

УДК 531.3

© 2013 г. Ахметханов Р.С.

### ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ОДНО-, ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫХ МАССИВОВ ДАННЫХ

Статья посвящена применению вейвлет-преобразований для выявления локальных масштабных особенностей массивов данных, полученных при диагностике технических систем или из эксперимента (натурного или численного). Используется кратнo-масштабный анализ для выявления энергетических характеристик частотных составляющих. Приведены примеры использования вейвлет-преобразований при анализе локальных масштабных особенностей временных рядов при диагностике технических систем и изображений микрошлифов при циклических нагрузочных испытаниях образцов конструкционных материалов.

При эксплуатации технических систем происходит накопление повреждений, которые приводят к разрушению элементов конструкций и, в конечном счете, к авариям и катастрофам. Аварии на объектах с большими запасами накопленной энергии или опасного вещества могут приводить к значительным ушербам и человеческим жертвам. В связи с этим большое значение для обеспечения безопасности объекта, персонала, населения и окружающей среды имеет ранняя диагностика предаварийного состояния технического объекта.

При диагностике технических систем и экспериментальных исследованиях образцов и материалов можно использовать различные методы анализа данных. Эти данные могут быть представлены в виде массивов различной размерности (как правило, это одномерные и двумерные, но могут быть и трехмерные массивы).

Часто для оценки состояния технических объектов используют временные ряды. К этим данным можно применить вейвлет-анализ, который позволяет выделить масштабные и локальные особенности. С его помощью можно определить предвестники изменения динамического режима системы, и по ним вероятность возникновения аварии или катастрофы. Переход с одного динамического режима (аттрактора) на другой может быть катастрофическим. Такой переход можно определить как предвестник. Например, известно, что в некоторых случаях предвестниками аварий в технических системах или возникновения землетрясения может быть фликкер-шум.

Обычно анализ временных рядов заключается в построении математической модели ряда, с помощью которой можно объяснить их поведение и осуществить прогноз его дальнейшего поведения. Усовершенствование методов приближения функций, Фурье-анализа привело к разработке нового математического аппарата вейвлет-преобразования и основанного на нем вейвлет-анализа. Здесь удалось уйти от многих недостатков методов, используемых для анализа временных рядов. Теория вейвлетов берет истоки в таких классических областях математики, как теория функций вещественного переменного, теория ортогональных рядов, преобразование Фурье и другие интегральные преобразования, теория функций комплексного переменного, функциональный анализ [1].

Теория вейвлетов и области их применения неразрывно связаны с развитием прикладных областей современной науки: цифровая обработка сигналов и изображений, теория фильтрации и кодирования, теория сплайнов, дискретных и быстрых преобразований в приложении к медицине, механике и т.д.

В общем виде вейвлет-преобразование  $W\{f(t)\}$  функции  $f(t)$  состоит в разложении этой функции по базису, сконструированному из семейства функций  $\psi_{ab}(t)$  [1–3]

$$W\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{ab}(t)dt. \quad (1)$$

Это семейство нормированных на  $|a|^{-1/2}$  функций  $\psi_{ab}(t)$

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2)$$

получено из функции-прототипа  $\psi(t)$ , называемой материнским вейвлетом, путем масштабных преобразований (дилатаций), определяемых действительным числом  $\infty > a > 0$ , и путем параллельных переносов (трансляций), определяемых действительным числом  $\infty > b > -\infty$ . Числа  $a$  и  $b$  называют соответственно параметрами масштаба и сдвига.

Интегральное вейвлет-преобразование по определению (1) локализует сигнал во “временном окне”  $\xi_t [b + at - a\Delta_\psi, b + at + a\Delta_\psi]$ , с центром окна в  $b + at$  и шириной, равной  $2a\Delta_\psi$ , где  $\Delta_\psi$  – радиус функции окна. В анализе сигналов это носит название “временная локализация”.

Локализация в частотной области осуществляется “частотным окном”  $\xi_f$

$$\left[ \frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_\psi, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_\psi \right],$$

центр которого находится в точке  $\omega^*/a$ , а ширина равна  $\Delta_\psi/a$ . Частотно-временное окно сужается по переменной  $t$  при больших частотных центрах  $\omega^*/a$ ; в то же время площадь частотно-временного окна остается постоянной, равной  $4\Delta_\psi\Delta_\psi$ .

