

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭТАЛОННОГО СЛОЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУР

*В.Г. Авраменко, О.В. Лебедев, Д.В. Киржанов и О.Н. Будадин*

*Технологический институт энергетических исследований, диагностики и неразрушающего  
контроля "ВЕМО", Россия, г. Москва, 113162 Люсиновская ул., д.62,*

*E-mail: [oleg@shg.ru](mailto:oleg@shg.ru), [budadin@tsinet.ru](mailto:budadin@tsinet.ru).*

## **Аннотация**

*Предложен метод определения теплофизических характеристик материалов многослойных объектов. Метод основан на использовании дополнительной слоистой структуры с заданными теплофизическими характеристиками, названной эталонным слоем. Оценена погрешность, связанная с конечными размерами эталонного слоя. Предложен способ существенного упрощения процедуры определения сопротивления теплопередаче многослойных объектов по сравнению современными методами решения обратных задач, основанными на численном интегрировании уравнения теплопроводности. Приведена возможная конструкция эталонного слоя.*

## **Введение**

Основной задачей теплового неразрушающего контроля зданий и сооружений является определение теплофизических характеристик материалов, составляющих наружные ограждающие конструкции исследуемых объектов<sup>1,23</sup>. Наиболее важной из определяемых характеристик исследуемого фрагмента наружных ограждающих конструкций является величина его сопротивления теплопередаче. Эта величина определяет теплоизоляционные свойства фрагмента конструкции и связывает плотность теплового потока через выбранный фрагмент конструкций с разностью температур воздуха внутри и снаружи помещения. Именно она показывает то, насколько эффективно в здании сохраняется тепло зимой и насколько медленно здание прогревается летом. В связи с этим, определению сопротивления теплопередаче в статье уделено наибольшее внимание. Наружные ограждающие конструкции, как правило, имеют многослойную структуру. Поэтому большинство задач теплового неразрушающего контроля сводится к определению характеристик материалов, составляющих многослойные структуры.

Большинство существующих методик определения сопротивления теплопередаче многослойных объектов в реальных условиях эксплуатации основаны на непосредственном измерении плотности теплового потока, проходящего через поверхность фрагмента исследуемой конструкции<sup>4,5</sup>. Однако современные методики приводят к существенной ошибке определения плотности теплового потока. Появление ошибки связано с существенным различием теплофизических характеристик поверхности фрагмента ограждающих конструкций и материала используемого датчика<sup>6</sup>. Большая погрешность в определении

плотности теплового потока приводит к некорректному определению величины сопротивления теплопередаче наружных ограждающих конструкций.

Существуют также и альтернативные методики определения сопротивления теплопередаче многослойных структур<sup>78</sup>, в которых используются лишь временные ряды температур поверхностей фрагмента, а также температур воздуха вблизи этих поверхностей. В этом случае плотность теплового потока является производной величиной от температур воздуха и поверхности стены, и ее удается исключить из расчетов. Однако описанная редукция процедуры измерения плотности теплового потока возможна лишь за счет существенного усложнения расчетов, а также за счет введения дополнительных предположений относительно граничных условий на поверхностях исследуемого фрагмента. В результате, из-за появления дополнительных ограничений понижается релевантность метода и сужается область его применимости на практике.

Плотность теплового потока является столь же фундаментальной характеристикой теплового процесса, как и температура. Поэтому для более достоверного определения теплофизических характеристик исследуемого объекта необходимо задействовать также информацию о плотностях тепловых потоков. Однако, как уже отмечалось, использование современных методик приводит к большой ошибке определения плотности теплового потока, протекающего через поверхность исследуемого объекта.

Целью настоящей работы является разработка альтернативного метода определения теплофизических характеристик многослойных объектов. В этом методе, с одной стороны, должны быть устранены ошибки, обусловленные некорректной регистрацией плотности теплового потока, а с другой стороны, для достоверного определения теплофизических характеристик исследуемого объекта, должна максимально полно использоваться информация о плотностях тепловых потоках, проходящих через поверхности объекта. Метод должен быть применим как в стационарном (т.е. при постоянных во времени температурах воздуха вблизи поверхностей исследуемого фрагмента), так и в нестационарном температурных режимах. Метод должен обеспечивать приемлемую с практической точки зрения точность определения искомых характеристик объекта<sup>9</sup>.

Статья разбита на четыре части. В первой части изложены принципиальные основы метода эталонного слоя, а также подробно описан математический аппарат, используемый при расчете теплофизических характеристик исследуемого объекта. Во второй части рассчитываются ошибки, обусловленные конечными размерами эталонного слоя, а также приводятся ограничения на линейные размеры эталонного слоя, при которых метод обеспечивает получение достоверных результатов. В третьей части рассматриваются особенности использования метода эталонного слоя в нестационарном температурном режиме. В четвертой части описывается возможная структура эталонного слоя и приводится ряд замечаний относительно применения метода эталонного слоя на практике.

## **1.Метод эталонного слоя**

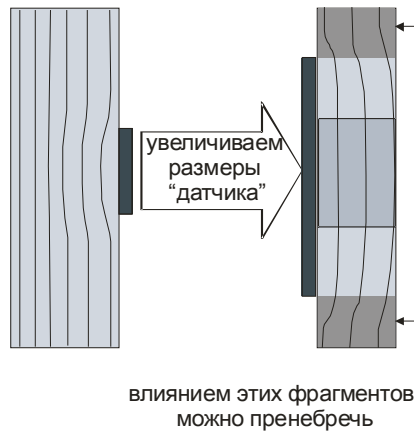


Рис 1. Основная идея метода эталонного слоя

Основная идея предлагаемого метода заключается в существенном увеличении размеров датчика теплового потока, прикрепленного к поверхности объекта, в плоскости, параллельной поверхности исследуемого фрагмента многослойного объекта (рис. 1). Если линейные размеры такого “датчика” в этой плоскости в несколько раз превышают толщину исследуемого фрагмента, можно пренебречь влиянием других фрагментов объекта и работать в так называемом одномерном приближении, пренебрегая неоднородностью пространственного распределения температурного поля в плоскости, параллельной поверхности фрагмента. При этом к фрагменту, фактически, добавляется еще один слой с известными характеристиками. Назовем добавляемую структуру эталонным слоем.

