda}(g) - {}^1/_4\delta_\lambda{}^\sigma F^{\alpha\mu\nu\beta}(g)F_{\alpha\mu\nu\beta}(g) = 0, \quad \nabla_\nu F_{\alpha\beta}{}^{\gamma\nu} = 0.$$

Следует подчеркнуть, что решения этих уравнений [262] попадают в класс решений для эддингтоновского варианта гравитации [261], но не наоборот. Так что уже на этом примере видно существенное различие в предсказаниях аффинно-метрической и метрической теорий гравитации. Полная классификация таких решений была сделана в работе [262].

Рассмотрим теперь статические решения уравнений (VI.5, 6) в случае сферической симметрии. Метрика сферически симметричного пространства была приведена в § 11. Там же мы определили набор допустимых компонент тензора кручения. Беклером [262] было найдено решение уравнений (VI. 5, 6) в этом случае при условии

$$Q_{101} = Q_{001} = -Q_{303} = -Q_{202} = Q_{212} = -Q_{313} = \Phi(r).$$

Выпишем эти решения. После интеграции (VI.5, 6) найдем

$$\Phi(r) = -\frac{\alpha}{r^2(1 - 2\alpha/r + kr^2/4l^2)^{1/2}},$$

где α — постоянная интегрирования, а компоненты метрики имеют вид

$$\exp\lambda(r) = (1 - 2\alpha/r + kr^2/4l^2).$$

Найденное решение описывает пространство U^4 постоянной кривизны с $R = -3k/l^2$, метрика которого есть метрика Шварцшильда—де Ситтера. Таким образом, можно сказать, что эта теория эквивалентна теории Эйнштейна с космологическим членом $\Lambda=3k/4l^2$. Ньютоновский потенциал

$$\varphi=-\frac{a}{r}+\frac{k}{8l^2}r^2$$

является запирающим, что можно использовать в теории элементарных частиц [146]. Он совпадает с потенциалом ОТО, если $k=0$.

Нестатические космологические решения исследовались Кудиным и Минкевичем [263, 264]. В однородной изотропной космологии, заполненной идеальной жидкостью, с метрикой

$$ds^2=dt^2-R^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2d^2\theta+r^2\sin^2\theta d^2\varphi\right\}$$

и кручением

$$Q^1{}_{10}=Q^2{}_{20}=Q^3{}_{30}=q_1(t),\qquad Q_{123}=Q_{231}=Q_{312}=$$
$$=q_2(t)R^3(t)r^2(1-kr^2)^{1/2}\sin\theta$$

показано, что при выполнении условий

$$2f_1+4f_3+f_4+f_5=0,\quad 2f_1-f_2=0,\quad q_2(t)=0$$

существуют предельная плотность материи и регулярное по метрике решение.

Таким образом, видно, что модели с динамическим кручением приводят к интересным классическим решениям.

Рассмотрим эти модели с квантовой точки зрения. В отсутствие кручения модели с квадратичными лагранжианами оказались, как мы уже отмечали, ренормируемыми, хотя и не унитарными. Причина их перенормируемости, по-видимому, кроется в меньшей степени расходимости пропагатора метрики по сравнению с теориями, включающими в себя только производные первого порядка. Действительно, сравним, например, расходимости однопетлевых диаграмм, которым отвечают $[D_2(p^2)]^2$ и $[D_4(p^2)]^2$, где первый пропагатор подчиняется уравнению второго порядка, а второй — четвертого. Очевидно, что в первом случае расходимость будет логарифмической, во втором ее не будет вообще в ультрафиолетовой области.

Приведем простой пример скалярного поля в плоском пространстве-времени. Пусть скалярное поле подчиняется уравнению

$$(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\varphi=0.$$

Обычный скалярный пропагатор в импульсном представлении будет

$$D_2(p^2)=\frac{1}{p^2-m^2}.$$

Скалярное поле имеет одну степень свободы и описывает в данном случае частицы одного сорта — скаляроны массы m.

Пусть теперь скалярное поле подчиняется уравнению

$$\frac{1}{b}\{(\partial_\mu\partial^\mu)^2+a\partial_\mu\partial^\mu+c\}\varphi=0,$$

которое выводится из действия

$$S=\frac{1}{2b}\int d^4x\{(\partial_\mu\partial_\nu\varphi)^2-a(\partial_\mu\varphi)^2+c\varphi^2\}.$$

Нетрудно убедиться, что, если $b=m_1^2-m_2^2$, $a=m_1^2+m_2^2$ и $c=m_1^2m_2^2$, уравнение, которому подчиняется пропагатор скалярного поля, будет

$$\frac{1}{m_2^2-m_1^2}\{\partial_\mu\partial^\mu-m_1^2\}\{\partial_\nu\partial^\nu+m_2^2\}D_4(x,y)=\delta(x,y).$$

Соответственно этому $D_4(p^2)$ можно представить в виде

$$D_4(p^2)=\frac{1}{p^2+m_2^2}-\frac{1}{p^2-m_1^2}=D_2^{(m_2)}(p^2)-D_2^{(m_1)}(p^2).$$

Такая теория содержит два сорта скалярных частиц — массы m_1 и мнимой массы im_2.

Изучим структуру расходимостей в этих двух примерах.

$$D_2(x-y)=(2\pi)^{-4}\int d^4p\,\frac{\exp(-ip(x-y))}{p^2-m^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\left\{(x-y)^{-2}+m^2\left[c-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}m^2(x-y)\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2}+\frac{m^2(x-y)^2}{16}+\dots\right]-m^2\left[\frac{1}{4}+\frac{m^2(x-y)}{8}\left(\frac{5}{2}+\dots\right)\right]\right\}.$$

На световом конусе $x\to y$ этот пропагатор расходится квадратично и логарифмически. В то же время пропагатор

$$D_4(x-y)=D_2{}^{(m_2)}(x-y)-D_2{}^{(m_1)}(x-y)$$

будет расходиться только логарифмически, так как с учетом выражения для $D_2(x-y)$

$$D_4(x-y)=D_2{}^{(m_2)}(x-y)-D_2{}^{(m_1)}(x-y)=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\left\{m_2^2\left[c+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}m_2^2(x-y)^2+\dots\right)\times\left[\frac{1}{2}+\dots\right]\right]-\right.$$

$$\left.-m_1^2\left[c+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}m_1^2(x-y)^2+\dots\right)\times\left[\frac{1}{2}+\dots\right]\right]\right\},$$

а в случае $m_1=m_2$ будет вообще свободен от расходимостей.

Таким образом, теории с высшими производными обладают лучшей сходимостью в ультрафиолетовой области (или на малых расстояниях). Однако в пропагаторе четвертого порядка, являющимся разностью двух пропагаторов второго порядка, один соответствует физической частице, а второй описывает тахион (анализ тахионов см. у Я. П. Терлецкого, Э. Реками и др. [281]). В теориях с производными более высоких порядков, например для

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m_1^2)(\partial_\nu \partial^\nu - m_2^2)(\partial_\alpha \partial^\alpha - m_3^2)\varphi = 0,$$

будет два физических состояния и одно тахионное.

Значительно более сложная картина наблюдается, если поле φ является тензорным или векторным. Кроме частиц различной массы в такой теории будут присутствовать еще и частицы различных спинов и спиральности. Эта проблема еще более усложняется в теории гравитации с кручением присутствием двух тензорных полей: тензорного поля второго ранга — метрики — и тензорного поля третьего ранга — кручения. Изучение этой проблемы важно для квантовой теории и правильного выбора калибровочных условий с целью исключения из рассмотрения нефизических степеней свободы.

Наличие нефизических степеней свободы, вероятно, является неотъемлемым свойством калибровочных теорий. В качестве простейшего примера можно привести электродинамику, которая описывается вектор-потенциалом A_μ, имеющим четыре компоненты; на самом деле физических степеней свободы только две. Аналогично $g_{\mu\nu}$ имеет десять компонент, но только две из них динамические.

Тензор кручения можно разбить на сумму трех частей — следовую, бесследовую и псевдослед (см. (11.3)):

$$\tilde{Q}^\lambda{}_{\mu\nu} = (\tilde{P}Q)^\lambda{}_{\mu\nu}, \quad Q_\nu = (PQ)_\nu, \quad \check{Q}_\alpha = (\check{P}Q)_\alpha,$$

где $\tilde{P}$, P и $\check{P}$ — спиновые проекционные операторы следующего вида:

$$\tilde{P}^{\alpha'\beta'\lambda'}_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{6}\{2\eta_{\alpha\alpha'}\eta_{\beta\beta'}\eta_{\lambda\lambda'} - \eta_{\lambda\alpha'}\eta_{\alpha\beta'}\eta_{\beta\lambda'} - \eta_{\beta\alpha'}\eta_{\alpha\beta'}\eta_{\lambda\lambda'} -$$

$$- (\eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\beta'} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\lambda\beta'})\eta_{\alpha'\lambda'} - (\beta' \leftrightarrow \lambda')\},$$

$$P^{\alpha'\beta'\lambda'}_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{6}\{(\eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\beta'} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\lambda\beta'})\eta_{\alpha'\lambda'} - (\alpha' \leftrightarrow \beta')\},$$

$$\check{P}^{\alpha'\beta'\lambda'}_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{6}\{\eta_{\alpha\alpha'}\eta_{\beta\beta'}\eta_{\lambda\lambda'} + \eta_{\lambda\alpha'}\eta_{\beta\lambda'}\eta_{\alpha\beta'} + \eta_{\beta\alpha'}\eta_{\alpha\lambda'}\eta_{\lambda\beta'} - (\alpha \leftrightarrow \beta)\}.$$

Тетрадное поле можно также представить в виде следа и бесследовой части

$$h_{ab} = (\tilde{p}h)_{ab} + \eta_{ab}(ph),$$

где

$$\tilde{p}^{a'b'}_{ab} = \frac{1}{2}(\eta_{a'b}\eta_{ab'} - \eta_{aa'}\eta_{bb'}), \quad p_{ab} = \eta_{ab}.$$

Рассмотрим спектр частиц, описывающих различные составляющие поля кручения, для чего введем проекционные операторы следующего вида (в импульсном пространстве):

$$\theta_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-k_\mu k^\nu/k^2, \qquad \omega_{\mu\nu}=k_\mu k_\nu/k^2,$$

где $\theta_{\mu\nu}$ соответствует частице спина 1^+ либо 1^-, $\omega_{\mu\nu}$ — частице спина 0^+ либо 0^-. В P заменим $\eta_{\mu\nu}$ на $(\theta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu})$ и $\eta_{\alpha\alpha'}$ на $(\theta_{\alpha\alpha'}+$ $+\omega_{\alpha\alpha'})$. Тогда нетрудно проверить, что

$$P=P(1^-)+P(0^+)$$

является оператором выделения из следовой части состояний спина единица и ноль. Это подтверждается выполнением условия

$$\frac{2}{3}(P(1^-)+P(0^+))^{\alpha'\beta'\lambda'}_{\alpha\beta\lambda}(\delta^\alpha_{\beta'}Q_{\lambda'}-\delta^\alpha_{\lambda'}Q_{\beta'})=\frac{2}{3}(\delta^{\alpha'}_\beta Q_\lambda-\delta^{\alpha'}_\lambda Q_\beta).$$

Псевдовекторная часть кручения также содержит два сорта частиц — спина 1^+ и 0^-. Соответствующими проекционными операторами будут

$$\breve{P}(1+)^{\alpha'\beta'\lambda'}_{\alpha\beta\lambda}=\frac{1}{6}\{\delta^{\alpha'}_\alpha\delta^{\beta'}_\beta\omega^{\lambda'}_\lambda+\delta^{\alpha'}_\beta\delta^{\beta'}_\lambda\omega^{\lambda'}_\alpha+\delta^{\alpha'}_\lambda\delta^{\beta'}_\alpha\omega^{\lambda'}_\beta-(\alpha'\leftrightarrow\beta')\},$$

$$\breve{P}(0+)^{\alpha'\beta'\lambda'}_{\alpha\beta\lambda}=\theta^{\alpha'}_\gamma\theta^{\beta'}_\nu\theta^{\lambda'}_\mu\breve{P}^{\gamma\nu\mu}_{\alpha\beta\lambda}.$$

Проверить то, что псевдовекторная часть описывает частицы именно такого сорта, можно прямым вычислением

$$[\breve{P}(0^-)^{\alpha\beta\lambda}_{\alpha'\beta'\lambda'}+\breve{P}(1+)^{\alpha\beta\lambda}_{\alpha'\beta'\lambda'}]\,\varepsilon^{\alpha'\beta'\lambda'\gamma'}\breve{Q}_{\gamma'}=\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\nu}\breve{Q}_\nu.$$