Вейвлеты, являясь функциями времени, имеют свое частотное представление, называемое средней круговой частотой вейвлета  $\omega_0$ . В частотной области спектры многих вейвлетов напоминают всплеск, пик которого приходится на частоту  $\omega_0$ . Если приближенно трактовать вейвлет как модулированную синусоиду, то ее частота и будет средней частотой вейвлета.

Прямое непрерывное вейвлет-преобразование означает разложение произвольного входного сигнала на совокупность волновых пакетов – вейвлетов, которые характеризуются четырьмя принципиально важными свойствами [1–3]: имеют вид коротких, локализованных во времени (или в пространстве), волновых пакетов с нулевым значением интеграла; обладают возможностью сдвига по времени; способны к масштабированию (сжатию/растяжению); имеют ограниченный (или локальный) частотный спектр.

Вейвлет-анализ часто рассматривают в качестве математического микроскопа, для которого локальная позиция точки фокусировки и увеличение определяется параметрами сдвига  $b$  и масштаба  $a$ , оптические возможности определяются выбором вейвлета  $\psi(t)$ . Это сравнение отражает мощное свойство вейвлет-анализа сохранять хорошую разрешающую способность на разных временных и частотных масштабах.

Результатом вейвлет-преобразования временного ряда является двухмерный массив коэффициентов (амплитуд) этого преобразования в координатах “частотный масштаб  $a$ , временная локализация  $b$ ”. Он называется вейвлет-спектром  $W_{ab}\{f(t)\}$  и несет информацию об изменениях относительного энергетического вклада частотных со-

ставляющих сигнала во времени. Вейвлет-спектр  $W_{ab}\{f(t)\}$  временного ряда представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Чаще используется двухмерная визуализация в виде проекции на плоскость  $(a, b)$  коэффициентов  $C(a, b)$  изолиниями или теневыми картинками, по которым обычно отслеживают изменение амплитуд и локальных экстремумов вейвлет-преобразования. Малые значения параметра  $a$ , характеризующие быстрые процессы в сигналах, соответствуют высоким частотам, а большие значения (соответствующие медленным изменениям сигнала) — низким.

Обычно величины коэффициентов  $C(a, b)$  вейвлет-преобразования в графическом представлении закодированы оттенками цвета. Более светлые области относятся к большим коэффициентам  $C(a, b)$ , определяющим больший энергетический вклад соответствующей частотной составляющей. Картины линий локальных экстремумов (максимумов) четко показывают внутреннюю структуру исследуемого процесса и его изменения по времени. Вейвлет-преобразование хорошо приспособлено к анализу каскадных процессов, моно- и мультифрактальных множеств, имеющих иерархическую природу, что важно при анализе динамических характеристик сложных технических систем. Вейвлет-спектрограммы отчетливо выделяют такие особенности сигнала, как небольшие разрывы, изменение знаков первой и второй производных, изменение частоты составляющих сигнала и их энергий во времени и т.д., именно те особенности сигнала, которые плохо выделяются на спектре Фурье-сигнала.

Возможности вейвлет-анализа позволяют также эффективно применять его для фильтрации сигналов, очистки от шума, статистической обработки данных, анализа регрессии по результатам оценки плотности сигналов, разложения сигнала на составляющие, анализа изображений и т.д. В механике (физике) и математике накоплены успешные примеры применения вейвлет-технологий в решении различных задач [1].

При анализе вейвлет-спектров важное значение имеет оценка распределения энергии по частотам (частотным составляющим). Энергии составляющих можно определить исходя из существования для вейвлет-преобразования аналога теоремы Парсеваля [4], которая гласит, что сумма (или интеграл) квадрата функции  $x(t)$  равна сумме (или интегралу) квадрата результата преобразования. Математическая формулировка теоремы имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df,$$

где  $F(f)$  обозначает непрерывное преобразование Фурье, которое связывает временной или пространственный сигнал  $x(t)$  с его представлением в частотной области  $\Omega(f)$ . Таким образом, теорема Парсеваля устанавливает равенство между энергией сигнала и суммарной энергией его спектра.

Из данной теоремы следует, что в пространстве действительных функций полную энергию сигнала можно записать через амплитуды вейвлет-преобразования в виде

$$E_f = \int x^2(t) dt = C_{\Psi}^{-1} \iint W^2(a, b) \frac{da db}{a^2},$$

где  $C_{\Psi}^{-1}$  — нормализующий коэффициент (аналогичный коэффициенту  $(2\pi)^{-1/2}$ , нормализующему преобразование Фурье).