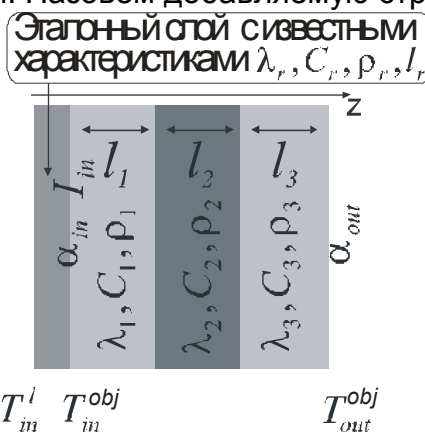


Рис. 2. Принципиальная схема определения теплофизических характеристик материалов слоев объекта

Перейдем к основным моментам предлагаемого метода. Рассмотрим фрагмент многослойного объекта (рис.2), состоящего из слоев с некоторыми теплофизическими (теплопроводность  $\lambda_i$ , теплоемкость  $C_i$  и плотность  $\rho_i$ ) и толщинами  $l_i$ . Именно эти величины, а также коэффициенты теплоотдачи поверхностей граничных слоев  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  необходимо определить в результате процедуры контроля. Прикрепим к внутренней поверхности фрагмента дополнительный слой известной толщины  $l_r$  с заданными теплофизическими характеристиками  $\lambda_r, C_r$  и  $\rho_r$ . Эту структуру в дальнейшем будем называть эталонным слоем. Для упрощения расчетов предположим, что и фрагмент и эталонный слой имеют бесконечные размеры в плоскости  $XY$  (плоскость, перпендикулярная оси  $Z$  на рис.2).

Для определения искомых теплофизических характеристик фрагмента необходимо измерить температуры поверхностей исследуемого фрагмента  $T_{in}^{obj}$  и

$T_{out}^{obj}$ , а также температуру поверхности эталонного слоя  $T_{in}^l$ , граничащую с воздухом внутри помещения.

Для определения теплофизических характеристик материалов, составляющих исследуемый фрагмент многослойной структуры, необходимо решить нестационарное одномерное уравнение теплопроводности<sup>10</sup> для эталонного слоя

$$\rho_r C_r \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1)$$

с известными значениями удельной теплоемкости  $C_r$ , плотности  $\rho_r$  и коэффициента теплопроводности  $\lambda_r$  эталонного слоя и заданными граничными условиями

$$\begin{aligned} T(z = z_{in}, t) &= T_{in}^l(t) \\ T(z = z_{out}, t) &= T_{in}^{obj}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

В результате решения уравнения (1)<sup>11</sup> можно получить величину плотности теплового потока, проходящего через внутреннюю поверхность фрагмента, как функцию времени  $I_{in}^m(t)$ . Уравнение теплопроводности (1) можно проинтегрировать численно, используя, например, неявную схему Кранка-Николсона.

Ту же самую величину плотности теплового потока можно рассчитать другим способом. Для этого необходимо решить нестационарное уравнение теплопроводности

$$\rho(z)C(z) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3)$$

с кусочно-постоянными величинами плотности  $\rho(z)$ , удельной теплоемкости  $C(z)$  и коэффициента теплопроводности  $\lambda(z)$ , описывающими теплофизические характеристики исследуемого фрагмента многослойного объекта.

Для решения уравнения (3) необходимо задать граничные условия первого рода на поверхностях фрагмента:

$$\begin{aligned} T(z = z_{in}, t) &= T_{in}^{obj}(t) \\ T(z = z_{out}, t) &= T_{out}^{obj}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

При решении уравнения (3) необходимо использовать стандартные условия непрерывности для плотности теплового потока и температуры на границе каких-либо двух слоев, составляющих фрагмент:

$$\begin{aligned} T(0^-, t) &= T(0^+, t) \\ \lambda(0^-) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{0^-} &= \lambda(0^+) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{0^+} \end{aligned} \quad (5)$$

Символ  $0^{+,-}$  обозначает точку, соответственно, слева либо справа от границы слоев в непосредственной близости к границе.

В результате решения уравнения теплопроводности (3) можно получить значение плотности потока, проходящего через внутреннюю поверхность фрагмента  $I_{in}^c(t, \{p\})$ , как функцию времени, набора теплофизических параметров и толщин слоев, составляющих фрагмент. Совокупность величин теплофизических параметров и значений толщин слоев обозначена здесь через  $\{p\}$ . Интегрирование уравнения (3) можно осуществить различными способами, наиболее простым из которых является численное интегрирование. Принципиально, это можно осуществить, например, следующим образом. Сначала

необходимо задать возможную область  $\Omega$  изменения параметров  $\{p\}$ . Затем для каждого набора значений параметров из выбранной области  $\Omega$  необходимо численно проинтегрировать уравнение (3) и, таким образом, найти функцию  $I_{in}^c(t, \{p\})$  для всех наборов параметров  $\{p\}$  из области  $\Omega$ . Описанный способ интегрирования уравнения (3) требует очень большого времени счета на ЭВМ. Более эффективные способы интегрирования уравнения (3) связаны с разложением температуры внутри фрагмента в интеграл Фурье по времени. Этот подход будет рассмотрен в третьей части статьи. Пока что отметим принципиальную возможность интегрирования уравнения (3) для различных наборов параметров  $\{p\}$ .

Заметим, что величина плотности потока, проходящего через внутреннюю поверхность фрагмента, уже рассчитана ранее с помощью эталонного слоя. Следовательно, при “правильных” значениях параметров  $\{p\}$  достигается совпадение плотностей тепловых потоков  $I_{in}^c(t, \{p\})$  и  $I_{in}^m(t)$ . На практике из-за ошибок измерения температуры и из-за различных неучтенных факторов, невозможно добиться идеального совпадения этих зависимостей, можно достичь лишь их максимальной близости.

Степень близости определяется так называемым функционалом правдоподобия<sup>7</sup>, который представляет собой нормированную на полное время измерения  $\tau_m$  и квадрат средней плотности потока  $(\bar{I}_m^{in})^2$  квадратичную невязку плотностей потоков  $I_{in}^c(t, \{p\})$  и  $I_{in}^m(t)$ , проинтегрированную по всему интервалу времени измерения:

$$D(\{p\}) = \frac{1}{\tau_m (\bar{I}_m^{in})^2} \int_0^{\tau_m} (I_{in}^c(t, \{p\}) - I_{in}^m(t))^2 dt$$

$$\bar{I}_m^{in} = \frac{1}{\tau_m} \int_0^{\tau_m} I_{in}^m(t) dt$$

(6)

Здесь  $\tau_m$  – полное время измерения температурных серий.

Чем меньше значение функционала правдоподобия, тем ближе кривые находятся друг к другу. Следовательно, находя глобальный минимум функционала правдоподобия, можно рассчитать истинные значения параметров  $\{p\}$ .

Итак, для нахождения теплофизических характеристик материалов слоев фрагмента необходимо минимизировать функционал правдоподобия (6).