Наконец бесследовая часть кручения содержит частицы спина 2^+, 2^-, 1^+, 1^-. Соответствующими проекционными операторами будут

$$\tilde{P}^{\alpha\beta\lambda}_{\alpha'\beta'\lambda'}(2^-)=\theta^\alpha_{\alpha'}\theta^\beta_{\beta'}\theta^\lambda_{\lambda'}-\frac{1}{2}\theta_{\alpha'\beta'}\theta^{\alpha\beta}\theta^\lambda_{\lambda'}-\frac{1}{2}\theta_{\alpha'\lambda'}\theta^{\alpha\lambda}\theta^\beta_{\beta'},$$

$$\tilde{P}^{\alpha\beta\lambda}_{\alpha'\beta'\lambda'}(2+)=\frac{1}{2}\{\theta^{\alpha'}_\alpha\theta^\beta_{\beta'}\omega^\lambda_{\lambda'}+\theta^\alpha_{\alpha'}\omega^\beta_{\beta'}\theta^\lambda_{\lambda'}+\theta^\alpha_{\beta'}\theta^\beta_{\alpha'}\omega^\lambda_{\lambda'}+\theta^\alpha_{\lambda'}\theta^\beta_{\beta'}\omega^\lambda_{\lambda'}\},$$

$$\tilde{P}^{\alpha\beta\lambda}_{\alpha'\beta'\lambda'}(1+)=\frac{1}{2}\{(\theta\theta\omega)_{\lambda'\alpha'\beta'}+(\theta\omega\theta)_{\lambda'\alpha'\beta'}-(\theta\theta\omega)_{\alpha'\lambda'\beta'}-$$

$$-(\theta\omega\theta)_{\beta'\alpha'\lambda'}+2(\omega\theta\theta)_{\lambda'\alpha'\beta'}\},$$

$$\tilde{P}^{\alpha\beta\lambda}_{\alpha'\beta'\lambda'}(1^-)=(\omega\theta\omega+\omega\omega\theta)_{\lambda'\alpha'\beta'}+\frac{1}{2}\theta_{\lambda'\alpha'}\theta^\lambda_\alpha\theta^\beta_{\beta'}+\frac{1}{2}\theta_{\lambda'\beta'}\theta^{\lambda\beta}\theta^\alpha_\alpha.$$

Тетрадное поле описывает частицы спины 2^+, 1^+, 1^-, 0^+, 0^-

$$h_{ab}=\{p(2^+)+p(1^+)+p(1^-)+p(0^+)+p(0^-)\}^{a'b'}_{ba}h_{b'b'},$$

где $p(\ )$ построены из проекционных операторов, как обычно, заменой $\eta_{\alpha\alpha'}$ на $(\theta_{\alpha\alpha'}+\omega_{\alpha\alpha'})$ и η_{ab} на $(\theta_{ab}+\omega_{ab})$.

На вышеизложенном анализе не заканчивается решение задачи о спектре частиц, возникающих в теории. Следующим этапом является исследование конкретных лагранжианов с целью построения таких, которые были бы свободны от тахионов, а также выявления всех частиц, являющихся переносчиками гравитационного взаимодействия в теории гравитации с кручением. В зависимости от того, будут частицы — переносчики взаимодействия — массивными или безмассовыми, взаимодействие соответственно будет дальнодействующим, либо короткодействующим. С другой стороны, существует надежда на то, что из подобных соображений и известных эмпирических оценок, возможно, удастся определить область, в которой гравитационные силы начинают играть роль в микромире.

Изучение спектров частиц в квадратичных теориях изложенным методом было проведено в ряде работ [266—270]. Были получены ограничения на константы допустимых лагранжианов из условия отсутствия нефизических полюсов в пропагаторах частиц. В частности, оказалось, что рассмотренная нами модель с лагранжианом (VI.4), приводящая к несингулярным решениям и удовлетворяющая принципу соответствия с ОТО в пределе малой плотности вещества, неудовлетворительна с квантовой точки зрения, так как содержит нефизический полюс в пропагаторе [269].

К числу перспективных в смысле квантования были отнесены пять моделей [269], которые получаются из (VI.3) специальным выбором констант и не содержат нефизических полюсов в пропагаторе. Однако это еще не гарантирует, что они будут ренормируемыми теориями. Исследование ультрафиолетовой сходимости таких моделей остается важной, но пока не решенной задачей.

Проблематичным в калибровочной теории гравитации является вопрос и о том, какие динамические переменные следует квантовать. Если не накладывать условие метричности, то такими переменными будут метрика и связность, если разрешить условие метричности заранее, то — метрика и кручение. Возможно, что в силу трактовки метрического поля как хиггс-голдстоуновского (см. § 7) гравитационное поле ОТО вообще не следует квантовать, а рассматривать как классический (конденсатный?) фон.

Рекомендуемая литература [95, 98, 271, 105, 90].

В книге все топологические пространства считаются паракомпактными топологическими многообразиями.

Векторные поля. Векторное поле τ на многообразии X определяется как глобальное сечение касательного расслоения $T(X)$ над X. Векторное поле называется неособым, если оно нигде не обращается в 0.

Неособое векторное поле $\tau=\tau^\mu t_\mu$ на X, где t_μ — касательные векторы к координатным линиям x^μ в X, определяет однопараметрическую группу Ли G_τ отображений $g(s):x\to x(s, x)$, где $x(s, x)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$dx^\mu/ds=\tau^\mu(x)$$

с начальным условием $x(0, x)=x$. Отображение $g(s)$ является диффеоморфизмом многообразия X, а $T(g(s))$ — касательное отображение к $g(s)$ — изоморфизмом касательного и ассоциированных с ним тензорных расслоений. Представление генератора ∂_τ группы G_τ на сечениях этих расслоений имеет вид

$$\partial_\tau: T^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\nu_2\ldots\nu_p}(x)\to\tau^\alpha\partial_\alpha T^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\nu_2\ldots\nu_p}-(\partial_\alpha\tau^{\mu_1})\,T^{\alpha\mu_2\ldots\mu_q}_{\nu_1\ldots\nu_p}-\ldots-$$

$$-(\partial_\alpha\tau^{\mu_q})\,T^{\mu_1\ldots\alpha}_{\nu_1\ldots\nu_p}+(\partial_{\nu_1}\tau^\alpha)\,T^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\alpha\nu_2\ldots\nu_p}+\ldots+(\partial_{\nu_p}\tau^\alpha)\,T^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\nu_1\ldots\alpha} \quad (\text{Г.1})$$

и называется дифференцированием, или производной Ли вдоль векторного поля τ.

Рассмотрим группу Ли G, эффективно действующую справа в многообразии X (т. е. для любого элемента $g\in G$ имеется $x\in X$ такое, что $gx\neq x$). Всякому ее генератору I можно поставить в соответствие векторное поле

$$\widetilde{\tau}_I(x)=\frac{d}{ds}\exp(sI)(x)|_{s=0},$$

называемое фундаментальным векторным полем, такое, что $\partial_{\widetilde{\tau}_I}=I$.

Сопоставление $\tau\leftrightarrow\partial_\tau$ приводит к отождествлению векторных полей и дифференцирований, и нередко векторные поля определяются именно как дифференцирования. В частности, $t_\mu\leftrightarrow\partial_\mu$.

Обозначим через $D_\infty(X)$ линейное пространство всех векторных полей класса C^∞ на многообразии X. Операция (Г.1) на $D_\infty(X)$ сводится к коммутатору векторных полей

$$[\tau,\tau']=(\tau^\mu\partial_\mu\tau^{\nu\prime}-\tau^{\mu\prime}\partial_\mu\tau^\nu)\,\partial_\nu,$$

который также является векторным полем и задает на $D_\infty(X)$

структуру алгебры Ли. В частности, если G — группа Ли, действующая эффективно справа в X, сопоставление $I \to \tau_I \to \partial_{\tau_I} = -I$ определяет изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{G}$ на подалгебру в $D_\infty(X)$.

Внешние дифференциальные формы. Пусть Ω^q векторное пространство q раз ковариантных кососимметричных тензоров на R^n ($\Omega^{q>n} = \varnothing$). Рассмотрим ассоциированное с $T(X)$ расслоение λ_{Ω^q} с типичным слоем Ω^q. Его дифференцируемые сечения называются внешними дифференциальными формами степени q на X; 0-формами считаются вещественные функции на X.

Обозначим через $\Omega^q(X)$ векторное пространство внешних дифференциальных q-форм на X и определим прямую сумму $\Omega(X) = \bigoplus^{q} \Omega^q(X)$. На $\Omega(X)$ может быть задана структура градуированной алгебры введением операции $\wedge$ внешнего произведения форм, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) если $\sigma \in \Omega^p$, $\sigma' \in \Omega^q$, то $\sigma \wedge \sigma' \in \Omega^{p+q}$;

б) $\sigma \wedge \sigma' = (-1)^{pq} \sigma' \wedge \sigma$;

в) $(\sigma + \sigma') \wedge \sigma'' = \sigma \wedge \sigma'' + \sigma' \wedge \sigma''$.

Всякое пространство $\Omega^q(X)$ можно представить как внешнее произведение пространств 1-форм $\Omega^q(X) = \overset{q}{\wedge}\, \Omega^1(X)$. Пусть $\{\sigma^\mu\}$ — базис $\Omega^1(X)$, например, $\sigma^\mu = dx^\mu$. Тогда базис пространства Ω^q может быть образован формами $\{\sigma^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \sigma^{\mu_q}\}$, где выбрано какое-либо одно упорядочение набора индексов $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$. Операция $\wedge$ в таком базисе имеет вид

$$\sigma \wedge \sigma' = (a_{\mu_1 \ldots \mu_q} \sigma^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \sigma^{\mu_q}) \wedge (a'_{\nu_1 \ldots \nu_p} \sigma^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \sigma^{\nu_p}) =$$

$$= \sum_{\substack{(\mu_1, \ldots, \mu_q) \\ (\nu, \ldots, \nu_p)}}^{*} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} \mu_1 \ldots \mu_q \nu_1 \ldots \nu_p \\ \alpha_1 \ldots \alpha_{q+p} \end{pmatrix} a_{\mu_1 \ldots \mu_q} a'_{\nu_1 \ldots \nu_p} \times \sigma^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \sigma^{\alpha_{q+p}},$$

где суммирование производится по упорядоченным наборам $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$, $(\nu_1, \ldots, \nu_p)$; $\operatorname{sgn}(\ ) = 0$, если нижняя строка в скобке не является перестановкой верхней строки; $\operatorname{sgn}(\ ) = 1$, если перестановка четна; $\operatorname{sgn}(\ ) = -1$, если перестановка нечетна.

В градуированной алгебре $\Omega(X^n)$ определен оператор Ходжа $*$ перехода к сопряженной форме

$$*(\sigma^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \sigma^{\mu_q}) = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ \mu_1 \ldots \mu_q \nu_1 \ldots \nu_{n-q} \end{pmatrix} \sigma^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \sigma^{\nu_{n-q}}.$$

Этот оператор обладает следующими свойствами:

$$*\sigma \in \Omega^{n-p}, \qquad \sigma \in \Omega^p;$$

$$**\sigma = (1)^{p(n-p)} \sigma, \qquad \sigma \in \Omega^p;$$

$$\sigma \wedge *\sigma' = \sigma' \wedge *\sigma, \qquad \sigma, \sigma' \in \Omega^p.$$

В алгебре $\Omega(X)$ определена операция внешнего дифференцирования

$$d:\Omega^p\to\Omega^{p+1}$$

со следующими свойствами:

$$dd\equiv 0,$$

$$d(\sigma\wedge\sigma')=d\sigma\wedge\sigma'+(-1)^p\sigma\wedge d\sigma',\quad \sigma\in\Omega^p.$$

Форма σ называется замкнутой, если $d\sigma=0$, и точной, если существует форма σ', что $\sigma'=d\sigma'$.

Форма $dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p}$ определяет меру на подмногообразии Y многообразия X^n с локальными координатами

$$x^{\mu_{p+1}}=\ldots=x^{\mu_n}=0,$$

и, если Y ориентируемо и компактно, существует интеграл p-формы по подмногообразию Y. При этом справедлива формула Стокса

$$\int\limits_{\partial Y}\sigma=\int\limits_{Y}d\sigma,$$

где ∂Y обозначает границу Y в X.

Определяется также внешние дифференциальные формы со значениями в векторном расслоении λ. Они описываются как сечения расслоения $\lambda_\Omega\otimes\lambda$; 0-формами считаются сечения самого расслоения λ.

В частности, определим на многообразии X каноническую 1-форму θ со значениями в касательном расслоении $T(X)$, задавая ее в голономном атласе как $\theta=\partial_\mu dx^\mu$. Она соответствует тождественному отображению касательных пространств T_x в себя в каждой точке $x\in X$.