Плотность энергии сигнала  $E_f(a, b) = W^2(a, b)$  характеризует энергетические уровни (уровни возбуждения) исследуемого сигнала  $f(t)$  в пространстве  $(a, b)$  — (масштаб, время).

Одной из основных особенностей вейвлет-преобразования является возможность получать локализованные характеристики и изучать локальные энергетические свой-

ства спектра. Зная плотность энергии  $E_W(a, b)$ , можно с помощью окна определить локальную плотность энергии в точке  $b_0$  (или  $t_0$ ) [4]

$$E_{\xi}(a, t_0) = \int E_W(a, b) \xi\left(\frac{b-t_0}{a}\right) db.$$

Эта характеристика позволяет проанализировать временную динамику передачи энергии – процесса по масштабам обмена энергией между составляющими процесс компонентами разного масштаба в любой заданный момент времени. Данная временная динамика может являться критерием для оценки динамического состояния технической системы.

Полная энергия ряда распределена в соответствии с величиной коэффициентов вейвлет-преобразования

$$E_W(a) = \int W^2(a, b) db = \int E_W(a, b) db.$$

Таким образом, имея вейвлет-преобразование можно оценить глобальную и локальную энергию или энергии частотных составляющих. На этом строится кратно-масштабный анализ временных рядов и изображений. При анализе сигнала зачастую полезно представить его в виде совокупности последовательных приближений. Например, при передаче изображения по сети можно сначала передать его грубую версию, а затем, исходя из пропускной способности канала, последовательно ее уточнять. Для этого и используется кратно-масштабное разложение сигнала или изображения.

Кратно-масштабным анализом называется описание пространства  $L^2(R)$  через иерархически вложенные подпространства  $V_m$ , которые не пересекаются, и объединение которых дает в пределе все  $L^2(R)$ . Кратно-масштабный анализ обладает целым рядом полезных свойств, главным из которых является возможность выделения из исходного сигнала его деталей различных масштабов.

Для иллюстрации метода рассмотрим пример. На рис. 1 приведена иллюстрация вейвлет-преобразования временного ряда, полученного при диагностике подшипника качения, и вейвлет-дерево, представляющее кратно-масштабное разложение этого ряда. На вейвлет-дереве (рис. 1) указаны уровни энергии частотных составляющих в процентах (%). В табл. 1 приведены данные по кратно-масштабному анализу временных рядов, полученных в разное время при диагностике подшипника качения центробежного насоса, указаны изменения этих данных в процентном отношении к минимальным значениям указанных энергетических характеристик  $E_i$ .

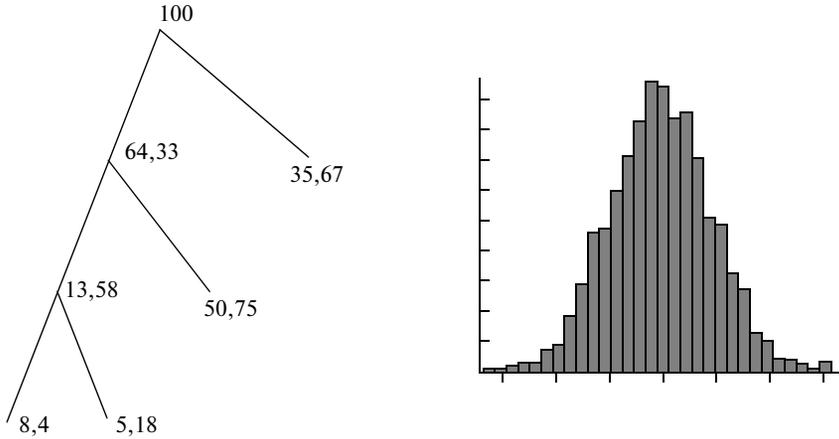
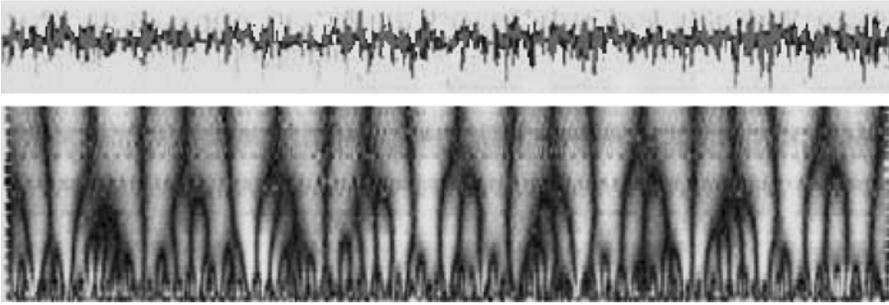
Изменения в энергетике составляющих кратно-масштабного разложения временного ряда достаточно значительные, частотные составляющие диагностического сигнала претерпевают изменения от 3.98 до 76.47%. Наибольшее изменение в величине среднеквадратического отклонения 350.39%.