Для определения коэффициентов теплоотдачи поверхностей фрагмента следует убрать эталонный слой. Далее необходимо измерить температурные истории воздуха внутри  $T_{in}^{air}(t)$  и снаружи фрагмента  $T_{out}^{air}(t)$ , а также температурные истории поверхностей фрагмента  $T_{in}^{obj}(t)$  и  $T_{out}^{obj}(t)$ . Под температурными историями здесь понимается ряд значений температур, измеренных в последовательные моменты времени. Используя температуры поверхностей фрагмента и зная параметры слоев  $\{p\}$ , можно проинтегрировать уравнение теплопроводности (3) с граничными условиями (4) и найти величины плотностей тепловых потоков через обе поверхности фрагмента  $I_{in}(t)$  и  $I_{out}(t)$  как функции времени. Для нахождения значений коэффициентов теплоотдачи ( $\alpha_{in}$  и  $\alpha_{out}$ ) достаточно разделить среднюю плотность теплового потока  $\bar{I}^{in,out}$  на среднюю разность температур воздуха и поверхности фрагмента:

$$\alpha_{in} = \frac{\tau_m \bar{I}_m^{in}}{\int_0^{\tau_m} (T_{in}^{air}(t) - T_{in}^{obj}(t)) dt}$$

$$\alpha_{out} = \frac{\tau_m \bar{I}_m^{out}}{\int_0^{\tau_m} (T_{in}^{air}(t) - T_{in}^{obj}(t)) dt} \quad (7)$$

$$\bar{I}_m^{in,out} = \frac{1}{\tau_m} \int_0^{\tau_m} I_{in,out}^m(t) dt$$

Итак, в данной части статьи показано, каким образом с помощью эталонного слоя можно определить теплофизические характеристики материалов слоев исследуемого фрагмента многослойного объекта, а также определить коэффициенты теплоотдачи поверхностей этого фрагмента.

## 2. Ограничения на размеры эталонного слоя

Естественно, изготовить эталонный слой бесконечных размеров невозможно. Поэтому, с практической точки зрения, важно исследовать ограничения на размеры эталонного слоя, при которых изложенный выше метод обеспечивает необходимую точность расчета теплофизических параметров исследуемого объекта.

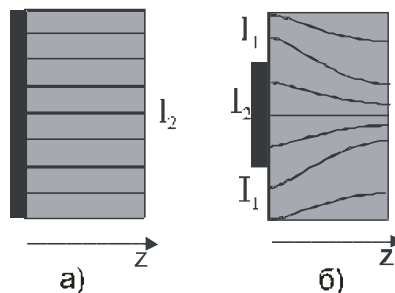


Рис.3. Поле плотностей тепловых потоков. а) – Идеальный случай эталонного слоя бесконечных размеров. б) – случай эталонного слоя конечных размеров.

В идеальном случае эталонного слоя бесконечных размеров поле плотностей тепловых потоков однородно, и линии теплового потока (т.е. кривые, касательные к которым сонаправлены с вектором плотности теплового потока) направлены перпендикулярно поверхности фрагмента (рис.3.а). Если размеры эталонного слоя конечны, то однородность поля тепловых потоков нарушается (рис.3.б). При этом линии теплового потока “огибают” эталонный слой.

Степень отклонения от одномерного приближения можно характеризовать параметром  $\xi(z)$ , который определяется следующим выражением:

$$\xi(z) = \left| \frac{I_z(z) - I_2}{I_2} \right| \quad (8)$$

Чем меньше параметр  $\xi(z)$ , тем более оправдано одномерное приближение. Здесь  $I_z(z)$  –  $z$  – компонента вектора плотности теплового потока. В идеальном случае датчика бесконечных размеров  $I_z(z) = I_2$ , поэтому  $\xi(z) = 0$ . В дальнейшем расчетах будем предполагать, что  $I_1$  в два раза больше  $I_2$ . При этом в области, где эталонный слой не влияет на температурное поле,  $\xi(z) = \frac{I_1 - I_2}{I_2} = 1$ . Вообще,

величина  $\xi$  приблизительно равна относительной ошибке определения сопротивления теплопередаче фрагмента в стационарном температурном режиме.

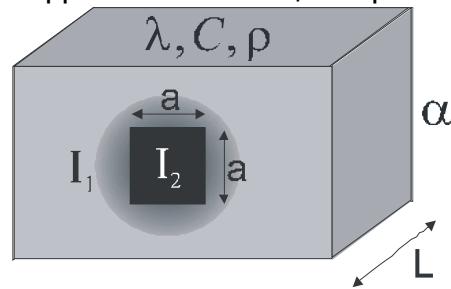


Рис.4. Принципиальная схема определения погрешности метода

Рассчитаем функцию  $\xi(z)$  для фрагмента объекта, состоящего всего лишь из одного слоя с некоторыми теплофизическими характеристиками: теплоемкостью  $C$ , теплопроводностью  $\lambda$ , плотностью  $\rho$  и коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$  на дальней поверхности (т.е. поверхности, противоположной той, на которой закреплен эталонный слой). На ближней поверхности фрагмента закреплен эталонный слой в форме квадрата со стороной  $a$  (рис. 4). Будем считать, что плотность теплового потока, протекающего поверхностью, проходящего через поверхность объекта в области крепления эталонного слоя, равна  $I_2$ , а вне эталонного слоя -  $I_1$ . Это приближение не совсем оправдано в данном случае, однако вполне подходит для оценок. Для расчетов температурного поля необходимо также задать значение температуры воздуха вблизи дальней от нас поверхности объекта.

Для нахождения функции  $\xi(z)$  предварительно необходимо рассчитать возмущение температурного поля, обусловленное прикреплением эталонного слоя к поверхности исследуемого объекта. Для нахождения возмущения температурного поля удобно представить температуру объекта в виде суперпозиции

$$T = \bar{T} + \delta T \quad (9)$$

где слагаемое  $\bar{T}$  описывает температурное поле в отсутствие слоя

$$\bar{T} \equiv \bar{T}(z) = T_0 + I_1 \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{L}{\lambda} \right) - \frac{I_1}{\lambda} z \quad (10)$$

а слагаемое  $\delta T$  описывает возмущение температурного поля, вызванное эталонным слоем.

В результате, для расчета возмущения температурного поля  $\delta T$  необходимо решить стационарную задачу теплопроводности<sup>6</sup>

$$\nabla^2 \delta T = 0 \quad (11)$$

со специфическими граничными условиями второго рода на ближней границе

$$-\lambda \left. \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right|_{z=0} = \delta I(x, y) \equiv \begin{cases} I_2 - I_1(x, y \in D) \\ 0(x, y \notin D) \end{cases} \quad (12)$$

и граничными условиями третьего рода на дальней границе

$$\lambda \left. \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right|_{z=L} = -\alpha \delta T|_{z=L} \quad (13)$$

Здесь  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа, а  $D$  – это область поверхности материала непосредственно под эталонным слоем.