Касательное пространство. Пусть X — n-мерное многообразие, и x — точка в X. Рассмотрим пары (c, v), где $c=(U, \chi)$ — карта на X, накрывающая x, и v — элемент R^n. Две такие пары (c, v) и (c', v') называются эквивалентными, если матрица Якоби $\partial(\chi'\chi^{-1})$ отображения $(\chi'\chi^{-1})$ в точке $\chi(x)$ преобразует v в v'. Получаем, таким образом, отношение эквивалентности между парами (c, v). Класс эквивалентных пар (c, v) называется касательным вектором к X в точке x. Множество касательных векторов к X в точке x образует касательное пространство T_x, которое наделено структурой пространства R^n посредством отображения θ_c из R^n в T_x, ставящего в соответствие вектору $v\in R^n$ касательный вектор, представляемый парой (c, v).

Морфизмы многообразий индуцируют морфизмы касательных пространств к ним. Пусть $f: X\to X'$, и x — точка в X. Рассмотрим карту $c=(U, \chi)$ на X, такую, что $x\in U$, и карту $c'=(U', \chi')$ на X', такую, что $f(U)=U'$. Отображение $\chi f\chi^{-1}$ является дифференцируемым, и его дифференциал $d(\chi' f\chi^{-1})$ в точке $\chi(x)$ определяет непрерывное линейное отображение

$\theta_{c'} d(\chi' f \chi^{-1}) \theta_c^{-1}$ из $T_x(X)$ в $T_{f(x)}(X')$. Оно не зависит от выбора карт, обозначается $T(f)$ и называется касательным отображением к f. В частности, $\theta_c^{-1} = T(\chi)$.

Расслоение. Расслоением называется тройка $\lambda = (Q, \pi, X)$ топологических пространств Q, X и непрерывной проекции $\pi: Q \to X$. Пространство Q называется тотальным (расслоенным) пространством $\mathrm{tl}\,\lambda$ расслоения λ, а X — его базой $\mathrm{bs}\,\lambda$, которая будет предполагаться связной. Подпространство $V_x = \pi^{-1}(x)$ тотального пространства называется слоем расслоения над точкой $x \in X$.

Морфизм расслоения $\lambda = (Q, \pi, X)$ в расслоение $\lambda' = (Q', \pi', X')$ задается парой непрерывных отображений $F: Q \to Q'$, $f: X \to X'$ таких, что $F: V_x \to V'_{f(x)}$, т. е. F является послойным отображением. Отображение (F, f) называется изоморфизмом расслоений, если F и f гомеоморфизмы, и эквивалентностью, если $f = \mathrm{Id}\,X$.

Сечением φ расслоения $\lambda = (Q, \pi, X)$ над открытым множеством $U \subset X$ называется непрерывное вложение U в Q, такое, что $\pi\varphi = \mathrm{Id}\,U$ — тождественное преобразование U, т. е. всякая точка $x \in U$ отображается в некоторую точку $\varphi(x) \in V_x$ слоя над x. Сечение, заданное над всей базой X, называется глобальным.

Расслоение $\lambda = (Q, \pi, X)$ считается тривиальным, если существует топологическое пространство V такое, что Q гомеоморфно прямому произведению $X \times V$.

Расслоение $\lambda = (Q, \pi, X)$ называется локально тривиальным, если существуют такое открытое покрытие $\{U_i\}$ базы X и такое пространство V, что для всякого U_i найдется гомеоморфизм $\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \to V \times U_i$ и $\rho_{i\varkappa} = \psi_i \psi_\varkappa^{-1}$ есть гомеоморфизм V на себя для всех $x \in U_i \cap U_\varkappa$. Иными словами, существует такое открытое покрытие базы X, что сужение расслоения λ на всякое множество U_i из этого покрытия оказывается тривиальным расслоением $\gamma_i(\pi^{-1}(U_i), \pi, U_i)$, а расслоение λ в целом оказывается как бы склеенным из тривиальных расслоений λ_i посредством функций перехода $\rho_{i\varkappa}$.

Всякий слой $V_{x \in X}$ локально тривиального расслоения гомеоморфен V, называемому типичным слоем расслоения λ.

Пара (U_i, ψ_i) области U_i и морфизма ψ_i тривиализации расслоения λ называется картой расслоения, а совокупность карт $\Psi_\lambda = \{U_i, \psi_i\}$ — атласом расслоения λ с функциями перехода $\rho_{i\varkappa}$, которые удовлетворяют условиям $\rho_{ii} = \mathrm{Id}\,V$, $\rho_{i\varkappa}\rho_{\varkappa\varepsilon} = \rho_{i\varepsilon}$.

Локально тривиальное расслоение однозначно определяется набором (V, X, Ψ). При этом (V, X, Ψ) и (V, X, Ψ') определяют эквивалентные расслоения, если атласы Ψ и Ψ' эквивалентны, т. е. их объединение тоже является атласом (что означает существование функций перехода между картами из атласов Ψ и Ψ').

Локально тривиальное расслоение над стягиваемой базой тривиально.

Это позволяет атласы всех расслоений над одной и той же базой X задавать на одном и том же покрытии $\{U_i\}$, являющимся покрытием атласа Ψ_X топологического многообразия X.

Локально тривиальное расслоение всегда обладает сечением. Всякое сечение φ локально тривиального расслоения λ может быть представлено семейством V-значных функций $\{\varphi_i(x)=\psi_i(x)\varphi(x),\ x\in U_i\}$ в атласе расслоения $\Psi=\{U_i,\ \psi_i\}$ и $\varphi_i(x)=\rho_{i\varkappa}(x)\varphi_\varkappa(x),\ x\in U_i\cap U_\varkappa$.

Пусть λ — локально тривиальное расслоение, и G — топологическая группа, которая действует эффективно слева в пространстве типичного слоя V расслоения λ.

Пусть существует атлас Ψ расслоения λ, функции перехода которого $\rho_{i\varkappa}(x)$, $x\in U_i\cap U_\varkappa$, являются элементами группы $G(U_i\cap U_\varkappa)$ непрерывных отображений $U_i\cap U_\varkappa$ в G. Тогда группа G называется структурной группой расслоения λ.

Говорят, что структурная группа G расслоения λ редуцирована к своей подгруппе H, если существует атлас Ψ расслоения λ, функции перехода которого принимают значения в подгруппе H.

Структурная группа Ли G расслоения λ редуцируема к замкнутой подгруппе H тогда и только тогда, когда ассоциированное с λ расслоение на фактор-пространства G/H допускает глобальное сечение.

Структурная группа Ли всегда редуцирована к своей максимальной компактной подгруппе.

В книге все расслоения считаются локально тривиальными расслоениями со структурной группой Ли.

Расслоение ассоциированное. Расслоения λ и λ' с одними и теми же структурной группой G и базой X называются ассоциированными, если существуют атлас Ψ расслоения λ и атлас Ψ' расслоения λ' с одним и тем же набором функций перехода $\{\rho_{i\varkappa}\in G(U_i\cap U_\varkappa)\}$. Ассоциированные расслоения с одинаковыми типичными слоями эквивалентны.

Для всякого расслоения $\lambda=(V,\ G,\ X,\ \Psi)$ может быть построено ассоциированное с ним главное расслоение λ_G.

Расслоение λ с типичным слоем V, ассоциированное с главным расслоением λ_G, можно задать, определив его тотальное пространство $\mathrm{tl}\,\lambda$ как фактор-пространство $(\mathrm{tl}\,\lambda_G\times V)/G$ с действием $G\ni g:(p,\ v)\to(pg,\ g^{-1}v)$.

Для каждых $p\in\mathrm{tl}\,\lambda_G$ и $v\in V$ обозначим через $[p](v)$ образ элемента $(p,\ v)$ в $\mathrm{tl}\,\lambda$. Тогда $[p]$, $p\in\mathrm{tl}\,\lambda_G$, есть отображение из V на $V_{x=\pi(p)}$ и $[pg](v)=[p](gv)$ для $p\in\mathrm{tl}\,\lambda_G$, $v\in V$, $g\in G$. В частности, если Ψ — атлас расслоения λ_G, и $\{z_i(x)\}$ — семейство сечений λ_G, отвечающих Ψ, то отображения $[z_i(x)]: V\to V_x$, $x\in U_i$, определяют атлас на λ, эквивалентный Ψ.

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством сечений φ ассоциированного расслоения λ с типичным слоем V и множеством V-значных функций f на $\mathrm{tl}\,\lambda_G$, таких, что $f(pg)=g^{-1}f(p)$. Оно задается $\varphi(\pi(p))=[p](f(p))$.

Расслоение векторное. Расслоение, типичным слоем которого является топологическое векторное пространство V, называется векторным расслоением. Его структурная группа — группа $GL(V)$ общих линейных преобразований пространства V.

Векторное расслоение всегда имеет глобальное сечение.

Пусть $\Psi=\{U_i, \psi_i\}$ — атлас векторного расслоения, и $\{t\}$ — базис его типичного слоя V. Определим в каждом слое V_x, $x\in X$, базис $\{t(x)\}=\{\psi_i^{-1}(x)t\}$, отвечающий карте (U_i, ψ_i) атласа Ψ. Тогда всякое преобразование g типичного слоя V и индуцируемое им преобразование $g_x=\psi_i^{-1}g\psi_i$ слоя V_x над точкой $x\in X$ будут иметь один и тот же матричный вид относительно базисов $\{t\}$ и $\{\psi_i^{-1}t\}$. Если $g_i(x)$ — функции перехода к новому атласу $\Psi'=\{U_i, \psi_i'=g_i\psi_i\}$, этот переход также можно представить как преобразование базисов $\{t(x)\}\to$ $\to\{t'(x)\}=\{(\psi_i^{-1}g_i^{-1}\psi_i)t\}$.

Укажем следующие операции над векторными расслоениями над одной и той же базой X: дуальное к λ расслоение λ^* с типичным слоем V^*; сумма Уитни $\lambda\oplus\lambda'$ расслоений λ и λ' с типичным слоем $V\oplus V'$; тензорное произведение $\lambda\otimes\lambda'$ расслоений λ и λ' с типичным слоем $V\otimes V'$.

Расслоение главное. Расслоение λ_G со структурной группой G, типичным слоем которого является сама топологическая группа G, действующая на себя левыми сдвигами $L_g: G\to gG$, $g\in G$, называется главным.

На тотальном пространстве $\mathrm{tl}\,\lambda_G$ главного расслоения может быть задано действие группы G правыми сдвигами

$$Rg: \mathrm{tl}\,\lambda_G \ni p\to\psi_i(\psi_i^{-1}(p)g)=pg.$$

Оно является послойным, его вид не зависит от карты (поскольку функции перехода действуют слева), и оно является транзитивным, т. е. если $pg=p$ для некоторого $p\in\mathrm{tl}\,\lambda_G$, то $g=$ $=1_G$ — единичный элемент. База главного расслоения представляет собой фактор-пространство $\mathrm{tl}\,\lambda_G/G$ орбит группы G в $\mathrm{tl}\,\lambda_G$, а проекция π — каноническое отображение $\mathrm{tl}\,\lambda_G\to\mathrm{tl}\,\lambda_G/G$. Морфизмы тривиализации главного расслоения удовлетворяют условию $\psi_i(pg)=\psi_i(p)g$, и всякому атласу $\Psi=\{U_i, \psi_i\}$ главного расслоения можно сопоставить набор сечений $\{U_i, z_i=$ $=\psi_i^{-1}(1_G)=p(\psi_i(p))^{-1}, \quad z_i=z_x\rho_{xi}\}$, отвечающих Ψ и однозначно определяющих этот атлас.

Глобальное сечение главного расслоения существует тогда и только тогда, когда расслоение тривиально.

Правое действие G в $\mathrm{tl}\,\lambda_G$ порождает фундаментальные поля $\tilde{\tau}_I$ на $\mathrm{tl}\,\lambda_G$, которые, поскольку действие G отображает каждый слой в себя, касаются слоя в каждой точке. Так как G действует транзитивно на $\mathrm{tl}\,\lambda_G$, $\tilde{\tau}_I$ никогда не есть нуль и отображение $I \to \tilde{\tau}_I(p)$ из алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в T_p есть линейный изоморфизм $\mathfrak{G}$ на касательное пространство в $p \in \mathrm{tl}\,\lambda_G$ к слою через p. Если $\tilde{\tau}_I$ — фундаментальное векторное поле, соответствующее $I \in \mathfrak{G}$, то для каждого $g \in G$ касательное отображение $T(R_g)$ преобразует $\tilde{\tau}_I$ в фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу $\mathrm{Ad}(g^{-1})I$, где $\mathrm{Ad}(g^{-1})$ обозначает присоединенное представление G в $\mathfrak{G}$.

Расслоение дифференцируемое. Расслоение называется дифференцируемым, если топологические пространства, входящие в конструкцию расслоения, являются конечномерными дифференцируемыми многообразиями, их морфизмы — дифференцируемыми отображениями, а структурная группа расслоения — группой Ли. Класс дифференцируемости мы каждый раз не конкретизируем, полагая его достаточным. Как правило, он может быть доведен до C_∞.