Числовые значения могут являться основными параметрами критериев оценки изменений в динамическом состоянии диагностируемой технической системы.

Для обеспечения необходимой прочности и ресурса элементов конструкции проводятся экспериментальные исследования механических характеристик используемых конструкционных материалов. При этом в некоторых случаях требуется проводить анализ микрошлифов (изображений) при нагрузочных испытаниях.

Изменения, происходящие внутри деформируемого материала, находят однозначное отражение и в изменениях изображения микрошлифа. Микроразрушения, происходящие в теле материала, определяются и на поверхности образца. Оценку напряженно-деформированного состояния исследуемого материала можно косвенно провести по анализу уровней этих изменений.

При исследовании макрошлифов определяется величина зерна, его форма, строе-ние волокна, а также выявляются видимые дефекты: пористость, усадочные раковины, газовые пузырьки, трещины, неметаллические включения. Микроанализ шлифов



**Рис. 1.** Вейвлет-преобразование сигнала “подшипник 1” и его кратно-масштабный анализ с указанием гистограммы распределения амплитуд колебаний

позволяет определить величину и форму самых мелких зерен, качество термической обработки, а также выявить мельчайшие дефекты в металле (волосяные трещины, неметаллические включения). Микроанализ позволяет проводить не только качественное изучение структуры материала, но и количественную оценку этих структурных составляющих. Можно, например, измерить величину зерна, глубину слоя и т.п. Структура металлических конструкционных материалов может быть однофазной и многофазной. Структура характеризуется фазовым составом, размерами и формой кристаллитов (зерен), их взаимным расположением и неизбежными дефектами.

Существует множество алгоритмов цифровой обработки изображений, основанных на различных математических подходах. Построение описания изображения на осно-

**Таблица 1**

**Распределения энергий по частотным составляющим сигнала для двух измерений ( $N = 1, 2$ )**

$N$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	Математическое ожидание	Средне-квадратическое отклонение
1	64,33	35,67	13,58	50,75	8,4	5,18	-0,623	9,455
2	71,63	28,37	18,86	52,77	4,76	14,1	0,3865	33,13
$\Delta E, \%$	11,3	25,7	38,88	3,98	76,47	72,2	262	350,39

Здесь  $\Delta E$  – измерено относительно меньшего значения.

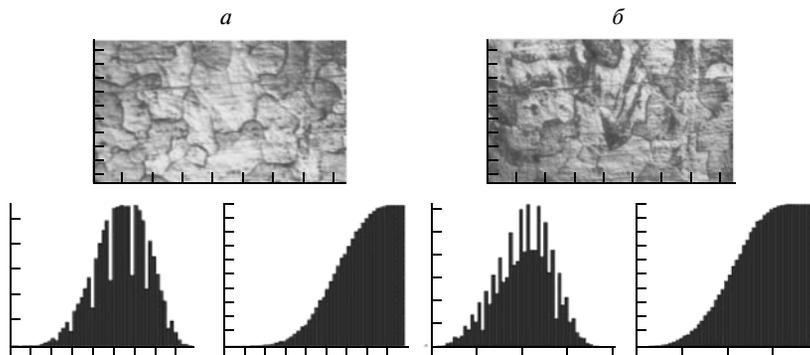


Рис. 2

ве его представления по отличительным признакам представляет собой одну из наиболее сложных задач при разработке системы распознавания образов. При исследовании изображений требуется предварительная подготовка. К этому этапу исследований можно отнести все процедуры по улучшению изображения (контрастирование, выравнивание, шумоподавление и т.п.). Этот этап можно выполнить с помощью вейвлет-преобразований.