Для решения этой задачи удобнее всего произвести Фурье преобразование решения  $\delta T$  по координатам  $x$  и  $y$  11:

$$\delta T(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_x, k_y, z) \exp(ik_x x) \exp(ik_y y) dk_x dk_y \quad (14)$$

Для нахождения вида функции  $f(k_x, k_y, z)$  необходимо подставить разложение (14) в уравнение теплопроводности (11). В результате, для  $f(k_x, k_y, z)$  можно получить следующее выражение:

$$f(k_x, k_y, z) = A(k_x, k_y) \exp(-k_z z) + B(k_x, k_y) \exp(k_z z) \\ k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (15)$$

Здесь  $A(k_x, k_y)$  и  $B(k_x, k_y)$  - коэффициенты, для нахождения которых необходимо использовать граничные условия.

Подставляя (15) и (14) в граничное условие при  $z = L$  (13), получаем соотношение, связывающее коэффициенты  $A(k_x, k_y)$  и  $B(k_x, k_y)$ :

$$B(k_x, k_y) = -A(k_x, k_y) \frac{\alpha - k_z \lambda}{\alpha + k_z \lambda} \exp(-k_z L) \quad (16)$$

Для нахождения вида  $A(k_x, k_y)$  нужно использовать граничное условие (12). При этом необходимо подставить разложение (14) в граничное условие (12), предварительно представив функцию  $\delta I(x, y)$  в виде интеграла Фурье, и приравнять соответствующие амплитуды Фурье-гармоник. В результате, для  $A(k_x, k_y)$  можно получить следующее выражение:

$$A(k_x, k_y) = \Delta \frac{F(k_x, k_y)}{\lambda k_z \left( 1 + \frac{\alpha - k_z \lambda}{\alpha + k_z \lambda} \exp(-2k_z L) \right)} \\ \Delta = I_2 - I_1 \quad (17)$$

Здесь  $F(k_x, k_y)$  - это Фурье-образ функции  $\frac{\delta I(x, y)}{\Delta}$ , который для датчика в форме квадрата со стороной  $a$  представим в следующем виде:

$$F(k_x, k_y) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{k_x} \frac{\sin\left(\frac{k_y a}{2}\right)}{k_y} \quad (18)$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\tilde{L}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} = \frac{L, x, y, z}{a}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{a\alpha} \quad (19)$$



Подставляя формулы (15)-(18) в Фурье-разложение (14) и переходя к переменным (19), можно получить следующее выражение для возмущения температурного поля  $\delta T$  :

$$\delta T(x, y, z) = \Delta \frac{a}{\lambda} \tilde{K}(\tilde{\lambda}, \tilde{L}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (20)$$

$$\tilde{K}(\tilde{\lambda}, \tilde{L}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \tilde{R}(\tilde{\lambda}, \tilde{L}, \tilde{z}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_y) \exp(i\tilde{k}_x \tilde{x}) \exp(i\tilde{k}_y \tilde{y}) d\tilde{k}_x d\tilde{k}_y \quad (21)$$

$$\tilde{R}(\tilde{\lambda}, \tilde{L}, \tilde{z}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_y) = \frac{F(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)}{\tilde{k}_z} \frac{\exp(-\tilde{k}_z \tilde{z}) - \frac{1 - \tilde{k}_z \tilde{\lambda}}{1 + \tilde{k}_z \tilde{\lambda}} \exp(-\tilde{k}_z (2\tilde{L} - \tilde{z}))}{1 + \frac{1 - \tilde{k}_z \tilde{\lambda}}{1 + \tilde{k}_z \tilde{\lambda}} \exp(-2\tilde{k}_z \tilde{L})} \quad (22)$$

$$F(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\delta I(x, y)}{\Delta} \exp(-i\tilde{k}_x \tilde{x}) \exp(-i\tilde{k}_y \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}$$

$$\tilde{k}_z = \sqrt{\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2} \quad (23)$$

Функция  $F(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ , фактически, содержит информацию о форме эталонного слоя. Для эталонного слоя квадратной формы  $F(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$  определяется следующим выражением:

$$F(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(0.5\tilde{k}_x \tilde{x})}{\tilde{k}_x} \frac{\sin(0.5\tilde{k}_y \tilde{y})}{\tilde{k}_y} \quad (24)$$

Нормальная составляющая плотности теплового потока  $I_z(z)$  определяется следующим выражением:

$$I(z) = I_1 + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \delta T(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (25)$$

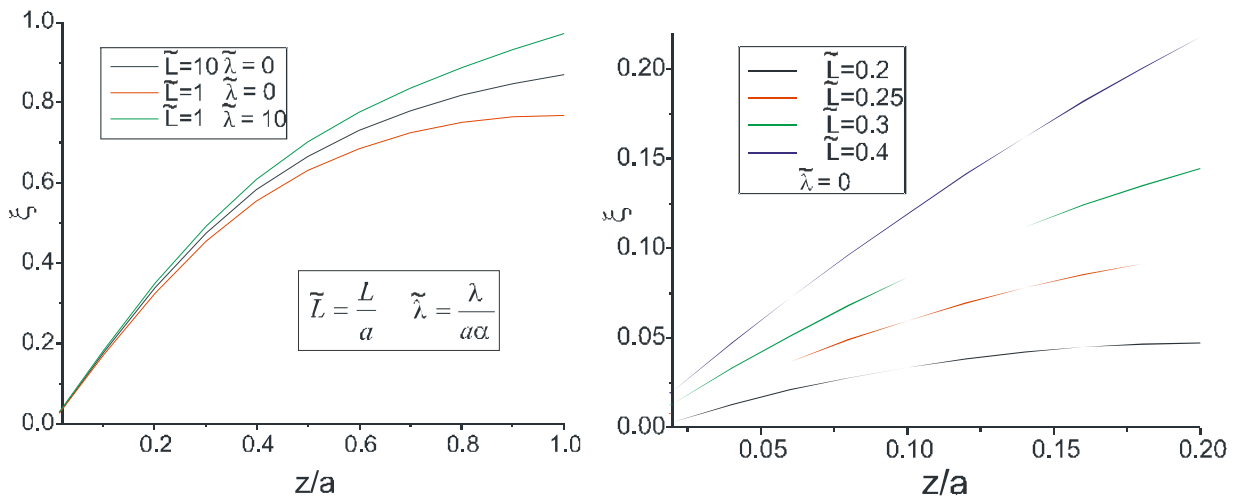


Рис. 5. График функции  $\xi(z)$ , построенные при различных значениях параметров  $\tilde{L}$  и  $\tilde{\lambda}$ .