Расслоение касательное. Касательным расслоением $T(X)$ над многообразием X называется расслоение, слоями которого являются касательные пространства T_x, $x \in X$. $T(X)$ определяется как векторное дифференцируемое расслоение над X с типичным слоем $R^{\dim X}$ и структурной группой $GL(n = \dim X, R)$, атласы которого эквивалентны голономному атласу $\Psi = \{U_i, \psi_i = T(\chi_i)\}$, где $\Psi_X = \{U_i, \chi_i\}$ — некоторый атлас многообразия X.

Фиксируем базис $\{t_a\}$ типичного слоя $R^{\dim X}$ касательного расслоения. Тогда векторы $t_a(x) = \psi_i^{-1}(x)\, t_a$ образуют базисы касательных пространств $T_x(X)$, $x \in X$, отвечающих данному атласу Ψ. Если Ψ — голономный атлас, то векторы $t_\mu(x)$ касательны к координатным линиям $\chi_i^{-1}(x^\mu)$ в точке $x \in X$ и $t_\mu(x) = \partial_\mu$.

Морфизмом касательного расслоения $T(X)$ в касательное расслоение $T(X')$ является пара морфизмов $f: X \to X'$ и $F = T(f): T_x(X) \to T_{f(x)}(X')$. Если f — диффеоморфизм X на себя, то отображение $(f, T(f))$ касательного расслоения $T(X)$ — изоморфизм.

Расслоение кокасательное. Кокасательным расслоением $T^*(X)$ над многообразием X называется дуальное расслоение к касательному расслоению $T(X)$. В голономном атласе расслоения $T^*(X)$ базисами кокасательных пространств T_x^* являются $\{dx^\mu\}$ — дуальные к базисам $\{\partial^\mu\}$ касательных пространств.

Расслоение реперов. Базис $\{t(x)\}$ касательного пространства T_x называется репером. Ассоциированное с $T(X)$ расслоение LX, слоем которого в точке $x \in X$ является множество реперов $\{t(x)\}$ в пространстве T_x, называется расслоением линейных реперов. Типичным слоем V_{LX} этого расслоения является множество реперов $\{t\}$ в пространстве R^n. Структурная группа $GL(n, R)$ действует в пространстве типичного слоя транзитивно и свободно. Действительно, для всяких двух реперов $\{t\}$ и $\{t'\}$ существует элемент g группы $GL(n, R)$, что $\{t'\}=\{gt\}$. Фиксируем репер $\{t\}$ и каждому реперу $\{t'\}\in V_{LX}$ сопоставим элемент g такой, что $\{t'\}=\{gt\}$. Это определяет гомеоморфизм V_{LX} на $GL(n, R)$, а расслоение LX как главное расслоение.

Расслоение тензоров. Могут быть образованы различные тензорные произведения касательных и кокасательных расслоений $(\overset{m}{\otimes} T(X))\otimes(\overset{n}{\otimes} T^*(X))$ над многообразием X. Это расслоения n-ковариантных и m-контравариантных тензоров.

Римановы и псевдоримановы пространства. Пусть B_k — пространство невырожденных симметричных билинейных форм индекса k в пространстве R^n. Оно изоморфно фактор-пространству $GL(n, R)/O(n-k, k)$. Рассмотрим расслоение λ_{Bk} на пространства B_k, ассоциированное с касательным расслоением $T(X)$ над многообразием X^n. Его сечение g определяет в касательном пространстве T_x, $x\in X$, симметричную невырожденную билинейную форму $g(x)(t, t')$, $t, t'\in T_x$, индекса k. Многообразие X^n с заданным на нем глобальным сечением g расслоения λ_{Bk} называется псевдоримановым пространством индекса k, а g — псевдоримановой метрикой на X^n. Если $k=0$, то говорят о римановом пространстве.

Многообразие X^n может допускать не всякую псевдориманову структуру. Необходимым и достаточным условием ее существования, т. е. существования глобального сечения соответствующего расслоения λ_{Bk} или фактор-расслоения $\lambda_{GL(n, R)/O(n-k, k)}$ является редукция структурной группы $GL(n, R)$ касательного расслоения $T(X)$ к подгруппе $O(n-k, k)$ (см. Редукция структурной группы). При этом существует такой атлас Ψ^g касательного расслоения, в котором билинейная форма $g(x)$ принимает вид псевдоевклидовой билинейной формы η индекса k во всех точках $x\in X$.

Многообразие всегда допускает риманову структуру, поскольку структурная группа $GL(n, R)$ касательного расслоения над ним всегда редуцирована к своей максимальной компактной подгруппе $O(n)$.

Если многообразие ориентируемо, то структурная группа его касательного расслоения сводится к группе $GL^+(n, R)$.

Риманова метрика $g(x)$ служит нормой в касательных пространствах. Она задает структуру метрического пространства на многообразии X. Топология, определяемая этой метрикой, совпадает с топологией многообразия.

Связность на расслоении. Введение структуры связности на расслоении $\lambda=(Q, \pi, X)$ необходимо для описания параллельного переноса слоев расслоения вдоль некоторого пути в базе. Связность определяется сопоставлением всякому пути $\tau([a, b])$ в базе X семейства отображений $K_{\tau(s_1, s_2)}$, $s_1, s_2\in[a, b]$, слоев $V_{\tau(s_1)}\to V_{\tau(s_2)}$ над точками этого пути. Естественны требования:

$K_{\tau(s_1,s_2)}$ непрерывно по s_1, s_2 и не зависит от параметризации пути;

$$K_{\tau(s_1,s_2)} K_{\tau(s_2,s_3)} = K_{\tau(s_1,s_3)};$$

$$K_{\tau(s_1,s_2)} = K^{-1}_{\tau(s_2,s_1)}; \quad K_{\tau(s,s)} = \mathrm{Id}\, V_{\tau(s)}.$$

Отображения $K_{\tau(a,s)}$, $s \in [a, b]$, называются параллельным переносом слоя V_a вдоль пути τ.

Связность называется плоской, если для любых точек x, x' из базы X отображение K_τ не зависит от пути τ, их соединяющего.

Пусть v — некоторая точка слоя $V_{\tau(a)}$, тогда множество образов $v(s)$ точки v при параллельном переносе вдоль пути τ образует некоторый путь $\tau_K = \{K_{\tau(a,s)}(v)\}$ в тотальном пространстве Q, и $\pi(\tau_K) = \tau$. Путь τ_K называется накрывающим путь τ в базе X. Такие же пути, накрывающие τ, выходят из каждой точки слоя V_a.

На дифференцируемом расслоении связность может быть определена в инфинитезимальной форме заданием для каждой точки $q \in Q$ пространства направлений, в которых она переносится в Q, если $\pi(q)$ переносится в тех или иных направлениях в X.

Пусть на расслоении $\lambda = (V, G, X)$ задана связность. Для каждой точки $x \in X$ рассмотрим множество $\{\tau_x\}$ всех замкнутых путей в X с началом и концом в точке x. Тогда множество отображений $\{K_{\tau x}\}$ слоя V_x, порождаемых параллельными переносами вдоль путей τ_x, образуют некоторую группу изоморфизмов слоя V_x, которая называется группой голономии K_x данной связности в точке $x \in X$. Подгруппа K_x^0 группы K_x, соответствующая путям, стягиваемым в точку x, называется ограниченной группой голономии.

Для связной базы X группы голономии K_x и K_x^0 в различных точках изоморфны, и можно говорить об абстрактной группе голономии K данной связности на расслоении, которой изоморфны все группы K. Тогда справедливы следующие утверждения.

Ограниченная группа голономии K^0 есть связная подгруппа Ли структурной группы G и инвариантная подгруппа в K, а факторгруппа K/K^0 счетна.

Если на расслоении задана связность, группой голономии которой является K, то структурная группа G расслоения редуцирована к подгруппе K. В частности, отсюда следует, что, если расслоение допускает плоскую связность, оно тривиально.

Пусть $L(F)$ — линейное подпространство в алгебре Ли $\mathfrak{G}$, натянутое на все значения формы кривизны $F(t, t')$, $t, t' \in T_x$, связности в некоторой точке $x \in X$. Тогда $L(F)$ изоморфно алгебре Ли $\mathfrak{G}$ группы голономии K^0.

Связность на главном расслоении. Пусть λ_G — главное расслоение со структурной группой Ли G. Выделим в касательном пространстве T_p к тотальному пространству $\mathrm{tl}\,\lambda_G$ в точке p вертикальное подпространство $T_p{}^v$, касательное к слою, проходящему через p. Связность на λ_G определяется выделением в каждом T_p такого подпространства $T_p{}^h$, что:

а) $T_p = T_p^v \oplus T_p^h$;

б) $T_{pg}^h = T_p(R_g)\,T_p^h$;

в) $T_p{}^h$ зависит дифференцируемо от p.

$T_p{}^h$ называется горизонтальным подпространством T_p и является пространством тех направлений, по которым осуществляется перенос p. Всякий вектор $t \in T_p$ однозначно записывается как $t = t^v + t^h$, где $t^v \in T_p{}^v$, $t^h \in T_p{}^h$.

Горизонтальное подпространство $T_p{}^h$ может быть задано уравнением $\omega = 0$, где ω — 1-форма на $\mathrm{tl}\,\lambda_G$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ такая, что $\tilde{\tau}_{\omega(t)} = t^v$. Форма ω называется 1-формой связности и удовлетворяет следующим условиям:

$$\tilde{\tau}_{\omega(I)} = I, \qquad T(R_g)\,\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\,\omega.$$

На областях тривиализации расслоения λ_G форму связности ω можно выразить через форму связности на базе X. Пусть $\Psi = \{U_\iota, \psi_\iota\}$ — атлас λ_G, и $T_p(\psi_\iota)$ — касательное к ψ, отображение $T_p(\mathrm{tl}\lambda_G) \to T_{\psi_\iota(p)}(X \times G)$. Определим форму $\omega_\tau = \omega T(\psi_\iota^{-1})$ на $X \times G$. Представим $\omega_\iota = \theta - A_\iota$, где $\theta = \omega_\iota(T(G))$ каноническая форма $\theta(\tilde{\tau}_I) = I \in \mathfrak{G}$ на группе G, а $A_\iota = -\omega T(\psi_\iota^{-1}(1_G))$ называется локальной 1-формой связности на базе X. При переходе с карты на карту

$$A_\iota = \mathrm{Ad}(\rho_{\iota\varkappa}^{-1})\,A_\varkappa - T(\rho_{\iota\varkappa})\,\theta. \qquad (\Gamma.2)$$

Поскольку θ — каноническая форма, то именно форма A_ι определяет специфику данной связности, а соответствующие ей горизонтальные подпространства состоят из векторов $t \in T(X \times G)$ с проекцией t_x на $T(X)$ и $\tilde{\tau}_{A_\iota(t_x)}$ на $T(G)$.

Если задана связность на главном расслоении λ_G, она может быть определена на ассоциированном расслоении λ с типичным слоем V. Вертикальное подпространство $T_q{}^v$ в $T_q(\mathrm{tl}\,\lambda)$, $q \in \mathrm{tl}\,\lambda$, есть по определению касательное пространство к слою из $\mathrm{tl}\,\lambda$ в q, а горизонтальное подпространство $T_q{}^h$ задается как образ горизонтального подпространства $T_q{}^h \subset T_p(\mathrm{tl}\,\lambda_G)$ при отображении $\mathrm{tl}\,\lambda_G \times V \to \mathrm{tl}\,\lambda$. Связность на λ описывается той же локальной 1-формой связности A_ι, что и на главном расслоении, которая в базисах $\{dx^\mu\}$ расслоения $T^*(X)$ и $\{I_m\}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ имеет вид $A_\iota = (A_\mu)^m I_m dx^\mu$. Если λ — векторное расслоение, $\mathfrak{G} \subset gl(V)$, и закон (Г.2) преобразования A_ι при переходе с карты на карту принимает вид

$$A_\iota = \rho_{\iota\varkappa} A_\varkappa \rho_{\iota\varkappa}^{-1} - \rho_{\iota\varkappa}\, d\rho_{\iota\varkappa}^{-1}. \qquad (\Gamma.3)$$

При задании связности на расслоении формой связности может быть введен генератор параллельного переноса. Им является ковариантная производная D_τ вдоль поля τ на базе X, которая определяется как производная Ли ∂_{τ_K} вдоль поля τ_K — горизонтального лифта (поднятия) поля τ.