При исследовании микрошлифа изображение задается в виде массива значений  $S_{ij}$  (целые индексы  $i, j$  характеризуют дискретизацию поля изображения по координатам  $x, y$ ;  $1 < i, j < k$ ). Массив значений  $S_{ij}$  представляет собой характеристику матрицы дискретных одинаковых по размеру элементов изображений – пикселей. Существует несколько форматов цифровых изображений (например, \*.bmp, \*.tif или \*.jpg). Во всех случаях индексы  $i, j$  представляют собой номера строк и столбцов в матрице пикселей (тем самым они задают положение пикселей на плоскости изображения  $x, y$ ); величина  $S_{ij}$  определяет интенсивность пикселя и может принимать для серых изображений целочисленные значения в диапазоне от 0 до 255. В этом случае значение  $S_{ij}$  интерпретируется как высота рельефа в данной точке (пикселе) изображения, соответствующей индексам  $i, j$ .

Рассмотрим пример изменения характерных особенностей изображения микрошлифа с увеличением числа цикла нагружений образца  $N$ . На рис. 2 приведен пример – изображения микрошлифов и гистограммы распределения яркости пикселей изображения при  $N = 0$  (а) и  $N = 15000$  (б) циклов нагружений. А основные характеристики распределений приведены в табл. 2. С увеличением числа циклов нагружений  $N$  происходит увеличение среднеквадратического отклонения, что говорит об увеличении числа микро-разрушений в материале образца.

В изображениях имеются объекты различных размеров, имеющие свои локальные и масштабные особенности. Эти особенности можно оценить с помощью вейвлет-преобразования изображений микрошлифов, которое позволяет анализировать изображение одновременно и независимо на различных масштабах, и допускает кратномасштабный анализ.

Таблица 2

Числовые характеристики	Число циклов нагружения	
	$N = 0$	$N = 15000$
Математическое ожидание	108,3	102,6
Среднеквадратическое отклонение	25,6	30,12
Коэффициент вариации	4,23	3,406

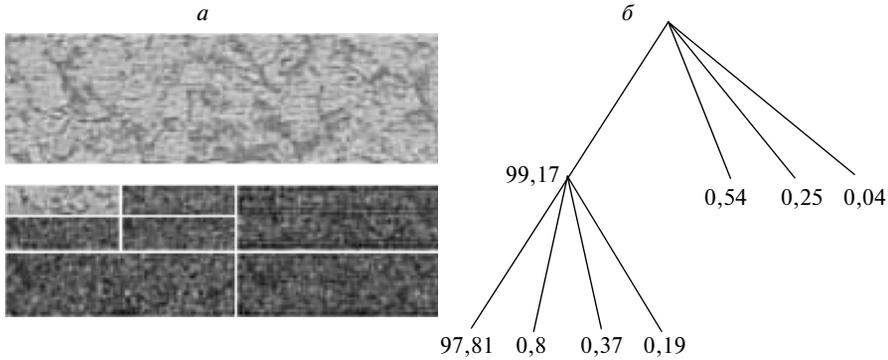


Рис. 3

Для изображения некоторая спектральная область соответствует определенному масштабу и ориентации особенностей изображения в плоскости  $x, y$ . Ориентация базисных функций определяет способность преобразования корректно анализировать ориентированные структуры, типичные для изображений (линии, контуры), характерные для микрошлифов.

Для анализа изображений микрошлифов можно использовать одномерные и двумерные вейвлеты. При применении одномерного вейвлета анализируются строки (или столбцы) матрицы, описывающей изображение. Несмотря на то, что изображения имеют двумерную структуру, применение одномерного вейвлет-преобразования дает значительный выигрыш в скорости вычислений по сравнению с применением двумерных вейвлетов. При этом можно использовать алгоритм параллельной обработки массивов.

Как отмечалось ранее, при обработке изображений приходится иметь дело с двумерными массивами  $S(x, y)$ . Они задаются в пространстве  $V = \{x, y\} \in R^2$ , но теперь как функции двух переменных  $x$  и  $y$ . В этом случае вместо выражения для одномерной вейвлет-функции вида (2) можно воспользоваться двумерным аналогом [6]

$$\Psi_{ab}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \Psi\left(\frac{x - b_1}{a_1}, \frac{y - b_2}{a_2}\right),$$

где  $a_1$  и  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$  – значения  $a$  и  $b$  по каждому измерению.