Графики функции  $\xi(z)$ , рассчитанной согласно (8), представлены на рис 5. Оказывается, что если толщина объекта больше размера эталонного слоя,

одномерное приближение неприменимо уже при  $z \sim \frac{1}{3}a$ . При этом ошибка определения сопротивления теплопередаче достигает 50%. На левом графике приведены зависимости  $\xi(z)$  для разных толщин фрагмента ( $L = 10a$  и  $L = a$ ) и разных значениях приведенного коэффициента теплопроводности фрагмента  $\tilde{\lambda}$ .

Решение оказывается весьма чувствительным к толщине объекта  $L$ . На правом графике построены зависимости  $\xi(z)$  для разных толщин объекта  $L$ . Из графиков видно, что ошибка, возникающая при использовании одномерного приближения на расстоянии  $z = 0.2a$ , уменьшается с 25% до 5% при уменьшении толщины объекта, соответственно, с  $0.4a$  до  $0.2a$ . Из построенных зависимостей следует, что для расчета сопротивления теплопередаче с ошибкой, меньшей 10%, необходимо использовать эталонный слой с линейными размерами, в 4-5 раз превышающими толщину стены.

### 3. Частотный анализ функционала правдоподобия

Расчеты теплофизических характеристик многослойных объектов, описанные в первой части, предполагали численное интегрирование<sup>12</sup> уравнения теплопроводности (3). В этой части будет рассмотрен альтернативный способ расчета и минимизации функционала правдоподобия.

Для того чтобы проинтегрировать уравнение теплопроводности (3), необходимо задать некоторое начальное распределение температуры в объеме объекта. Наиболее простой способ задания начальных условий основывается на предположении о стационарности температурного режима до момента начала измерений. В этом случае начальное распределение температуры находится из решения стационарного уравнения теплопроводности. При этом температуры поверхностей определяются показаниями датчиков температуры в момент начала измерений температурных серий.

По-видимому, физически более оправданным является предположение о периодичности температурной истории до момента начала измерений. В этом случае, температурное поле внутри объекта можно разложить в ряд Фурье по времени:

$$T(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T(\omega_n, z) \exp(-i\omega_n t)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\tau_m} n$$
(26)

Здесь  $\tau_m$  - полное время измерения температурных серий.

Из условия вещественности температуры  $T(z, t)$  следует простое соотношение, связывающее амплитуды Фурье-гармоник:

$$T(\omega_{-n}, z) = (T(\omega_n, z))^*$$
(27)

Из этого соотношения следует, что для расчета температурного поля  $T(z, t)$  достаточно найти выражения для амплитуд гармоник  $T(\omega_n, z)$  при  $n \geq 0$ , а выражения для остальных гармоник рассчитать с помощью (27). Подставляя разложение (26) в уравнение теплопроводности (3), находим уравнение для нахождения амплитуд Фурье-гармоник:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(z) \frac{\partial}{\partial z} T(\omega_n, z) \right) + i\omega_n C(z) \rho(z) T(\omega_n, z) = 0$$
(28)

Так как материал внутри слоев исследуемой структуры однороден, то функции  $C(z)$ ,  $\rho(z)$  и  $\lambda(z)$  можно считать кусочно-постоянными внутри объекта.

В этом случае  $n$ -ая Фурье-гармоника внутри  $i$ -го слоя объекта определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} T_i(\omega_n, z) &= A_i z + B_i, n = 0 \\ T_i(\omega_n, z) &= A_i \exp(k_n z) + B_i \exp(-k_n z), n > 0 \\ k_n &= \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega_n C_i \rho_i}{\lambda_i}} \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь  $A$  и  $B$  - некоторые константы.

Слагаемые в (29) по своему виду совпадают с известными выражениями для плоских волн с комплексным волновым вектором. Поэтому далее в тексте слагаемое  $A_i \exp(k_n z)$  будет рассматриваться как прямая волна, а  $B_i \exp(-k_n z)$  - как обратная волна.

Из (5) и (26) следует, что условия непрерывности справедливы для всех Фурье-гармоник как температуры, так и плотности теплового потока:

$$\begin{aligned} T_i(\omega_n, +) &= T_{i+1}(\omega_n, -) \\ \lambda_i \frac{\partial}{\partial z} T_i(\omega_n, +) &= \lambda_{i+1} \frac{\partial}{\partial z} T_{i+1}(\omega_n, -) \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь символы  $+, -$  обозначают координаты точек вблизи правой и левой границы слоя, соответственно.

Для решения уравнения теплопроводности необходимо также задать граничные условия для амплитуд гармоник  $T(\omega_n, z = z_{in, out})$  на поверхностях объекта. Для этого необходимо подставить в граничное условие (4) разложение (26), умножить (4) на  $\exp(i\omega_n t)$  и проинтегрировать полученное выражение по времени на интервале от 0 до  $\tau_m$ . В результате, граничные условия на амплитуды Фурье-гармоник приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} T(\omega_n, z = z_{in, out}) &= T^{in, out}(\omega_n) \\ T^{in, out}(\omega_n) &= \frac{1}{2\pi \tau_m} \int_0^{\tau_m} T^{in, out}(t) \exp(i\omega_n t) dt \end{aligned} \quad (31)$$

Найдя амплитуды Фурье-гармоник  $T(\omega_n, z)$ , плотность теплового потока, проходящего через поверхности объекта, можно рассчитать по следующей формуле:

$$\begin{aligned} I^{in, out}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I^{in, out}(\omega_n) \exp(-i\omega_n t) \\ I^{in, out}(\omega_n) &= \lambda(z = z_{in, out}) \left. \frac{\partial T(\omega_n, z)}{\partial z} \right|_{z=z_{in, out}} \end{aligned} \quad (32)$$

Рассчитаем амплитуду нулевой Фурье-гармоники плотности теплового потока  $I^{in, out}(\omega_n = 0)$ . Пусть исследуемый объект состоит из  $N$  слоев, а  $\rho_i, C_i, \lambda_i$  и  $l_i$  - плотность, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности и толщина  $i$ -го слоя. Температура в  $i$ -м слое определяется формулой (29) при  $n = 0$ . Используя условия непрерывности (30) и граничные условия (31), можно получить следующее уравнение для нахождения амплитуд нулевых Фурье-гармоник плотности теплового потока:

$$\begin{aligned} I^{in, out}(\omega_n = 0) &= \frac{T^{out}(\omega_n = 0) - T^{in}(\omega_n = 0)}{R} \\ R &= \sum_{i=1}^N \frac{l_i}{\lambda_i} \end{aligned} \quad (33)$$

Выражение (33) представляет собой хорошо известную формулу, связывающую тепловой поток и разность температур на поверхностях объекта в случае стационарного процесса теплопередачи, в котором лишь нулевая Фурье-гармоника температуры и теплового потока отлична от нуля.