Соответственно определяется внешний ковариантный дифференциал D, действующий в пространстве внешних дифференциальных форм Ω_λ со значениями в ассоциированном векторном расслоении λ_V. Эти формы могут быть представлены как V-значные формы на тотальном пространстве $\mathrm{tl}\,\lambda_G$, удовлетворяющие условию $\varphi(qg)=g^{-1}\varphi(q)$, и по определению $D\varphi=(d\varphi)h$, где h означает проектирование на горизонтальное подпространство. Справедливы свойства:

$$D(\varphi+\varphi')=D\varphi+D\varphi',$$

$$D(\varphi\wedge\varphi')=(D\varphi)\wedge\varphi'+(-1)^p\varphi\wedge D\varphi',\quad \varphi\in\Omega_\lambda{}^p.$$

В локальной записи $D_\iota=d-A_\iota$, где d — внешний дифференциал на базе X, A — локальная 1-форма связности на X, $D_\iota\rho_{\iota\varkappa}=\rho_{\iota\varkappa}D_\varkappa$.

Определяется 2-форма кривизны $DD=F$, где D — внешний ковариантный дифференциал. В локальной записи

$$F_\iota=(d-A_\iota)(d-A_\iota)=-dA_\iota+A_\iota\wedge A_\iota,\quad F_\iota=\rho_{\iota\varkappa}F_\varkappa,$$

или, будучи выраженной через коэффициенты формы связности,

$$F_\iota=F^m_{\mu\nu}I_m dx^\mu\wedge dx^\nu,$$

$$F^m_{\mu\nu}=\partial_\nu A^m_\mu-\partial_\mu A^m_\nu+c^m_{nk}A^n_\mu A^k_\nu, \qquad (\Gamma.4)$$

где I_m — базис, а $c^m{}_{nk}$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Справедливо второе тождество Бианки $DF=0$.

Связность на касательном расслоении. Пусть Γ — 1-форма связности на касательном расслоении $T(X)$. В голономном атласе ее коэффициенты имеют вид $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$, и на пересечении координатных систем $\{x\}$ и $\{x'\}$

$$\Gamma'^\alpha{}_{\beta\gamma}=\Gamma^\varepsilon{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\varepsilon}+\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\beta\partial x'^\gamma}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma}. \qquad (\Gamma.5)$$

Коэффициенты формы кривизны R связности Γ в голономном атласе имеют вид $R^\alpha{}_{\beta\gamma\sigma}$ и следующим образом выражаются через компоненты связности $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\sigma}=\partial_\gamma\Gamma^\alpha{}_{\sigma\beta}-\partial_\sigma\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}+\Gamma^\varepsilon{}_{\sigma\beta}\Gamma^\alpha{}_{\gamma\varepsilon}-\Gamma^\varepsilon{}_{\gamma\beta}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\varepsilon},$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\sigma}=-R^\alpha{}_{\beta\sigma\gamma}. \qquad (\Gamma.6)$$

Для связности на касательном расслоении, помимо 2-формы кривизны, определяется 2-форма кручения $D\theta=Q$, где θ — каноническая 1-форма. В голономном атласе коэффициенты формы Q выражаются через компоненты связности $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ как $Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$.

Справедливо первое тождество Бианки $DQ=R\wedge\theta$.

Другая конструкция, специфичная для связности на касательном расслоении, — это геодезические. Кривая $\tau=\{x(s), s\in(a, b)\ -\infty<a<\infty\}$ в многообразии X со связностью Γ на $T(X)$ называется геодезической, если поле касательных векторов $t_\tau=\dot{x}^\mu(s)\partial_\mu$, определенное вдоль τ, параллельно вдоль τ, т. е. $D_\tau t_\tau$ существует и равно 0. Кривая $\tau=\{x^\mu(s)\}$ является геодезической тогда и только тогда, когда

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0.$$

Для любой точки $x\in X$ и любого вектора $t\in T_x$ существует единственная геодезическая $\{x(s)\}$ с начальными условиями $x_0=x$, $\dot{x}_0=t$.

В определении геодезической играет роль параметризация кривой. Если τ — геодезическая, то параметр s, превращающий τ в геодезическую, называется аффинным параметром. Он определен с точностью до аффинного преобразования $s\to\to s'=as+b$, где $a\neq0$ и b — константы.

Пусть Γ — связность на $T(X)$ с компонентами $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$. Для каждого фиксированного a, $0\leqslant a<1$, множество функций $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=a\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}+(1-a)\widetilde{\Gamma}^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$ определяют связность $\widetilde{\Gamma}$ на $T(X)$, имеющую те же геодезические, что и Γ.

Связность в псевдоримановом пространстве. Пусть X^n — псевдоевклидово пространство индекса k, и Γ — 1-форма связности на $T(X)$. Справедливо следующее.

Связность Γ тогда и только тогда сводима к $O(n-k, k)$, т. е. существует атлас расслоения $T(X)$, в котором Γ принимает значения в алгебре $o(n-k, k)$, а группа голономии связности Γ сводится к $O(n-k, k)$, когда существует псевдориманова метрика g такая, что выполняется условие метричности

$$Dg=0. \tag{Г.7}$$

Для данной метрики g существует единственная связность Γ, удовлетворяющая условию метричности (Г.7) и имеющая нулевое кручение. Ее компоненты выражаются в голономном атласе через компоненты метрики g:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}=\{^{\alpha}{}_{\nu\mu}\}={}^1/_2g^{\alpha\varepsilon}(\partial_\mu g_{\nu\varepsilon}+\partial_\nu g_{\mu\varepsilon}-\partial_\varepsilon g_{\nu\mu}), \tag{Г.8}$$

и называются символами Кристоффеля.

Если связность сводима к $O(n-k, k)$, компоненты ее тензора кривизны удовлетворяют условию $R_{\alpha\nu\mu\sigma}=-R_{\nu\alpha\mu\sigma}$.

В случае общей связности Γ на $T(X)$ условие (Г.7) не выполняется, а коэффициенты Γ представляются в виде

$$\begin{gathered}\Gamma_{\alpha\nu\mu}=\{_{\alpha\nu\mu}\}+K_{\alpha\nu\mu}+(B_{\alpha\nu\mu}+B_{\mu\nu\alpha}-B_{\mu\alpha\nu}),\\ K_{\alpha\nu\mu}=(Q_{\alpha\nu\mu}+Q_{\mu\nu\alpha}+Q_{\nu\mu\alpha}),\end{gathered} \tag{Г.9}$$

$$Q_{\alpha\nu\mu} = {}^1/_2 (\Gamma_{\alpha\nu\mu} - \Gamma_{\alpha\mu\nu}), \quad D_\mu g_{\alpha\nu} = -2B_{\alpha\nu\mu},$$

где K называется тензором конторсии ($K_{\alpha\nu\mu} = -K_{\nu\alpha\mu}$), а B — коэффициентами неметричности ($B_{\alpha\nu\mu} = B_{\nu\alpha\mu}$).

Фактор-расслоение. Пусть G — группа Ли, а H — ее замкнутая подгруппа. Пусть H действует на G справа. Тогда получаем главное расслоение λ_H над фактор-пространством G/H со структурной группой H.

Пусть λ_G — главное расслоение, а H — замкнутая подгруппа в группе Ли G. Естественным образом G действует на G/H слева. Пусть $\lambda_{G/H}$ ассоциированное расслоение с типичным слоем G/H. Тогда $\mathrm{tl}\,\lambda_{G/H}$ может быть отождествлено с $\mathrm{tl}\,\lambda_G/H$ (где H действует на $\mathrm{tl}\,\lambda_G$ справа) и $\mathrm{tl}\,\lambda_G$ может быть представлено как тотальное пространство главного расслоения с базой $\mathrm{tl}\,\lambda_G/H$ и структурной группой H.

Приложение I. ТЕОРЕМЫ НЕТЕР

Здесь приводится частная формулировка теорем Нетер [272, 5], достаточная для их приложения в теории калибровочных полей.

Теоремы Нетер устанавливают законы сохранения и условия связи, которые следуют из инвариантности функционала действия

$$S = \int L(q;\ q_{,\mu})\, dx$$

системы полей $\{q^a(x)\}$ относительно r-параметрической группы Ли внутренних симметрий G и локальной группы $G(X)$, получаемой из G заменой параметров ω^m группы G функциями координат $\omega^m(x)$, $x \in X$.

Первая теорема Нетер. Пусть функционал S инвариантен относительно группы G. Достаточно рассмотреть инифинитезимальные преобразования $g = (1_G + I_m \delta\omega^m)$ из G, где I_m — генераторы, а $\delta\omega^m$ — малые параметры группы G и

$$I_m \delta\omega^m : q^a \to \delta q^a = I_m{}^a{}_b q^b \delta\omega^m. \tag{ПI.1}$$

Тогда из условия $\delta S = 0$ и произвольности параметров $\delta\omega^m$ получаем, что r линейно независимых комбинаций лагранжевых производных

$$\frac{\delta L}{\delta q^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial q^a{}_{,\mu}}$$

обращаются в дивергенции, а именно:

$$\frac{\delta L}{\delta q^a} I_m{}^a{}_b q^b \equiv -\partial_\mu J^\mu_m, \tag{ПI.2}$$

где

$$J^\mu_m = \frac{\partial L}{\partial q^a{}_{,\mu}} I_m{}^a{}_b q^b \tag{ПI.3}$$

называется током симметрий полей q^a, отвечающим генератору I_m группы G.

На экстремалях, т. е. решениях уравнений Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\delta L}{\delta q^a} = 0$$

тождества (П1.2) принимают вид

$$\partial_\mu J_m^\mu = 0 \tag{П1.4}$$

локального закона сохранения тока симметрии полей q^a.

Вторая теорема Нетер. Пусть функционал S инвариантен относительно локальной группы $G(X)$ с законом преобразований

$$I_m\delta\omega^m(x) : q^a \to I_m{}^a{}_b q^b \delta\omega^m + b_m{}^{a\mu}\partial_\mu\delta\omega^m,$$

где $b_m{}^{a\mu}$ не зависит от x. Тогда имеют место r тождественных соотношений между лагранжевыми производными от них.

Из условия $\delta S = 0$ следует

$$\left[\frac{\delta L}{\delta q^a} I_m{}^a{}_b q^b - \partial_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta q^a} b_m^{a\mu}\right)\right]\delta\omega^m = -\partial_\mu\left[\frac{\partial L}{\partial q^a{}_{,\mu}} I_m{}^a{}_b q^b \delta\omega^m + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial L}{\partial q^a{}_{,\mu}} b_m^{a\nu}\partial_\nu\delta\omega^m + \frac{\delta L}{\delta q^a} b_m^{a\mu}\,\delta\omega^m\right]. \tag{П1.5}$$

Если теперь проинтегрировать (П1.5) по какой-либо области, на границе которой $\delta\omega^m$, $\partial_\mu\delta\omega^m$ исчезают, интеграл от правой части (П1.5) обратится в нуль, и в силу произвольности $\delta\omega^m$ получаем искомые соотношения

$$\frac{\delta L}{\delta q^a} I_m{}^a{}_b q^b \equiv \partial_\mu\left(b_m^{a\mu}\frac{\delta L}{\delta q^a}\right). \tag{П1.6}$$

Они представляют собой условия связи на уравнения Эйлера—Лагранжа, которые тем самым не являются независимыми.

С их учетом обращается в нуль и левая часть уравнений (П1.5)

$$\left(\partial_\mu J_m^\mu + \frac{\delta L}{\delta q^a} I_m{}^a{}_b\, q^b\right)\delta\omega^m + \left(J_m^\mu + \frac{\partial L}{\partial q^a} b_m^{a\mu}\right)\partial_\mu\delta\omega^m +$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial q^a{}_{,\mu}} b_m^{a\nu}\partial_\mu\partial_\nu\delta\omega^m = 0.$$

Откуда, в силу произвольности $\delta\omega^m$, приравнивая в этом уравнении коэффициенты при $\delta\omega^m$, $\partial_\mu\delta\omega^m$, $\partial_\mu\partial_\nu\delta\omega^m$ нулю, получаем

$$\partial_\mu J_m^\mu + \frac{\delta L}{\delta q^a} I_m{}^a{}_b q^b = 0,$$

$$J_m^\mu + \frac{\partial L}{\partial q^a} b_m^{a\mu} \equiv 0, \tag{П1.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^a{}_{,\mu}} b^{a\nu}_m + \frac{\partial L}{\partial q^a{}_{,\nu}} b^{a\mu}_m \equiv 0.$$

Эти тождества называются тождествами второй теоремы Нетер. Первое из них совпадает с тождеством (П1.2) первой теоремы Нетер.

Приложение II. ИНВОЛЮТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Рекомендуемая литература [51, 52].

Алгебра B над полем комплексных чисел C называется инволютивной, если существует такое отображение $b \to b^*$ алгебры B в себя, называемое инволюцией, что для любых a, $b \in B$, $\lambda \in C$

$$(b^*)^* = b; \qquad (a+b)^* = a^* + b^*;$$
$$(\lambda b)^* = \bar{\lambda} b^*, \qquad (ab)^* = b^* a^*;$$

$\|b^*\| = \|b\|$, если B — нормированная алгебра. Элемент b^* называется сопряженным к b. Элемент $b \in B$ называется эрмитовым, если $b^* = b$.