Для вейвлет-преобразований дискретных изображений и построения быстрых алгоритмов обработки следует исходить из двумерного кратно-масштабного анализа. Однако на практике поступают проще. Многомерный и, в частности, двумерный КМА строят как тензорное произведение одномерных. В соответствии с таким подходом на двумерной плоскости происходит анализ по горизонтали, вертикали и диагонали с одинаковым разрешением. Рассмотрим данную процедуру. Предположим, что имеется изображение размером  $N \times N$ . Первоначально каждая из  $N$  строк изображения делится (фильтруется) на низкочастотную (НЧ) и высокочастотную (ВЧ) половины. В результате получается два изображения размером  $N \times N/2$ . Далее каждый столбец делится точно так же, в итоге получается четыре изображения размером  $N/2 \times N/2$ : низкочастотная по горизонтали и вертикали (НЧ<sub>1</sub>НЧ<sub>1</sub>), высокочастотная по горизонтали и вертикали (ВЧ<sub>1</sub>ВЧ<sub>1</sub>), низкочастотная по горизонтали и высокочастотная по вертикали (НЧ<sub>1</sub>ВЧ<sub>1</sub>) и высокочастотная по горизонтали и низкочастотная по вертикали (ВЧ<sub>1</sub>НЧ<sub>1</sub>). Первое из этих указанных изображений делится аналогичным образом на следующем шаге (уровне) преобразования и т.д.

Приведем пример. На рис. 3 даны результаты кратно-масштабного вейвлет-анализа изображения микрошлифа (а) и энергетическое вейвлет-дерево. Наибольшее число

Таблица 3

$N$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	Математическое ожидание	Средне-квадратическое отклонение
0	0,54	0,25	0,04	97,81	0,8	0,37	0,19	132,7	43,42
80000	0,26	0,19	0,03	99,75	0,4	0,26	0,11	182,1	47,82
$\Delta E, \%$	207,7	31,57	33,33	1,98	100	42,3	72,7	37,22	10,13

Здесь  $\Delta E$  – измерено относительно меньшего значения.

циклов нагружения для данного эксперимента было  $N = 80000$ . Полученные данные по составляющим изображения приведены в табл. 3.

Изменения, произошедшие в характеристиках изображения микрошлифа, измеряются от 1.98 до 207.7%. Это показывает на изменения в характере распределения фаз и их размеров.

Учитывая изменения в значениях  $E_1$  и  $E_2$ , можно сделать вывод о сближении значений  $VЧ_1НЧ_1$  (0.26) и  $НЧ_1VЧ_1$  (0,19) фаз. Изменения в значениях  $E_4$ – $E_7$  говорят о том, что основная “энергия” (информация) о распределении фаз сосредоточена в области  $НЧ_2НЧ_2$ ; при этом уменьшились значения ( $VЧ_2НЧ_2$  и  $НЧ_2VЧ_2$ ) и  $VЧ_2VЧ_2$  фаз.

Используя кратно-масштабный анализ, получая “энергетическое” вейвлет-дерево, можно ввести векторный критерий оценки состояния образца  $K_r = f(\mathbf{E})$ , определяющий изменения, произошедшие со структурой материала. Критерий формируется из компонентов “энергетического” вектора  $\mathbf{E}$  размерностью  $n$ , зависящей от количества уровней при кратно-масштабном анализе и числа учитываемых масштабных составляющих изображения.

Представленные результаты показывают, что вейвлет-преобразование (одномерное или двумерное) можно использовать для исследования особенностей временных рядов и изображений микрошлифов при оценке состояния технических систем, обработке экспериментальных данных.

Высокая чувствительность вейвлет-анализа на происходящие изменения в характеристиках временных рядов и изображений микрошлифов позволяет говорить об эффективности его использования при оценке состояний технических систем и образцов.

Данная технология вейвлет-преобразований применима и для анализа трехмерных массивов, например, при исследовании структурных свойств конструкционных материалов. В этом случае, как и для двумерных массивов, можно применить одномерные или трехмерные вейвлеты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант № 12–0890026).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяконов В. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002. 448 с.
2. Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.
3. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.: Изд-во Триумф, 2003. 320 с.
4. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. № 11. Т. 166. С. 1145–1170.
5. Закиричная М.М. Образование фуллеренов в углеродистых сталях и чугунах при кристаллизации и термических воздействиях. Автореф. диссертации на соискание уч. степени д.т.н. Уфа: 2001, 46 с.
6. Воскобойников Ю.Е. Фильтрации сигналов и изображений: фурье и вейвлет-алгоритмы (с примерами в Mathcad). Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. 188 с.