Теперь рассчитаем амплитуды Фурье-гармоник плотности теплового потока  $I^{in,out}(\omega_n)$  для  $n > 0$ . Температура внутри  $i$ -го слоя определяется формулой (29). Для большей компактности формул введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_i^0 &= A_i(\omega_n) \exp(k_n z_i^l), & A_i^1 &= A_i(\omega_n) \exp(k_n z_i^r) \\ B_i^0 &= B_i(\omega_n) \exp(-k_n z_i^l), & B_i^1 &= B_i(\omega_n) \exp(-k_n z_i^r) \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь  $z_i^{l,r}$  - координата, соответственно, левой и правой границ  $i$ -го слоя.

Из (34) следует соотношение, связывающее амплитуды прямой и обратной волн у противоположных границ  $i$ -го слоя:

$$\begin{pmatrix} A_i^1 \\ B_i^1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} A_i^0 \\ B_i^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \exp(k_n(z_i^r - z_i^l)) & 0 \\ 0 & \exp(-k_n(z_i^r - z_i^l)) \end{pmatrix} \quad (35)$$

Из условий непрерывности температур и плотностей тепловых потоков на границе слоев (30) следует соотношение, связывающее амплитуды прямой и обратной волн справа и слева от границы  $i$ -го и  $i+1$ -го слоев:

$$\begin{pmatrix} A_{i+1}^0 \\ B_{i+1}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} A_i^1 \\ B_i^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{\lambda_{i+1} k_{i+1} + \lambda_i k_i}{2\lambda_{i+1} k_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_{i+1} k_{i+1} - \lambda_i k_i}{\lambda_{i+1} k_{i+1} + \lambda_i k_i} \\ \frac{\lambda_{i+1} k_{i+1} - \lambda_i k_i}{\lambda_{i+1} k_{i+1} + \lambda_i k_i} & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Здесь  $k_i$  - волновой вектор в  $i$ -м слое:  $k_i = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega_n C_i \rho_i}{\lambda_i}}$ .

Удобно также ввести матрицу  $\mathbf{M}_{i,i+1}$ , связывающую амплитуды прямой и обратной волн вблизи левых границ соседних слоев:

$$\begin{pmatrix} A_{i+1}^0 \\ B_{i+1}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{i,i+1} \begin{pmatrix} A_i^0 \\ B_i^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{i,i+1} = \mathbf{K}_{i,i+1} \mathbf{T}_i \quad (37)$$

Последовательно применяя формулу (37) для всех слоев объекта, можно получить связь между амплитудами прямой и обратной волн вблизи противоположных поверхностей объекта, состоящего из  $N$  слоев:

$$\begin{pmatrix} A_N^1 \\ B_N^1 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} A_1^0 \\ B_1^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{T}_N \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{M}_{N-i,N-i+1} \quad (38)$$

Для нахождения неизвестных амплитуд  $A_1^0$  и  $B_1^0$  необходимо воспользоваться граничными условиями (31):

$$\begin{aligned} A_1^0 + B_1^0 &= T^{in}(\omega_n) \\ A_N^1 + B_N^1 &= T^{out}(\omega_n) \end{aligned} \quad (39)$$

В результате, для неизвестных амплитуд  $A_1^0$  и  $B_1^0$  получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
A_1^0 &= \frac{T^{out}(\omega_n) - T^{in}(\omega_n)(F_{12} + F_{22})}{F_{11} + F_{21} - F_{12} - F_{22}} \\
B_1^0 &= -\frac{T^{out}(\omega_n) - T^{in}(\omega_n)(F_{11} + F_{21})}{F_{11} + F_{21} - F_{12} - F_{22}}
\end{aligned} \tag{40}$$

Подставляя (40) в (29) и (32), получаем следующие выражения для Фурье-гармоник плотности теплового потока:

$$\begin{aligned}
I^{in}(\omega_n) &= -\lambda_1 k_1 (A_1^0 - B_1^0) = \frac{\lambda_1 k_1 [2T^{out}(\omega_n) - T^{in}(\omega_n)(F_{11} + F_{21} + F_{12} + F_{22})]}{F_{12} + F_{22} - F_{11} - F_{21}} \\
I^{out}(\omega_n) &= -\lambda_N k_N (A_N^1 - B_N^1) = \frac{\lambda_N k_N [2T^{in}(\omega_n)(F_{21}F_{12} - F_{11}F_{22}) - T^{out}(\omega_n)(F_{12} + F_{21} - F_{11} - F_{22})]}{F_{12} + F_{22} - F_{11} - F_{21}}
\end{aligned} \tag{41}$$

Полученные выше выражения существенно упрощаются в случае однослойного объекта:

$$\begin{aligned}
I^{in}(\omega_n) &= T^{in}(\omega_n) \frac{\lambda k}{\tanh \lambda k} - T^{out}(\omega_n) \frac{\lambda k}{\sinh \lambda k} \\
I^{out}(\omega_n) &= T^{in}(\omega_n) \frac{\lambda k}{\sinh \lambda k} - T^{out}(\omega_n) \frac{\lambda k}{\tanh \lambda k}
\end{aligned} \tag{42}$$

Выражения для высокочастотных гармоник ( $kl \gg 1$ ) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}
I^{in}(\omega_n) &= \lambda k T^{in}(\omega_n) \\
I^{out}(\omega_n) &= -\lambda k T^{out}(\omega_n)
\end{aligned} \tag{43}$$

Выражения для низкочастотных гармоник ( $kl \ll 1$ ) сводятся к следующей формуле:

$$I^{in}(\omega_n) = I^{out}(\omega_n) = \frac{T^{out}(\omega_n) - T^{in}(\omega_n)}{R}, \quad R = \frac{l}{\lambda} \tag{44}$$