C^*-алгеброй называется такая инволютивная банахова алгебра B, что $\|b\|^2 = \|b^* b\|$.

В дальнейшем предполагается, что B — инволютивная алгебра с единицей и если B нормирована, то $\|1_B\| = 1$.

Линейная форма f на B называется положительной, если $f(b^* b) \geqslant 0$ для любого $b \in B$. Она определяет на B структуру предгильбертова пространства:

$$(a,\ b) = f(b^* a), \quad f(b^* a) = \overline{f(a^* b)}, \quad |f(b^* a)|^2 \leqslant f(b^* b)(a^* a).$$

Если B — C^*-алгебра, такая форма непрерывна на B, $\|f\| = 1$, и она называется состоянием B.

Пусть H — гильбертово пространство. Представлением B в H называется гомоморфизм π алгебры B в алгебру $B(H)$ непрерывных эндоморфизмов H. Пространство H называется пространством представления π. Говорят, что два представления π и π' алгебры B в H и H' эквивалентны, если существует изоморфизм U гильбертова пространства H на гильбертово пространство H', переводящий $\pi(b)$ в $\pi'(b)$ для любого $b \in B$.

Пусть π — представление B в H и $h \in H$. Замыкание $\pi(B)h$ есть замкнутое векторное подпространство H, инвариантное относительно $\pi(B)$. Если это подпространство есть H, то говорят, что h — тотализирующий (циклический) вектор для π.

Представление π алгебры B в H называется невырожденным, если не существует такого элемента $h \in H$, который переводился бы в нуль всеми операторами $\pi(b)$. Любое невырожденное представление B есть гильбертова сумма представлений, допускающих тотализирующий вектор.

Ненулевое представление π алгебры B в гильбертовом пространстве H называется топологически неприводимым, если единственными замкнутыми векторными подпространствами H, инвариантными относительно $\pi(B)$ являются $\{0\}$ и H, или, эквивалентно, если любой ненулевой вектор H является тотализирующим для π.

Если π — представление B в H и $h \in H$, то $b \to (\pi(b)h|h)$ — положительная форма на B, которая называется определяемой π и h. Для фиксированного π и переменного h получаем формы, которые называются связанными с π. Пусть π и π' — представления B в H и H', а h и h' — тотализирующие вектора соответственно для π и π'. Если $(\pi(b)h|h) = (\pi'(b)h'|h')$ для всякого $b \in B$, то существует единственный изоморфизм H на H', переводящий π в π' и h в h'.

Обратно, пусть f — положительная форма на B, N_f — левый идеал в B, образованный такими элементами $b \in B$, что $f(b^*b)=0$, и H_f — гильбертово пространство — пополнение фактор-пространства B/N_f. Для любого $b \in B$ определим $\pi(b)$ — оператор в $H_f = \overline{B/N_f}$, являющийся продолжением оператора в B/N_f, возникающего при переходе к фактору из оператора левого умножения на b в B. Пусть h — канонический образ 1_B в H_f. Тогда:

отображение $b \to \pi(b)$ есть представление B в H_f;

h — тотализирующий вектор для $\pi(B)$;

$f(b) = (\pi(b)h|h)$ для любого $b \in B$.

Такое представление π и вектор h называются определяемыми формой f.

Пусть f — положительная форма на B, π и h — представление и вектор, определяемые f. Тогда положительная форма, определяемая π и h, есть f. Обратно, возьмем π — представление B в гильбертовом пространстве H — и вектор h, тотализирующий для π. Пусть f — положительная форма, определяемая π и h. Пусть π' и h' — представление и тотализирующий вектор, определяемые f. Тогда существует единственный изоморфизм H_π на H_π', переводящий π в π' и h в h'.

Приложение III. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

Излагаемый метод построения нелинейных представлений групп был предложен в работах [61, 120] и является частным случаем метода индуцированных представлений [273].

Индуцированное представление группы G, имеющей подгруппу H, строится на множестве функций $f(\sigma)$, определенных на фактор-пространстве G/H и принимающих значения в некотором пространстве V представления подгруппы H. Действие G на таких функциях имеет вид

$$G \ni g : f(\sigma) \to f'(\sigma') = h^{-1} f(g^{-1}(\sigma)), \qquad (\text{ПIII.1})$$

где $H \ni h = g_{\sigma'}^{-1} g^{-1} g_\sigma$ и g_σ, $g_{\sigma'}$ — фиксированные представители классов смежности σ, $\sigma' \in G/H$. При этом вид h и тем самым действия (ПIII.1) существенно зависит от конкретного выбора фиксированных представителей g_σ.

Пусть G — группа Ли, и H — ее картановская подгруппа, т. е. генераторы I_a, F_α группы G, где I_a — генераторы подгруппы H, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[I_a, I_b] = c^d_{ab} I_d, \quad [F_\alpha, F_\beta] = c^a_{\alpha\beta} I_a, \qquad [F_\alpha, I_a] = c^\gamma_{\alpha a} F_\gamma. \quad \text{(ПIII.2)}$$

В некоторой окрестности единицы 1_G группы G всякий ее элемент может быть однозначно представлен в виде

$$\exp(\sigma^\alpha F_\alpha) \exp(h^a I_a). \qquad \text{(ПIII.3)}$$

Он принадлежит классу смежности $\sigma = (\sigma^\alpha) \in G/H$, представителем которого выбирается элемент

$$g_\sigma = \exp(\sigma^\alpha F_\alpha).$$

Рассмотрим действие G на g_σ левыми сдвигами

$$g \exp(\sigma^\alpha F_\alpha) = \exp(\sigma'^\alpha F_\alpha) \exp(h^a I_a) \qquad \text{(ПIII.4)}$$

и построим индуцированное представление G на пространстве $G/H \times V$ по формуле

$$g: (\sigma, v) \to (\sigma', (\exp h^a I_a) v), \qquad \text{(ПIII.5)}$$

где σ' и $h^a I_a$ определяются из (ПIII.4). Конкретные выражения для (ПIII.4), (ПIII.5) можно получить, если ограничиться в (ПIII.4), (ПIII.5) инфинитезимальными элементами $g \in G$ и перейти к представлению алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G:

$$F_\gamma : \sigma^\alpha F_\alpha \to \sigma'^\alpha F_\alpha = F_\gamma + \sum_{k=1} a_{2k} [\underset{2k}{\ldots} [F_\gamma, \sigma^\alpha F_\alpha], \ldots$$

$$\ldots, \sigma^\alpha F_\alpha] - \sum_{n=1} a_n [\underset{n}{\ldots} [\sigma^\alpha F_\alpha, h^a I_a], \ldots, h^a I_a], \qquad \text{(ПIII.6)}$$

$$h^a I_a = \sum_{k=1} a_{2k-1} [\underset{2k-1}{\ldots} [F_\gamma, \sigma^\alpha F_\alpha], \ldots, \sigma^\alpha F_\alpha];$$

$$I_a : \sigma^\alpha F_\alpha \to \sigma'^\alpha F_\alpha = 2 \sum_{k=1} a_{2k-1} [\underset{2k-1}{\ldots} [I_a, \sigma^\alpha F_\alpha], \ldots, \sigma^\alpha F_\alpha], \quad \text{(ПIII.7)}$$

где коэффициенты a_n находятся по рекурентной формуле

$$\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(n+1-i)!}.$$

В физических приложениях σ обычно считаются малыми и в выражениях (ПIII.6), (ПIII.7) ограничиваются вторым порядком по σ. Представление $\mathfrak{G}$ на (σ, v) в этом случае имеет вид

$$
F_\gamma:\quad
\begin{aligned}
&\sigma^\alpha \to \sigma'^\alpha = \delta^\alpha_\gamma + \frac{1}{12}\left(c^\beta_{\gamma\varepsilon} c^\alpha_{\beta\varkappa} - 3c^a_{\gamma\varepsilon} c^\alpha_{\varkappa a}\right)\sigma^\varepsilon\sigma^\varkappa,\\
&v^k \to v'^k = \frac{1}{2} c^a_{\gamma\varepsilon}\sigma^\varepsilon I_a{}^k{}_l v^l,
\end{aligned}
$$

$$
I_a:\quad
\begin{aligned}
&\sigma^\alpha \to \sigma'^\alpha = c^\alpha_{a\varepsilon}\sigma^\varepsilon,\\
&v^k \to v'^k = I_a{}^k{}_l v^l.
\end{aligned}
\tag{ПIII.8}
$$

Оно нелинейно по элементам σ.

Приложение IV. ГАУССОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

Гауссовым называется интеграл вида

$$I = \int [d\varphi] \exp\{-{}^1/_2(\varphi,\ M\varphi) + (\eta,\ \varphi)\}, \tag{ПIV.1}$$

где φ, η — элементы некоторого векторного пространства Q, M — линейный оператор в Q, (,) — билинейная форма в Q, $[d\varphi]$ — мера на Q. Если M невырожден,

$$I = (\det M)^{-1/2} \exp\{{}^1/_2(\eta,\ M^{-1}\eta)\}. \tag{ПIV.2}$$

Часто удобно использовать представление

$$\det M = \exp(\operatorname{tr}\ln M),$$

где tr означает след оператора. Тогда (ПIV.2) принимает вид

$$I = \exp\{-{}^1/_2 \operatorname{tr}\ln M + {}^1/_2(\eta,\ M^{-1}\eta)\}. \tag{ПIV.3}$$

Рассмотрим гауссов интеграл (ПIV.1) как зависящий от параметра η и, дифференцируя его по компонентам вектора η, получим формулу для интегралов более общего вида

$$\int [d\varphi]\,\varphi_{i_1}\ldots\varphi_{i_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi, M\varphi) + (\eta, \varphi)\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\eta_{i_1}}\ldots\frac{\partial}{\partial\eta_{i_n}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\ln M + \frac{1}{2}(\eta, M^{-1}\eta)\right\}. \tag{ПIV.4}$$

При квантовании ферми-полей используются интегралы по антикоммутирующим переменным $\bar\psi$, ψ — элементам алгебры Грассмана. В этом случае

$$I = \int [d\bar\psi]\,[d\psi] \exp\{-\bar\psi M\psi + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta\} =$$
$$= (\det M)\exp\{\bar\eta M^{-1}\eta\}. \tag{ПIV.5}$$

Подробно свойства гауссовых интегралов, методы функционального интегрирования и их применение в квантовой теории изложены в [53, 274, 54, 57, 42].

ЛИТЕРАТУРА

1. Иваненко Д. Д. — В кн.: Проблемы физики: классика и современность. — М.: Мир, 1982, с. 127.
2. Ivanenko D. — In: Relativity, Quanta and Cosmology. — N. Y.: Johnson Repr. Corp., 1980, p. 195.
3. Матинян С. — УФН, 1980, т. 130, с. 3.
4. Langacker P. — Phys. Rep., 1981, v. 72, p. 185.
5. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1980.
6. Данэль М., Виалле С. — УФН, 1982, т. 136, с. 377.
7. Yang C., Mills R. — Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 191.
8. Utiyama R. — Phys. Rev., 1956, v. 101, p. 1597.
9. Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. — Изв. высш. учебн. заведений. Физика, 1981, № 6, с. 79.
10. Ivanenko D., Sardanashvily G. — Dokl. Bulg. Acad. Nauk, 1981, v. 34, p. 1237.
11. Ivanenko D., Sardanashvily G. — Lett. Nuovo Cim., 1981, v. 30, p. 220.
12. Ivanenko D., Sardanashvily G. — Phys. Rep., 1983, v. 94, p. 1.
13. Sivaram C., Sinha K. — Phys. Rep., 1979, v. 51, p. 111.
14. Nieuwenhuizen P. — Phys. Rep., 1981, v. 68, p. 189.
15. Salam A., Strathdee J. — Ann. Phys., 1982, v. 141, p. 316.
16. Orzalesi C. — Fortschr. Phys., 1981, v. 29, p. 413.
17. Зельдович Я. Б. — УФН, 1981, т. 133, с. 479.
18. Adler S. — Rev. Mod. Phys., 1982, v. 54, p. 729.
19. Hehl F., Heyde P., Nester J. — Rev. Mod. Phys., 1976, v. 48, p. 393.
20. Yasskin P., Stoeger W. — Phys. Rev., 1980, v. D21, p. 2081.
21. Liu Yi-Fen, Wu Yohj-Shi. — Acta Phys. Pol., 1980, v. 11, p. 183.
22. Арбузов Б. А. — ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 444.
23. Haridass Jr. — Gen. Rel. Grav., 1977, v. 8, p. 89.
24. D'Auria J., Regge T. — Nucl. Phys., 1982, v. B195, p. 308.
25. Элементарные частицы и компенсирующие поля / Под общ. ред. Д. Д. Иваненко. — М.: Мир, 1964.
26. Weyl H. — Math. Z., 1918, v. 2, p. 384.
27. Паули В. Теория относительности. — М.: Наука, 1983.
28. Fulton T., Ronrlich F., Witten L. — Rev. Mod. Phys., 1962, v. 31, p. 442.
29. Ross P. — Phys. Rev., 1972, v. D5, p. 284.
30. Pauli W. — Rev. Mod. Phys., 1941, v. 13, p. 203.
31. Lee T., Yang C. — Phys. Rev., 1955, v. 98, p. 1501.
32. Salam A., Ward J. — Nuovo Cim., 1959, v. XI, p. 568.
33. Sakurai T. — Ann. Phys., 1960, v. 11, p. 1.
34. Glashow L., Gell-Mann M. — Ann. Phys., 1961, v. 15, p. 437.
35. Ne'eman Y. — Nucl. Phys., 1961, v. 26, p. 222.
36. Фролов Б. Н. — Вестн. Моск. ун-та, сер. физика, астрономия, 1963, № 6, с. 48.
37. Batalin T., Vilkovisky G. — Phys. Rev., 1983, v. D28, p. 2567.
38. Sugano R. — Progr. Theor. Phys., 1983, v. 78, p. 36.
39. Dirac P. A. M. — Proc. Roy. Sci., 1958, v. A246, p. 326.
40. Дирак П. — В кн.: Новейшие проблемы гравитации. — М.: ИЛ, 1961, с. 128, 139.
41. Дирак П. Лекции по квантовой механике. — М.: Наука, 1981.
42. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
43. Higgs P. — Phys. Lett., 1964, v. 12, p. 132.
44. Bernstein J. — Rev. Mod. Phys., 1974, v. 46, p. 7.
45. Abers S., Lee B. — Phys. Rep., 1973, v. 9, p. 1.
46. Квантовая теория калибровочных полей / Под общ. ред. Н. П. Коноплевой. — М.: Мир, 1977.