Теперь преобразуем функционал правдоподобия, подставив в (6) разложение (32):

$$\begin{aligned}
D(\{p\}) &= \frac{1}{\tau_m (\bar{I}_m^{in})^2} \int_0^{\tau_m} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_c^{in}(\{p\}, \omega_n) \exp(-i\omega_n t) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_m^{in}(\omega_n) \exp(-i\omega_n t) \right)^2 dt = \\
&= \frac{1}{\tau_m (\bar{I}_m^{in})^2} \int_0^{\tau_m} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (I_c^{in}(\{p\}, \omega_n) - I_m^{in}(\omega_n)) \exp(-i\omega_n t) \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} (I_c^{in}(\{p\}, \omega_{n'}) - I_m^{in}(\omega_{n'})) \exp(-i\omega_{n'} t) \right) dt = \\
&= \frac{1}{\tau_m (\bar{I}_m^{in})^2} \int_0^{\tau_m} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (I_c^{in}(\{p\}, \omega_n) - I_m^{in}(\omega_n)) \exp(-i\omega_n t) \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} (I_c^{in}(\{p\}, \omega_{n'}) - I_m^{in}(\omega_{n'}))^* \exp(i\omega_{n'} t) \right) dt = \\
&= \frac{1}{\tau_m (\bar{I}_m^{in})^2} \int_0^{\tau_m} \left( \sum_{n, n'=-\infty}^{+\infty} (I_c^{in}(\{p\}, \omega_n) - I_m^{in}(\omega_n)) (I_c^{in}(\{p\}, \omega_{n'}) - I_m^{in}(\omega_{n'}))^* \exp(-i(\omega_n - \omega_{n'}) t) \right) dt = \\
&= \frac{1}{(\bar{I}_m^{in})^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |I_c^{in}(\{p\}, \omega_n) - I_m^{in}(\omega_n)|^2
\end{aligned} \tag{45}$$

Здесь  $I_c^{in}(\{p\}, \omega_n)$  - Фурье-гармоника плотности теплового потока, рассчитанная, исходя из значений температуры на поверхностях объекта.

$I_c^{in}(\{p\}, \omega_n)$  зависит от параметров слоев  $\{p\}$ , однако эта зависимость аналитична и определяется формулами (41). В результате, частотный анализ функционала правдоподобия позволяет исключить численное интегрирование уравнения теплопроводности из расчетов, что, в свою очередь, позволяет значительно сократить время расчетов.  $I_m^{in}(\omega_n)$  - Фурье-гармоника плотности теплового потока, рассчитанная, исходя из значений температуры на поверхностях эталонного слоя.

При выводе (45) была использована вещественность величины плотности теплового потока и ортонормированность базисных функций  $\frac{1}{\sqrt{\tau_m}} \exp(i\omega_n t)$  на интервале  $[0, \tau_m]$ .

Представление функционала правдоподобия в виде (45) дает достаточно широкие возможности для анализа. Предположим, что исследуемый фрагмент состоит всего из одного слоя. В этом случае, как видно из формулы (43), высокочастотные слагаемые ( $kl \gg 1$ ) зависят лишь от свойств малой области фрагмента вблизи его внутренней поверхности и не содержат интегральной информации о фрагменте. Этот вывод верен и в случае многослойных объектов. Качественное объяснение состоит в следующем. Температурное поле внутри слоев структуры можно представить в виде суперпозиции прямой и обратной затухающих волн (29). Коэффициент пространственного затухания пропорционален квадратному корню из частоты Фурье-гармоники, поэтому высокочастотные гармоники быстро затухают при удалении от поверхности объекта. Если пространственный масштаб затухания много меньше толщины слоя структуры, то соответствующая гармоника "не чувствует" многослойности структуры.

Теперь рассмотрим низкочастотные ( $kl \ll 1$ ) члены. Как следует из (44), единственным параметром структуры, от которого зависят низкочастотные Фурье-гармоники плотности теплового потока, является сопротивление теплопередаче объекта. Следовательно, минимизация низкочастотных членов функционала правдоподобия позволяет найти искомое сопротивление теплопередаче исследуемого объекта. С одной стороны, необходимо учесть как можно больше слагаемых в выражении (45). Действительно, каждое низкочастотное слагаемое несет информацию о сопротивлении теплопередаче, поэтому, чем больше слагаемых учитывается в расчете, тем достовернее получаемый результат. С другой стороны, слагаемые, не удовлетворяющие условию  $kl \ll 1$ , несут информацию не только о сопротивлении теплопередаче, но и о других теплофизических характеристиках объекта. Поэтому, минимизация этих членов только за счет варьирования сопротивления теплопередаче не корректна.

Критерий, по которому выбираются низкочастотные слагаемые, связан с точностью расчетов сопротивления теплопередаче. Допустим, что необходимо определить сопротивление теплопередаче с точностью 10%. В этом случае, низкочастотными являются те члены в (45), для которых (44) справедливо с точностью 10%. Из (42) следует, что искомый критерий имеет следующий вид:

$$|1 - \tanh k_n l| \leq 0.1 \quad (46)$$

Все слагаемые (45), удовлетворяющие этому критерию, несут информацию лишь о сопротивлении теплопередаче и должны быть сохранены, остальные исключаются из расчетов.

Слагаемые, не удовлетворяющие условию (46) также несут информацию о сопротивлении теплопередаче стены. Однако они существенно зависят и от таких характеристик стены, как теплоемкость, плотность, толщина и коэффициент теплопроводности всех слоев стены. Минимизация этих слагаемых может быть осуществлена и при постоянном значении сопротивления теплопередаче за счет

варьирования толщин, плотностей, коэффициентов теплопроводности или удельных теплоемкостей слоев.

Итак, для определения сопротивления теплопередаче объекта достаточно минимизировать лишь низкочастотные члены функционала правдоподобия.

Этот вывод справедлив и для многослойных объектов. Действительно, формула (44) справедлива и для многослойных объектов при подстановке в (44)

выражения для сопротивления теплопередаче многослойных объектов:  $R = \sum_{i=1}^N \frac{l_i}{\lambda_i}$ .

#### 4. Конструкция эталонного слоя

Рассмотрим более подробно внутреннюю структуру эталонного слоя (рис.6).

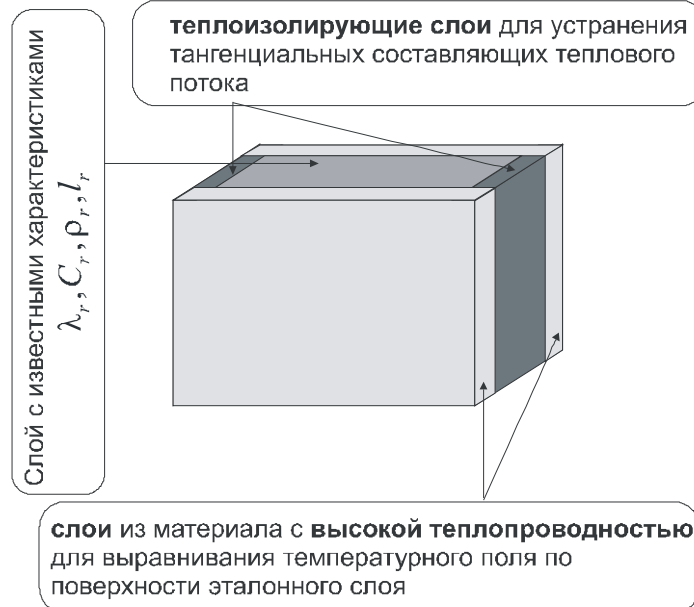


Рис.6. Конструкция эталонного слоя

Основой эталонного слоя является материал с известной толщиной и теплофизическими характеристиками. Слой этого материала должен выбираться достаточно тонким для возможности использования одномерного приближения.