47. Coleman S. — J. Math. Phys., 1967, v. 7, p. 787.
48. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
49. Гриб А. А. Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля. — М.: Атомиздат, 1978.
50. Вайтман А. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. — М.: Наука, 1968.
51. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. — М.: Мир, 1976.
52. Диксмье Ж. С*-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.
53. Iliopoulos J., Itzykson C., Martin A. — Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 165.
54. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физики. — М.: Атомиздат, 1976.
55. Березин Ф. А. — ТМФ, 1971, т. 6, с. 194.
56. De Witt-Moretty C., Maheshwati A., Nelson B. — Phys. Rep., 1979, v. 5. p. 255.
57. Березин Ф. А. — УФН, 1980, т. 132, с. 497.
58. Славнов А. А. — ТМФ, 1975, т. 22, с. 177.
59. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.
60. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. — М.: Атомиздат, 1980.
61. Coleman S., Wess J., Zumino B. — Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 2239.
62. Волков Д. В. — Яд. физика, 1973, т. 4, с. 3.
63. Jackiw R., Johnson K. — Phys. Rev., 1973, v. D8, p. 2386.
64. Haymaker R. — Acta Phys. Pol., 1982, v. B13, p. 575.
65. Terazawa H., Chikashiga Y., Akama K. — Phys. Rev., 1977, v. D15, p. 480.
66. Kugo T. — Progr. Theor. Phys., 1976, v. 55, p. 2032.
67. Shizuya K. — Nucl. Phys., 1983, v. B227, p. 134.
68. Heisenberg W., Euler H. — Z. Physik, 1936, v. 98, p. 714.
69. Friedman M., Srivastava J. — Phys. Rev., 1983, v. D28, p. 1491.
70. Киржниц Д. А., Линде А. Д. — УФН, 1975, т. 119, с. 534.
71. Bender C., Cooper F., Guralnic G. — Ann. Phys., 1977, v. 109, p. 165.
72. Первушин В. Н., Райнхардт Х., Эберт Д. — ЭЧАЯ, 1979, т. 10, с. 1115.
73. Banks T., Zaks A. — Nucl. Phys., 1981, v. B184, p. 303.
74. Kawati S., Miyata H. — Phys. Rev., 1981, v. D23, p. 3010.
75. Nambu Y., Jona-Lasinio G. — Phys. Rev., 1961, v. 122, p. 345.
76. Вакс В. Г., Ларкин А. И. — ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 282.
77. Bjorken J. — Ann. Phys. (N. Y.), 1963, v. 24, p. 174.
78. Salam A. — Nuovo Cim., 1962, v. 25, p. 224.
79. Salam A. — Phys. Rev., 1963, v. 130, p. 1287.
80. Eguchi T., Sugawara H. — Phys. Rev., 1974, v. D10, p. 4257.
81. Englert F., Brout R. — Phys. Rev., 1964, v. 13, p. 321.
82. Farhi E., Susskind L. — Phys. Rev., 1981, v. 74, p. 277.
83. Lubkin E. — Ann. Phys., 1963, v. 23, p. 233.
84. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. — ДАН, 1964, т. 154, с. 310.
85. Loos H. — Nucl. Phys., 1965, v. 72, p. 677.
86. Wu T., Yang C. — Phys. Rev., 1975, v. D12, p. 3845.
87. Eguchi T., Gilkey P., Hanson A. — Phys. Rep., 1980, v. 66. p. 213.
88. Boya L., Carinena J., Mateos J. — Fortsh. Phys., 1978, v. 26, p. 175.
89. Ребби К. — УФН, 1980, т. 130, с. 329.
90. Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сарданашвили Г. А. Групповые, геометрические и топологические методы в теории поля. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.

91. Crewther R. — Acta Phys. Austr. Suppl., 1978, v. XIX, p. 47.
92. Madore J. — Comm. Math. Phys., 1977, v. 56, p. 115.
93. Honda M. — Progr. Theor. Phys., 1973, v. 61, p. 1255.
94. Bos S. — Lett. Nuovo Cim., 1980, v. 28, p. 146.
95. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981.
96. Герок Г. — В кн.: Квантовая гравитация и топология. — М.: Мир, 1973, с. 27.
97. Хокинг С., Эллис Д. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1976.
98. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. — М.: Мир, 1975.
99. Hawking S., King A., McCarthy P. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 174.
100. Gröbel R. — Comm. Math. Phys., 1976, v. 46, p. 289.
101. Gröbel R. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 845.
102. Стинрод Н. Топология косых произведений. — М.: ИЛ, 1953.
103. Whiston G. — Int. J. Theor. Phys., 1974, v. 11, p. 341.
104. Милнор Дж., Сташер Дж. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.
105. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
106. Bichteler K. — J. Math. Phys., 1967, v. 9, p. 813.
107. Whiston G. Int. J. Theor. Phys., 1975, v. 12, p. 225.
108. Geroch R. — J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 1739.
109. Рохлин В. А. — ДАН, 1958, т. 121, с. 128.
110. Хокинг С. — В кн.: Геометрические идеи в физике. — М.: Мир, 1983, с. 19.
111. Drinfeld V., Manin Yu. — Comm. Math. Phys., 1978, v. 63, p. 177.
112. Gibbons G., Hawking S. — Comm. Math. Phys., 1979, v. 66, p. 291.
113. Goldstone J. — Nuovo Cim., 1961, v. 19, p. 154.
114. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. — М.: Физматгиз, 1961.
115. Вейнберг С. Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975.
116. Родичев В. И. Теория гравитации в ортогональном репере. — М.: Наука, 1974.
117. Меллер К. Теория относительности. — М.: Атомиздат, 1975.
118. Зельманов А. Л. — ДАН, 1956, т. 107, с. 815.
119. Ivanenko D. — In: Physics, Logic and History. — N. Y., 1970, p. 105.
120. Joseph A., Solomon A. — J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 51.
121. Isham C., Salam A., Strathdee J. — Ann. Phys., 1971, v. 62, p. 98.
122. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. — ЖЭТФ, 1965, т. 21, с. 1093.
123. Ne'eman Y., Sherry T. — Phys. Lett., 1978, v. 76B, p. 413.
124. Ne'eman Y. — Ann. Inst. Henri Poincaré, 1978, Sect. A28, p. 369.
125. Ne'eman Y., Sijacki D. — Ann. Phys., 1979, v. 120, p. 292.
126. Sardanashvily G. — Phys. Lett., v. 75A, p. 257.
127. Trautman A. — Czech. J. Phys., 1979, v. B29, p. 107.
128. Saller H. — Nuovo Cim., 1982, v. 71, p. 17.
129. Бродский А. Н., Иваненко Д. Д., Соколик Г. А. — ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1307.
130. Chang L., Macrae K., Mansouri F. — Phys. Rev., 1976, v. D13, p. 235.
131. Camenzind M. — Gen. Rel. Grav., 1977, v. 8, p. 103.
132. Fairchild E. — Phys. Rev., 1977, v. D16, p. 2438.
133. Carnely M., Malin S. — Ann. Phys., 1977, v. 103, p. 208.
134. Fock V., Ivanenko D. — Compt. Rend., 1929, v. 188, p. 1470.
135. Weyl H. — Z. Phys., 1929, v. 56, p. 330.
136. Родичев В. И. — ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 1469.
137. Hayashi K. — Nuovo Cim., 1973, v. 16A, p. 639.

138. Yang C. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 445.
139. Mansouri F., Chang L. — Phys. Rev., 1976, v. D13, p. 3192.
140. Hehl F., Kerlick G., Heyde P. — Phys. Lett., 1976, v. 63B, p. 446.
141. Hehl F., Lord E., Ne'eman Y. — Phys. Rev., 1978, v. D17, p. 428.
142. Cho Y., Freund P. — Phys. Rev., 1975, v. D12, p. 1711.
143. Гельфанд И. М., Граев М. И. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1953, т. 17, с. 189.
144. Борисов А. Б., Огиевецкий В. И. — ТМФ, 1974, т. 21, с. 329.
145. Sijacki Dj. — J. Math. Phys., 1975, v. 16, p. 298.
146. Hehl F., Ne'eman Y., Nitsch J., Heyde P. — Phys. Lett., 1978, v. 78B, p. 102.
147. Kibble T. — Math. Phys., 1961, v. 2, p. 212.
148. Sciama D. — Rev. Mod. Phys., 1964, v. 36, p. 463.
149. Cho Y. — Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 3335.
150. Heyde P. — Phys. Lett., 1976, v. 58A, p. 141.
151. Cho Y. — Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 2521.
152. Petti R. — Gen. Rel. Grav., 1977, v. 8. p. 887.
153. Norris L., Fulp R., Davis W. — Phys. Lett., 1980, v. 79A, p. 278.
154. Basombrio F. — Gen. Rel. Grav., 1980, v. 12, p. 109.
155. Tseitlin A. — Phys. Rev., 1981, v. D26, p. 3327.
156. Dreshler W. — J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 1358.
157. Попов Д. А., Дайхин Л. И. — ДАН, 1975, т. 225, с. 790.
158. Agnese A., Calvini P. — Phys. Rev., 1973, v. D12, p. 3800.
159. Lord E. — Phys. Lett., 1978, v. 65A, p. 233.
160. Катанаев М. О. — ТМФ, 1983, т. 54, с. 381.
161. MacDowell S., Mansouri F. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 739.
162. Mansouri F. — Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 1021.
163. Inomata A., Trinkala M. — Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 1668.
164. Kawai T., Joshida K. — Progr. Theor. Phys., 1979, v. 62, p. 266.
165. Hsu J. — Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, 934.
166. Rauch R., Nich H. — Phys. Rev., 1981, v. D24, p. 2029.
167. Baker W., Atkins W., Davis W. — Nuovo Cim., 1978, v. B44, p. 1, 17, 23.
168. Пономарев В. Н., Цейтлин А. А. — Вестн. Моск. ун-та, сер. физика, астрономия, 1978, № 6, с. 57.
169. Hehl F., Lord E., Smalley L. — Gen. Rel. Grav., 1978, v. 9, p. 691.
170. Hehl F., Lord E., Smalley L. — Gen. Rel. Grav., 1981, v. 13, p. 1037.
171. Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход в теории гравитации. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
172. Гвоздев А. А., Пронин П. И. — Вестн. Моск. ун-та, физ., астр., 1985, № 1, с. 48.
173. Hehl F., Sijacki D. — Gen. Rel. Grav., 1980, v. 12, p. 83.
174. Ikeda S. — Progr. Theor. Phys., 1980, v. 64. p. 2265.
175. Эшелби Дж. — В кн.: Континуальная теория дислокаций. — М.: ИЛ, 1963, с. 175.
176. Cartan E. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1922, v. 174, p. 593.
177. Cartan E. — Ann. Ec. Norm. Sup. (3), 1923, v. 40, p. 325.
178. Cartan E. — Ann. Ec. Norm. Sup. (3), 1924, v. 41, p. 1.
179. Cartan E. — Ann. Ec. Norm. Sup. (3), 1925, v. 42, p. 17.
180. Stuckelberg E. — Phys. Rev., 1948, v. 73, p. 808.
181. Эйнштейн А. Собрание научиых трудов, т. 1—4. — М.: Наука, 1965—1967.
182. Schrödinger E. Space-time structures. — Cambridge: 1960, p. 123.
183. Palatini A. — Rend. Girl. Mat. Palermo, 1919, v. 47, p. 203.
184. Gogala B. — Int. J. Theor. Phys., 1980, v. 19, p. 573.
185. Ponomariov V., Obuchov Yu. — Gen. Rel. Grav., 1982, v. 14, p. 309.
186. Weyl H. — Phys. Rev., 1950, v. 77, p. 690.

187. Ivanenko D. — In: Proceedings theory of gravitation. — Paris: Gauthier—Villars, 1962, p. 212.
188. Картан Э. Пространства аффинной, проективной, конформной связности. — Казань: Изд-во КГУ, 1962.
189. Ponomariev V. — Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math. Astr. Phys., 1971, v. 19, p. 545.
190. Пономарев В. Н. — Вестн. Моск. ун-та, сер. физика, астрономия, 1974, № 5, с. 541.
191. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.
192. Kopczynski W. — Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math., Astr., Phys., 1975, v. 23, p. 467.
193. Kopczynski W. — Acta. Phys., Pol., 1979, v. B10, p. 365.
194. Hehl F. — Gen. Rel. Grav., 1974, v. 4, p. 333; v. 5, p. 491.
195. Hayashi K., Sasaki R. — Nuovo Cim., 1978, v. B45, p. 3141.
196. Trautman A. — Symp. Math., 1973, v. 12, p. 139.
197. Hejman S., Rosenbaum M., Ryan M., Shepley L. — Phys. Rev., 1978, v. D17, p. 3141.
198. Mukku C., Sayed W. — Phys. Lett., 1979, v. B82, p. 383.
199. De Sabbata V., Gasperini M. — Phys. Lett., 1980, v. A77, p. 300.
200. Пономарев В. Н., Сметанин Е. В. — Вестн. Моск. ун-та, сер. физика, астрономия, 1978, № 5, с. 29.
201. Картан Э. Теория спиноров. — М.: ИЛ, 1948.
202. Рашевский П. К. — УМН, 1955, т. 10, с. 207.
203. Bade W., Jehle H. — Rev. Mod. Phys., 1953, v. 25, p. 714.
204. Брилл Д., Уилер Дж. — В кн.: Новейшие проблемы гравитации. — М.: ИЛ, 1961, с. 381.
205. Datta B. — Nuovo Cim., 1971, v. B6, p. 1, 16.
206. Кречет В. Г., Пономарев В. Н. — ТМФ, 1975, т. 25, с. 141.
207. Гвоздев А. А., Пронин П. И. — Изв. высш. учебн. заведений. Физика, 1984, № 5, с. 36.
208. Pronin P. — In: Proc. Int. Symp. Rel. Cosm., Nagpur, 1984.
209. Финкельштейн Д. — В кн.: Нелинейная спинорная теория. — М.: ИЛ, 1954, с. 33.
210. Williams J. — J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 2611.
211. Ringwood G. — Phys. A., 1983, v. 16, p. L235.
212. Hayashi K., Shirafuji T. — Progr. Theor. Phys., 1977, v. 57, p. 302.
213. Ulmer W. — Int. J. Theor. Phys., 1975, v. 13, p. 51.
214. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. — М.: Наука, 1974.
215. Walecka J. — Ann. Phys., 1974, v. 83, p. 491.
216. Kleppinger W. — Acta Phys. Pol., 1982, v. B13, p. 607.
217. Weysenhoff J., Raabe A. — Acta Phys. Pol., 1947, v. 9, p. 7.
218. Ray J., Smalley L. — Phys. Rev., 1982, v. D26, p. 2619.
219. Tulchyjev W. — Acta Phys. Pol., 1959, v. 18, p. 393.
220. Ray J., Smalley L. — Phys. Rev., 1982, v. D27, p. 1383.
221. Hehl F. — Phys. Lett., 1971, v. A36, p. 225.
222. Trautman A. — Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math., Astr., Phys., 1973, v. 21, p. 345.
223. Пронин П. И. — В кн.: Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации. — Минск: Изд. Ин-та физики АН БССР, 1976, с. 121.
224. Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М. — УФН, 1970, т. 102, с. 463.
225. Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М. — ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 2163.
226. Пиблс Дж. Физическая космология. — М.: Мир, 1975.
227. Гурович В. И. — ДАН, 1970, т. 195, с. 1300.
228. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А. — ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 2161.

229. Parker L. — Phys. Rev., 1969, v. 183, p. 1057; 1971, v. D3, p. 346.
230. Heller M., Klimek Z., Suszycki L. — Astrophys. Space Sci., 1973, v. 20, p. 205.
231. Turner M., Wilczek F., Zee A. — Phys. Lett., 1983, v. 125B, p. 35.
232. Guth A. — Phys. Rev., 1981, v. D23, p. 347.
233. Linde A. — Phys. Lett., 1982, v. 108B, p. 389.
234. Kopczynski W. — Phys. Lett., 1977, v. 43A, p. 63.
235. Kuchowich B. — Astrophys. Space Sci., 1975, v. 39, p. 157.
236. Kuchowich B. — Acta Phys. Pol., 1975, v. B6, p. 173; 1976, v. B7, p. 81.
237. Nurgaliev I., Ponomarev V. — Phys. Lett., 1983, v. 130B, p. 387.
239. Гвоздев А. А., Пронин П. И. — В кн.: Фундаментальные взаимодействия. — М.: Изд. МГПИ, 1984, с. 169.
239. De Witt B. Dynamical theory groupsand fields. — N. Y., 1965.
240. Фаддеев Л. Д., Попов В. Н. — УФН, 1979, т. 111, с. 427.
241. Stelle K. — Phys. Rev., 1977, v. D16, p. 953.
242. Wheeler J. Geometrodynamics. — N. Y., 1962.
243. Каллош Р. Э. — Письма ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 449.
244. Де Витт В. — В кн.: Черные дыры. — М.: Мир, 1978, с. 66.
245. Hawking S. — Nature, 1974, v. 249, p. 30.
246. Шиама Д. — В кн.: Черные дыры. — М.: Мир, 1978, с. 31.
247. Фролов В. П. — УФН, 1976, т. 118, с. 473.
248. Долгов А. Д., Зельдович Я. Б. — УФН, 1980, т. 130, с. 559.
249. Гриб А. А., Мамаев С. Г. — Яд. физ., 1971, т. 14, с. 800.
250. Пономарев В. Н., Кречет В. Г., Пронин П. И. — Изв. высших учебных заведений. Физика, 1978, № 3, с. 118.
251. Пономарев В. Н., Пронин П. И. — ТМФ, 1979, т. 39, с. 425.
252. Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. П. — ТМФ, 1976, т. 26, с. 221.
253. Rumpf H. — Gen. Rel. Grav., 1979, v. 10, p. 509.
254. Rumpf H. — Gen. Rel. Grav., 1979, v. 26, p. 525.
255. Rumpf H. — Gen. Rel. Grav., 1979, v. 10, p. 647.
256. Collins J., Duncan A., Joglekar S. — Phys. Rev., 1977, v. D16, p. 438.
257. Utiyama R., De Witt B. — J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 608.
258. Goldthorpe W. — Nucl. Phys., 1980, v. B170, p. 301.
259. Kimura T. — J. Phys. A. Ser. Math., Gen., 1981, v. 14, p. L329.
260. Obukhov Yu. — Nucl. Phys., 1983, v. 212, p. 237.
261. Эддингтон А. Теория относительности. — М.: ГТТИ, 1934.
262. Backler P. — Phys. Lett., 1980.
263. Кудин В. И., Минкевич А. В., Федоров Ф. И. — Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1981, № 4, с. 59.
264. Минкевич А. В. — Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1980, № 2, с. 87.
266. Neville D. — Phys. Rev., 1978, v. D18, p. 3535.
267. Neville D. — Phys. Rev., 1980, v. D21, p. 867.
268. Neville D. — Phys. Rev., 1981, v. D23, p. 1244.
269. Nieuwenhuizen P. — Nucl. Phys., 1973, v. B60, p. 478.
270. Sezgin E., Nieuwenhuizen P. — Phys. Rev., 1980, v. D21, p. 3269.
271. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
272. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
273. Менский М. Б. Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частиц. — М.: Наука, 1976.
274. Васильев А. И. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
275. Проблемы физики: классика и современность / Сб. под ред. Г. Ю. Тредера (перевод под ред. Л. И. Седова). — М.: Мир, 1982.
276. Тредер Г.-Ю. Взгляды Гельмгольца, Планка и Эйнштейна на единую физическую теорию; Заключительное слово. — Там же, с. 295.

277. Там же, статьи П. Бергмана, Э. Брода, О. Гекмана, Хр. Меллера, Л. И. Седова.
278. Тредер Г.-Ю. Теория гравитации и принцип эквивалентности. (пер. под ред. и с доп. Д. Д. Иваненко: Каталоги теории гравитации). — М.: Атомиздат, 1973.
279. Иваненко Д. Д., Обухов Ю. Н. Измеримость неабелевых полей. — Вестник Моск. ун-та, физ. астр., 1984, № 3;
Obukhov Yu. N., Nazarovsky E. A. On quantum gravity with dynamical torsion. — In: Proceedings of Intern. Symp. on Relativitiy and Cosmology (Nagpur, India, 1984).
280. Горелик Г. Е. Размерность пространства (историко-методологический анализ). — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
281. Астрофизика, кванты и теория относительности (пер. под ред. Ф. И. Федорова). — М.: Мир, 1982. (перевод части юбилейного Эйнштейновского сборника Итальянской Академии Наук в Риме. Статьи Э. Реками, Г. Бонди, Хр. Меллера, Г.-Ю. Тредера и др.).
282. Принцип относительности. Сб. статей классиков релятивизма (Лоренц, Пуанкаре, Эйнштейн, Минковский). (Пер. под ред. и с доп. В. К. Фредерикса и Д. Д. Иваненко). — Л.: ОНТИ, 1935.
283. Принцип относительности. (Сб. переводов статей по СТО, сост. А. А. Тяпкин). — М.: Атомиздат, 1973.
284. Вяльцев А. Н. Дискретное пространство-время. — М.: Наука, 1965.
285. Актуальные проблемы теоретической физики. (Сб. статей под ред. А. А. Соколова: Д. Иваненко, Г. Сарданашвили, И. Шоке-Брюа, В. Г. Кречет, В. Н. Пономарев, Ф. Хель, Г.-Ю. Тредер, Кр. Меллер, Боннор, Б. Понтекорво, Н. И. Максюков, А. А. Соколов, Нишиджима, Вайдиа, де Саббата, Д. В. Ширков и др.). — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
286. Станюкович К. П., Мельников В. Н. Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
287. Желнорович В. А. Теория спиноров и ее применения в физике и механике. — М.: Наука, 1982.
288. Иваненко Д. — Sow. Phys., 1938, Bd 13, S. 141.
289. Данилюк Б. В. — Изв. ВУЗов СССР, физика, 1978, № 5, с. 143.
290. Гейзенберг В. Введение в единую полевую теорию элементарных частиц. (Пер. под ред. Д. Иваненко). — М.: Мир, 1968.
291. Dürr H.-P. — Gen. Rel. Grav., v. 4, p. 29, 1973.
292. Rañada A. F., Rañada M. F. — Physica, 1983, v. 9D, p. 251—265.
293. Barbour J. B., Bertotti B. — Nuovo Cim., 1977, v. 38B, p. 1;
Barbour J. B., Bertotti B. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1982, v. A382, p. 295—306;
Goenner H. Machsches Prinzip u. Theorien d. Gravitation. — In: Grundlagenprobleme d. modernen Physik (Peter Mittelstaedt Festschrift). Mannheim: Wissenschaftsverlag, 1981, S. 85—101.
294. Визгин В. П. Релятивистская теория тяготения. Истоки и формирование. 1900—1915. — М.: Наука, 1981.
295. Денисов В. И., Логунов А. А. — Теор. мат. физ., 1980, т. 45, с. 291; 1982, т. 50, с. 3;
Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Полевая теория гравитации и новые представления о пространстве и времени. — Физ. эл. частиц и ат. ядра, 1981, т. 12, № 1, с. 99.
296. Логунов А. А., Власов А. А. Пространство Минковского как основа физической теории гравитации. — Изд-во Моск. ун-та, 1984;
Сферически симметричное решение в теории гравитации на основе пространства Минковского. — Изд-во Моск. ун-та, 1984.
297. Ellis J. — CERN preprint TH—3718. 1983.
298. Penrose R. — Found. Phys., 1983, v. 13, n. 3, p. 325 (спин и кручение в ОТО).
299. Герценштейн М. Е. — Изв. ВУЗов СССР, физ., 1984, № 1.
300. Моисеев Е. И., Садовничий В. А. О решении одного нелинейного уравнения в теории гравитации на основе пространства Минковского. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