Боковые поверхности слоя заключаются в обкладки из материала с большим сопротивлением теплопередаче. Это необходимо для того, чтобы исключить тангенциальные составляющие плотности теплового потока.

Нормальные поверхности заключаются в обкладки из материала с высокой теплопроводностью для того, чтобы обеспечить выравнивание пространственного распределения температурного поля по поверхности исследуемого фрагмента в области крепления эталонного слоя.

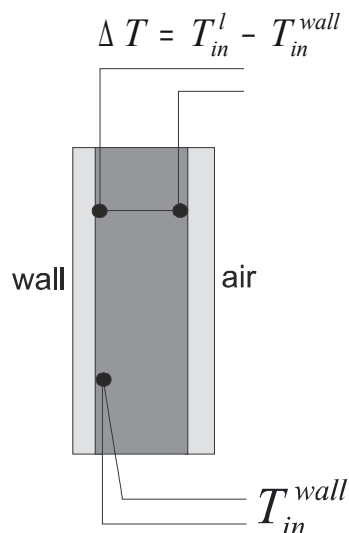


Рис.7. Схема расположения датчиков внутри эталонного слоя

К нормальным поверхностям ближе к центру крепятся два датчика (см. рис. 7). Первый представляет собой термопару, измеряющую разность температур поверхностей эталонного слоя. Второй датчик измеряет абсолютную температуру поверхности эталонного слоя, которая крепится к исследуемому фрагменту.

Эталонный слой может состоять из нескольких фрагментов для того, чтобы покрыть наибольшую площадь поверхности исследуемого фрагмента объекта.

Следует заметить, что здесь представлена лишь рекомендуемая структура эталонного слоя. Реальная структура определяется возможностями изготовителя и объектами, для исследования которых используется эталонный слой.

В заключение, обсудим основные моменты метода эталонного слоя. Предложенный метод позволяет достоверно определить сопротивление теплопередаче объекта исключительно на основе из результатов измерений без дополнительных предположений относительно структуры объекта. Второе существенное достоинство метода заключается в использовании граничных условий первого рода при интегрировании уравнения теплопроводности, что позволяет учесть как конвективную, так и лучистую составляющие теплового потока, падающего на поверхность объекта эталонного слоя.

Наиболее серьезное приближение метода эталонного слоя связано с предположением об одномерности задачи теплопроводности, которое справедливо, если линейные размеры слоя более чем в четыре раза превышают толщину исследуемого объекта. На практике это требование не всегда выполнимо. Однако это связано не с ограничениями на размеры эталонного слоя, а с тем, что в исследуемом объекте невозможно выделить фрагмент, для которого справедливо одномерное приближение (например, стена здания неоднородна, и расстояние между соседними окнами не всегда превышает толщину стены в 4-5 раз). Таким образом, ограниченная применимость одномерного приближения является общей проблемой современных методов теплового неразрушающего контроля.

### Заключение

Таким образом, разработан метод эталонного слоя, позволяющий определять теплофизические характеристики многослойных объектов. Искомые характеристики объекта рассчитываются на основе процедуры минимизации функционала правдоподобия. Метод эталонного слоя существенно основывается на предположении об одномерном характере процесса теплопередачи внутри объекта, поэтому метод применим при условии, что линейные размеры эталонного слоя в плоскости, параллельной поверхности объекта, более чем в 4 раза



превосходят толщину объекта. Использование частотного анализа функционала правдоподобия значительно уменьшает время расчетов и повышает достоверность определения сопротивления теплопередаче многослойных объектов. В статье предложена возможная конструкция эталонного слоя. Практическое использование метода эталонного слоя позволяет обеспечить высокую достоверность определения теплофизических характеристик многослойных объектов.



- <sup>1</sup>Будадин О.Н., Троицкий-Марков Т.Е., Абрамова Е.В., Сучков В.И. Патент на изобретение № 2151388. Способ неразрушающего контроля качества объекта.
- <sup>2</sup> Будадин О.Н., Троицкий-Марков Т.Е., Абрамова Е.В., Сучков В.И. Патент на изобретение № 2162597. Устройство для неразрушающего контроля качества объекта.
- <sup>3</sup> Будадин О.Н., Потапов А.И., Колганов В.И. и др. Тепловой метод неразрушающего контроля изделий. – М., Наука, 2002, 476С.
- <sup>4</sup> Будадин О.Н., Абрамова Е.В., Лебедев О.В., Родин М.А. Аппаратура теплового неразрушающего контроля и определения теплотехнических характеристик зданий и строительных сооружений – Строительные материалы, оборудование, технологии 21 века - №9(44), 2002г.
- <sup>5</sup> ГОСТ 25380-82 Здания и сооружения. Метод измерения плотности тепловых потоков, проходящих через ограждающие конструкции. Утвержден и введен в действие постановлением Государственного комитета СССР по делам строительства от 14 июня 1982 г. № 182.
- <sup>6</sup> Graaf F. van der. Heat Flux Sensors – A comprehensive series, Volume 4, Chapter 8, VCH Verlagsgesellschaft, Germany, 1989.
- <sup>7</sup> Будадин О.Н., Абрамова Е.В., Родин М.А., Лебедев О.В. Тепловой неразрушающий контроль зданий и строительных сооружений. – Дефектоскопия, № 5, 2003, с. 77-94.
- <sup>8</sup> Казаров Ю.К., Будадин О.Н., Троицкий-Марков Т.Е., Лебедев О.В., Измерения в электромагнитных полях. – М., ВИНТИ РАН, 2003, 196С.
- <sup>9</sup> ГОСТ 26254-84. Здания и сооружения. Методы определения сопротивления теплопередаче ограждающих конструкций. Введен постановлением Государственным комитетом СССР по делам строительства от 2.08.1984г. № 127, срок введения установлен с 01.01.85г. УДК 624.01.001.4:006.354.
- <sup>10</sup> Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. Изд. 2-е. – М.: Энергия, 1977.
- <sup>11</sup> Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1977.
- <sup>12</sup> Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002 г.